

GLOSSAIRE

GLOSSAIRE

NOTATION	SIGNIFICATION OU DESIGNATION	UNITES
Filasse	Fibre végétale tirée du sisal où du chanvre	
C	Chaleur spécifique	J. (Kg. °C) ⁻¹
T	Température	°C
h	Coefficient d'échange thermique	
z	Longueur du matériau	m
r	Rayon du matériau	m
α	Coefficient diffusivité thermique	m ² .s ⁻¹
λ	Coefficient de conductivité thermique	w (m. °C) ⁻¹
ρ	Masse volumique	Kg.m ⁻³
Z _T	Impédance thermique	K.w ⁻¹
\vec{J}	Vecteur densité de flux	w.m ⁻²
ϕ	Densité de flux suivant 2 directions	w.m ⁻²

SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE	2
PREMIERE PARTIE : ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE	3
I- INTRODUCTION	4
II- 1 ORIGINE DU SISAL.....	4
II- 2 FAMILLE VEGETALE DU SISAL.....	4
II-3 ORIGINE DU CHANVRE	5
II-4 FAMILLE VEGETALE DU CHANVRE.....	5
II-5 PROPRIETES ET APPLICATIONS DU CHANVRE.....	6
DEUXIEME PARTIE : ETUDE THERMIQUE	8
I. INTRODUCTION	9
II. ETUDE DU TRANSFERT DE CHALEUR	9
II. 1 SCHEMA DU DISPOSITIF D'ETUDE	9
II.2 EXPRESSION DE LA TEMPERATURE ET DU FLUX DE CHALEUR.....	10
III. EVOLUTION DE LA TEMPERATURE	13
III.1 EN FONCTION DE LA PROFONDEUR Z DU MATERIAU.....	13
III -2 EN FONCTION DU RAYON	15
III-3 EVOLUTION DU COEFFICIENT D'ECHANGE.....	16
IV- EVOLUTION DE LA DENSITE DE FLUX DE CHALEUR.....	17
IV-1 EN FONCTION DE LA PROFONDEUR Z.....	17
IV-2 EN FONCTION DU RAYON	18
IV-3 EN FONCTION DU COEFFICIENT D'ECHANGE	19
V – IMPEDANCE DYNAMIQUE.....	20
V- 1 EQUIVALENCE ELECTRIQUE- THERMIQUE.....	20
VI-2 IMPEDANCE DYNAMIQUE DU MATERIAU	21
a) EXPRESSION.....	21
b) DIAGRAMME DE BODE DE L'IMPEDANCE.....	21
VI – CONCLUSION	22
CONCLUSION GENERALE	22
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....	23
ANNEXES MATHEMATIQUES.....	24

INTRODUCTION GENERALE

Les bilans énergétiques effectués dans les bâtiments climatisés font apparaître que la part importante de la consommation électrique attribuable aux installations de conditionnement d'air se situe dans une plage de 50 à 60 % de la facturation électrique ; d'où l'intérêt de l'optimisation de la consommation énergétique dû à ces installations. Et ce-ci passe nécessairement par l'isolation thermique des bâtiments (mûr, plafond etc.), et des conduits d'air (gaines). C'est à la recherche d'un bon isolant que nous nous proposons de faire une étude thermique sur la filasse qui représente la texture des fibres du chanvre ou du sisal.

En effet nous avons choisi comme thème : « étude en coordonnées cylindriques du transfert thermique en régime dynamique fréquentiel : application à la filasse ».

Nous abordons cette étude dans un premier chapitre par une présentation du chanvre puis du sisal.

Dans un deuxième chapitre nous présenterons des courbes d'évolution de la température et du flux de chaleur pour terminer par une analogie électrique thermique dans laquelle nous présenterons des diagrammes de Bode de l'impédance.

PREMIÈRE PARTIE

ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

I- INTRODUCTION

Dans ce chapitre nous présenterons la filasse : fibre du chanvre où du sisal ; pour cela nous commencerons par une présentation des plantes.

II- 1 ORIGINE DU SISAL

Le sisal est originaire de l'est du Mexique .Sisal est également le nom de la fibre extraite des feuilles de cette plante.

Le nom provient de la ville de Sisal situé dans la province du Yucatan.L'intérêt de cette plante poussera des pays européens comme, la Belgique et la France ; des pays américains comme, le Brésil, la Colombie, le Venezuela et Cuba à introduire cette plante dans leur agriculture.

L'introduction du sisal en Afrique est à mettre à l'actif des colons.Il a été introduit au Congo par les Belges, en Afrique du Nord (Maroc et Algérie) ,en Madagascar et en A.O.F (Haute-Volta ,Mali ,Guinée et Sénégal) par les Français.

II- 2 FAMILLE VEGETALE DU SISAL

Le sisal est une des nombreuses espèces du genre *Agave Sisalana* .C' est une plante de moyenne taille de la famille des Agavaceae de la classe des Liliopsida et de la sous – classe des Liliidea

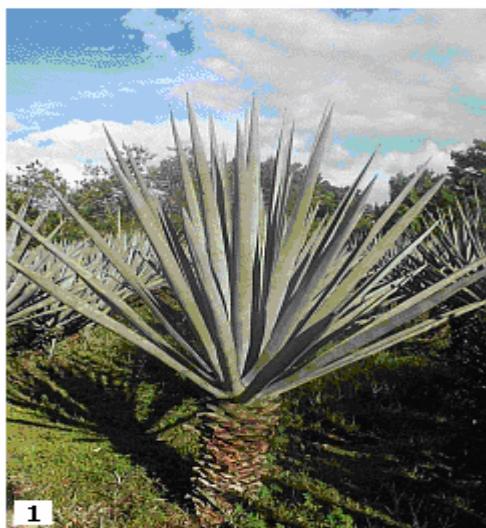


Figure 1 :Sisal



Figure 2:fibres du sisal

Nous avons fait une présentation du Sisal en donnant son origine, son morphologie ainsi que sa famille végétale ; nous ferons de même sur ce qui suit pour le chanvre.

II-3 ORIGINE DU CHANVRE

Le chanvre est une des premières plantes domestiquées par l'homme, au Néolithique, probablement en Asie, tout à la fois pour ses fibres solides, ses graines oléagineuses nourrissantes et les propriétés médicales de sa résine. Il a ensuite accompagné migrations et conquêtes pour se répandre sur tous les continents.

L'origine géographique du chanvre n'est pas certaine : plaines de l'Asie centrale dans le secteur du lac Baïkal pour certains, région moyenne du fleuve Jaune en Chine pour d'autres, ou en contreforts indiens de l'Himalaya.

Les plus anciennes traces archéologiques de son utilisation par l'homme ont été retrouvées en Chine, dans l'un des foyers de la révolution agricole néolithique.

Les fouilles du site néolithique de Xianradong (dans le Jianxi), daté de 8000 av.J .C ont ainsi livré de la céramique, certains pots décorés de fibres spiralées de chanvre.

Les principaux pays producteurs de chanvres industriels sont la Chine, la Russie, la Pologne, l'Ukraine, la Turquie, l'Espagne, la Roumanie, la Chili .

II-4 FAMILLE VÉGÉTALE DU CHANVRE

Le chanvre (*cannabis sativa L*) connu aussi sous le nom latin *cannabis* est une espèce de plante de la famille des Cannabaceae. C'est la seule espèce actuellement acceptée du genre *Cannabis*.

L'espèce *Cannabis Sativa L* a été subdivisée en de nombreux sous espèces. Cette subdivision est discutée par les botanistes : certains ne considèrent pas les différences des sous espèces comme suffisamment significatives pour le justifier. On peut néanmoins différencier quatre phénotypes bien distincts :

- *Cannabis Sativa subsp Sativa*, ou chanvre cultivé
- *Cannabis Sativa subsp indien*, ou chanvre indien
- *Cannabis Sativa subsp spontanea*, ou chanvre sauvage
- *Cannabis Sativa subsp afghanica*, ou chanvre afghan



Figure 3: Chanvre cultivée



Figure 4: Chanvre sauvage



Fig 5: Tige avec mise en évidence des fibres du chanvre

II-5 PROPRIETES ET APPLICATIONS DU CHANVRE

Actuellement les nouvelles tendances écologiques ont permis l'arrivée en puissance des biomatériaux .Les techniques et les connaissances permettent d'envisager des applications toujours variées pour le chanvre comme nous allons le voir.

Déjà prescrit dans certains pays comme adjudant au traitement du cancer ou du sida ,des glaucomes de la dépression ;le chanvre a des propriétés analgésiques et anxiolytiques grâce au THC (Tétra Hydro - Cannabinol) qu'il contient ,substance psychotrope qui lutte contre les nausées et le manque d'appétit.

Le chanvre peut être utilisé dans le domaine de l'automobile, ainsi Ford produit une voiture avec carrosserie en chanvre ; Diesel utilise l'huile de chanvre (ainsi que d'autre huiles végétales) comme carburant pour son moteur.

Il apparaît que le chanvre a un potentiel important en tant que source de biocarburant.

Les fibres du chanvre offrent une multitude d'usages pour l'habillement, les sacs à dos, les moquettes, les matelas, les cordes pour ne nommer que quelques un.

Il pourrait être utilisé comme isolant dans le cadre du bâtiment du fait que sa filasse est imputrescible, ininflammable, pas comestible aux rongeurs et insectes ; mais surtout de son importante inertie thermique (capacité d'un matériau à accumuler de l'énergie thermique et à la restituer, par la suite sur une période de temps plus ou moins longue).



Figure 7: De la filasse

DEUXIEME PARTIE
ETUDE THERMIQUE

I. INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent nous avons vu les propriétés de la filasse et l'intérêt de l'utiliser comme isolant thermique.

Dans ce chapitre, nous proposons une étude du transfert de chaleur à travers la filasse en régime dynamique fréquentiel.

Nous présenterons des courbes d'évolution de la température et du flux de chaleur. Nous ferons l'analogie électrique thermique pour exprimer l'impédance dynamique.

II. ETUDE DU TRANSFERT DE CHALEUR

II. 1 SCHEMA DU DISPOSITIF D'ETUDE

Nous disposons d'un matériau de forme cylindrique de hauteur z et de rayon r , soumis sur les deux surfaces de bases à des températures en régime dynamique fréquentiel comme l'indique sur la figure.

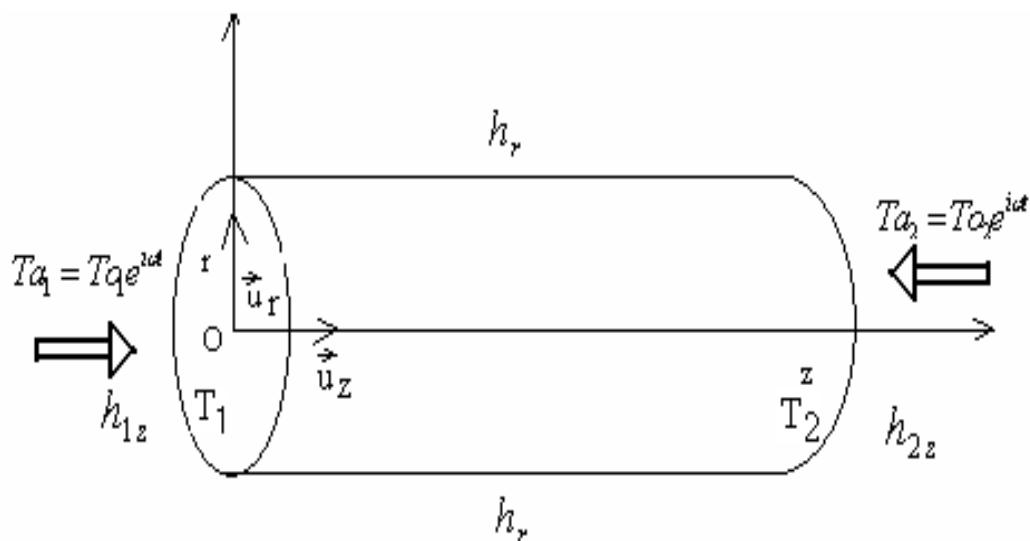


Figure II.1 : Schéma du matériau

$$0 \leq r \leq R_o$$

$$0 \leq z \leq H$$

h1z : Coefficient d'échange thermique à la face surface de base avant

h2z : Coefficient d'échange thermique surface de base arrière

hr : Coefficient d'échange thermique uniforme sur toute surface latérale

Ta1 : Température imposée à la surface de base avant

Ta2 : Température imposée à la surface de base arrière

T01 : Température maximale à la surface de base avant

T02 : Température maximale à la surface de base arrière

T1 : Température à la surface de base avant du matériau

T2 : Température à la surface de base arrière du matériau

II.2 EXPRESSION DE LA TEMPERATURE ET DU FLUX DE CHALEUR

Le transfert de chaleur est régi par l'équation suivante dite de la chaleur :

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + P + \vec{\nabla} \cdot \lambda \left(\vec{\nabla} T \right) \quad (\text{II.2.1})$$

A conductivité thermique constante on a : $\vec{\nabla} \cdot \lambda \left(\vec{\nabla} T \right) = 0$

En l'absence de source et de puits de chaleur internes, on a : $P = 0$

L'équation devient :

$$\Delta T - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.2.2})$$

$$\text{Avec } \alpha = \frac{\lambda}{\rho \cdot C} \quad (\text{II.2.3})$$

En coordonnées cylindriques à symétrie axiale (la température T ne dépend pas de la coordonnée θ), l'équation s'écrit

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.2.4})$$

où

λ ($\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \text{K}^{-1}$) est la conductivité thermique du matériau

C ($\text{J} \cdot \text{Kg}^{-1} \cdot \text{C}^{-1}$) est la chaleur spécifique du matériau ($\text{J} \cdot \text{Kg}^{-1} \cdot \text{C}^{-1}$).

P ($\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$) représente le puit de chaleur

ρ ($\text{Kg} \cdot \text{m}^{-3}$) est la masse volumique du matériau

Z (m) représente l'abscisse (profondeur du matériau)

r (m) représente l'ordonnée (le rayon du matériau)

T (K ou $^{\circ}\text{C}$) est la température en un point considéré.

α est le coefficient de diffusion thermique.

La résolution de l'équation (II.2.4) en régime dynamique fréquentiel (voir annexe mathématique) conduit à la solution :

$$T(r, z, \omega, t) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j J_0(\mu_j \cdot r) [A_j \sinh(\beta_j z) + B_j \cosh(\beta_j z)] e^{i\omega t} \quad (\text{II.2.5})$$

avec

$$J_0(\mu_j \cdot r) = \frac{(r \cdot \mu_j)^{k_0}}{2^{k_0}} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^2 \cdot (r \cdot \mu_j)^{2m}}{4^m \cdot m! \cdot m!} \right] \quad (\text{II.2.6})$$

$k_0 = 0$

En appliquant les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = h_{1z} [T(r, 0, t) - T_{a1}] \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=H} = h_{2z} [T(r, H, t) - T_{a2}] \end{cases} \quad (\text{II.2.8})$$

Nous obtenons les expressions des coefficients A_j et B_j

$$A_j = \frac{-h_{1z}To[\lambda\beta.coch(\beta.H)+h_{2z}\sinh(\beta.H)]+\lambda h_{2z}To_2}{h_{1z}[\lambda\beta J_0(\mu_j.r)\cosh(\beta.H)+h_{2z}J_0(\mu_j.r)\sinh(\beta.H)]+\lambda[\lambda J_0(\mu_j.r)\sinh(\beta.H)+J_0(\mu_j.r)h_{2z}\sinh(\beta.H)]} \quad (\text{II.2.9})$$

$$B_j = \frac{h_{1z}h_{2z}To_1h_{2z}To_2[\lambda\beta\cosh(\beta.H)+h_{2z}\sinh(\beta.H)]}{h_{1z}[\lambda\beta J_n(\mu_j.r)\cosh(\beta.H)+h_{2z}J_n(\mu_j.r)\sinh(\beta.H)]+\lambda[\lambda J_n(\mu_j.r)\sinh(\beta.H)+J_n(\mu_j.r)h_{2z}\sinh(\beta.H)]} \quad (\text{II.2.10})$$

Les μ_j sont obtenus à partir de la condition à la limite suivante après résolution graphique de l'équation transcendance :

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = h_r T(R_0, z, t) \quad (\text{II.2.11})$$

Equation transcendance :

$$\lambda\mu J_1(\mu.R_0) - h_r J_0(\mu.R_0) = 0 \quad (\text{II.2.12})$$

La condition initiale suivante :

$$T(r,0,t) = To = \sum_{j=1}^{\infty} C_j J_0(\mu_j r) \quad (\text{II.2.13})$$

Et cette condition d'orthogonalité

$$\int_0^{R_o} r J_0\left(\frac{n_i r}{R_o}\right) J_0\left(\frac{n_j r}{R_o}\right) dr = \begin{cases} 0 & \text{pour } j \neq i \\ \neq 0 & \text{pour } j = i \end{cases} \quad (\text{II.2.14})$$

Donnent l'expression du coefficient C_j

$$C_j = \frac{2To J_1(\mu_j R_o)}{\mu_j R_o [J^2_0(\mu_j R_o) + J^2_1(\mu_j R_o)]} \quad (\text{II.2.15})$$

La densité du flux de chaleur est donnée par l'expression

$$\begin{aligned}\phi(r, z, \omega, t) = & \left\{ \lambda^2 \sum_{j=1}^{\infty} \left[C \cdot e^{i\omega t} [(\mu_j J_1(\mu_j \cdot r)) [A_j \cosh(\beta_j \cdot z) + B_j \sinh(\beta_j \cdot z)]]^2 \right] \right. \\ & \left. + \lambda^2 \sum_{j=1}^{\infty} [C_j \cdot e^{i\omega t} J_0(\mu_j \cdot r) [\beta_j \cdot A_j \cosh(\beta_j \cdot z) + \beta_j \cdot B_j \sinh(\beta_j \cdot z)]]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{II.2.16})\end{aligned}$$

Nous considérons la diffusion de la chaleur à travers le matériau en considérant des coefficients d'échanges à la surface latérale et de base arrière faibles par rapport à celui de la surface de base avant

III. EVOLUTION DE LA TEMPERATURE

III.1 EN FONCTION DE LA PROFONDEUR Z DU MATERIAU

A la figure III.1.a nous présentons l'évolution de la température en fonction de la profondeur du matériau pour différentes fréquences.

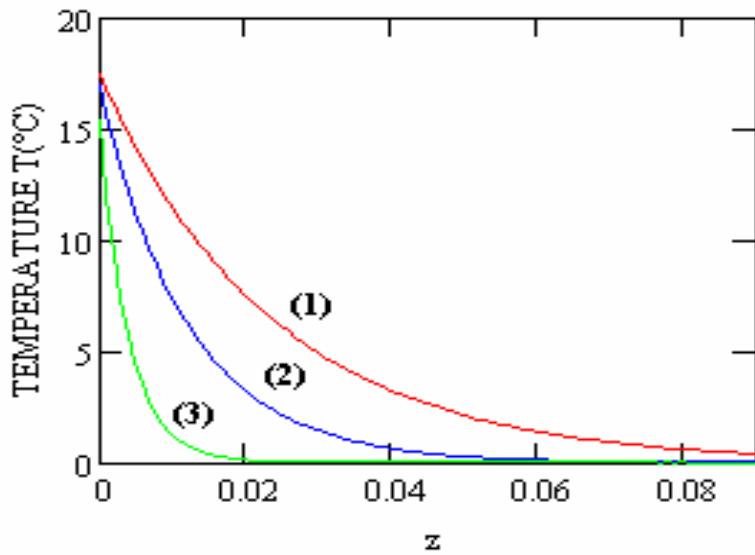


Figure III .1.a : Evolution de la température en fonction de la profondeur
 $\lambda = 8,28 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $\alpha = 0,063 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1}$
 $r = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $h_1 = 30 \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{C}^\circ)$, $h_2 = 10^{-2}$, $h_r = 10^{-3} \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{C}^\circ)$
(1) $\omega = 10^{-4} \text{ rad/s}$
(2) $\omega = 10^{-2} \text{ rad/s}$
(3) $\omega = 1 \text{ rad/s}$

A la figure III.1.b nous présentons l'évolution de la température en fonction de la profondeur du matériau pour différents coefficients d'échange à la surface de base avant.

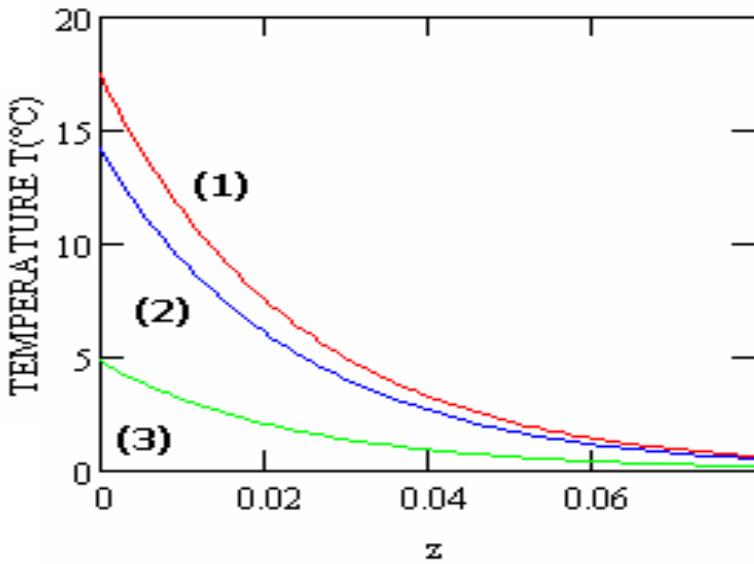


Figure III.1.b : Evolution de la température en fonction de la profondeur
 $\lambda = 8,28 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $\alpha = 0,063 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1}$, $hr = 10^{-3} \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{C}^\circ)$, $h_2 = 10^{-2} \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{C}^\circ)$
 $r = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$, $\omega = 10^{-3} \text{ rad/s}$
(1) $h_1 = 30 \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{C}^\circ)$
(2) $h_1 = 10 \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{C}^\circ)$
(3) $h_1 = 1 \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{C}^\circ)$

Les courbes montrent que la température est maximale à la surface de base où le coefficient d'échange est élevé (surface de base avant).

La température diminue et à tendance à s'annuler si on entre en profondeur dans matériau ; ce qui montre la capacité de la filasse à retenir la chaleur. Pour la figure III.1.a) où on a fait varier la fréquence excitatrice on obtient la même valeur maximale de la température à la surface de base avant ; par contre on assiste à une variation de cette valeur à la figure III.1 b) en fonction du coefficient d'échange fixé.

On peut aussi noter que les faibles fréquences donnent une meilleure transmission de la chaleur, alors cette dernière est favorisée par des coefficients d'échange élevés.

III -2 EN FONCTION DU RAYON

A la figure III -2-a nous présentons la courbe d'évolution de la température en fonction du rayon pour différentes fréquences.

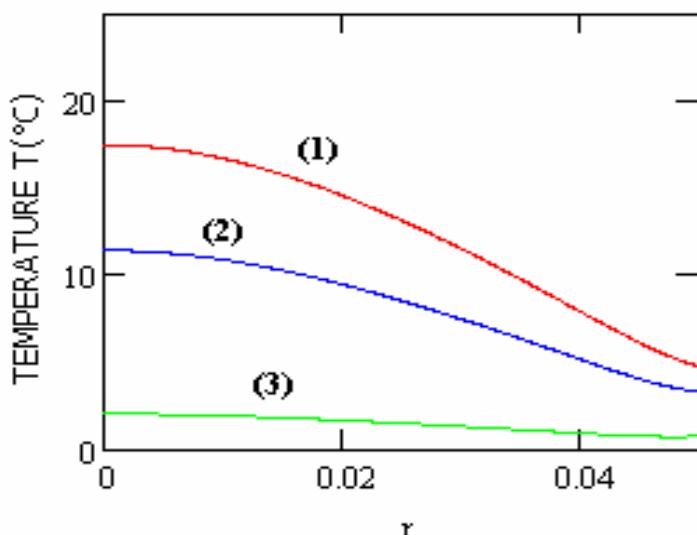


Figure III -2-a : Evolution de la température en fonction du rayon

$$\lambda = 8,28 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}, \alpha = 0,063 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$h_1 = 30 \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{C}^\circ), h_2 = 10^{-2} \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{C}^\circ)$$

$$h_r = 10^{-3} \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{C}^\circ), z = 15 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$(1) \omega = 10^{-4} \text{ rad/s}$$

$$(2) \omega = 10^{-2} \text{ rad/s}$$

$$(3) \omega = 1 \text{ rad/s}$$

A la figure III -2-b nous présentons la courbe d'évolution de la température en fonction du rayon pour différentes coefficients d'échange à la surface de base avant.

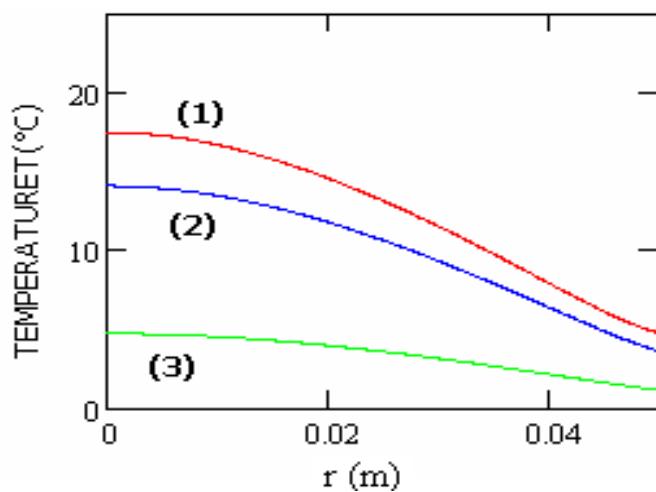


Figure III- 2- b: Evolution de la température en fonction du rayon.

$$\lambda = 8,28 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}, \alpha = 0,063 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$h_r = 10^{-3} \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{C}^\circ), z = 15 \cdot 10^{-2} \text{ m}, \omega = 10^{-3} \text{ rad/s}, h_2 = 10^{-2} \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{C}^\circ)$$

$$(1) h_1 = 30 \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{C}^\circ)$$

$$(2) h_1 = 10 \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{C}^\circ)$$

$$(3) h_1 = 1 \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{C}^\circ).$$

Pour les deux figures on observe pratiquement les mêmes profiles de courbes, que ça soit avec une variation de la fréquence excitatrice (**Figure III -2-a**), soit Coefficient d'échange avec une variation du coefficient d'échange. On note toujours une diminution de la température en fonction du rayon, mais cette fois elle ne tend pas rapidement vers une nulle comme au **III -1**

III-3 EVOLUTION DE LA TEMPERATURE EN FONCTION DU COEFFICIENT D'ECHANGE

A la figure III -3-1 nous présentons la courbe d'évolution de la température en fonction du Coefficient d'échange à la surface de base avant pour différentes fréquences.

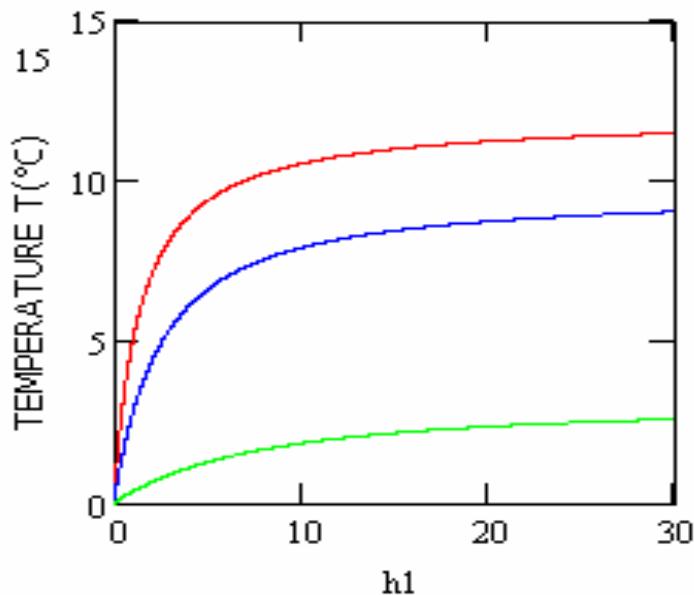


Figure III- 3-1 : Evolution de la température en fonction du coefficient d'échange

$$\lambda = 8,28 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}, \alpha = 0,063 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$h_2 = 10^{-2} \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{C}^\circ), h_r = 10^{-3} \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{C}^\circ),$$

$$z = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}, r = 10^{-2} \text{ m}$$

$$(1) \omega = 10^{-3} \text{ rad/s}$$

$$(2) \omega = 10^{-2} \text{ rad/s}$$

$$(3) \omega = 10^{-1} \text{ rad/s}$$

A la figure III -3-2 nous présentons la courbe d'évolution de la température en fonction du coefficients d'échange à la surface de base avant pour différentes profondeur du matériau.

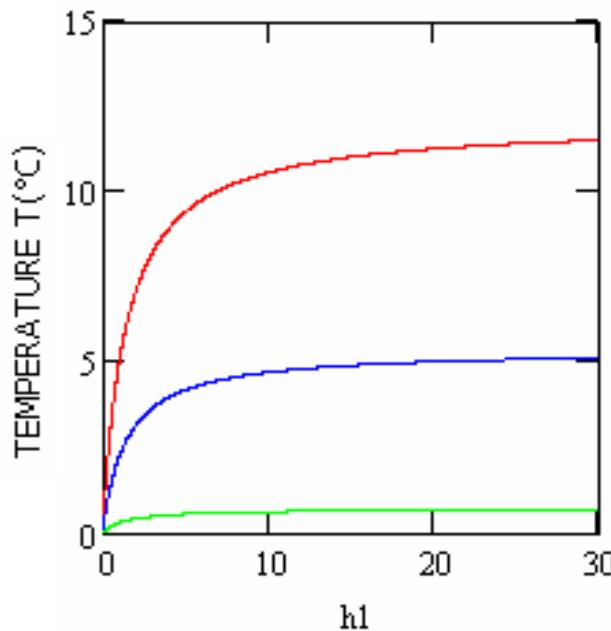


Figure III- 3 – 1 : Evolution de la température en fonction du coefficient d'échange
 $\lambda = 8,28 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $\alpha = 0,063 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1}$
 $h_2 = 10^{-2} \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{C}^\circ)$, $\omega = 10^{-3} \text{ rad/s}$, $hr = 10^{-3} \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{C}^\circ)$
(1) $z = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
(2) $z = 8 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
(3) $z = 10^{-1} \text{ m}$

Pour les deux figures, on a les mêmes profiles de courbes. La température croît avec l'augmentation du coefficient d'échange, devient maximale pour une certaine valeur de h_1 .

A partir d'un certain point du matériau le coefficient d'échange n'influe plus sur la température. Le système emmagasine de l'énergie et pourra le restituer plus tard, donc il se comporte comme un condensateur.

Après avoir fait l'étude l'évolution de la température, nous passons à celle de la densité du flux de chaleur

IV- EVOLUTION DE LA DENSITE DE FLUX DE CHALEUR

IV-1 EN FONCTION DE LA PROFONDEUR Z

Nous présentons l'évolution de la densité du flux de chaleur en fonction de la profondeur z pour différentes fréquences.

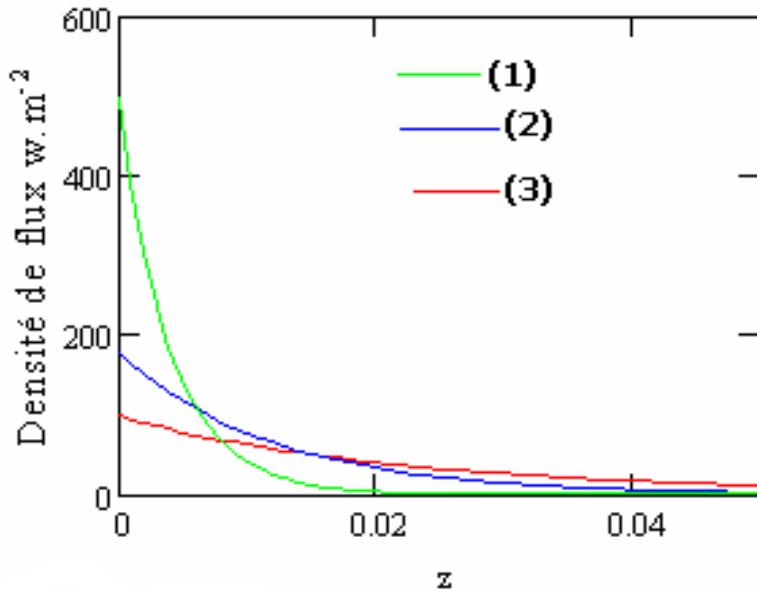


Figure IV-1 : Evolution du flux de chaleur en fonction de z

$\lambda = 8,28 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$, $\alpha = 0,063 \text{ w.m}^{-1}$

$r = 10^{-2} \text{ m}$, $h_1 = 30 \text{ w/ (m}^2 \cdot {^\circ}\text{C)}$, $h_2 = 10^{-2} \text{ w/ (m}^2 \cdot {^\circ}\text{C)}$, $h_r = 10^{-3} \text{ w/(m}^2 \cdot {^\circ}\text{C)}$

(1) $\omega = 10^{-3} \text{ rad/s}$

(2) $\omega = 10^{-2} \text{ rad/s}$

3) $\omega = 10^{-1} \text{ rad/s}$

La densité de flux de chaleur est maximale à la surface de base avant où le coefficient d'échange est élevé, puis décroît en fonction de la profondeur. Comme pour la température, les faibles fréquences donnent une meilleure transmission de la densité de flux de chaleur.

IV-2 EN FONCTION DU RAYON

Nous présentons l'évolution de la densité du flux de chaleur en fonction du rayon pour différentes fréquences.

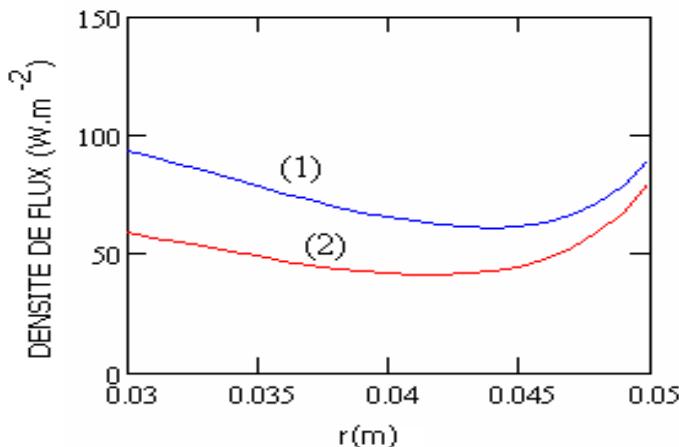


Figure IV- 2 Evolution de la température en fonction du rayon

$$\lambda = 8,28 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}, \alpha = 0,063 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$z = 10^{-2} \text{ m}, hr = 10^{-3} \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{C}^\circ)$$

$$h1 = 30 \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{C}^\circ), h2 = 10^{-2} \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{C}^\circ)$$

$$(1) \omega = 10^{-3} \text{ rad/s}$$

$$(2) \omega = 10^{-1} \text{ rad/s}$$

La densité de flux de chaleur est maximale, puis décroît en fonction du rayon. A partir d'une certaine valeur de r , on assiste à une croissance de la densité de flux de chaleur pour atteindre la valeur maximale du début.

IV-3 EN FONCTION DU COEFFICIENT D'ECHANGE

Nous présentons à la Figure IV- 3 l'évolution de la densité de flux de chaleur en fonction du coefficient d'échange pour deux fréquences différentes.

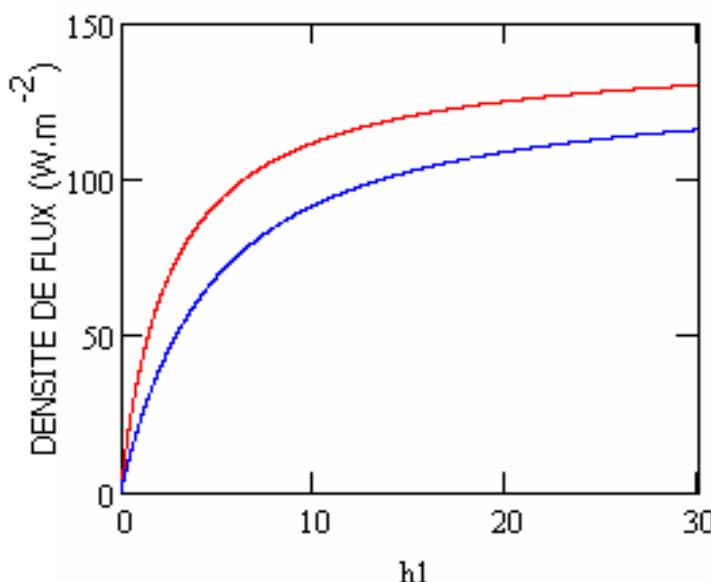


Figure IV- 3 : Variation de la densité de flux en fonction du coefficient

$$\lambda = 8,28 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}, \alpha = 0,063 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$hr = 10^{-3} \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{C}^\circ), h2 = 10^{-2} \text{ W} / (\text{m}^2 \cdot \text{C}^\circ)$$

$$(1) \omega = 10^{-3} \text{ rad/s}$$

$$(2) \omega = 10^{-1} \text{ rad/s}$$

La densité de flux de chaleur croît avec l'augmentation du coefficient d'échange ; puis devient constante à partir d'une certaine valeur de h_1 , ce qui se traduit par le palier observé. Comme toujours le maximum atteint par la densité de flux de chaleur est d'autant plus importante que la fréquence est faible.

Dans le paragraphe suivant, l'analogie entre les grandeurs thermiques et celles électriques, nous permettra d'exprimer l'impédance dynamique du matériau et de tracer le diagramme de Bode correspondant.

V – IMPEDANCE DYNAMIQUE

V- 1 EQUIVALENCE ELECTRIQUE- THERMIQUE

Par analogie à la loi d'Ohm, nous posons :

$$\Delta T = T_1 - T_2 = Z_T \cdot \phi$$

où

Z_T représente l'impédance du matériau

ϕ le flux de chaleur à travers le matériau

Nous donnons la correspondance entre les grandeurs électrique et thermiques dans le tableau ci-dessous

TABLEAU DE CORRESPONDANCE ELECTRIQUE THERMIQUE

GRANDEURS ELECTRIQUES	GRANDEURS THERMIQUES
Intensité $I = \frac{dq}{dt}$ (A)	Flux $\phi = -\lambda \vec{\text{grad}}T$ (w)
Potentiel électrique V (V)	Température T (°K)
Impédance électrique $Z_e = \frac{\Delta V}{I}$ (Ω)	Impédance thermique $Z_T = \frac{\Delta T}{\phi}$ (°K.w-1)

Tableau : Equivalence électrique- thermique

VI-2 IMPEDANCE DYNAMIQUE DU MATERIAU

a) EXPRESSION

La correspondance électrique- thermique précédemment définie nous permet d'établir l'expression de l'impédance dynamique du matériau.

$$T(0,0,\omega,t) - T(r,z,\omega,t) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j C_j e^{i\omega t} - \sum_{j=1}^{\infty} C_j J_0(\mu_j r) [A_j \sinh(\beta_j z) + B_j \cosh(\beta_j z)] e^{i\omega t}$$

En tenant compte de l'expression () on peut écrire :

$$Z_T = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} B_j C_j e^{i\omega t} - \sum_{j=1}^{\infty} C_j J_0(\mu_j r) [A_j \sinh(\beta_j z) + B_j \cosh(\beta_j z)] e^{i\omega t}}{\phi}$$

$$\text{Avec } \phi(r,z,\omega,t) = \left\{ \lambda^2 \sum_{j=1}^{\infty} \left[C_j e^{i\omega t} [J_1(\mu_j r)] [A_j \cosh(\beta_j z) + B_j \sinh(\beta_j z)] \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \lambda^2 \sum_{j=1}^{\infty} \left[C_j e^{i\omega t} J_0(\mu_j r) [\beta_j A_j \cosh(\beta_j z) + \beta_j B_j \sinh(\beta_j z)] \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$$

b) DIAGRAMME DE BODE DE L'IMPEDANCE

Nous présentons le diagramme de Bode de l'impédance à la figure suivante :

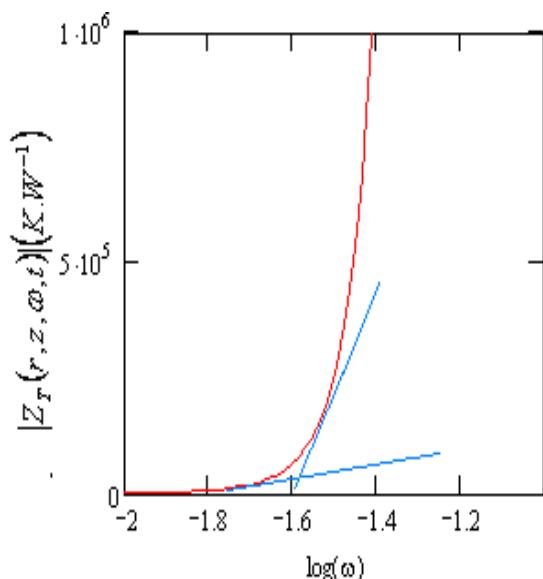


Figure VI-2 : Diagramme de Bode de l'impédance thermique du matériau

$$\lambda = 8,28 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}, \alpha = 0,063 \text{ W.m}^{-1}$$

$$r = 10^{-2} \text{ m}, z = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$hr = 10^{-3} \text{ w}/(\text{m}^2 \cdot \text{C}^\circ), h1 = 30 \text{ w}/(\text{m}^2 \cdot \text{C}^\circ)$$
$$h2 = 10^{-2} \text{ w}/(\text{m}^2 \cdot \text{C}^\circ)$$

Le diagramme de Bode permet de déterminer la fréquence de coupure ω_c . Cette fréquence est obtenu en traçant les deux tangentes aux parties rectilignes de la courbe à partir du point d'intersection des tangentes on projette sur l'axe des abscisse. Le module de l'impédance est nul pour les faibles fréquences pour les fréquences élevées, puis croît avec l'augmentation de celles -ci.

VI – CONCLUSION

Les différentes courbes étudiées montrent qu'un meilleur transfert de chaleur en régime dynamique fréquentiel est obtenu pour une fréquence excitatrice faible et un coefficient d'échange élevé.

CONCLUSION GENERALE

Dans cette étude nous avons fait dans une première partie une présentation du sisal et du chanvre. En effet, nous avons donné leurs origines, leurs propriétés et applications.

Nous avons vu que ces deux plantes produisaient de la filasse qui pouvait être utilisée comme isolant dans le cadre du bâtiment vue son inertie thermique importante.

Dans une deuxième partie nous avons fait une étude thermique dans la quelle nous avons déterminé les expressions mathématiques de la température et de la densité de flux de chaleur. Nous présenté des courbes dévolutions de la température et de la densité de flux de chaleur en fonction des coordonnées r et z , de la fréquence excitatrice, et du coefficient d'échange.

Nous avons constaté qu'une meilleure transmission de la chaleur est obtenue avec une fréquence excitatrice faible et un coefficient d'échange élevé à la surface de base avant.

En fin à partir de l'équivalence électrique –thermique nous avons pu exprimer l'impédance dynamique du matériau et accédée à la fréquence de coupure ω_c par la représentation du diagramme de Bode de l'impédance.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] I. Diagne, B.Fleur, M.O.Sidiya, S.Gaye, G.Sissoko « Détermination de paramètres thermiques d'un matériau en régime dynamique fréquentiel à partir de diagrammes de Bode et de représentation de Nyquist » Journal des Sciences 2008, vol 8, n°2
- [2] Maréchal J.C & Devise J.M « Diffusivité thermique des matériau de construction méthode du signal périodique » Anales I.TB.T.P n°35 ,1978
- [3] Maréchal J.C & Devise « Métrologie thermique des matériaux isolants par mesure du flux en régime dynamique transitoire .Matériaux et construction »vol 7 ,n° 41,1974.
- [4] SACADURA J.C « Initiation aux transferts thermiques .Technique et documentation .Lavoisier,janvier 1993
- [5] Joseph Fourier « Théorie analytique de la chaleur »1988
- [6] Ibrahim Dincer & M .Ferhat Yardim “Récent in Transport Phénomène”The Datat Science Library, 2000
- [7] Martinet J « Détermination des constants thermiques des solides au moyen des méthodes de régimes variables » Publications et techniques du ministère de l'air, n°139 ,1965
- [8] J.TAINE, J .P.PETIT « Transferts thermiques, mécanique des fluides anisothermes » Dunod
- [9] Bruno Chéron « Transfert thermique : Résumé de cours, problèmes corrigés » ellipses /édition marking S.A., 1999
- [10] HVALACKA (V.)- "Periodic heating of a system of cylinders and determining the heat transfer coefficient on this basis." -J. Eng.Phys.vol.24,no1, Jan.1973.

ANNEXES MATHEMATIQUES**I- EQUATION DE LA CHALEUR**

Pour de faibles variations de température, la conduction de la chaleur est donnée par la loi de FOURIER dans un milieu isotrope.

$$\mathbf{Q} = \vec{\mathbf{grad}} T \quad (1)$$

$\vec{\mathbf{J}}$ Vecteur densité de chaleur

T température du système

Ainsi la densité de flux de chaleur Φ dans 2 directions caractérisées par les vecteurs unitaires \vec{u}_r , et \vec{u}_z est :

$$\Phi = \vec{\mathbf{J}}_r \cdot \vec{u}_r + \vec{\mathbf{J}}_z \cdot \vec{u}_z \quad (2)$$

Le bilan d'énergie dans un système de volume

Elle s'obtient en écrivant le bilan d'énergie dans un volume(v)caractérisé par sa conductivité(λ),sa masse volumique(ρ)et sa chaleur spécifique(C) .Nous considérons que : la variation de température dans le volume(V) est due à la présence de sources internes et à la chaleur entrant dans le volume .

* Q_1 est la quantité de chaleur pénétrant dans le volume (V) à travers la surface (S) pendant le temps δt .

$$Q_1 = \iint_S \lambda \vec{\nabla} T \cdot \vec{dS} \delta t \quad (3)$$

* Q_2 est la quantité de chaleur créée dans le volume (V) par les sources internes pendant le temps δt .

$$Q_2 = \iiint_V P dv \delta t \quad (4)$$

P est le puits de chaleur

* Q_3 est la quantité de chaleur nécessaire à la variation de température dT , du volume (V) pendant δt . C'est la chaleur spécifique du matériau.

$$Q_3 = \iiint_V \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dv \delta t \quad (5)$$

Le bilan énergie nous permet d'écrire :

$$Q_1 + Q_2 = Q_3 \quad (6)$$

Ce qui équivaut à :

$$\iint_S \lambda \vec{\nabla} T \cdot \vec{dS} \delta t + \iiint_V P dv \delta t = \iiint_V \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dv \delta t \quad (7)$$

La relation d'Ostrogradsky nous permet de passer d'une intégral d'une surface à une intégral sur le volume. Ainsi l'équation peut se mettre sous la forme .

$$\iiint_V \vec{\nabla} \left(\lambda \vec{\nabla} T \right) dV \delta t + \iiint_V P dv \delta t = \iiint_V \rho C \frac{\partial T}{\partial t} dv \delta t \quad (8)$$

Pour un instant δt et localement,nous aurons donc :

$$\vec{\nabla} \left(\lambda \vec{\nabla} T \right) + P = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (9)$$

D'où finalement l'équation de la chaleur devient :

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \Delta T + P + \vec{\nabla} \lambda \left(\vec{\nabla} T \right) \quad (10)$$

II Température en régime dynamique fréquentiel

Sans puit et source de chaleur interne dans le milieu, on peut écrire $P=0$. L'équation de la chaleur en coordonnées cylindriques s'écrit :

$$\lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \rho C \frac{\partial T}{\partial t} \quad (11)$$

Posons $\alpha = \frac{\lambda}{\rho C}$

L'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (12)$$

Nous proposons une séparation des variables pour déterminer la solution de l'équation, on pose $T(r, z, t) = R(r)Z(z)\tau(t)$, en tenant compte des relations ci-dessous :

$\frac{\partial T}{\partial r} = Z(z)\tau(t) \frac{\partial R(r)}{\partial r}$	(13)
$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = Z(z)\tau(t) \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2}$	(14)
$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = R(r)\tau(t) \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2}$	(15)
$\frac{\partial T}{\partial t} = R(r)Z(z) \frac{\partial \tau(t)}{\partial t}$	(16)

On obtient :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} \quad (17)$$

Cherchons une solution périodique de la même forme que l'excitation en posant:

$$\frac{1}{\alpha \tau} \frac{\partial \tau}{\partial \tau} = C \quad \text{d'où } \tau(t) = K e^{i \omega t}, \text{ avec } C = i \omega$$

L'équation devient :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR} \frac{\partial R}{\partial r} = - \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \frac{i \omega}{\alpha} \quad (18)$$

$$\text{On pose : } \eta^2 = \frac{i \omega}{\alpha}$$

Pour que l'équation (13) soit vraie chaque membre doit être égal à une constante ; posons le égale à $-\beta^2$

$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR} \frac{\partial R}{\partial r} + \beta^2 - \eta^2 = 0$	(19)
$\frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} - \beta^2 = 0$	(20)
Posons : $\mu^2 = \beta^2 - \eta^2$	(21)

En multipliant (14) par rR , on obtient l'équation de Bessel :

Soit :

$$r \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{\partial R(r)}{\partial r} + (\beta^2 - \eta^2) r R(r) = 0 \quad (22)$$

L'équation (22) à pour solution les fonctions de Bessel de première espèce d'ordre zéro:

$$R(r) = C_1 J_0(\mu r) + C_2 Y_0(\mu r)$$

Avec $J_0(\mu_j \cdot r) = \frac{(r \cdot \mu_j)^{k_0}}{2^{k_0}} \sum_{m=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^2 \cdot (r \cdot \mu_j)^{2m}}{4^m \cdot m! \cdot m!} \right]$

$$Y_0(\mu_j \cdot r) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{J_r(\mu_j \cdot r) \cos(r\Pi) - J_{-r}(\mu_j \cdot r)}{\sin(r\Pi)}$$

La solution de l'équation s'écrit (20):

$$Z(z) = A \sinh(\beta z) + B \cosh(\beta z)$$

Pour déterminer les coefficients K, C₁, C₂, A et B, nous appliquons les conditions aux limites ci-dessous :

- a) Sur l'axe du cylindre, la température est finie or $Y_0(\mu r)$ est une fonction qui $\rightarrow 0$ quand $r \rightarrow 0$, donc nécessairement on doit avoir $C_2=0$, R (r) ne comporte pas le terme $Y_{0n}(\mu r)$

b) $-\lambda \frac{\partial T}{\partial r} \Big|_{r=R_0} = h_r T(R_0, z, t) \quad (23)$

Ce qui donne :

$$\lambda \mu J_1(\mu R_0) - h_r J_0(\mu R_0) = 0 \quad (24)$$

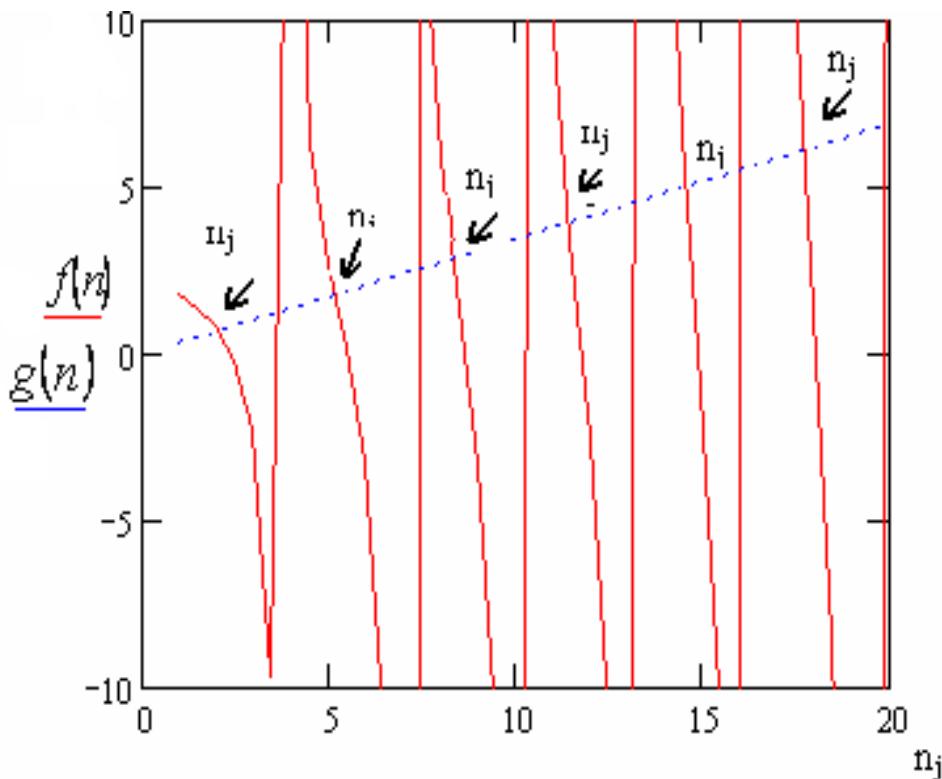
Cherchons les μ_j qui sont solutions de cette équation.

Pour cela nous posons : $n_j = R_0 \cdot \mu_j$

Ainsi nous obtenons :

$$\frac{J_0(n_j)}{J_1(n_j)} = \frac{\lambda n_j}{h_r R_0} \quad (25)$$

Pour déterminer les μ_j nous traçons les courbes $f(n_j)$ et $g(n_j)$



DETERMINATION GRAPHIQUE DES VALEURS PROPRES DE L'EQUATION (17)

Les n_j sont donnés par les intersections des deux courbes. Connaissant n_j , nous pouvons accéder aux μ_j grâce à la relation $n_j = R_0 \cdot \mu_j$

Nous obtenons les valeurs suivantes :

n_j	2	7,5	8,5	11,5	14,5	18
μ_j	66,7	25	28,3	38,3	51,6	60

Conditions aux limites suivant z

$$\begin{cases} \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = h_{1z} [T(r, 0, t) - T_{a1}] \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=H} = h_{2z} [T(r, H, t) - T_{a2}] \end{cases} \quad (26)$$

Nous obtenons le système suivant :

$$\begin{aligned} h_{1z} J_0(\mu_j \cdot r) A - \lambda \beta B J_0(\mu_j \cdot r) &= h_{1z} T o_1 \\ [\lambda J_0(\mu_j \cdot r) \beta \sinh(\beta \cdot H) + J_0(\mu_j \cdot r) h_{2z} \cosh(\beta \cdot H)] A + [\lambda J_0(\mu_j \cdot r) \beta \cosh(\beta \cdot H) + J_0(\mu_j \cdot r) h_{2z} \sinh(\beta \cdot H)] B &= h_{2z} T o_2 \end{aligned} \quad (28)$$

Nous posons :

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = h_{1z} J_0(\mu_j \cdot r) \\ \varepsilon_2 = \lambda J_0(\mu_j \cdot r) \beta \sinh(\beta \cdot H) + J_0(\mu_j \cdot r) h_{2z} \cosh(\beta \cdot H) \\ \gamma_1 = \lambda J_0(\mu_j \cdot r) \\ \gamma_2 = \lambda J_0(\mu_j \cdot r) \beta \cosh(\beta \cdot H) + J_0(\mu_j \cdot r) h_{2z} \sinh(\beta \cdot H) \\ \delta_1 = h_{1z} T o_1 \\ \delta_2 = h_{2z} T o_2 \end{cases}$$

Ce qui donne en représentation matricielle :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -\gamma_1 \\ \varepsilon_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$$

A partir des déterminants on obtient :

$$A = \frac{-\delta_1\gamma_2 + \delta_2\gamma_1}{\varepsilon_1\gamma_2 + \varepsilon_2\gamma_1} = \frac{-h_{1z}To[\lambda\beta.coch(\beta.H) + h_{2z}\sinh(\beta.H)] + \lambda h_{2z}To_2}{h_{1z}[\lambda\beta J_0(\mu_j.r)\cosh(\beta.H) + h_{2z}J_0(\mu_j.r)\sinh(\beta.H)] + \lambda[\lambda J_0(\mu_j.r)\sinh(\beta.H) + J_0(\mu_j.r)h_{2z}\sinh(\beta.H)]}$$

$$B = \frac{\varepsilon_1\delta_2 + \varepsilon_2\delta_1}{\varepsilon_1\gamma_2 + \varepsilon_2\gamma_1} = \frac{h_{1z}h_{2z}To_1h_{2z}To_2[\lambda\beta\cosh(\beta.H) + h_{2z}\sinh(\beta.H)]}{h_{1z}[\lambda\beta J_0(\mu_j.r)\cosh(\beta.H) + h_{2z}J_0(\mu_j.r)\sinh(\beta.H)] + \lambda[\lambda J_0(\mu_j.r)\sinh(\beta.H) + J_0(\mu_j.r)h_{2z}\sinh(\beta.H)]}$$

L'expression finale de la température est :

$$\mathbf{T}(r, z, t) = \sum_{j=1}^{\infty} C_j J_0(\mu_j r) [A_j \sinh(\beta_j z) + B_j \cosh(\beta_j z)] e^{i\omega t} \quad (29)$$

C est déterminé à partir de la condition initiale

$$T(r, 0, t) = To = \sum_{j=1}^{\infty} C_j J_0(\mu_j r) \quad (30)$$

En tenant compte de la relation $\mu_j = \frac{n_j}{R_0}$, on peut écrire :

$$To = \sum_{j=1}^{\infty} C_j J_0\left(\frac{n_j r}{R_0}\right)$$

En mathématique on montre que les fonctions $\sqrt{r} J_0(ar)$ et $\sqrt{r} J_0(br)$ sont orthogonales

$$\int_0^{Ro} r J_0\left(\frac{n_i r}{Ro}\right) J_0\left(\frac{n_j r}{Ro}\right) dr = \begin{cases} 0 & \text{pour } j \neq i \\ \neq 0 & \text{pour } j = i \end{cases}$$

$$\text{On a donc : } \int_0^{Ro} r J_0^2\left(\frac{n_i r}{Ro}\right) dr = \frac{R^2 o}{2} [J_0^2(n_i) + J_0^2(n_i)]$$

$$C_j = \frac{\int_0^{R_o} r T o J_0 \left(\frac{n_j r}{Ro} \right) dr}{\int_0^{R_o} r J^2 o \left(\frac{n_j r}{Ro} \right) dr}$$

$$C_j = \frac{2T_0 J_1(n_j)}{n_i [J^2 o(n_j) + J^2 o(n_j)]} = \frac{2ToJ_1(\mu_j Ro)}{\mu_j Ro [J^2 o(\mu_j Ro) + J^2 o(\mu_j Ro)]} \quad (31)$$

III. EXPRESSION DE LA DENSITE DEFLUX DE CHALEUR

Nous considérons que le vecteur de flux de chaleur à deux composante :une suivant r et une suivant z ,dont les expression sont donnée par :

$$\vec{J}_r = -\lambda \vec{\text{grad}} T_{|r} \quad (32)$$

$$\vec{J}_z = -\lambda \vec{\text{grad}} T_{|z} \quad (33)$$

Les densités de flux respectives sont données par :

$$\phi_r = \vec{J}_r \cdot \vec{u}_r \quad (34)$$

$$\phi_z = \vec{J} \cdot \vec{u}_z \quad (35)$$

La densité de flux globale est donnée par la relation

$$\phi(r, z, \omega, t) = \sqrt{[\phi_r^2(r, z, \omega, t) + \phi_z^2(r, z, \omega, t)]} \quad (36)$$

L'expression finale de la densité de flux de chaleur est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \phi(r, z, \omega, t) = & \left\{ \lambda^2 \sum_{j=1}^{\infty} \left[C \cdot e^{i\omega t} \left[(\mu_j J_1(\mu_j \cdot r)) [A_j \cosh(\beta_j \cdot z) + B_j \sinh(\beta_j \cdot z)] \right]^2 \right] \right. \\
 & \left. + \lambda^2 \sum_{j=1}^{\infty} \left[C_j \cdot e^{i\omega t} J_0(\mu_j \cdot r) [\beta_j \cdot A_j \cosh(\beta_j \cdot z) + \beta_j \cdot B_j \sinh(\beta_j \cdot z)] \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{37}$$

IV. IMPEDANCE THERMIQUE DU MATERIAU

La correspondance électrique- thermique précédemment nous permet d'établir l'expression de la résistance dynamique du matériau

Par analogie à la loi d'Ohm, nous posons :

$$\Delta T = T_1 - T_2 = Z_d \cdot \phi \tag{38}$$

où

Z_T représente l'impédance du matériau

ϕ La densité de flux de chaleur à travers le matériau

ΔT est la différence de température entre deux point du matériau.

$$\Delta T = T(0,0,\omega,t) - T(r,z,\omega,t) = \sum_{j=1}^{\infty} B_j C_j e^{i\omega t} - \sum_{j=1}^{\infty} C_j J_0(\mu_j \cdot r) [A_j \sinh(\beta_j \cdot z) + B_j \cosh(\beta_j \cdot z)] e^{i\omega t} \tag{39}$$

L'impédance est donnée par :

$$Z_T = \frac{\sum_{j=1}^{\infty} B_j C_j e^{i\omega t} - \sum_{j=1}^{\infty} C_j J_0(\mu_j \cdot r) [A_j \sinh(\beta_j \cdot z) + B_j \cosh(\beta_j \cdot z)] e^{i\omega t}}{\phi} \tag{40}$$