

## Nomenclature

### Symboles Latins

$B_b$	(Tesla)	Champ magnétique de la bobine .....
$B_i$	(Tesla)	Champ magnétique (induit) crée par les particules chargées en mouvement .....
$Co$		Concentration massique de l'eau à l'entrée .....
$C$		Concentration massique vapeur de l'eau dans le cylindre .....
$Cp$	( $J . Kg^{-1} . K^{-1}$ )	Capacité calorifique massique à pression constante .....
$D$	(m)	diamètre du cylindre .....
$\overline{D}$		Vecteur excitation du champ électrique (induction électrique)...
$Dm$	( $m^2 . s^{-1}$ )	diffusivité massique .....
$\overrightarrow{E}$		Champ électrique crée par les particules chargées même statique .....
$E$		L'opérateur identité.....
$Ea$	( joule )	Energie d'activation des molécules .....
$F$		Constantes de Faraday .....
$f$		Facteur de forme .....
$g$	( $m.s^{-2}$ )	Accélération de la pesanteur .....
$K$	( $Wm^{-1} . K^{-1}$ )	Conductivité thermique .....
$L$	(m)	Longueur du cylindre .....
$L'$		L'opérateur .....
$L_D$		La partie diagonale de l'opérateur L .....
$L_{Inf}$		La partie inférieure de l'opérateur L .....
$L_{Sup}$		La partie supérieure de l'opérateur L .....
$\overline{H}$		L'excitation du champ magnétique .....
$J_z$		Flux.....
$J_r$		Flux .....
$\overrightarrow{J}$	(W)	Densité du courant électrique .....
$P$	( $Kg.m^{-1} . s^{-2}$ )	Pression hydrodynamique .....
$Pe_{,mas}$		Nombre de Peclet massique .....
$Pe_{,th}$		Nombre de Peclet thermique .....
$P_{ref}$		Pression de référence .....
$Pr$		Nombre de Prandtl .....
$Re$		Nombre de Reynolds, .....
$Rem$		Nombre Reynolds magnétique .....
$r$	( m )	Coordonnée radiale .....
$R$	( m )	Rayon du cylindre .....
$Sc$		Nombre de Schmidt .....
$S_k$		Opérateur stabilisateur.....
$S$	( $m^2$ )	Section du tube cylindrique .....
$t$	( s )	Temps .....
$T$	( K )	Température vapeur d'eau .....

$T_e$ ( K )	Température d'entrée .....
$T_o$ ( K )	Température de référence à $r = z = 0$ .....
$\Delta T_{ref}$ ( K )	Différence caractéristique de température .....
$u_{ref} = U_m$ ( $m.s^{-1}$ )	Composante de la vitesse de référence .....
$u_r$ ( $m.s^{-1}$ )	Composante radiale de la vitesse dans la direction $r$ .....
$u_z$ ( $m.s^{-1}$ )	Composante de la vitesse dans la direction $z$ .....
$(r, z)$ ( m )	Coordonnées cylindrique .....
$V$ ( $m.s^{-1}$ )	Vitesse moyenne des particules du fluide .....

### Symboles grecques

$\alpha'$ ( $m^2.s^{-1}$ )	Diffusivité thermique dans l'eau .....
$\epsilon$	Perméabilité électrique .....
$\gamma_O$	Perméabilité magnétique du vide .....
$\gamma$	Perméabilité magnétique du milieu .....
$\lambda$ ( $W.m^{-1}.K^{-1}$ )	Conductivité thermique .....
$\eta$ (unité SI : Po)	Le coefficient de la résistivité du fluide .....
$\sigma$	Conductivité électrique .....
$\mu_e$ ( $Kg.m^{-1}.s^{-1}$ )	Viscosité dynamique du fluide .....
$\nu_e$ ( $m^2.s^{-1}$ )	Viscosité cinématique du fluide .....
$\rho_e$ ( $kg.m^{-3}$ )	Densité du fluide .....
$\Psi$ ( $m^2.s^{-1}$ )	Fonction de courant .....
$\omega$ ( $s^{-1}$ )	Vorticité .....
$\tau_k$	Suite de paramètres itératifs.....

## Sommaire

### Introduction Générale

## CHAPITRE 1

### Modélisation Théorique des équations de transferts

1.1	Equations générales de la magnétohydrodynamique.....	
1.2	Modélisation théorique du problème	
1. 2. 1	Description du système et position du problème .....	
1. 2. 1. 1	Position du problème.....	
1. 2. 1. 2	Hypothèses simplificatrices.....	
1. 2. 2	Formulation mathématique du problème en variables primitives.....	
1.2.2. 1	Equation de continuité .....	
1.2.2. 2	Equation de conservation de l'espèce.....	
1.2.2. 3	Equations du mouvement .....	
	Equation de mouvement suivant r.....	
	Equation de mouvement suivant z .....	
1.2.2. 4	Equation de la chaleur.....	
1.2.2. 5	Équation du bilan du champ magnétique.....	
1.2.3	Ecriture des équations sous le formalisme vorticité – fonction de courant.....	
1.2.4	Conditions initiales et aux limites.....	
1.2.5	Grandeurs pariétales remarquables .....	
1. 3	Adimensionnalisation des équations.....	
1.3.1	Choix et déterminations des grandeurs de référence.....	
1.3.2	Equations des transferts adimensionnalisées.....	
	Equation de conservation de l'espèce adimensionnalisée.....	
	Equation de la vorticité adimensionnalisée.....	
	Equation de la fonction de courant adimensionnalisée.....	
	Equation de la chaleur adimensionnalisée.....	
	Equation du champ magnétique adimensionnalisée.....	
	Conservation du débit adimensionnalisé.....	
1. 3. 3	Conditions initiales et aux limites adimensionnalisées.....	
	Conclusion	

## **CHAPITRE2**

### **Modélisation Numérique**

#### **2. 1 Introduction**

#### **2. 2 Discrétisation du domaine**

#### **2. 3 Intégration des équations du modèle**

##### **2. 3. 1 Intégration des équations d'évolution de type parabolique**

##### **2.3. 2 Intégration de l'équation de la fonction de courant**

#### **2. 4 Condition initiales et aux limites discrétisées**

##### **2. 4. 1 Conditions initiales discrétisées**

##### **2. 4. 2 Conditions aux limites discrétisées $n>1$**

#### **2.5 Méthodologie générale de résolution des équations du modèle**

##### **2.5. 1 Résolution des systèmes matriciels tri diagonaux**

##### **2. 5. 2 Algorithme de Résolution –Organigramme de Calcul**

### **Conclusion Générale**

### **Référence bibliographique**

### **Annexe**

## **INTRODUCTION**

## INTRODUCTION GENERALE

Face à l'explosion de la consommation énergétique mondiale, les réflexions sur la maîtrise de l'énergie foisonnent, d'autant plus que les principales ressources d'origine fossile diminuent de manière inquiétante dues à l'utilisation de l'énergie dans la quasi-totalité des activités humaines et notamment dans les transports et dans l'industrie. La récente flambée des prix du pétrole ne fait que confirmer ces observations alarmantes. Il est alors important de définir une politique énergétique respectueuse de l'environnement et assurant un équilibre entre les besoins, les ressources et les réserves énergétiques.

Là, la magnétohydrodynamique (MHD) peut constituer une solution à la crise énergétique mondiale. Les concepts de base de la MHD remontent certes à **Faraday** mais les premières applications pratiques ne datent qu'après la seconde moitié de notre siècle. Et c'est exactement en 1942 que le physicien suédois **Hannes Alfvén** donna le nom de Magnétohydrodynamique à cette nouvelle branche très importante mais combien sensible de la physique ; ses travaux dans ce domaine furent couronnés par un prix Nobel de physique en 1970. La MHD est définie comme étant l'étude du mouvement d'un fluide conducteur soumis à un champ magnétique. Les particules composant le fluide satisfont alors aux équations couplées de l'hydrodynamique, de la thermodynamique et de l'électromagnétique.

Comme en mécanique des fluides classique on distingue deux types de magnétohydrodynamique qui dépendent de la valeur du nombre de Reynolds magnétique  $Re_m$  qui est ainsi nommé par analogie au nombre de Reynolds en hydrodynamique classique. Lorsque le fluide est fortement magnétisé c'est-à-dire lorsque le nombre de Reynolds magnétique est très élevé on est dans le cadre de la magnétohydrodynamique idéale et le fluide est traité comme ayant très peu ou pas de résistance électrique donc assimilable à un conducteur parfait. Les lignes de champ magnétique sont intimement liées. Une analogie consiste à comparer le fluide à un peigne et les lignes de champ aux cheveux : le mouvement des cheveux suit exactement ceux du peigne. Cette magnétohydrodynamique est étudiée dans les plasmas chauds astrophysiques et thermonucléaires d'origine naturelle (étoiles) ou artificielle (tokamaks).

La MHD résistive dite à faible nombre de Reynolds magnétique décrit les fluides ionisés faiblement magnétisés avec une diffusion non nulle conduisant à une reconnexion des lignes de champ magnétique. On assiste à une rupture dans la topologie magnétique. Dans un fluide conducteur non parfait, le champ magnétique peut se déplacer à travers le fluide suivant une loi de diffusion magnétique où le coefficient de diffusion est la résistivité. A l'inverse de ce qui se passe dans le soleil où le temps de diffusion à travers une région active est estimé à des centaines de milliers d'années, dans l'eau salée la diffusion se mesure en millisecondes et doit donc être prise en compte.

La MHD intervient dans beaucoup de phénomènes physiques aussi bien naturels que technologiques.

C'est l'astrophysique qui fut le premier domaine que décrivit la MHD. En effet, la matière de l'univers est composée de plasma à plus de 99% dont les étoiles, les milieux interplanétaires et interstellaires, les nébuleuses et les jets. Les taches solaires sont causées par le champ magnétique du soleil, comme l'a montré **Joseph Lamor** en 1919. Le vent solaire tout comme les éruptions solaires qui sont des ruptures de continuité des lignes de champ et éjection des particules sont aussi gouvernés.

En géophysique on montre que le mouvement de convection du noyau fluide de la Terre et d'autres planètes peut être régi par les lois de la MHD. Elle est utilisée de manière théorique dans le confinement des plasmas notamment les plasmas thermonucléaires dans les machines

à fusion par confinement magnétique comme les « tokamks ». Elle est aussi au cœur d'applications technologiques sous forme de machines électromagnétiques sans pièce mobile appelées convertisseurs MHD qui peuvent être utilisées soit pour la génération d'électricité soit pour accélérer (accélérateur de particules) ou freiner (effet blocage) des fluides. Dans ce cas ci l'induit qui est habituellement un solide est remplacé par un fluide conducteur d'électricité qui peut être de l'eau salée, un métal liquide ou un gaz ionisé c'est-à-dire un plasma.

En plus de l'électricité, la chaleur produite peut être utilisée pour la production d'eau chaude pour le chauffage (utilisée dans le domestique et les industries légères). Elle (MHD) trouve également d'autres applications dans le domaine des métaux liquides (mercure, métaux alcalins fondus) ou de gaz faiblement ionisés (pompage électromagnétique, propulsion ionique, conversion d'énergie...).

L'importance des champs électromagnétiques a poussé beaucoup d'auteurs à faire des investigations de leurs effets sur la structure de l'écoulement d'un fluide pur ou binaire électriquement conducteur.

**Ramambason S. R. Amambason** en 2006 a fait une investigation analytique et numérique pour étudier l'effet d'un champ magnétique sur la convection naturelle dans une cavité poreuse horizontale contenant un mélange binaire électriquement conducteur. Un flux de chaleur est appliqué aux parois horizontales, les parois verticales étant maintenues adiabatiques et un champ magnétique uniforme et constant est appliqué parallèlement à la gravité. Deux types de problèmes ont été étudiés concernant la convection naturelle de fluides binaires en milieu poreux. Le premier type de problème est la convection doublement diffusive et le deuxième est la convection induite par effet de Soret. Une solution analytique approximée, valide pour une cavité allongée est dérivée en se basant sur l'approximation de l'écoulement parallèle. Dans la gamme des paramètres de contrôle considérés dans cette étude, elle a trouvé un bon accord entre les prédictions analytiques et les résultats numériques obtenus en résolvant les équations de base complètes régissant le problème. Elle montre enfin qu'en augmentant l'intensité du champ magnétique, on diminue le nombre de Nusselt et de Sherwood.

Chamkha (1997) Le fluide pur est supposé être électriquement conducteur et générateur de chaleur. Il a constaté que le nombre de Nusselt diminue quand le nombre de Hartmann, le paramètre de stratification ou le paramètre d'inertie du milieu augmente. Les mêmes résultats ont été obtenus par Elbashbeshy (2000) quand il a étudié l'effet d'un champ magnétique sur l'écoulement d'un fluide incompressible, avec une viscosité et une diffusivité thermique variable avec la température. Ainsi, il a été observé que la vitesse adimensionnelle près de la plaque verticale diminue à mesure que le champ magnétique augmente, alors que cela fait augmenter la distribution de température.

Dans cette même optique nous avons jugé nécessaire de faire notre propre investigation, sur l'effet d'un champ magnétique produit par une bobine alimentée placée à l'intérieur d'un cylindre contenant un fluide binaire électriquement conducteur

Nous nous proposons dans ce travail d'étudier l'effet du champ magnétique sur les champs hydrodynamique et thermique au sein d'un binaire fluide conducteur forcé confiné dans un cylindre d'axe horizontal en régime transitoire.

La première partie du mémoire est consacrée à la modélisation théorique du problème. Après avoir décrit notre système, nous avons établi les équations des bilans sur la base d'hypothèses simplificatrices puis les avons adimensionnalisés afin de généraliser l'étude.

Les systèmes d'équations du modèle étant non linéaires et fortement couplées entre elles et avec leurs conditions aux limites, alors une résolution numérique s'impose. La discrétisation du domaine ainsi que des équations et l'exposé des méthodes choisies pour résoudre les équations du modèle constituent le chapitre deux de notre mémoire.

Pour ne pas alourdir le texte le détail et le développement de certains calculs sont reportés en annexe.





## **Chapitre 1 : Modélisation Théorique des équations de transferts**

## CHAPITRE 1

### Modélisation Théorique des équations de transferts

#### 1.1 Equations générales de la magnétohydrodynamique

Si on admet que les phénomènes magnétohydrodynamiques ont uniquement pour cause les mouvements du fluide et que les vitesses de celui-ci sont faibles par rapport à la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques c'est à dire que les vitesses des électrons et ions sont non relativistes, où la force de Lorentz est plus petite que la force électrique) on peut négliger le courant de déplacement.

Dans ces conditions les équations générales des transferts d'un bi fluide newtonien de masse volumique  $\rho$  en présence d'un champ magnétique. On admet que la concentration de l'un du soluté est en très faible quantité dans le mélange. En tenant compte des résultats de la thermodynamique des processus irréversibles et des relations phénoménologiques les équations de transferts s'écrivent

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + \overrightarrow{\text{div}}(\rho_e \vec{V}) = 0 \quad (1.1.1)$$

$$\frac{\partial(\rho_e \vec{V})}{\partial t} + \overrightarrow{\text{div}}(\rho_e \vec{V} \otimes \vec{V}) = -\vec{\nabla} p + 2\overrightarrow{\text{div}}(\mu \overline{\overline{D}}) - \vec{\nabla}(\lambda \overrightarrow{\text{div}} \vec{V}) + \vec{F}_{ext} \quad (1.1.2)$$

$$C_v \left[ \frac{\partial(\rho_e T)}{\partial t} + \overrightarrow{\text{div}}(\rho_e \vec{V} T) \right] + \rho_e T \overrightarrow{\text{div}}(\vec{V}) - \overrightarrow{\text{div}}(\kappa \vec{\nabla} T) = \Phi_T \quad (1.1.3)$$

$$\frac{\partial(C)}{\partial t} + \overrightarrow{\text{div}}(\vec{V} \cdot C) - \overrightarrow{\text{div}}(D_m \vec{\nabla} C) = \Phi_C \quad (1.1.4)$$

$\mu$  et  $\lambda$  sont la viscosité dynamique et la viscosité de volume,  $C_v$  la capacité calorifique à volume constant et  $\kappa$  la conductivité thermique.  $\overline{\overline{D}}$  est la partie symétrique du tenseur des déformations ;  $\Phi_T$  et  $\Phi_C$  sont les taux de production de chaleur et d'espèces tandis

que  $\vec{F}_{ext}$  est le champ des forces extérieures à distance. Ces dernières grandeurs d'une manière générale intègrent les effets électromagnétiques ; c'est pourquoi il faut adjoindre au système (1.1.1) – (1.1.4) les équations de Maxwell suivantes

$$\overrightarrow{\text{div}}(\vec{D}) = \rho_c \quad \text{Théorème de Gauss} \quad (1.1.5)$$

$$\text{div} \vec{B}_i = 0 \quad \text{Conservation de flux magnétique} \quad (1.1.6)$$

$$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}_i}{\partial t} \quad \text{Loi d'induction} \quad (1.1.7)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{J} ; \quad \text{Théorème d'Ampère} \quad (1.1.8)$$

$$\vec{B}_i = \text{rot} \vec{A} \quad (1.1.9)$$

$$\vec{E} = - \text{grad} V \quad (1.1.10)$$

$$\vec{J} = \sigma (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (1.1.11)$$

Avec

$$\vec{B} = \vec{B}_i + \vec{B}_b \quad (1.1.12)$$

$\vec{J}$  est la densité de courant électrique ;  $\vec{B}_i$  le champ magnétique induit et  $\vec{B}_b$  le champ magnétique extérieur appliqué ;  $\sigma$  est la conductivité électrique et  $\rho_c$  la densité des charges.

## 1.2 Modélisation théorique du problème

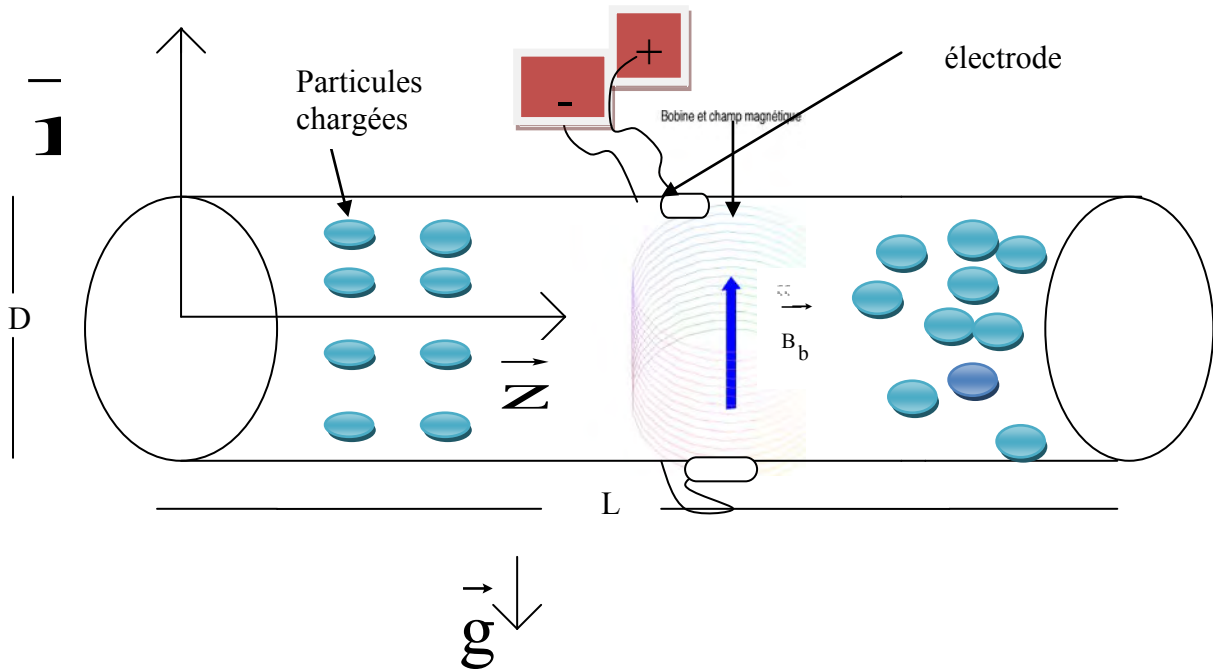
Dans cette section nous allons établir les équations de base régissant notre problème.

### 1.2.1 Description du système et position du problème

#### 1.2.1.1 Position du problème

Notre conduite est un cylindre de section circulaire, de diamètre constant  $D$ , de longueur  $L$  et de génératrice horizontale. Les axes coordonnées sont notés  $r$ ,  $\theta$  et  $z$  qui sont respectivement les coordonnées radiale, azimutale et horizontale dans le système de coordonnées cylindrique. La paroi latérale du cylindre est considérée comme solide, imperméable et thermiquement isolée.

La configuration géométrique tridimensionnelle de notre système est schématisée sur la figure 1.1 ci-dessous.



**Figure 1. 1:** Représentation schématique du modèle physique et du système d'axes

A un instant  $t$  supérieur à  $t_0$ , on force à travers ce cylindre un fluide binaire newtonien électriquement conducteur à la température  $T_e$  et on le soumet à un champ magnétique  $\vec{B}_b$ .

Nous nous proposons dans cette partie de modéliser mathématiquement les transferts de masse, de chaleur et d'impulsion.

### 1. 2. 1. 2 Hypothèses simplificatrices

Afin de simplifier la formulation du modèle mathématique, nous allons considérer les hypothèses simplificatrices suivantes

- Les propriétés thermo- physiques du fluide binaire considéré comme newtonien, isotrope et homogène sont constantes et sont évaluées à la température et à la concentration de référence  $T_e$  et  $C_e$

- L'écoulement est forcé, bidimensionnel et admet une symétrie axiale

- Le travail des forces de pressions visqueuses, les effets Dufourt et Soret ainsi que la contribution du rayonnement sont négligeables ; on admet en outre qu'il n'y a ni source de chaleur ni de réaction chimique.

Les propriétés électromagnétiques du fluide  $\epsilon, \gamma$  et  $\sigma$  sont supposées constantes. On écrit dans ces conditions

$$\vec{B}_i = \gamma \vec{H}. \quad (1. 2. 1)$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (1.2. 2)$$

Cela implique entre autres conditions, que le libre parcours moyen d'un ion ou d'un électron reste grand par rapport au rayon de courbure des trajectoires provenant de l'action du champ magnétique.

- Enfin nous supposons que la composante ortho- radiale du vecteur densité de courant est nulle.

### 1. 2. 2 Formulation mathématique du problème en variables primitives

En projetant les équations vectorielles (1.1.1, 1.1.2 ; 1.1.3 ; 1.1.4) sur les axes coordonnées et eu égard aux hypothèses simplificatrices ci- dessus, nous obtenons les équations algébriques suivantes

#### 1.2.2. 1 Equation de continuité

Si sont  $u_r$  et  $u_z$  les composantes de la vitesse suivant les directions radiale et axiale alors on a

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{\partial(u_z)}{\partial z} = 0 \quad (1.2.3)$$

#### 1.2.2. 2 Equation de conservation de l'espèce

En désignant par C la fraction massique du soluté dans le mélange binaire, on obtient

$$\frac{\partial(C)}{\partial t} + u_r \frac{\partial(C)}{\partial r} + u_z \frac{\partial(C)}{\partial z} = Dm \left[ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial C}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right] \quad (1.2.4)$$

#### 1.2.2. 3 Equations du mouvement

Dans notre problème le champ des forces extérieures massique est donné par

$$\vec{F}_{ext} = \rho_e \vec{g} + \vec{F}_m \quad (1.2.5)$$

avec  $\vec{F}_m$  la force électromagnétique définie par

$$\vec{F}_m = \vec{J} \wedge \vec{B} = \sigma (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} \quad (1.2.6)$$

Ce sont en fait les caractéristiques de cette force de Lorentz qui sous- tendent principalement l'objectif de l'étude des champs qui nous intéressent.

En effet si son intensité dépasse un certain seuil on peut contrôler du moins théoriquement l'écoulement. Suivant son orientation on peut bloquer un fluide en écoulement ou l'accélérer. Pour utiliser le dispositif comme un générateur MHD, il suffit de placer des électrodes de part et d'autre du plan dans lequel se trouvent la vitesse et le champ magnétique résultant.

**Equation de mouvement suivant r**

$$\frac{\partial(u_r)}{\partial t} + u_r \frac{\partial(u_r)}{\partial r} + u_z \frac{\partial(u_r)}{\partial z} = - \frac{1}{\rho_e} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu_e \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial(u_r)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2(u_r)}{\partial z^2} \right] - \frac{\sigma}{\rho_e} \left[ (E_z + u_z B_\theta) B_\theta \right] - g \quad (1.2.7. a)$$

**Equation de mouvement suivant z**

$$\frac{\partial(u_z)}{\partial t} + u_r \frac{\partial(u_z)}{\partial r} + u_z \frac{\partial(u_z)}{\partial z} = - \frac{\partial P}{\rho_e \partial z} + \nu_e \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial(u_z)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2(u_z)}{\partial z^2} \right] + \frac{\sigma}{\rho_e} (E_r - B_\theta u_z) B_\theta \quad (1.2.7. b)$$

**1.2.2.4 Equation de la chaleur**

$$\frac{\partial(T)}{\partial t} + u_r \frac{\partial T}{\partial r} + u_z \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + \frac{\sigma}{\rho_e C_p} \left[ E_r^2 + E_z^2 + B_\theta^2 (u_r^2 + u_z^2) + 2 B_\theta (E_z u_r - E_r u_z) \right] \quad (1.2.8)$$

**1.2.2.5 Équation du bilan du champ magnétique**

En éliminant E, H et J entre les relations (1.1.7), (1.1.8) (1.1.11) et (1.2.1), il vient

$$\frac{\partial \vec{B}_i}{\partial t} - \overrightarrow{rot}(\vec{V} \wedge \vec{B}_i) + \overrightarrow{rot}(\eta(\rho) \overrightarrow{rot} \vec{B}_i) = 0 \quad (1.2.9)$$

avec  $\eta = \frac{1}{\sigma \gamma}$  la résistivité magnétique du fluide

En projetant cette équation sur l'axe coordonnée  $\theta$ , on obtient

$$\frac{\partial B_\theta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} (u_r B_\theta) + \frac{\partial}{\partial z} (u_z B_\theta) - \eta \left[ \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial z^2} \right] = 0 \quad (1.2.10)$$

L'équation de mouvement écrite en variables primitives étant fortement non- linéaire, elle est, du point de vue numérique, très délicate du fait des instabilités qu'elle est susceptible de générer à cause du terme convectif. D'un autre côté elle contient le terme de pression sur lequel il est impossible d'adjoindre des conditions aux limites intrinsèques surtout au niveau

d'une paroi. Pour ces raisons entres autres, nous allons re- modéliser notre problème avec le formalisme vorticité – fonction de courant.

### 1. 2. 3 Ecriture des équations sous le formalisme vorticité – fonction de courant

Pour établir l'équation de la vorticité définie par  $\vec{\omega} = \text{rot}\vec{V}$ , nous allons dériver les équations du mouvement suivant r et z respectivement par rapport à z et à r puis nous effectuons la différence membre à membre des expressions obtenues. Il vient, eu égard à l'équation de continuité, alors

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u_r \frac{\partial \omega}{\partial r} + u_z \frac{\partial \omega}{\partial z} = v_e \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial(\omega)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2(\omega)}{\partial z^2} \right] - \frac{\sigma}{\rho_e} \left\{ \frac{\partial}{\partial z} \left[ (E_z + u_z B_\theta) B_\theta \right] + \frac{\partial}{\partial r} \left[ (E_r - u_z B_\theta) B_\theta \right] \right\} \quad (1. 2. 11)$$

Cette équation quasi- linéaire est appelée équation de la vorticité ou équation de Helmholtz.

Compte tenu de l'hypothèse d'incompressibilité il existe alors un vecteur  $\vec{\psi}$  tel que  $\vec{V} = \text{rot}\vec{\psi}$

Puisque l'écoulement est bidimensionnel et le fluide incompressible il vient

$$u_r = - \frac{1}{r} \frac{\partial(r\psi)}{\partial z} \quad (1. 2. 12)$$

$$u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\psi)}{\partial r} \quad (1. 2. 13)$$

D'après la définition de la vorticité et des résultats du calcul vectoriel, il vient après calcul :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \psi) \right) + \frac{\partial^2(\psi)}{\partial z^2} = - \omega \quad (1. 2. 14)$$

Pour fermer le système ci-dessus, nous allons lui adjoindre des conditions initiales et des conditions aux limites.

### 1. 2. 4 Conditions initiales et aux limites

➤ **Conditions initiales**  $t = 0$

$$u_r(z, r, 0) = u_z(z, r, 0) = 0 \quad (1. 2. 15)$$

Cela implique alors

$$\psi(z, r, 0) = 0 \quad \omega(z, r, 0) = 0 \quad (1. 2. 16)$$

$$T(z, r, 0) = T_o \quad (1. 2. 17)$$

$$C(z, r, 0) = C_o \quad (1. 2. 18)$$

$$B_\theta(r, z, 0) = B_b \quad (1. 2. 19)$$

➤ **Conditions aux limites**  $t > 0$

• Sur le champ dynamique

• **A l'entrée**

$$u_r(0, r, t) = 0 \quad (1. 2. 20.a)$$

$$u_z(0, r, t) = U_o \quad (1. 2. 20 .b)$$

Puisque  $u_z(0, r, t) = U_o = \text{constante}$  alors d'après l'équation (1. 2. 13) il vient

$$\psi(0, r, t) = U_o \frac{r}{2} + \frac{\text{const}}{r}$$

La fonction de courant étant une grandeur continue et finie alors  $\text{Const} = 0$  d'où

$$\psi(0, r, t) = U_o \frac{r}{2} \quad (1. 2. 21)$$

D'après (1. 2. 14) on a

$$-\omega(0, r, t) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \quad (1. 2. 22)$$

• **A la sortie**

$$\left. \frac{\partial u_r}{\partial z} \right| (L, r, t) = \left. \frac{\partial u_z}{\partial z} \right| (L, r, t) = 0 \quad \text{Régime établi à la sortie} \quad (1.2.23)$$



$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.2.24)$$

Donc

$$-\omega(L, r, t) = \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(r\psi)}{\partial r} \right] \quad (1.2.25)$$

• Sur l'axe de symétrie  $r = 0$

$$\left. \frac{\partial u_r}{\partial r} \right|_{(z, 0, t)} = \left. \frac{\partial u_z}{\partial r} \right|_{(z, 0, t)} = 0 \quad \text{Symétrie axiale} \quad (1.2.26)$$

Comme 
$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \psi(z, r, t)) \right) = 0$$

Alors on montre que pour respecter la continuité de la fonction de courant il faut que

$$\psi(z, 0, t) = 0 \quad (1.2.27)$$

Ce qui donne

$$\omega(z, 0, t) = 0 \quad (1.2.28)$$

• Sur la paroi latérale  $r = R$

On a  $u_r(z, R, t) = u_z(z, R, t) = 0$  Adhérence à la paroi (1.2.29)

Puisque  $\frac{\partial(r\psi(z, r, t))}{\partial r} = 0$  et comme à l'entrée  $\psi(z, r, t) = U_0 \frac{r}{2}$  alors si  $r = R$  il vient

$$\psi(z, R, t) = U_0 \frac{R}{2} \quad (1.2.30)$$

$$-\omega(z, R, t) = -\frac{U_0}{2R} + \frac{1}{R} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \quad (1.2.31)$$

❖ Sur les champs thermique et massique

## • A l'entrée

$$\begin{aligned} T(0, r, t) &= T_e & (1. \ 2. \ 32. \ a) \\ C(0, r, t) &= C_e & (1. \ 2. \ 32. \ b) \end{aligned}$$

• A la sortie  $z = L$ 

Régime établi à la sortie

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=L} = 0 \quad (1. \ 2. \ 33. \ a)$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial z} \right|_{(L, r, t)} = 0 \quad (1. \ 2. \ 33. \ b)$$

• Sur l'axe de symétrie  $r = 0$ 

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{(z, 0, t)} = 0 \quad (1. \ 2. \ 34. \ a)$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial r} \right|_{(z, 0, t)} = 0 \quad (1. \ 2. \ 34. \ b)$$

• Sur la paroi latérale  $r = R$ 

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{(z, R, t)} = 0 \quad \text{Paroi adiabatique} \quad (1. \ 2. \ 35. \ a)$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial r} \right|_{(z, R, t)} = 0 \quad \text{Paroi imperméable} \quad (1. \ 2. \ 35. \ b)$$

• Sur le champ magnétique

## • A l'entrée

$$B_i(0, r, t) = 0 \quad B = B_b \quad (1. \ 2. \ 36. \ )$$

- **A la sortie**

$$\frac{\partial B_i(L, r, t)}{\partial z} = 0$$

$$\left. \frac{\partial B_\theta}{\partial z} \right|_{z=L} = 0 \quad (1. 2. 37)$$

- **Sur l'axe de symétrie  $r = 0$**

$$\frac{\partial B_i(z, 0, t)}{\partial r} = 0 \quad \text{implique}$$

$$\left. \frac{\partial B_\theta}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (1. 2. 38)$$

- **Sur la paroi latérale  $r = R$**

$$\frac{\partial B_i(z, R, t)}{\partial r} = 0$$

$$\left. \frac{\partial B_\theta}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (1. 2. 39)$$

### 1.2.5 Grandeurs pariétales remarquables

Pour caractériser l'interaction d'un fluide en écoulement avec une paroi, il est d'usage en mécanique des fluides de calculer le coefficient de frottement pariétal. Cette grandeur, qui s'obtient à partir de la contrainte pariétale, est très importante dans les écoulements internes ou ouverts. Les valeurs et les signes des contraintes pariétales peuvent nous fournir des renseignements sur l'importance des transferts d'impulsion, de chaleur et/ou de masse et aussi sur la nature du champ de l'écoulement au voisinage de la paroi.

Si  $u_z$  désigne la composante tangentielle de la vitesse au voisinage de la paroi, la contrainte

pariétale  $\tau_p(R)$  locale sur la paroi est définie par :  $\tau_p(R) = \mu \frac{\partial u_z}{\partial r}$

Le coefficient de frottement local  $C_f(R)$  est donné par

$$C_f(R) = \frac{|\tau_p(R)|}{\frac{1}{2} \rho U_c^2} \quad (1. 2. 40)$$

$U_C$  est une vitesse caractéristique de l'écoulement qui est prise ici égale à la vitesse d'entrée

du fluide. Le coefficient moyen de frottement défini par  $\overline{C_f} = \frac{1}{L} \int_0^L C_f(R) dz$  devient

$$\overline{C_f} = 2 \frac{\nu}{LU_C^2} \int_0^L \frac{\partial u_z}{\partial r} dz \quad (1. 2. 41)$$

### 1. 3 Adimensionnalisation des équations

L'adimensionnalisation consiste à transformer les variables dépendantes et indépendantes en des variables sans dimensions en les normalisant par exemple par rapport à certaines grandeurs caractéristiques. Cela permet de spécifier les conditions d'écoulement avec un nombre plus restreint de paramètres et facilite beaucoup les comparaisons entre les résultats numériques, analytiques et expérimentaux. Afin de bien généraliser le traitement des équations des transferts, il est utile de les ramener sous une forme adimensionnelle, en rapportant les variables à des grandeurs de référence telles que la longueur  $L$  du cylindre, la vitesse  $U_0$  la température  $T_0$  et la concentration  $C_0$  du fluide.

#### 1.3. 1 Choix et déterminations des grandeurs de référence

Certaines grandeurs de référence sont choisies comme les grandeurs de référence géométriques, certaines grandeurs dynamiques telles qu'une composante de la vitesse d'entrée, les écarts de températures pour le problème thermique et de fractions massiques. Cependant ces choix ne sont pas arbitraires mais pertinents car ces grandeurs doivent caractériser les transferts. Les autres grandeurs sont alors déduites de celles qui ont été déjà choisies.

En ce qui nous concerne nous allons prendre

$$r_{ref} = D \quad \text{et} \quad z_{ref} = L \quad (1. 3. 1)$$

comme grandeurs géométriques et

$$u_{zref} = U_0 \quad (1. 3. 2)$$

comme vitesse de référence suivant la direction axiale.

Pour obtenir une équation adimensionnelle similaire à celle d'incompressibilité, alors la composante de la vitesse de référence suivant l'axe radial  $r$  est alors

$$u_{rref} = U_0 \frac{D}{L} = f U_0 \quad (1. 3. 3)$$

avec  $f = \frac{D}{L}$  le facteur de forme ou facteur géométrique dont la valeur peut nous renseigner sur l'importance de la longueur d'entrée. On rappelle que  $U_0$  est la vitesse débitante à l'entrée.

Dans ces conditions le temps de référence devient

$$t_{ref} = \frac{L}{U_0} \quad (1.3.4)$$

En tenant compte des définitions de la vorticité et de la fonction de courant nous en déduisons

$$\omega_{ref} = \frac{U_0}{D} \quad (1.3.5)$$

et

$$\psi_{ref} = D.U_0 \quad (1.3.6)$$

A cause de la présence du champ magnétique, nous allons déterminer la température de référence en partant de l'énergie d'activation E. A cet effet nous posons

$$T_{ref} = \frac{RT_0^2}{E} \quad (1.3.7)$$

où R' est la constante des gaz parfaits.

Pour l'écart de fraction massique de l'espace nous prenons

$$\Delta C_{ref} = 1 - C_e \quad (1.3.8)$$

Ces grandeurs de référence introduites dans les équations des bilans vont conduire à des équations adimensionnelles similaires aux équations de départ et comportant des groupements qui caractérisent les champs dynamique, thermique et massique.

### 1.3.2 Equations des transferts adimensionnalisées

Dans tout ce qui suit nous avons posé

$$r^* = \frac{r}{D} \quad z^* = \frac{z}{L} \quad \text{et} \quad t^* = \frac{t.U_0}{L}$$

$$u_r^* = \frac{u_r}{f.U_0} \quad \text{et} \quad u_z^* = \frac{u_z}{U_0}$$

$$\omega^* = \frac{\omega D}{U_0} \quad \text{et} \quad \psi^* = \frac{\psi}{D.U_0}$$

$$\theta = \frac{E(T - T_0)}{R'T_0^2} \quad \text{et} \quad C^* = \frac{C - C_0}{1 - C_e}$$

$$B_\theta^* = \frac{B_\theta}{B_b}$$

En substituant ces grandeurs adimensionnelles dans les équations des transferts du paragraphe précédent nous obtenons

**Equation de continuité adimensionnée**

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* u_r^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial(u_z^*)}{\partial z^*} = 0 \quad (1.3.18)$$

**Equation de conservation de l'espèce adimensionnée**

$$\frac{\partial(C^*)}{\partial t^*} + u_r^* \frac{\partial(C^*)}{\partial r^*} + u_z^* \frac{\partial(C^*)}{\partial z^*} = \frac{1}{Pe_{mas}} \left[ \frac{1}{f} \frac{1}{r^*} \left( \frac{\partial}{\partial r^*} r^* \frac{\partial C^*}{\partial r^*} \right) + f \frac{\partial^2 C^*}{\partial z^{*2}} \right] \quad (1.3.24)$$

où  $Pe_{mas} = Re Sc = \frac{DU_0}{D_m}$  est le nombre de Péclet massique et  $Sc = \frac{\nu_e}{D_m}$  le nombre de Schmidt

**Equation de la vorticité adimensionnée**

$$\frac{\partial \omega^*}{\partial t^*} + u_r^* \frac{\partial \omega^*}{\partial r^*} + u_z^* \frac{\partial \omega^*}{\partial z^*} = \frac{1}{Re} \left[ \frac{1}{f} \frac{1}{r^*} \frac{\partial(\omega^*)}{\partial r^*} + \frac{1}{f} \left( \frac{\partial^2(\omega^*)}{\partial r^{*2}} \right) + f \frac{\partial^2(\omega^*)}{\partial z^{*2}} \right] - I \left\{ \frac{\partial}{\partial z^*} \left[ \left( E_z^* + u_z^* B_\theta^* \right) B_\theta^* \right] + \frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial r^*} \left[ \left( E_r^* - u_z^* B_\theta^* \right) B_\theta^* \right] \right\} \quad (1.3.19)$$

$$R_e = \frac{U_0 L}{\nu_e} \quad B_{\theta ref} = B_b \quad I = \frac{D \cdot \sigma \cdot B_b^2}{U_0 \cdot \rho_e}$$

$I$  est le paramètre d'interaction entre la force magnétique et celle d'inertie

**Equation de la fonction de courant adimensionnée**

$$\frac{\partial}{\partial r^*} \left( \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} (r^* \psi^*) \right) + f^2 \frac{\partial^2(\psi^*)}{\partial z^{*2}} = -\omega^* \quad (1.3.20)$$

**Equation de la chaleur adimensionnée**

$$\frac{\partial \theta}{\partial t^*} + u_r^* \frac{\partial \theta}{\partial r^*} + u_z^* \frac{\partial \theta}{\partial z^*} = \frac{1}{P_{e,th}} \left[ \frac{1}{f} \frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left( r^* \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right) + f \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^{*2}} \right] +$$

$$IEc \left\{ \left( B_\theta^* \right)^2 \left[ \left( f u_r^* \right)^2 + \left( u_z^* \right)^2 \right] + 2 B_\theta^* \left( E_z^* f u_r^* - E_r^* u_z^* \right) + \right.$$

$$\left. \left( E_r^* \right)^2 + \left( E_z^* \right)^2 \right\} \quad (1.3.23)$$

$$Ec = \frac{Uo^2}{T_{ref} Cp} \text{ est le nombre d'Eckert}$$

$$Pe_{th} \text{ est le nombre de Péclet thermique défini par } Pe_{th} = RePr = \frac{DUo}{\alpha}$$

### Equation du champ magnétique adimensionnée

$$\frac{\partial B_\theta^*}{\partial t^*} + \left[ \frac{\partial}{\partial z^*} (u_z^* B_\theta^*) + \frac{\partial}{\partial r^*} (u_r^* B_\theta) \right]$$

$$- \frac{1}{Re_m} \left[ \frac{1}{f} \left( \frac{\partial^2 B_\theta^*}{\partial^2 r^*} \right) + f \frac{\partial^2 B_\theta^*}{\partial^2 z^*} \right] = 0 \quad (1.3.22)$$

$$R_{em} = \frac{UoD}{\eta} \text{ est le nombre de Reynolds magnétique. On rappelle que } \eta \text{ est la}$$

résistivité magnétique ; on dit aussi la viscosité magnétique.

Pour terminer nous allons adjoindre à ces équations l'équation suivante de conservation du débit lorsque le régime est établi à la sortie

### Conservation du débit adimensionnée

$$Q = \frac{1}{2} = \frac{1}{f} \int_0^2 u_z^* (r^*, z^*, t^*) . r^* dr^* \quad (1.3.21)$$

### 1. 3. 3 Conditions initiales et aux limites adimensionnalisées

Pour simplifier les écritures des conditions aux limites et initiales nous admettons que  $T_0 = T_e$  et  $C_0 = C_e$ . Dans ces conditions les conditions initiales et aux limites adimensionnelles s'écrivent

#### ❖ Champ dynamique adimensionné

##### ➤ Conditions initiales $t^*=0$

$$u_r^*(z^*, r^*, 0) = u_z^*(z^*, r^*, 0) = 0 \quad (1. 3. 25 a)$$

$$\psi^*(z^*, r^*, 0) = 0 \quad (1. 3. 25 b)$$

$$\omega^*(z^*, r^*, 0) = 0 \quad (1. 3. 25 c)$$

$$\theta(z^*, r^*, 0) = 0 \quad (1. 3. 30a)$$

$$C^*(z^*, r^*, 0) = 0 \quad (1. 3. 30a)$$

$$B_i^*(z^*, r^*, 0) = 0$$

$$\text{alors } B_\theta^*(z^*, r^*, 0) = 1 \quad (1. 3. 35)$$

##### ➤ Conditions aux limites $t^* > 0$

##### • A l'entrée $z^* = 0$

$$\begin{cases} u_r^*(0, r^*, t^*) = 0 \\ u_z^*(0, r^*, t^*) = 1 \end{cases} \quad (1. 3. 26a)$$

$$\psi^*(0, r^*, t^*) = \frac{r^*}{2} \quad (1. 3. 26a)$$

$$-\omega^*(0, r^*, t^*) = f^2 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial z^{*2}} \quad (1. 3. 26c)$$

$$\theta(0, r^*, t^*) = 0 \quad (1. 3. 31 a)$$

$$C^*(0, r^*, t^*) = 1 \quad (1. 3. 31 b)$$

$$B_i^*(0, r^*, t^*) = 0 \quad B_\theta^*(0, r^*, t^*) = 1 \quad (1. 3. 36)$$



- A la sortie  $z^*=1$

$$\frac{\partial u^*}{\partial z^*} \bigg|_{(1, r^*, t^*)} = \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \bigg|_{(1, r^*, t^*)} = 0 \quad (1.3.27 a)$$

$$\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial z^{*2}} = 0 \quad (1.3.27 b)$$

$$-\omega^*(r^*, 1, t^*) = \frac{\partial}{\partial r^*} \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* \psi^*)}{\partial r^*} \right] \quad (1.3.27c)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z^*} \bigg|_{z^*=1} = 0 \quad (1.3.32 a)$$

$$\frac{\partial C^*}{\partial z^*} \bigg|_{z^*=1} = 0 \quad (1.3.32 b)$$

$$\frac{\partial B_\theta}{\partial z^*} \bigg|_{z=1} = 0 \quad (1.3.37)$$

- Sur l'axe de symétrie  $r^* = 0$

$$\frac{\partial u^*}{\partial r^*} \bigg|_{(z^*, 0, t^*)} = \frac{\partial u^*}{\partial r^*} \bigg|_{(z^*, 0, t^*)} = 0 \quad (1.3.28 a)$$

$$\frac{\partial}{\partial r^*} \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial(r^* \psi^*)}{\partial r^*} \right] = 0 \quad (1.3.28 b)$$

$$-\omega^* = f^2 \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial z^{*2}} \quad (1.3.28 c)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = 0 \quad (1.3.33a)$$

$$\left. \frac{\partial C^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = 0 \quad (1.3.33b)$$

$$\left. \frac{\partial B}{\partial r^*} \right|_{r^*=0} = 0 \quad (1.3.38)$$

• Sur la paroi latérale  $r^* = \frac{1}{2}$

$$u_r^*(z^*, \frac{1}{2}, t^*) = u_z^*(z^*, \frac{1}{2}, t^*) = 0 \quad (1.3.29a)$$

$$u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial(r\psi)}{\partial r} = 0$$

$$\psi(z^*, \frac{1}{2}, t^*) = \frac{1}{4} \quad (1.3.29b)$$

$$-\omega^*(z^*, \frac{1}{2}, t^*) = -1 + 2 \frac{\partial \psi^*}{\partial r^*} + \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial r^{*2}} \quad (1.3.29c)$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right|_{r^*=\frac{1}{2}} = 0 \quad (1.3.34a)$$

$$\left. \frac{\partial C^*}{\partial r^*} \right|_{r^*=\frac{1}{2}} = 0 \quad (1.3.34b)$$

$$\left. \frac{\partial B}{\partial r^*} \right|_{r^*=\frac{1}{2}} = 0 \quad (1.3.39)$$

### 1.3.4 Coefficients de frottement

En adimensionnalisant  $r$ ,  $z$  et  $t$   $u_z$  alors les coefficients de frottement sont donnés par

$$C_f(z^*, \frac{1}{2}, t^*) = \frac{2}{Re} \frac{\partial u_z^*}{\partial r^*} \quad (1. 2. 40)$$

$$\overline{C_f}\left(r^* = \frac{1}{2}, t^*\right) = \frac{2}{Re} \int_0^1 \frac{\partial u_z^*}{\partial r^*} dz^*$$

## Conclusion

En premier lieu nous avons modélisé les transferts de chaleur et d'espèces dans un cylindre et dans les couches limites. Les équations du mouvement étant non linéaires, on les transforme en utilisant le formalisme vorticité – fonction de courant. Nous obtenons une équation quasi linéaire et plus maniable numériquement. Nous avons fait apparaître l'équation du champ magnétique qui entraîne un effet de blocage donnant naissance à de l'énergie thermique qui sera convertie en énergie électrique.

Dans le but de généraliser notre problème et de réduire le nombre de paramètre, les équations ont été adimensionnalisées grâce à l'introduction de grandeur de référence. Ainsi nous avons fait apparaître des nombres adimensionnels dont la connaissance permet de caractériser plus facilement les transferts.

La résolution d'un tel système, de manière analytique, est extrêmement compliquée voire impossible c'est pourquoi nous utiliserons dans les pages à venir la méthode numérique pour la résolution des équations régissant les transferts.

## **CHAPITRE 2 : Modélisation numérique**

## Chapitre 2

### Modélisation Numérique

#### 2. 1 Introduction

Pour résoudre le problème concret modélisé dans le chapitre précédent, nous allons utiliser une méthode numérique de résolution. Pour cela nous allons :

- d'abord ramener le domaine continu en un domaine discret formé d'un réseau de cellules élémentaires ;
- ensuite approcher les fonctions et variables continues en des grandeurs discrètes.
- puis chercher en chaque nœud la valeur des inconnues du problème.

#### 2. 2 Discrétisation du domaine

Dans tout ce qui suit, pour alléger les écritures, les grandeurs adimensionnelles sont notées sans astérisques.

Le domaine continu est ramené en un domaine discret formé de réseaux rectangulaires comme indiqué sur les figures 2. 1 ci- dessous.

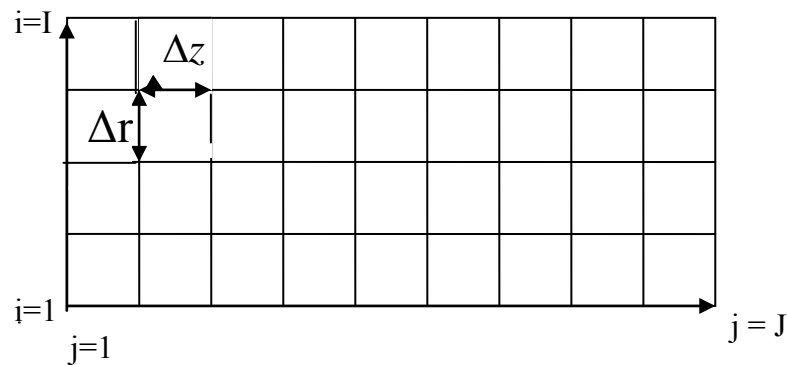
L'axe radial est discrétisé en intervalles réguliers de largeur  $\Delta r$  dont les nœuds sont repérés par l'indice  $i$  qui va de 1 à jusqu'à sa valeur maximale  $I$ . Le segment  $[0 ; 1]$  de l'axe  $Oz$  est ramené en des intervalles réguliers de largeur  $\Delta z$  . Les nœuds sont indicés avec l'entier  $j$  qui varie de 1 à  $J$

Dans ces conditions les variables d'espace s'écrivent :

$$r = (i-1)\Delta r \quad ; \quad z = (j-1)\Delta z$$

avec

$$\Delta r = \frac{1}{I-1} \quad \text{et} \quad \Delta z = \frac{1}{J-1}$$

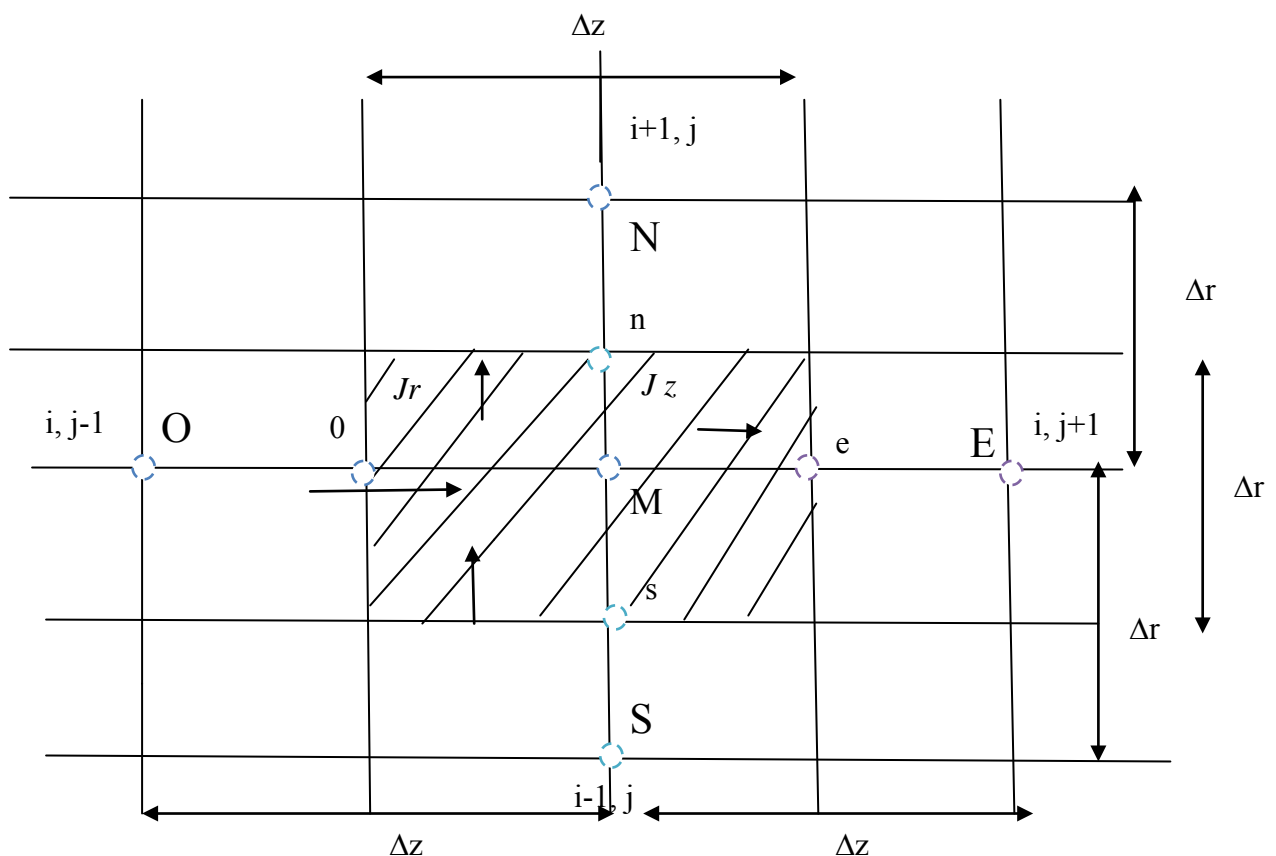


**Figure 2 .1** Maillage en coordonnées

Le domaine de calcul est ainsi discrétisé avec un maillage uniforme suivant les deux directions de l'espace (voir figure 2 .1) où chaque nœud est repéré par un couple d'indices  $i$  et  $j$ .

### 2. 3 Intégration des équations du modèle

Les équations de la vorticité, de la fonction de courant, de la chaleur, de la fraction massique et du bilan du champ magnétique adimensionnalisées vont être intégrées dans le volume de contrôle  $V_c$  centré au point  $M$  dont les dimensions dans le plan de l'écoulement sont  $\Delta r$  et  $\Delta z$  [S. Patankar ; ....] (Voir figure 2. 2 ci- dessous).



### 2.3.1 Intégration des équations d'évolution de type parabolique

Les équations d'évolutions adimensionnalisées du chapitre précédent en tenant compte de l'équation de continuité peuvent se ramener sous la forme générale suivante :

$$\frac{\partial F}{\partial t} + a_r \frac{\partial J_r(F)}{\partial r} + a_z \frac{\partial J_z(F)}{\partial z} = \Phi(F) \quad (2.3.1)$$

avec

$$J_r(F) = b_r u_r F - c_r \frac{\partial F}{\partial r}$$

$$J_z(F) = b_z u_z F - c_z \frac{\partial F}{\partial z}$$

Les différents coefficients pour chaque fonction  $F$  sont consignés dans le tableau suivant

Coefficients Fonctions $F$	$a_r$	$a_z$	$b_r$	$b_z$	$c_r$	$c_z$	$\Phi(F)$
$C$	$a_r = \frac{1}{r}$	$a_z = 1$	$b_r = r$	$b_z = 1$	$c_r = \frac{r}{f P_{e,mas}}$	$c_z = \frac{f}{Pe_{mas}}$	0
$\theta$	$a_r = \frac{1}{r}$	$a_z = 1$	$b_r = r$	$b_z = 1$	$c_r = \frac{r}{f P_{e,th}}$	$c_z = \frac{f}{Pe_{th}}$	$\Phi(\theta)$
$\omega$	$a_r = \frac{1}{r}$	$a_z = 1$	$b_r = r$	$b_z = 1$	$c_r = \frac{r}{f Re}$	$c_z = \frac{f}{Re}$	$\Phi(\omega)$
$B_\theta$	$a_r = 1$	$a_z = 1$	$b_r = 1$	$b_z = 1$	$c_r = \frac{1}{f Rem}$	$c_z = \frac{f}{Rem}$	0

Pour intégrer les différentes équations des transferts de type parabolique, nous choisissons un schéma à pas fractionnaire, aux directions alternées, implicite et explicite [Yanenko ; S. Samarski et Nicolaiev 1981 ; S. Samarski et Andreiv 1980]. Le principe de la méthode consiste à considérer un demi pas de temps intermédiaire entre  $n$  et  $n+1$  c'est-à-dire  $n + \frac{1}{2}$ .

Au premier demi pas de temps (entre  $n$  et  $n + \frac{1}{2}$ ), les dérivées des inconnues par rapport à  $r$  sont approchées implicitement et celles par rapport à  $z$  explicitement. Au second demi pas (entre  $n + \frac{1}{2}$  et  $n+1$ ), les dérivées des inconnues par rapport à  $z$  sont approchées implicitement et celles par rapport à  $r$  explicitement.

A cet effet récrivons l'équation aux dérivées partielles (2. 3.1) sous la forme

$$\frac{\partial F}{\partial t} + L_r F + L_z F = \Phi(F) \quad (2. 3. 2)$$

où

$$L_r F = a_r \frac{\partial J_r(F)}{\partial r} \quad \text{et} \quad L_z F = a_z \frac{\partial J_z(F)}{\partial z}$$

En utilisant la méthode aux directions alternées aux pas fractionnaires, le problème précédent se ramène aux deux schémas discrets à deux niveaux suivants :

$$\frac{F^{n+\frac{1}{2}} - F^n}{\Delta t / 2} + L'_r F^{n+\frac{1}{2}} = -L'_z F^n + \Phi^n \quad (2. 3. 3. a)$$

$$\frac{F^{n+1} - F^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t / 2} + L'_z F^{n+1} = -L'_r F^{n+\frac{1}{2}} + \Phi^{n+\frac{1}{2}} \quad (2. 3. 3. b)$$

Les  $L'_r$  et  $L'_z$  sont des approximations des opérateurs  $L_r$  et  $L_z$ .

Le schéma (2. 3. 3. a) est le schéma prédicteur tandis que la représentation (2. 3. 3. b) est dite correcteur

Maintenant il s'agit d'intégrer les systèmes (2. 3. 3. a) et (2. 3. 3. b) dans le volume de contrôle Vc. En admettant que le flux  $J_r$  est constant sur le segment  $[o ; e]$  et que le flux  $J_z$  l'est aussi sur le segment  $[s ; n]$  (voir figure 2. 2) l'intégration des relations (2. 3. 3. a) et (2. 3. 3. b) donne les deux systèmes algébriques discrets suivants

$$\Delta z \cdot \Delta r \frac{F_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - F_{i,j}^n}{\Delta t / 2} + \Delta z \cdot a_r (J_{rn}^{n+\frac{1}{2}} - J_{rs}^{n+\frac{1}{2}}) =$$



$$-a_z \Delta r (J_{ze}^n - J_{zo}^n) + \Delta z \cdot \Delta r \Phi_{i,j}^n \quad (2.3.4. a)$$

$$\Delta z \cdot \Delta r \frac{F_{i,j}^{n+1} - F_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t / 2} + a_z \Delta r (J_{ze}^{n+1} - J_{zo}^{n+1}) =$$

$$-\Delta z \cdot a_r (J_{rn}^{n+\frac{1}{2}} - J_{rs}^{n+\frac{1}{2}}) + \Delta z \cdot \Delta r \cdot \Phi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \quad (2.3.4. b)$$

Les valeurs des flux sur les faces (n), (s), (e) et (o) sont données par les relations suivantes

$$\begin{cases} J_{rn} = b_r u_r F)_n - c_{rn} \frac{F_{i+1,j} - F_{i,j}}{\Delta r} \\ J_{rs} = b_r u_r F)_s - c_{rs} \frac{F_{i,j} - F_{i-1,j}}{\Delta r} \\ J_{ze} = b_z u_z F)_e - c_{ze} \frac{F_{i,j+1} - F_{i,j}}{\Delta r} \\ J_{zo} = b_z u_z F)_o - c_{zo} \frac{F_{i,j} - F_{i,j-1}}{\Delta r} \end{cases}$$

Les valeurs des grandeurs aux interfaces sont d'une manière générale calculées en utilisant des moyennes barycentriques des points situés de part et d'autre de l'interface considérée. En ce qui nous concerne, nous prenons une moyenne arithmétique pour calculer les valeurs des grandeurs aux interfaces. Ainsi nous avons

$$X)_n = \frac{1}{2} (X_{i+1,j} + X_{i,j}) \quad ; \quad X)_s = \frac{1}{2} (X_{i,j} + X_{i-1,j})$$

$$X)_o = \frac{1}{2} (X_{i,j-1} + X_{i,j}) \quad ; \quad X)_e = \frac{1}{2} (X_{i,j} + X_{i,j+1})$$

et en tenant compte des expressions des flux, les schémas prédicteur et correcteur (2.3.4) conduisent aux systèmes matriciels tridiagonaux suivants :

$$A_{1i,j} F_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + B_{1i,j} F_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + C_{1i,j} F_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = D_{1i,j}^n \quad (2.3.5. a)$$

$\forall j \in [2; J-1]$  fixé,  $i$  va varier de 2 à  $I-1$

$$A_{2i,j} F_{i,j-1}^{n+1} + B_{2i,j} F_{i,j}^{n+1} + C_{2i,j} F_{i,j+1}^{n+1} = D_{2i,j}^{n+1} \quad (2.3.5.b)$$

Dans ce système  $\forall i \in [2; I-1]$  donné, nous allons faire varier  $j$  de 2 à  $J-1$ .

Les coefficients des matrices sont :

$$A_{1i,j} = -\frac{a_r \Delta t}{2\Delta r} \left\{ \frac{c_{rs}}{\Delta r} + \frac{b_{rS, u_{ri-1,j}}}{2} \right\}$$

$$B_{1i,j} = \left\{ 1 + \frac{a_r \Delta t}{2} \frac{c_{rn} + c_{rs}}{\Delta r^2} \right\}$$

$$C_{1i,j} = -\frac{a_r \Delta t}{2\Delta r} \left\{ \frac{c_{rn}}{\Delta r} - \frac{b_{rN, u_{ri+1,j}}}{2} \right\}$$

$$D_{1i,j} = -a_z \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial J_z^n}{\partial z} + \frac{\Delta t}{2} \Phi_{i,j}^n + F_{i,j}^n$$

$$A_{2i,j} = -\frac{a_z \Delta t}{2\Delta z} \left\{ \frac{c_{z0}}{\Delta z} + \frac{b_{zO, u_{zi,j-1}}}{2} \right\}$$

$$B_{2i,j} = \left\{ 1 + \frac{a_z \Delta t}{2} \frac{c_{z0} + c_{ze}}{\Delta z^2} \right\}$$

$$C_{2i,j} = -\frac{a_z \Delta t}{2\Delta z} \left\{ \frac{c_{ze}}{\Delta z} - \frac{b_{zE, u_{zi,j+1}}}{2} \right\}$$

$$D_{2i,j} = -a_r \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial J_r^{n+\frac{1}{2}}}{\partial r} + \frac{\Delta t}{2} \Phi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + F_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$$

Le calcul des coefficients des systèmes matriciels ci- dessus ainsi que la discrétisation des flux aux interfaces sont reportés en annexe

### 2.3. 2 Intégration de l'équation de la fonction de courant

On rappelle que les champs de vorticité et de la fonction de courants adimensionnels sont reliés par l'équation de type elliptique suivante :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \psi) \right) + f^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -\omega(r, z, t) \quad (2.3.6)$$

Pour intégrer cette équation nous allons utiliser une méthode itérative  
Posons

$$L' = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + f^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Considérons le problème alors suivant :

$$L' \psi'(r, z) = -\omega'(r, z) \quad (r, z) \in D \quad (1)$$

Pour résoudre le problème (1), on utilise l'écriture universelle, dite forme canonique, suivante :

$$S_{k+1} \cdot \frac{\psi^{k+1} - \psi^k}{\tau_{k+1}} + L \psi^k = \omega \quad (2)$$

où  $k$  est ici le numéro d'itération,  $\{\tau_k\}$  une suite de paramètres itératifs et  $S_k$  un opérateur muni d'un inverse appelé stabilisateur.  $L$  et  $\psi$  sont des approximations de l'opposé de  $L'$  et de  $\psi'$ .

Le problème fondamental de la théorie des méthodes itératives est comment déterminer le stabilisateur et la suite des paramètres itératifs pour que  $F_k$  approche  $F'$  avec une convergence rapide et un minimum d'opérations arithmétiques pour une précision  $\varepsilon_F$  préalablement fixée.

Lorsque  $S_k$  est égal à l'opérateur identité  $E$ , le schéma itératif (2) est dit explicite et totalement implicite si l'on choisit le stabilisateur comme étant égal à  $L$ . Dans le premier cas, il s'agira de résoudre une équation à une inconnue mais le nombre d'opérations arithmétiques peut quelquefois être prohibitif et le temps de calcul long. Dans le second cas l'occupation de place mémoire est énorme car il faut inverser une matrice qui n'est pas creuse mais on a généralement un temps de calcul réduit. Dès lors il faut trouver un compromis. Pour avoir une convergence rapide il faut alors que le stabilisateur s'inverse facilement mais aussi soit proche énergétiquement de  $L$ . Ainsi le schéma itératif doit être totalement ou partiellement implicite et pour accélérer la convergence, la suite des paramètres itératifs doit être ordonnée et dépendre du numéro d'itération.

Pour éviter une inversion de matrices et avoir une vitesse de convergence plus élevée que celle d'une méthode totalement explicite, nous allons mettre le stabilisateur sous la forme

$$S_{k+1} = E - \tau_{k+1} L_D$$

où  $E$  est l'opérateur identité et  $L_D$  est la partie diagonale de l'opérateur  $L$ . Dans ces conditions l'écriture universelle itérative donne

$$(E + \tau_{k+1} L_D) \psi^{k+1} = \left\{ E - \tau_{k+1} (L_{Sup} + L_{Inf}) \right\} \psi^k + \tau_{k+1} E \omega$$

$L_{Sup}$  et  $L_{Inf}$  représentent les parties strictement supérieure et inférieure de l'opérateur  $L$ .

Pour accélérer la convergence, nous pouvons remplacer  $L_{Inf}\psi^k$  par  $L_{Inf}\psi^{k+1}$  ; il vient alors

$$(E + \tau_{k+1} \cdot L_D) \psi^{k+1} = \left\{ E - \tau_{k+1} L_{Sup} \right\} \psi^k + \tau_{k+1} L_{Inf} \psi^{k+1} + \tau_{k+1} E \cdot \omega$$

Maintenant il nous reste à déterminer **la suite des paramètres itératifs**  $\{\tau_k\}$ . Pour cela on peut utiliser plusieurs approches. La plus simple revient à les prendre constants. Leurs valeurs peuvent être déterminées soit à partir de tests numériques [D. W. Peaceman and H. H. Rachford (1955)] soit en résolvant le problème aux valeurs propres comme le fit A. Bejan (1986). En ce qui nous concerne, nous allons les estimer aussi à partir des polynômes de Tchébycheff qui sont ceux dont les modules s'écartent le moins de l'unité dans l'intervalle  $[-1 ; +1]$ . La suite des paramètres itératifs doit minimiser le maximum de l'opérateur résolvant des itérations. Ainsi **la théorie des méthodes itératifs conduit à**

$$\tau_k = \cos \left\{ \left( \frac{2k-1}{n_0} \right) \pi \right\}$$

**avec k allant de 1 à  $n_0$  qui est le nombre minimum d'itération exigé pour garantir la convergence.** Pour le déterminer nous allons utiliser les fonctions elliptiques de Jacobi sous leur forme de développement asymptotique. Si  $\varepsilon_\psi$  est le critère d'erreur imposé il vient après calcul [A. A. Samarski et V. Andréiev ; 1978, A. A. Samarski et E. Nicolaïev ; 1981]

$$n_0 = \frac{1}{\pi^2} \cdot \ln \left( \frac{4}{\varepsilon_\psi} \right)$$

Il est utile de pouvoir estimer *a priori*  $n_0$  car cela nous permet d'éviter des tests inutiles qui vont augmenter le temps de calcul et de prendre des valeurs apparemment correctes mais qui en réalité ne sont générées que par des artefacts numériques.

$$L' = -\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + f^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

En approchant  $L\psi$  par l'expression discrétisée du second ordre suivante

$$L\psi = \frac{1}{\Delta r^2} \left[ \frac{r_i + \Delta r}{r_i + \frac{\Delta r}{2}} \psi_{i+1,j} + \frac{r_i - \Delta r}{r_i - \frac{\Delta r}{2}} \psi_{i-1,j} \right] + \frac{f^2}{\Delta z^2} [\psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}]$$

$$- \left\{ \frac{2f^2}{\Delta z^2} + \frac{2}{\Delta r^2} \frac{r_i^2}{\left(r_i + \frac{\Delta r}{2}\right)\left(r_i - \frac{\Delta r}{2}\right)} \right\} \psi_{i,j}$$

nous avons alors

$$L_D\psi = - \left\{ \frac{2f^2}{\Delta z^2} + \frac{2}{\Delta r^2} \frac{r_i^2}{\left(r_i + \frac{\Delta r}{2}\right)\left(r_i - \frac{\Delta r}{2}\right)} \right\} \psi_{i,j}$$

$$L_{Sup}\psi = \frac{1}{\Delta r^2} \frac{r_i + \Delta r}{r_i + \frac{\Delta r}{2}} \psi_{i+1,j} + \frac{f^2}{\Delta z^2} \psi_{i,j+1}$$

$$L_{Inf}\psi = \frac{1}{\Delta r^2} \frac{r_i - \Delta r}{r_i - \frac{\Delta r}{2}} \psi_{i-1,j} + \frac{f^2}{\Delta z^2} \psi_{i,j-1}$$

Dans ces conditions la suite itérative des  $\psi^k$  est donnée, après quelques arrangements,  
par

$$\psi_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{\frac{1}{\tau_{k+1}} + \frac{2f^2}{\Delta z^2} + \frac{2}{\Delta r^2} \frac{r_i^2}{\left(r_i + \frac{\Delta r}{2}\right)\left(r_i - \frac{\Delta r}{2}\right)}} \times$$

$$\left\{ \frac{\psi_{i,j}^k}{\tau_{k+1}} + \frac{1}{\Delta r^2} \left[ \frac{r_i + \Delta r}{r_i + \frac{\Delta r}{2}} \psi_{i+1,j}^k + \frac{r_i - \Delta r}{r_i - \frac{\Delta r}{2}} \psi_{i-1,j}^{k+1} \right] \right.$$

$$\left. + \frac{f^2}{\Delta z^2} [\psi_{i,j+1}^k + \psi_{i,j-1}^{k+1}] + \omega_{i,j}^k \right\} \quad (2.3.7)$$

Le test d'arrêt du processus itératif est donnée par

$$\frac{\sum_{i=1}^{i=I} \sum_{j=1}^{j=J} |\psi_{i,j}^{k+1} - \psi_{i,j}^k|}{\sum_{i=1}^{i=I} \sum_{j=1}^{j=J} |\psi_{i,j}^{k+1}|} \leq \varepsilon_\psi \quad (2.3.8)$$

avec  $k > n_0$

## 2. 4 Condition initiales et aux limites discrétisées

### 2. 4 . 1 Conditions initiales discrétisées

$$n=1 \quad \forall \quad i \leq I \quad \text{et} \quad \forall \quad j \leq J$$

$$u_{r,i,j}^1 = 0 \quad u_{z,i,j}^1 = 0 \quad (2.4.1a)$$

$$\psi_{i,j}^1 = 0 \quad (2.4.1b)$$

$$\omega_{i,j}^1 = 0 \quad (2.4.1c)$$

$$\theta_{i,j}^1 = 0 \quad (2.4.2)$$

$$C_{i,j}^1 = 0 \quad (2.4.3)$$

$$B_{i,ij}^1 = 0 \quad B_{\theta i,j}^1 = 0 \quad (2.4.4)$$

## 2. 4. 2 Conditions aux limites discrétisées $n > 1$

- A l'entrée  $j = 1$  ;  $\forall \quad \leq \leq I$

$$u_{r,i,1}^{n+1} = 0 \quad (2.4.5a)$$

$$u_{z,i,1}^{n+1} = 1 \quad (2.4.5b)$$

$$\psi_{i,1}^{n+1} = \frac{1}{2} \Delta r (i - 1) \quad (2.4.5c)$$

$$\omega_{i,1}^{n+1} = -f^2 \frac{\psi_{i,3}^{n+1} - 2\psi_{i,2}^{n+1} + \psi_{i,1}^{n+1}}{\Delta z^2} \quad (2.4.5d)$$

$$\theta_{i,1}^{n+1} = 0 \quad (2.4.6)$$

$$C_{i,1}^{n+1} = 1 \quad (2.4.7)$$

$$B_{\theta i,1}^{n+1} = 0 \quad (2.4.8)$$

- A la sortie  $j = J$  ;  $\forall \quad < < I$

$$u_{z,i,J}^{n+1} - u_{z,i,J-1}^{n+1} = 0 \quad (2.4.9a)$$

$$u_{r,i,J}^{n+1} - u_{r,i,J-1}^{n+1} = 0 \quad (2.4.9b)$$

$$\psi_{i,J-2}^{n+1} - 2\psi_{i,J-1}^{n+1} + \psi_{i,J}^{n+1} = 0 \quad (2.4.9c)$$

$$\omega_{i,J} = \frac{1}{\Delta r^2} \left\{ \frac{2i}{2i-1} \psi_{i+1,j} + \frac{2(i-2)}{2i-3} \psi_{i-1,J} - \frac{8(i-1)^2}{(2i-1)(2i-3)} \psi_{i,J} \right\} \quad (2.4. 9d)$$

$$\theta_{i,J}^{n+1} - \theta_{i,J-1}^{n+1} = 0 \quad (2.4. 10)$$

$$C_{i,J}^{n+1} - C_{i,J-1}^{n+1} = 0 \quad (2.4. 11)$$

$$B_{\theta i,J}^{n+1} - B_{\theta i,J-1}^{n+1} = 0 \quad (2.4. 12)$$

• **Symétrie axiale i = 1,  $\forall < j < J$**

$$u_{r2,j}^{n+1} - u_{r1,j}^{n+1} = 0 \quad (2.4. 13a)$$

$$u_{z2,j}^{n+1} - u_{z1,j}^{n+1} = 0 \quad (2.4. 13b)$$

$$\psi_{1,j}^{n+1} = 0 \quad (2.4. 13c)$$

$$\omega_{1,j}^{n+1} = -\frac{f^2}{\Delta z^2} (\psi_{1,j+1}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1} + \psi_{1,j-1}^{n+1})$$

$$\omega_{1,j}^{n+1} = 0 \quad (2.4. 13d)$$

$$\theta_{2,j}^{n+1} - \theta_{1,j}^{n+1} = 0 \quad (2.4. 14)$$

$$C_{2,j}^{n+1} - C_{1,j}^{n+1} = 0 \quad (2.4. 15)$$

$$B_{\theta 2,j}^{n+1} - B_{\theta 1,j}^{n+1} = 0 \quad (2.4. 16)$$

• **Sur la paroi latérale i = I ;  $\forall < j < J$**

$$u_{rI,j}^{n+1} = 0 \quad (2.4. 17a)$$

$$u_{zI,j}^{n+1} = 0 \quad (2.4. 17b)$$



$$\psi_{I,j}^{n+1} = \frac{1}{4} \quad (2.4. 17c)$$

$$\begin{aligned} \omega_{I,j}^{n+1} = & 1 - \frac{1}{\Delta r^2} \psi_{I-2,j}^{n+1} + \frac{2}{\Delta r^2} (1 + \Delta r) \psi_{I-1,j}^{n+1} \\ & - \frac{1}{\Delta r^2} (1 + 2\Delta r) \psi_{I,j}^{n+1} \end{aligned} \quad (2.4. 17d)$$

$$\theta_{I,j}^{n+1} - \theta_{I-1,j}^{n+1} = 0 \quad (2.4.18)$$

$$C_{I,j}^{n+1} - C_{I-1,j}^{n+1} = 0 \quad (2.4. 19)$$

$$B_{\theta I,j}^{n+1} - B_{\theta I-1,j}^{n+1} = 0 \quad (2.4. 20)$$

## 2.5 Méthodologie générale de résolution des équations du modèle

### 2.5. 1 Résolution des systèmes matriciels tridiagonaux

Mettons les systèmes algébriques (2. 3. 5. a) et (2. 3. 5. b) ainsi que leurs conditions initiales et aux limites (2. 4.2) - (2. 4.5) sous la forme générale suivante

$$b'_1 F_1 + c'_1 F_2 = d'_1 \quad l=1 \quad (2. 5. 1. a)$$

$$a'_l F_{l-1} + b'_l F_l + c'_l F_{l+1} = d'_l \quad l=2,3,\dots,l_m-1 \quad (2. 5. 1. b)$$

$$a'_{l_m} F_{l_m-1} + b'_{l_m} F_{l_m} = d'_{l_m} \quad l=l_m \quad (2. 5. 1. c)$$

Ici  $F$  peut représenter les champs de vorticité, des températures, de la fraction massique ou de la composante ortho- radiale du champ magnétique à l'instant  $n+1$  ou à l' « instant »

intermédiaire  $n + \frac{1}{2}$ . L'indice  $l$  est soit  $i$  s'il s'agit du prédicteur ou  $j$  dans le correcteur

et  $l_m$  en est sa valeur maximale.

On montre que la solution du système (2. 5. 1) peut se mettre sous la forme récursive régressive générale suivante

$$F_l = \alpha_l F_{l+1} + \beta_l \quad l=l_m-1, l_m-2, \dots, 3, 2, 1 \quad (2. 5. 2)$$

Il s'agit d'exprimer les grandeurs  $\alpha_l$  et  $\beta_l$  en fonction des coefficients du système matriciel (2. 5. 1). Puisque

$$F_{l-1} = \alpha_{l-1} F_l + \beta_{l-1} \quad (2. 5. 3)$$

il vient

$$F_l = -\frac{c_l}{b_l + a_l \alpha_{l-1}} F_{l+1} + \frac{d_l - a_l \alpha_{l-1}}{b_l + a_l \alpha_{l-1}}$$

d'où

$$\alpha_l = -\frac{c_l}{b_l + a_l \alpha_{l-1}} \quad l = 2, 3, \dots, l_m \quad (2.5.4.a)$$

$$\beta_l = \frac{d_l - a_l \beta_{l-1}}{b_l + a_l \alpha_{l-1}} \quad l = 2, 3, \dots, l_m \quad (2.5.4.b)$$

Puisque pour calculer ces suites récursives il nous faut leurs valeurs initiales, alors en comparant la condition aux limites (2.5.1.a) et la solution (2.5.2) pour  $l = 1$  il vient

$$\alpha_1 = -\frac{c'_1}{b'_1} \quad (2.5.5.a)$$

et

$$\beta_1 = \frac{d'_1}{b'_1} \quad (2.5.5.b)$$

### Détermination de $F_{l_m}$

Pour cela on élimine  $F_{l_m-1}$  entre la condition (2.5.1.c) et la solution récursive (2.5.2) lorsque  $l = l_m - 1$ . Le calcul donne

$$F_{l_m} = \frac{d'_{l_m} - a'_{l_m} \beta_{l_m-1}}{b'_{l_m} + a'_{l_m} \alpha_{l_m-1}} \quad (2.5.6)$$

Pour que le processus de calcul des  $F_l$  soit stable il est d'usage de vérifier les conditions suivantes

$$a_l < 0 ; b_l > 0 ; c_l < 0 \text{ et } b_l > -a_l - c_l$$

Donc les pas d'espace  $\Delta r$  et  $\Delta z$  seront de telle sorte que

$$\Delta r < \frac{2 \min(c_r)}{\max |u_{ri,j}| \cdot \max(b_r)} ; \quad \Delta z < \frac{2 \min(c_z)}{\max |u_{zi,j}| \cdot \max(b_z)}$$

(2.5.7) Les systèmes d'équations discrets que nous avons obtenus étant couplés et non linéaires alors nous aurons recours à des calculs itératifs. Comme pour la fonction de courant, nous supposons que la valeur d'une grandeur  $F_{i,j}$  dépendant explicitement du temps dans un processus itératif est acceptable si le test suivant est satisfait

$$\frac{\sum_{i=1}^{i=I} \sum_{j=1}^{j=J} |F_{i,j}^{it+1} - F_{i,j}^{it}|}{\sum_{i=1}^{i=I} \sum_{j=1}^{j=J} |F_{i,j}^{it+1}|} \leq \varepsilon_F \quad (2.5.8)$$

$it$  est le numéro d'itération

Pour savoir que notre conduite à une longueur suffisamment grande par rapport à son diamètre, nous exigeons du débit à la sortie  $Q_s$  qu'il satisfasse à

$$\left| Q_s - \frac{1}{2} \right| \leq \varepsilon_{Q_s} \quad (2.5.9)$$

Les grandeurs pariétales moyennes seront calculées en utilisant la quadrature de Simpson.

## 2.5.2 Algorithme de Résolution –Organigramme de Calcul

Nous allons résumer dans ce qui suit le processus de calcul pour la détermination des champs des vitesses, de fonction de courant, de vorticité, de température, de fraction massique et magnétique.

**1<sup>ère</sup> Etape :** On rentre d'abord les paramètres *physiques* (nombres de Reynolds, de d'Eckert, de Peclet, Débit à l'entrée, ...), certains paramètres *numériques* (le pas de temps, les nombres totaux de nœuds, les précisions,...). On choisit les pas d'espace qui respectent *a priori* les inégalités (2.5.7)

**2<sup>ème</sup> Etape :** On initialise les champs des vitesses, des fonctions de courant, de la vorticité la température, la fraction massique, le champ magnétique pour  $n=1$ .

**3<sup>ème</sup> Etape :** On se donne une valeur du facteur de forme  $f$ .

**4<sup>ème</sup> Etape :** On se donne des profils arbitraires des vitesses.

**5<sup>ème</sup> Etape :** On résout d'abord l'équation du champ magnétique puis celles de la vorticité, la température et la fraction massique grâce à la **séquence Thomas**

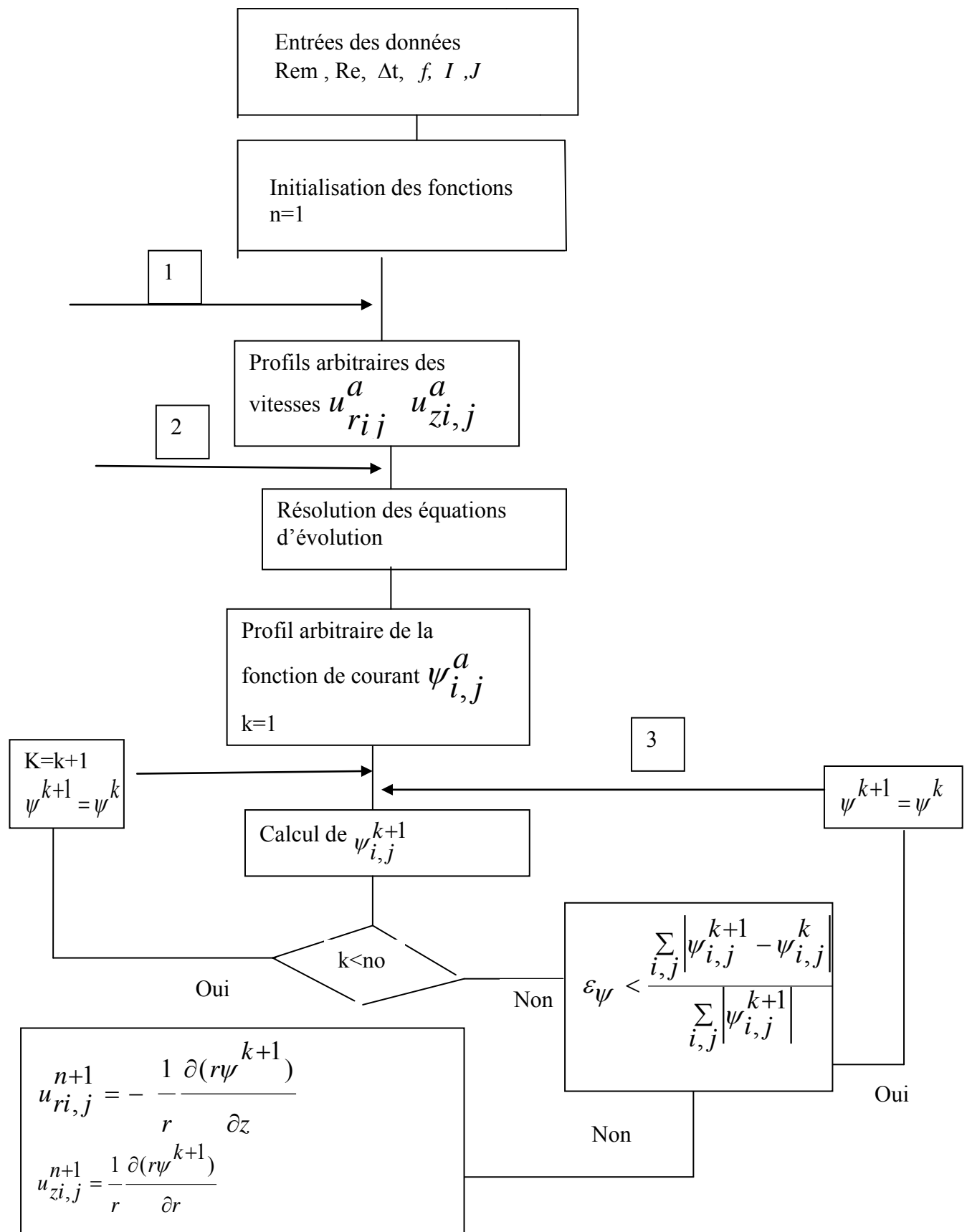
**6<sup>ème</sup> Etape :** On débute le calcul itératif pour la fonction de courant. On calcule le nombre minimal d'itérations nécessaires  $n_0$  et on se donne un profil arbitraire de la fonction de courant que nous allons corriger dans le processus itératif. Après  $n_0$  itérations on débute les tests. Si la condition (2.3.15) est vérifiée on passe à l'**étape 7** sinon on range la nouvelle valeur de la fonction de courant dans l'ancienne, on incrémente  $n_0$  et on continue le processus itératif

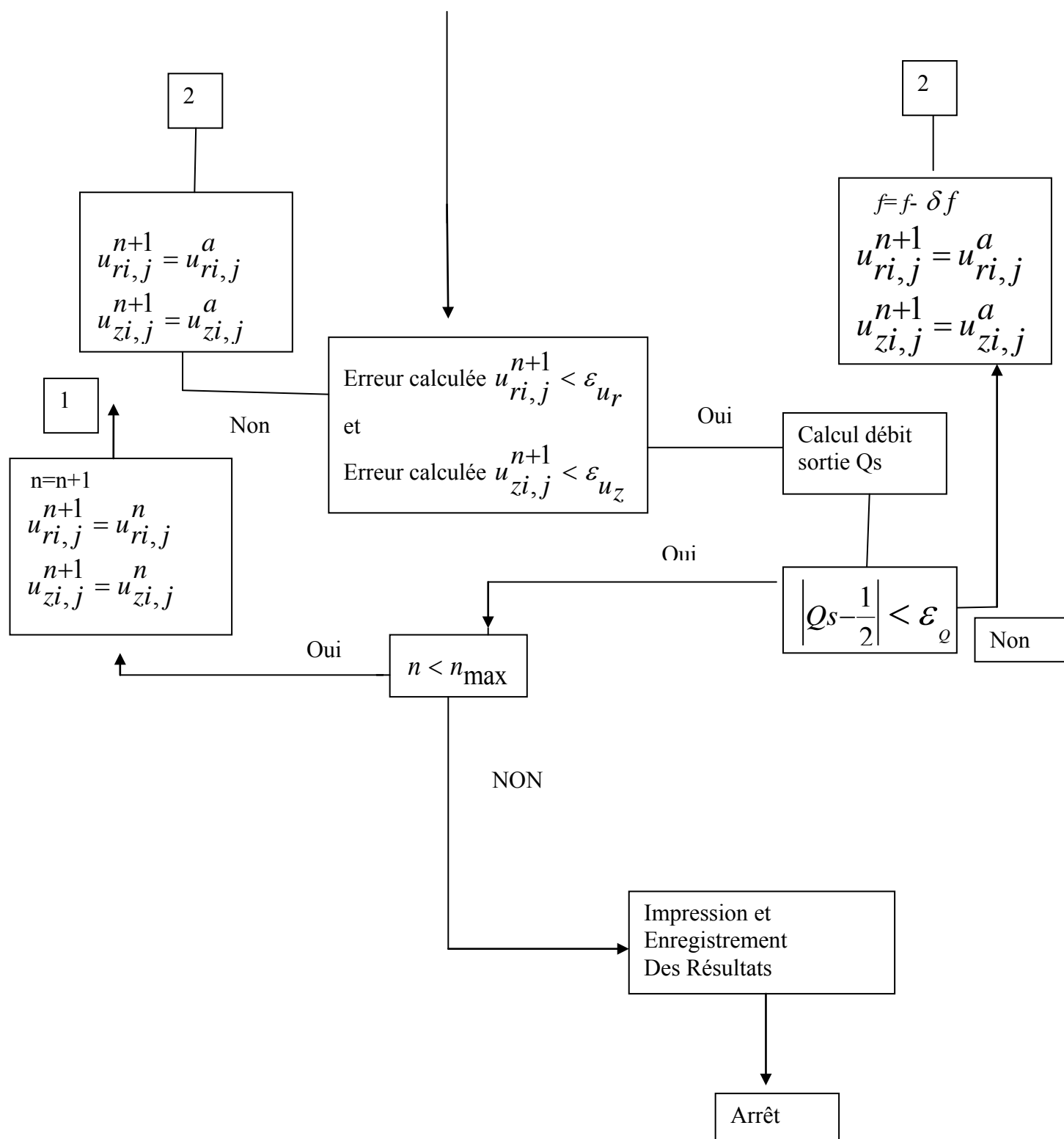
**7<sup>ème</sup> Etape :** On calcule les nouvelles valeurs des vitesses à partir de celle de la fonction de courant. Si le test (2.5.8) n'est pas rempli pour au moins l'une des composantes de la vitesse, on range les nouvelles valeurs des vitesses dans les anciennes et on reprend la séquence à partir de l'**étape 5**. Sinon on passe à l'**étape 8**

**8<sup>ème</sup> Etape :** On calcule le débit à la sortie et l'on compare avec le débit à l'entrée. Si le test n'est pas satisfaisant on diminue la valeur du facteur de forme  $f$  et on retourne l'**étape 4**. Dans le cas contraire, on regarde si le temps maximal est atteint. Si oui on passe à l'**étape 9**. Sinon on augmente la valeur de  $n$ , on prend les nouvelles valeurs des vitesses, de la fonction de courant, de la vorticité, la température, le champ magnétique et la fraction massique comme valeurs initiales et on reprend la séquence à partir de l'**étape 4**.

**9<sup>ème</sup> Etape :** On enregistre les résultats et on arrête les calculs

### Organigramme général des calculs





## Conclusion

Pour résoudre temporellement les différentes équations de type parabolique nous avons choisis un schéma à deux couches prédictor – correcteur à pas fractionnaire, aux directions alternées implicite et explicite.

En ce qui concerne l'équation elliptique de la fonction de la fonction de courant, nous l'allons d'abord mis sous la forme canonique avec un stabilisateur explicite et la suite des paramètres itératifs est calculée optimale qui minimise le maximum de l'opérateur résolvant est calculée à partir des polynômes de Tchébycheff

Comme il est utile de pouvoir estimer le nombre minimum d'itérations nécessaires afin d'éviter des tests inutiles qui vont augmenter le temps de calcul, nous l'avons déterminé en partant des fonctions elliptiques de Jacobi sous leur forme de développement asymptotique.

Après avoir ramené notre domaine continu en un domaine discret formé de réseaux rectangulaires, nous avons intégré les équations adimensionnalisées du modèle mathématique ainsi que leurs conditions aux limites associées en utilisant la méthode de volume fini de contrôle de Patankar.

Les équations d'évolution discrètes issues de l'intégration par la méthode de volume fini sont des systèmes matriciels tri diagonaux et qui sont résolues grâce à la méthode de double balayage.

Puisque les systèmes ne sont pas linéaires, nous avons déterminé les pas de discrétion qui assurent la stabilité des schémas.

Enfin ce chapitre se termine par un résumé des processus de résolution des équations du modèle.

Cette partie consacrée à la modélisation numérique montre à quel point la résolution des équations de Navier- Stokes couplées à celles de l'énergie, de la conservation de l'espèce et des équations de Maxwell est ardue. La non linéarité des équations et leur fort couplage font que même en utilisant des schémas totalement implicites la condition de stabilité n'est plus inconditionnelle.

## CONCLUSION GENERALE

Dans ce travail nous avons modélisé mathématiquement et numériquement l'écoulement forcé d'un fluide newtonien électriquement conducteur dans une conduite cylindrique d'axe horizontal en présence d'un champ magnétique appliqué constant. La paroi latérale du cylindre est supposée être un diélectrique parfait et thermiquement isolé.

Après avoir dégagé les grandes lignes de la magnétohydrodynamique et montré son intérêt tant sur le plan académique qu'appliqué, nous avons dans le chapitre premier décrit notre système physique et modélisé les transferts couplés de masse, d'espèce, d'impulsion, de chaleur et du champ électromagnétique sur la base d'hypothèses simplificatrices. Afin de réduire le nombre des équations algébriques et d'éliminer le terme de pression dans l'équation du mouvement, nous avons utilisé le formalisme vorticité-fonction. Comme les équations qui régissent les transferts dans notre système contiennent un nombre considérable de paramètres, nous avons utilisé le théorème **II de Vashy- Buckingham** dans le but de générer des groupements adimensionnels comme les nombres de **Reynolds** hydrodynamique et magnétique, de Hartman et de Peclet dont les valeurs peuvent nous renseigner sur la nature de l'écoulement, le degré de couplage entre les effets magnétiques, hydrodynamique, massique et thermique. L'adimensionnalisation de la contrainte de cisaillement donne le coefficient de frottement qui caractérise l'interaction entre l'écoulement et la paroi ; ses variations fournissent des renseignements sur l'importance et la nature des transferts pariétaux. En outre l'adimensionnalisation permet de résoudre toute une classe de problèmes présentant des conditions aux limites et initiales que le nôtre et conduit donc à des solutions auto-similaires. Les équations ainsi que leurs conditions aux limites et initiales adimensionnalisées malgré la réduction des nombres de paramètres demeurent encore impossible à résoudre analytiquement. C'est pourquoi nous avons modélisé numériquement les transferts dans le but de résoudre les équations qui régissent le fonctionnement de notre système. Pour cela nous avons ramené le domaine physique en un domaine discret formé d'un réseau de rectangles élémentaires de côtés  $\Delta z$  et  $\Delta r$ . Les équations adimensionnelles, intégrées dans le volume de contrôle, conduisent alors à des systèmes algébriques. En désintégrant les termes temporels dans les équations paraboliques grâce à un schéma à deux niveaux de type prédicteur-correcteur, nous aboutissons à des systèmes matriciels tridiagonaux que nous allons résoudre à l'aide de l'algorithme de **THOMAS**. Pour l'équation de la fonction de courant qui est de type elliptique, une méthode itérative à deux couches explicite avec une suite de paramètres itératifs ordonnée calculée à partir des polynômes de **CHEBYSHEFF** est utilisée.

Pour éviter une croissance des erreurs lors du processus d'inversion des matrices tri diagonales, une étude de la stabilité est menée et a débouché sur une estimation des pas d'espace qui confèrent à nos schémas une forte stabilité. Enfin nous avons résumé les principales étapes du processus global et donné un algorithme de résolution des équations algébriques.

La suite logique de ce travail serait de mettre au point un code calcul, de faire des simulations numériques afin d'analyser l'impact de l'effet dynamo sur les champs hydrodynamique et thermique.

Ce travail étant une exploration, il est donc souhaitable de perfectionner la modélisation mathématique. Mais comme la magnétohydrodynamique est une discipline très vaste et très complexe aussi bien du point de vue fondamental qu'appliqué énumérer une liste exhaustive de perspectives de recherches serait de notre part prétentieux. Cependant on peut améliorer le modèle en levant par exemple certaines hypothèses simplificatrices. La prise en considération de la variabilité des propriétés physiques du fluide permettrait de modéliser plus fidèlement les problèmes des plasmas chauds. On pourra aussi dans l'expression de la densité de courant total introduire l'effet **HALL** comme l'a suggéré **LIGHTHILL**. La

compréhension des phénomènes serait meilleure si les recherches étaient axées uniquement sur l'un ou l'autre des volets des convertisseurs magnétohydrodynamiques. C'est alors seulement qu'on arrivera à démocratiser les techniques de construction de machines magnétohydrodynamiques qui peuvent apporter des solutions à la persistante crise énergétique.





**BIBLIOGRAPHIE**

- Alim M.A., Alam Md. M., Al-Mamun A.-** (2007) Joule Heating Effect on the Coupling of Conduction with Magnetohydrodynamic Free Convection Flow from a Vertical Flat Plate, *Nonlinear Analysis Modeling and Control*, Vol 12, N° 307- 316.
- Bahloul A., Boutana N., Vasseur P.** (2006). Double-diffusive and Soret-induced convection in a shallow horizontal porous layer, *J. Fluid Mech.*, 491, 325-352.
- Bian W., Vasseur P., Bilgen E. (1996). Effect of an external magnetic field on buoyancy driven flow in a shallow porous cavity, *Num. Heat Transfer, Part A*, 29, 625-638.
- Boukhari A., Bessaih R.** (2007) Etude de l'instabilité hydrodynamique et thermique des écoulements tournants avec et sans magnétique 13èmes Journées Internationales de Thermique 28 - 30 Août, Albi France
- Bourgeon M.** (2003) Etude en magnétohydrodynamique application à l'effet dynamo, Ecole Normale Supérieure de Lyon, France
- Burr U., Barleon L., Jochmann P., Tsinober A.** (2003) Magnetohydrodynamic convection in a vertical slot with horizontal magnetic field, *J. Fluid Mech.*, 475, 21-40.
- Chamkha A.J., Al-Naser H.** (2002). Hydromagnetic double-diffusive convection in a rectangular enclosure with uniform side heat and mass fluxes and opposing temperature and concentration gradients, *Int. J. Thermal Sc.* 41, 936-948.
- Charny .G et J. P. Schon**(1982). *Transfert de chaleur par convection- Initiation aux transferts thermiques*, chap. 4, pp 185-269, Technique et Documentation, Lavoisier, Paris
- Cheng C.-Y.** (2005). An integral approach for hydromagnetic natural convection heat and mass transfer from vertical surfaces with power-law variation in wall temperature and concentration in porous media, *Int. Comm. Heat Mass Transfer*, 32, 204-213.
- Ece M.C.,** (2005). Free convection flow about a cone under mixed thermal boundary conditions and a magnetic field, *Applied Mathematical Modelling*, 29, 1121–1134
- Elbashbeshy E.M.A.** (1997). Heat and mass transfer along a vertical plate with variable surface tension and concentration in the presence of a magnetic field, *Int. J. Eng. Sci.*, 34, 515-522.
- Euvrad .D**(1990) *Résolution numérique des équations aux dérivées partielles de la physique, de la mécanique et des sciences de l'ingénieur*, 2<sup>ème</sup> Edition, Masson, Paris
- Filar P., Fornalik E., Kaneda M., Tagawa T., Ozoe H., Szmyd J.S.** (2005). Three dimensional numerical computation for magnetic convection of air inside a cylinder heated and cooled isothermally from a side wall, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 48, 1858-1867.
- Ivanov A. A.** (2001) Etude théorique et numérique des instabilités Rayleigh-Taylor en plasmas magnétisés» thèse de Doctorat de l'école polytechnique Paris
- Landau .L**(1981). *Mécanique des fluides*, traduit du russe, Edition Mir Moscou
- Mbow .Ch** (2000) Méthode Itérative Implicite aux directions alternées » *Communication interne, Laboratoire de Thermodynamique et Energétique, Perpignan, France*
- Ozoe H., Okada K.** (1989). The effect of the direction of the external magnetic field on the three-dimensional natural convection in a cubical enclosure, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 32, 1939-1954.
- Ozoe H., Maruo E., Matsuo H.** (1994). Numerical analysis of transient natural convection in a liquid metal after a step change in an external lateral magnetic, *Int. Chem. Eng.*, 34, 3, 384-392.
- Patankar .S. V**(1980)., *Numerical Heat transfer and Fluid Flow*, Washington, Hemisphere Publishing Corporation
- Peaceman .D. W and H. H. Rachford**(1955). The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations, *J. Soc. Ind. Appl. Math*, 2, (1), pp 39- 41
- Peaceman D.W., Rachford H.A..** (1955). The numerical solution of parabolic and elliptic difference equations, *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, 3, 28-43.

- Ramambason S. R. AMAMBASON S. R.** (2006 ) Effet d'un champ magnétique sur la convection naturelle d'un fluide binaire en milieu poreux confiné, Mémoire de maîtrise ès sciences appliquées, Ecole Polytechnique de Montréal.
- Ryskin A., Pleiner H.** (2004). Influence of a magnetic field on the Soret-effect-dominated thermal convection in ferrofluids, *Physical Review E*, 69, 046301.95
- Samarski A. A, E. Nikolaiev**(1981). *Résolution des Equation aux Mailles*, traduit du russe, édition Mir, Moscou
- Samarski A. A, V. Andréev**(1978). *Méthode aux Différences pour les Equations Elliptiques*, traduit du russe, édition Mir, Moscou
- Sart R.** (2007) Etude de problèmes liés aux fluides compressibles et plasmas Thèse de Doctorat de l'université Blaise Pascal, Clermont Ferrand , France
- Schlichting. H** « *Boundary layer theory*, 6th Edi. Mac- Graw Hill (1968).
- Sparrow E. M., Cess R. D.** (1962), Trans ASME J. Appl. Mech. 29, 181.
- Tabeling P.** (1982). Convective flow patterns in rectangular boxes of finite extent under an external magnetic field, *J. Physique*, 43, 1295-1303.
- Tagawa T., Ujihara A., Ozoe H.** (2003). Numerical computation for Rayleigh-Benard convection of water in a magnetic field, *Int. J. Heat Mass Transfer* 46, 4097-4104.
- Weiss N.O.** (1981). Convection in an imposed magnetic field. Part 1. The development of nonlinear convection, *J. Fluid Mech.*, 108, 247-272.
- Yanenko N. N.** (1968). « *Méthode à Pas Fractionnaires- Résolutions des Problèmes Polydimensionnels de la Physique Mathématique* », traduit du russe par P.A. Népomiastchy, Collection Inter science, Armand Collin, Paris
- Zappoli B.** (1981) La magnétohydrodynamique, état de l'art et premières expériences probatoires d'application propulsive «note technique N° 9 cnes n°0273c/gepan Toulouse

# ANNEXE

### ANNEXE

Nous nous proposons d'approcher spatialement par une méthode aux différences finies l'équation d'advection – diffusion suivante définie dans le domaine D qui s'appuie sur la frontière  $\partial D$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + a_r \frac{\partial J_r(F)}{\partial r} + a_z \frac{\partial J_z(F)}{\partial z} = \Phi(F) \quad (\text{A-1})$$

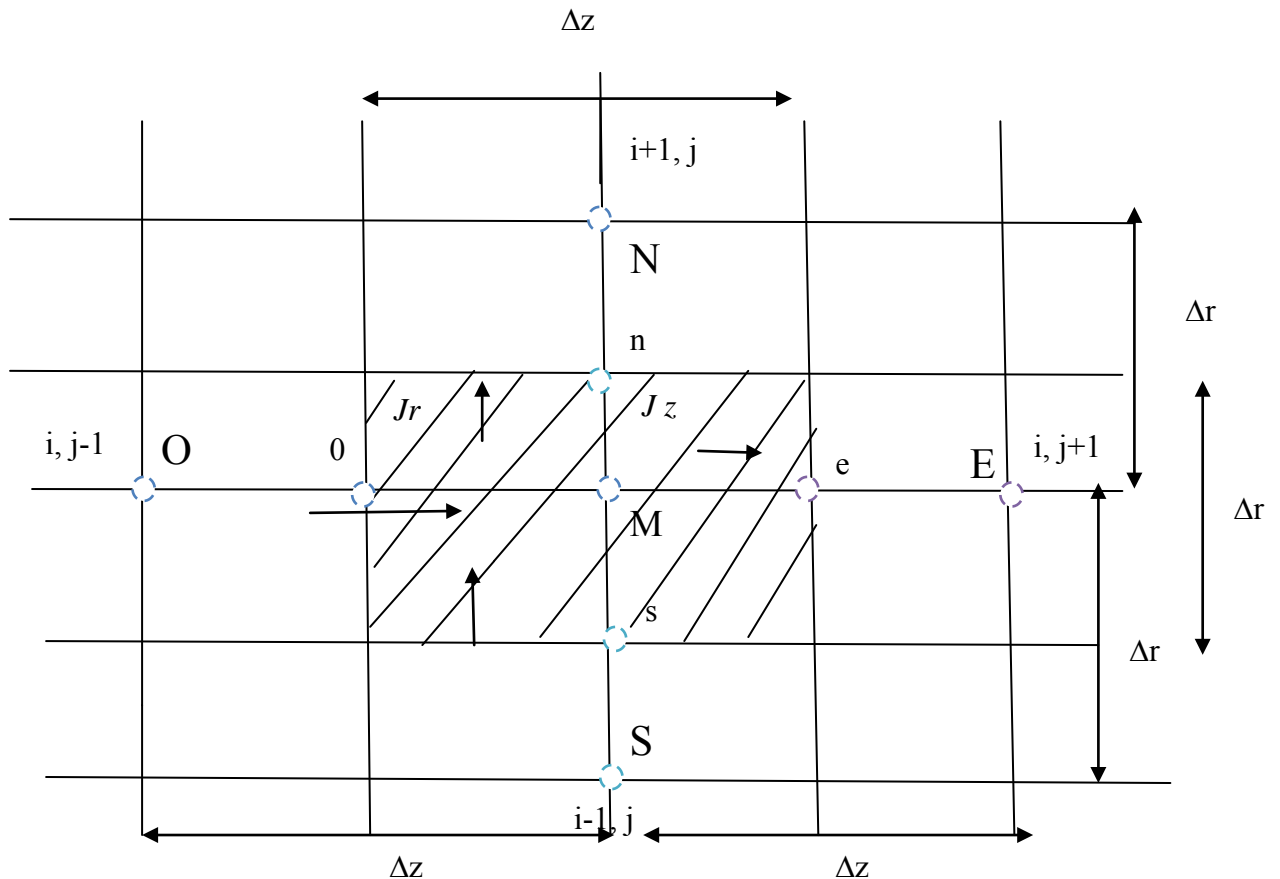
avec

$$J_r(F) = b_r u_r F - c_r \frac{\partial F}{\partial r}$$

$$J_z(F) = b_z u_z F - c_z \frac{\partial F}{\partial z}$$

Les  $J_r$  et  $J_z$  représentent les densités des flux totaux de la grandeur F respectivement dans les directions  $O_r$  et  $O_z$ . L'équation (A. 1) peut être l'équation de la vorticité, du champ des températures, du bilan du champ magnétique ou de conservation de l'espèce

Pour intégrer donc notre équation, nous allons d'abord subdiviser notre domaine en un réseau de rectangles élémentaires de dimensions  $\Delta r$  et  $\Delta z$  constantes.



Au nœud M nous allons centrer un rectangle ( $R_c$ ) de dimensions  $\delta r$  et  $\delta z$ , dit rectangle de contrôle dans lequel nous allons intégrer l'équation (A. 1)

On a

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{R_c} F . dz . dr + a_{rM} \int_{R_c} \frac{\partial J_r}{\partial r} . dz . dr + a_{zM} \int_{R_c} \frac{\partial J_z}{\partial z} . dz . dr = \int_{R_c} \Phi(F) . dz . dr \quad (\text{A. 2})$$

Les  $a_{zM}$  et  $a_{rM}$  sont respectivement les valeurs approchées de  $a_z$  et de  $a_r$  au nœud M. En posant

$$\int_{R_c} X(F) . dz . dr = \delta z . \delta r . X_M(F)$$

où  $X_M(F)$  est la valeur moyenne de  $X(F)$  dans  $R_c$ , alors notre équation (A. 2) devient

$$\delta z . \delta r \frac{\partial F_M}{\partial t} + a_{rM} \int_{R_c} \frac{\partial J_r}{\partial r} . dz . dr + a_{zM} \int_{R_c} \frac{\partial J_z}{\partial z} . dz . dr = \delta z . \delta r . \Phi_M(F) \quad (\text{A. 3}).$$

Maintenant cherchons les approximations des intégrales  $\int_{R_c} \frac{\partial J_r}{\partial r} . dz . dr$  et

$$\int_{R_c} \frac{\partial J_z}{\partial z} . dz . dr$$

Nous avons

$$\int_{R_c} \frac{\partial J_r}{\partial r} . dz . dr = \int_o^e \left[ \int_s^n \frac{\partial J_r}{\partial r} . dr \right] dz$$

Comme

$$\int_s^n \frac{\partial J_r}{\partial r} . dr = J_r(n) - J_r(s)$$

alors nous obtenons

$$\int_{R_c} \frac{\partial J_r}{\partial r} . dz . dr = \delta z [J_r(n) - J_r(s)] \quad (\text{A.4})$$

En procédant de la même manière, nous avons

$$\int_{R_c} \frac{\partial J_z}{\partial z} . dz . dr = \delta r [J_z(e) - J_z(o)] \quad (\text{A.5})$$

Nous avons supposé ici que les densités de flux  $J_r$  et  $J_z$  ne varient pas respectivement le long des segments  $[o; e]$  et  $[s; n]$ . En tenant compte de ces dernières relations notre expression (A. 3) donne

$$\frac{\partial F_M}{\partial t} + \frac{a_{rM}}{\delta r} [J_r(n) - J_r(s)] + \frac{a_{zM}}{\delta z} [J_z(e) - J_z(o)] = \Phi_M(F) \quad (\text{A. 6})$$

Les  $J_r$  et  $J_z$  aux interfaces (n), (s), (e) et (o) ont pour expressions

$$J_r(n) = (b_r u_r F)_n - (c_r)_n \left( \frac{\partial F}{\partial r} \right)_n \quad (\text{A. 7. a})$$

$$J_r(s) = (b_r u_r F)_s - (c_r)_s \left( \frac{\partial F}{\partial r} \right)_s \quad (\text{A. 7. b})$$

$$J_z(e) = (b_z u_z F)_e - (c_z)_e \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)_e \quad (\text{A. 7. c})$$

$$J_z(o) = (b_z u_z F)_o - (c_z)_o \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)_o \quad (\text{A. 7. d})$$

Approximations des densités de flux totaux aux interfaces

Approximation des termes de diffusion aux nœuds du rectangle de contrôle

Pour ne pas se répéter, mettons les termes de diffusion sous la forme suivante  $(c_x)_p \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_p$ . Ici x représente soit r soit z et le nœud (p) peut être o, e, s ou n.

Le terme  $\left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_p$  est approché en utilisant une différence finie centrée au nœud P. On a alors

$$\left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_p = \frac{F_{P+} - F_{P-}}{\Delta x} \quad (\text{A. 8})$$

$P+$  représente le point situé à droite ou au dessus du point P tandis que  $P-$  est le point à gauche ou localisé en dessous de P.  $\Delta x$  est le pas d'espace c'est-à-dire la longueur du segment  $[P- P+]$  de centre P.

Approximation des termes d'advection  $(b_x u_x F)_p$

Nous allons écrire que  $(b_x u_x F)_p$  est la moyenne barycentrique du système  $\{(b_x u_x F)_{P+}; (b_x u_x F)_{P-}\}$  affecté respectivement des coefficients  $y_x$  et  $1-y_x$ . On a donc

$$(b_x u_x F)_p = Y_x (b_x u_x F)_{P+} + (1 - Y_x) (b_x u_x F)_{P-} \quad (\text{A. 9})$$

$y_x$  est un coefficient positif inférieur à 1

Le flux total au nœud P dans la direction x en tenant compte des relations (A. 8) et (A. 9) est donc

$$(J_x)_p = \left[ Yx.(b_x u_x)_{P+} - \frac{(c_x)_p}{\Delta x} \right] F_{P+} + \left[ (1 - Yx)(b_x u_x)_{P-} + \frac{(c_x)_p}{\Delta x} \right] F_{P-} \quad (\text{A. 10})$$

Lorsque  $x = r$ , alors  $P+$  correspond au nœud  $(i+1, j)$  et  $P-$  au nœud  $(i-1, j)$ . Si  $x = z$   $P+$  est le nœud  $(i, j+1)$  et  $P-$  le nœud  $(i, j-1)$ .

En particulierisant donc la relation (A. 10) aux nœuds n, s, e et o il vient alors

$$\begin{aligned} (J_r)_n &= \left[ Y_r.(b_r u_r)_{i+1,j} - \frac{(c_r)_{i+1,j}}{\Delta r} \right] F_{i+1,j} + \\ &\left[ (1 - Y_r)(b_r u_r)_{i,j} + \frac{(c_r)_n}{\Delta r} \right] F_{i,j} \\ (J_r)_s &= \left[ Y_r.(b_r u_r)_{i,j} - \frac{(c_r)_s}{\Delta r} \right] F_{i,j} + \\ &\left[ (1 - Y_r)(b_r u_r)_{i-1,j} + \frac{(c_r)_s}{\Delta r} \right] F_{i-1,j} \\ (J_z)_e &= \left[ Y_z.(b_z u_z)_{i,j+1} - \frac{(c_z)_e}{\Delta z} \right] F_{i,j+1} + \\ &\left[ (1 - Y_z)(b_z u_z)_{i,j} + \frac{(c_z)_e}{\Delta x} \right] F_{i,j} \\ (J_z)_o &= \left[ Y_z.(b_z u_z)_{i,j} - \frac{(c_x)_p}{\Delta x} \right] F_{i,j} + \\ &\left[ (1 - Y_z)(b_z u_z)_{i,j-1} + \frac{(c_z)_o}{\Delta z} \right] F_{i,j-1} \end{aligned}$$

Dans notre problème nous avons choisi  $Y_x = 1/2$ . Dans ces conditions les valeurs d'une grandeur X fonction de r et z aux interfaces du rectangle de contrôle deviennent

$$\begin{aligned} X)_n &= \frac{1}{2} \left( X_{i+1,j} + X_{i,j} \right) \quad ; \quad X)_s = \frac{1}{2} \left( X_{i,j} + X_{i-1,j} \right) \\ X)_0 &= \frac{1}{2} \left( X_{i,j-1} + X_{i,j} \right) \quad ; \quad X)_e = \frac{1}{2} \left( X_{i,j} + X_{i,j+1} \right) \end{aligned}$$

Ainsi les coefficients A, B, C et D des systèmes tridiagonaux (2.3 .5) sont

**Pour l'équation du bilan de l'espèce**

$$A_{1i,j} = -\frac{\Delta t}{2(i-1)} \left\{ \frac{(2i-3)}{2fPe_{mas} \Delta r^2} + \frac{(i-2)u_{ri-1,j}}{2\Delta r} \right\}$$

$$A_{2i,j} = -\frac{\Delta t}{2} \left\{ \frac{f}{Pe_{mas} \Delta z^2} + \frac{u_{zi,j-1}}{2\Delta z} \right\}$$

$$B_{1i,j} = \left\{ 1 + \frac{\Delta t}{fPe_{mas} \Delta r^2} \right\}$$

$$B_{2i,j} = \left\{ 1 + \frac{\Delta t}{Pe_{mas} \Delta z^2} \frac{f}{2} \right\}$$

$$C_{1i,j} = -\frac{(2i-1)\Delta t}{2(i-1)} \left\{ \frac{1}{2fPe_{mas} \Delta r^2} - \frac{u_{ri+1,j}}{4\Delta r} \right\}$$

$$C_{2i,j} = -\frac{\Delta t}{2} \left\{ \frac{f}{Pe_{mas} \Delta z^2} - \frac{u_{zi,j+1}}{2\Delta z} \right\}$$

$$D_{1i,j} = -\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial J_z^n}{\partial z} + C_{i,j}^n$$

$$D_{2i,j} = -\frac{1}{(i-1)\Delta r} \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial J_r^{n+\frac{1}{2}}}{\partial r} + C_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$$



**Pour le champ thermique**

$$A_{1i,j} = -\frac{\Delta t}{2(i-1)} \left\{ \frac{(2i-3)}{2fPe_{,th} \Delta r^2} + \frac{(i-2)u_{ri-1,j}}{2\Delta r} \right\}$$

$$A_{2i,j} = -\frac{\Delta t}{2} \left\{ \frac{f}{Pe_{,th} \Delta z^2} + \frac{u_{zi,j-1}}{2\Delta z} \right\}$$

$$B_{1i,j} = \left\{ 1 + \frac{\Delta t}{fPe_{,th} \Delta r^2} \right\}$$

$$B_{2i,j} = \left\{ 1 + \frac{\Delta t}{Pe_{,th} \Delta z^2} \frac{f}{2} \right\}$$

$$C_{1i,j} = -\frac{(2i-1)\Delta t}{2(i-1)} \left\{ \frac{1}{2fPe_{,th} \Delta r^2} - \frac{u_{ri+1,j}}{4\Delta r} \right\}$$

$$C_{2i,j} = -\frac{\Delta t}{2} \left\{ \frac{f}{Pe_{,th} \Delta z^2} - \frac{u_{zi,j+1}}{2\Delta z} \right\}$$

$$D_{1i,j} = -\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial J_z^n}{\partial z} + \frac{\Delta t}{2} \Phi_{i,j}^n(\theta) + \theta_{i,j}^n$$

$$D_{2i,j} = -\frac{1}{(i-1)\Delta r} \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial J_r^{n+\frac{1}{2}}}{\partial r} + \frac{\Delta t}{2} \Phi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}(\theta) + \theta^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}$$

**Pour l'équation du champ de vorticité**

$$A_{1i,j} = -\frac{\Delta t}{2(i-1)} \left\{ \frac{(2i-3)}{2f \operatorname{Re} \Delta r^2} + \frac{(i-2)u_{ri-1,j}}{2\Delta r} \right\}$$

$$A_{2i,j} = -\frac{\Delta t}{2} \left\{ \frac{f}{\operatorname{Re} \Delta z^2} + \frac{u_{zi,j-1}}{2\Delta z} \right\}$$

$$B_{1i,j} = \left\{ 1 + \frac{\Delta t}{f \operatorname{Re} \Delta r^2} \right\}$$

$$B_{2i,j} = \left\{ 1 + \frac{\Delta t}{\operatorname{Re} \Delta z^2} \frac{f}{2} \right\}$$

$$C_{1i,j} = -\frac{(2i-1)\Delta t}{2(i-1)} \left\{ \frac{1}{2f \operatorname{Re} \Delta r^2} - \frac{u_{ri+1,j}}{4\Delta r} \right\}$$

$$C_{2i,j} = -\frac{\Delta t}{2} \left\{ \frac{f}{\operatorname{Re} \Delta z^2} - \frac{u_{zi,j+1}}{2\Delta z} \right\}$$

$$D_{1i,j} = -\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial J_z^n}{\partial z} + \frac{\Delta t}{2} \Phi_{i,j}^n(\omega) + \omega_{i,j}^n$$

$$D_{2i,j} = -\frac{1}{(i-1)\Delta r} \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial J_r^{n+\frac{1}{2}}}{\partial r} + \frac{\Delta t}{2} \Phi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}(\omega) + \omega_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}$$

**Pour l'équation du bilan du champ magnétique**

$$A_{1i,j} = -\frac{\Delta t}{2} \left\{ \frac{1}{f \operatorname{Re} m \Delta r^2} + \frac{u_{ri-1,j}}{2\Delta r} \right\}$$

$$A_{2i,j} = -\frac{\Delta t}{2} \left\{ \frac{f}{\operatorname{Re} m \Delta z^2} + \frac{u_{zi,j-1}}{2\Delta z} \right\}$$

$$\begin{aligned}
B_{1i,j} &= \left\{ 1 + \frac{\Delta t}{f \operatorname{Rem} \Delta r^2} \right\} \\
B_{2i,j} &= \left\{ 1 + \frac{\Delta t}{\operatorname{Rem} \Delta z^2} \frac{f}{f} \right\} \\
C_{1i,j} &= -\frac{\Delta t}{2} \left\{ \frac{1}{f \operatorname{Rem} \Delta r^2} - \frac{u_{ri+1,j}}{2 \Delta r} \right\} \\
C_{2i,j} &= -\frac{\Delta t}{2} \left\{ \frac{f}{\operatorname{Rem} \Delta z^2} - \frac{u_{zi,j+1}}{2 \Delta z} \right\} \\
D_{1i,j} &= -\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial J_z^n}{\partial z} + B_{\theta i,j}^n D_{1i,j} = -\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial J_z^n}{\partial z} + B_{\theta i,j}^n \\
D_{2i,j} &= -\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial J_r^{n+\frac{1}{2}}}{\partial r} + B_{\theta}^{n+\frac{1}{2}}_{i,j}
\end{aligned}$$