

# TABLES DES MATIERES

REMERCIEMENTS.....	a
TABLES DES MATIERES .....	b
NOTATIONS ET NOMENCLATURES.....	d
LISTES DES TABLEAUX.....	f
TABLES DES FIGURES.....	g
INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE I : GENERALITES .....	3
I-I-OPTIMISATIONS .....	3
I-I-1- Notations .....	3
I-I-2- Quelques définitions.....	3
I-I-3- Existence d'un minimum en dimension finie .....	4
I-I-4- Analyse convexe.....	5
I-I-5- Condition d'optimalité.....	7
I-I-6- Méthode de pénalisation .....	11
I-I-7- Algorithmes.....	12
I-II-ETABLISSEMENT DES EQUATIONS DE STOKES .....	16
I-III- MAILLAGES .....	16
I-III-1-Définition 15( <i>Maillage</i> ) .....	16
I-III-2-Triangulation.....	17
CHAPITRE II- MATERIELS ET METHODES .....	18
II-I- MATERIELS .....	18
A-GMSH .....	18
B-MATLAB .....	18
II.II- METHODES DES RESOLUTIONS DES EQUATIONS DES STOKES .....	19
A-    MAILLAGE DE DOMAINE D'ETUDE .....	19
B-    FORMULATIONS VARIATIONNELLES DU PROBLEME DE STOKES.....	20
C-    LES LAGRANGIENS.....	22
D-    ALGORITHME D'UZAWA .....	24
E-    METHODES DES ELEMENTS FINIS .....	25
CHAPITRE III- RESULTATS ET DISCUSSION.....	34
III-I-RESULTATS .....	34
III-II-DISCUSSION.....	35

<b>CONCLUSION</b> .....	37
<b>REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES</b> .....	38
<b>ANNEXES</b> .....	I
<b>ANNEXE A</b> .....	I
<b>ANNEXE B</b> .....	II

# NOTATIONS ET NOMENCLATURES

$m$  : Masse du fluide

$\rho$  : Masse volumique du fluide

$u$  : vitesse du fluide

$\vec{a}$  : Accélération

$\vec{g}$  : Accélération de la pesanteur

$\text{div} \vec{u}$  : Divergence de la vitesse  $u$

$p$  : Pression

$\mu$  : viscosité dynamique

$f$  : Force de volume

$\Delta, \nabla$  : Operateur

$Re$  : Nombre de Reynolds

$C, V, K, U$  : Espaces vectorielles

$\Omega$  : Domaine fluide

$\Gamma_1, \Gamma_2$  : Frontières de  $\Omega$

$\theta$  : Un nombre compris entre  $[0,1]$

$\lambda_i$  : Multiplicateur de Lagrange

$\varphi_i$  : Fonction dans  $V$

$L(v, \lambda)$  : Lagrangien

$L_r$  : Lagrangien augmenté

$L(X, Y)$  : espace des fonctions linéaires de  $X$  et  $Y$

$u_\Gamma$  : vitesse à la frontière

$a(u, v)$  : Forme bilinéaire

$A(v), T(v)$  : Operateur linéaire

$u^n, u^{n+1}$  : vitesse à l'itération  $n$  et  $n+1$

$p^n, p^{n+1}$  : Pression à l'itération  $n$  et  $n+1$

$\zeta$  : Paramètre lié à la pression

$\{M^e\}$  : Matrice de rigidité élémentaire

$\{M\}$  : Matrice de rigidité assemblée

$(M), (N), (P), (U)$ : Vecteur de sollicitation

# LISTES DES TABLEAUX

Tableau 1: Valeur de  $u$  en faisant varier la fonction test  $v$  dans chaque équation..... 27

Tableau 2: Valeur de la pression en faisant varier la fonction test  $v$  dans chaque équation ..... 29

Tableau 3: Variation de  $s$  en fonction de  $\zeta$  ..... 35

# TABLES DES FIGURES

Figure 1: Domaine d'étude ..... 19

Figure 2: Maillage du domaine d'étude ..... 20

Figure 3: Un élément triangulaire de maillage ..... 25

Figure 4: assemblage de deux triangles..... 32

Figure 5: Champ vectoriel de vitesse ..... 36

Figure 6: Champ vectoriel de pression..... 36

# INTRODUCTION

L'optimisation est un sujet très ancien qui connaît un nouvel essor depuis l'apparition des ordinateurs et dont les méthodes s'appliquent dans de très nombreux domaines : planification, économie, gestion, sciences de l'ingénieur, conception optimale, traitement de signal, etc. C'est aussi un sujet très vaste qui conduit aussi bien au calcul des variations qu'à la recherche opérationnelle. On peut classer l'optimisation en deux grandes branches selon que les variables sont continues ou discrètes. Typiquement, si l'on minimise une fonction  $f(x)$  avec  $x \in \mathbb{R}^n$ , il s'agit d'optimisation en variables continues tandis que si  $x \in \mathbb{Z}^n$  on a fait de l'optimisation combinatoire ou en variables discrètes.

Historiquement, d'anciens grands philosophes et mathématiciens comme Pythagore, Platon, Aristote sont fondées la base de l'optimisation pour chercher l'extremum (minima et maxima) des nombres, des fonctions ou des systèmes. A l'époque l'optimisation est une discipline mathématique qui est nécessaire à la résolution de l'équation  $df = 0$  ou plus exactement pour trouver un optimum local de la fonction : Pierre Fermat en 1601 à 1665. Et en 1940 les premiers principes des méthodes des éléments finis ont été proposés par le Mathématicien Richard Courant [1]. Puis dans les années 1950-1960 les mécaniciens ont développés, démontrés l'efficacité de cette méthode qui fait appel à l'optimisation sans contraintes. Particulièrement, pour les problèmes sans contraintes, on considère les algorithmes de relaxation de Newton, du gradient ou du gradient conjugué tandis que l'autre avec contrainte, on envisagera la méthode d'UZAWA et la méthode des éléments finis.

Dans le présent mémoire, nous avons utilisés une méthode des Lagrangien pour la résolution des équations de STOKES en utilisant la méthode des éléments finis. Ces équations sont caractérisées par les équations aux dérivées partielles sous l'existence des conditions aux limites dont les inconnues sont les vitesses et les pressions du fluide newtonien. Les résolutions des équations de Stokes, seront donc ramenées à l'optimisation avec contrainte. Notre étude porte sur la modélisation numérique à l'écoulement bidimensionnel d'un fluide entre deux cylindres non concentriques.

Le but de ce mémoire est d'appliquer la méthode des éléments finis à la résolution des équations de Stokes et d'observer l'efficacité de cette méthode (on doit avoir une convergence plus rapide mais avec stabilité).

Dans un premier temps nous avons abordé les généralités sur l'optimisation en visualisant les principales définitions et des théorèmes concernant l'optimisation et le Lagrangien augmenté.

La deuxième partie représente les deux méthodologies : la méthode d'Uzawa pour la résolution d'un problème à deux variables duals  $(\vec{u}, \vec{p})$  et la méthode des éléments finis pour résoudre numériquement les équations aux dérivées partielles.

Enfin, on analysera les résultats.





# CHAPITRE I : GENERALITES

## I-I-OPTIMISATIONS

### I-I-1- Notations

Nous considérons principalement des problèmes de minimisation sachant qu'il suffit d'en changer le signe pour avoir un problème de maximisation .

Plus généralement  $V$  sera un espace de Hilbert réel (on pourrait également considérer le cas d'un espace Banach, c'est-à-dire un espace vectoriel normé). On se donne aussi un sous ensemble  $U \subset V$  qui définit les contraintes sur le problème considéré. Considérons un problème (P) d'optimisation qui se présente sous la forme suivante :

*Soient une partie  $U$  non vide d'un espace vectoriel  $V$  et une fonctionnelle  $J:U \subset V \rightarrow \mathbb{R}$ , on cherche  $u$  tel que :  $u \in U$  et  $J(u) = \inf_{v \in U} J(v)$*  (P)

Avec  $U = \{v \in V \text{ telles que } , \varphi_i(v) \leq 0; i = 1 \dots m\}$  ; où les  $\varphi_i$  sont des fonctions de  $V$  dans  $\mathbb{R}$  [2].

Dans toutes les parties qui suivent nous allons considérer  $X$  et  $Y$  des espaces vectoriels normés, et  $\Omega$  un ouvert de  $X$  .

### I-I-2- Quelques définitions

#### Définition 1(Espace de Sobolev)

On appelle **Espace Sobolev** d'ordre 1 sur un domaine  $\Omega$ , l'espace

$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega); \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq n \right\}$  où  $L^2(\Omega)$  est l'espace de Hilbert des fonctions de carré

sommable muni de produit scalaire  $\langle u, v \rangle = \int_{\Omega} u.v d\Omega$  et de norme  $(\|v\| = \langle v, v \rangle^{\frac{1}{2}})$

On munit également l'espace  $H^1(\Omega)$  du produit scalaire  $(u, v)$  tel que :

$$\begin{aligned} (u, v)_{H^1(\Omega)} &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (u_i v_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (u_i v_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}) d\Omega \end{aligned}$$

et la norme correspondante est notée  $\|v\|_{H^1(\Omega)} = [(u,v)]^{\frac{1}{2}}$

### Définition 2 (Minimum local)

On dit que  $u$  est un **minimum** (ou un point de minimum) **local** de la fonctionnelle  $J$  sur  $U$  si et seulement si  $u \in U$  et  $\exists \delta > 0$ ,  $\forall v \in U$ ,  $\|u - v\| < \delta$  alors  $J(v) \geq J(u)$ .

### Définition 3 (Minimum global)

On dit que  $u$  est un **minimum global** de la fonctionnelle  $J$  sur  $U$  si et seulement si  $u \in U$  et  $J(v) \geq J(u)$ ,  $\forall v \in U$ .

### Définition 4 (Infimum)

On appelle **Infimum** de  $J$  sur  $U$  (ou, plus couramment, valeur minimum), la borne supérieure dans  $\mathbb{R}$  des constantes qui minorent  $J$  sur  $U$ . Si  $J$  n'est pas minoré sur  $U$ , alors l'infimum est  $(+\infty)$ . Si  $U$  est vide, par convention, l'infimum est  $(+\infty)$ .

Une suite minimisante de  $J$  sur  $U$  est une suite  $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u^n \in U$  et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(u^n) = \inf_{v \in U} J(v)$$

### Définition 5 (Optimisation avec et sans contraintes)

L'optimisation est dite **sans contraintes** si  $U = V$  dans le problème (P). Elle est dite **avec contraintes** dans le cas contraire [3].

Les contraintes sont souvent de type :

- inégalités :  $U = \{v \in V \text{ telles que } \varphi_i(v) \leq 0, 1 \leq i \leq n\}$ ,
- ou égalités :  $U = \{v \in V \text{ telles que } \varphi_i(v) = 0, 1 \leq i \leq n\}$ , les  $\varphi_i$  étant des fonctions de  $V \subset \mathbb{R}$

### I-I-3- Existence d'un minimum en dimension finie

Nous supposons dans ce section que  $V = \mathbb{R}^n$  l'on munit du produit scalaire usuel  $u.v = \sum_{i=1}^n u_i v_i$

et la norme euclidienne  $\|u\| = \sqrt{u.u}$ .

**Théorème 1**(*Existence d'un minimum en dimension finie* ). Soit  $U$  une partie non vide de  $\mathbb{R}^n$  , et  $J$  une fonction continue sur  $U$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$  vérifiant la propriété :

$$\forall (u^n)_{n \geq 0} \text{ suite dans } U, \lim_{n \rightarrow \infty} \|u^n\| = +\infty \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} J(u^n) = +\infty \quad (1.1)$$

Alors il existe au moins un point de minimum de  $J$  sur  $U$ . De plus, on peut extraire de toute suite minimisante de  $J$  sur  $U$  une sous suite convergente vers un point de minimum sur  $U$  [3].

DEMONSTRATION. Soit  $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite minimisante de  $J$ . La condition (1.1) entraîne que  $(u^n)$  est borné car  $J(u^n)$  est une suite de réels majorée. Donc, il existe une sous suite  $(u^{n_k})$  qui converge vers un point  $u$  de  $\mathbb{R}^n$  . Mais  $u \in U$  puisque  $U$  est fermé, et  $J(u^{n_k})$  converge vers  $J(u)$  par continuité, d'où  $J(u) = \inf_{v \in U} J(v)$  d'après la définition 4.  $\square$

#### I-I-4- Analyse convexe

Un ensemble  $U$  est dit **convexe** si  $\forall u, v \in U$  et tout élément  $\theta \in [0,1]$  , le segment  $[u, v]$  appartient à  $U$  c'est-à-dire  $\theta.u + (1 - \theta).v \in U$

**Définition 6**(*Fonctionnelle convexe*)

Soient  $U$  un ensemble convexe et  $J$  une fonctionnelle définie sur  $U$ ,

$J$  est dite **fonctionnelle convexe** si

$$\forall (u, v) \in U \times U, \forall \theta \in [0,1], J(\theta u + (1 - \theta)v) \leq \theta J(u) + (1 - \theta)J(v)$$

**Définition 7**(*Application dérivée*)

Si  $J$  est dérivable sur  $\Omega$ , l'application définie par  $J': x \in \Omega \subset X \rightarrow J'(x) \in L(X, Y)$  est appelée **application dérivée** où  $L(X, Y)$  est l'espace des fonctions linéaires de  $X$  dans  $Y$

**Définition 8**(Application dérivable)

On dit qu'une application  $J : \Omega \subset X \rightarrow Y$  est **dérivable** en un point  $a \in \Omega$  s'il existe un élément noté  $J'(a)$  de l'espace  $L(X, Y)$  [des applications linéaires de  $X$  dans  $Y$  normé par

$$\|A\| = \sup_{x \in X, x \neq 0} \frac{\|Ax\|_Y}{\|x\|_X}] \text{ tel que l'on puisse écrire :}$$

$$J(a+k) = J(a) + J'(a)k + \|k\| \varepsilon(k) \quad , \quad \lim_{k \rightarrow 0} \varepsilon(k) = 0.$$

On dit que l'application  $J$  est dérivable sur  $\Omega$  si elle est dérivable en tout point de  $\Omega$

**Proposition 1** (condition nécessaire de minimum relatif sur un ensemble convexe).

Soit  $J : \Omega \subset \mathbb{R}$  une fonction définie sur un ouvert d'un espace vectoriel normé  $V$  et  $U$  une partie convexe de  $\Omega$ . Si la fonction  $J$  est dérivable en un point  $u \in U$  et si elle admet en  $u$  un minimum relatif par rapport à l'ensemble  $U$ , alors  $J'(u)(v-u) \geq 0$  pour tout  $v \in U$

DEMONSTRATION. Soit  $v = u + w$  un point quelconque de l'ensemble  $U$ . Cet ensemble étant convexe, les points de la forme  $(u + \theta w), 0 \leq \theta \leq 1$ , sont encore dans  $U$ . La dérivabilité de la fonction  $J$  en  $u$  permet d'écrire

$$J(u + \theta w) - J(u) = \theta(J'(u)w + \varepsilon(\theta)\|w\|), \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon(\theta) = 0,$$

Pour tout  $\theta \in [0, 1]$  (le vecteur  $w$  étant fixé). Alors le nombre  $J'(u)w$  est nécessairement  $\geq 0$ , sans l'hypothèse de convexe  $J(u + \theta w) - J(u) < 0$  pour  $\theta > 0$  suffisamment petit.

REMARQUE : Une fonction  $J : U \subset V \rightarrow \mathbb{R}$  définie sur une partie convexe  $U$  est dite **strictement convexe** si  $\forall (u, v) \in U \times U, \forall \theta \in [0, 1], J(\theta u + (1 - \theta)v) < \theta J(u) + (1 - \theta)J(v)$

**Théorème 2.** Soit  $U$  une partie convexe d'un espace vectoriel normé  $V$  [2].

- 1- Si une fonction convexe  $J : U \subset V \rightarrow \mathbb{R}$  admet un minimum relatif en un point de  $U$ , ce point est un minimum global.
- 2- Une fonction  $J : U \subset V \rightarrow \mathbb{R}$  strictement convexe admet au plus un minimum
- 3- Soit  $J : U \subset V \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe définie sur un ouvert  $\Omega$  de  $V$  contenant  $U$ , dérivable en un point  $u \in U$ . Alors  $J$  admet un minimum en  $u$  par rapport à l'ensemble  $U$  si et seulement si :  $J'(u)(v-u) \geq 0, \forall v \in U$

DEMONSTRATION. (1) Soit  $v = u + w$  un point quelconque de l'ensemble  $U$ . D'après la convexité de la fonction  $J$ ,  $J(u + \theta w) \leq (1 - \theta)J(u) + \theta J(v)$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ ,

ce que l'on peut encore écrire  $J(u + \theta w) - J(u) \leq \theta(J(v) - J(u))$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ .

Comme le point  $u$  est un minimum relatif, il existe un nombre  $\theta_0$  tel que

$$\theta_0 > 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq J(u + \theta_0 w) - J(u).$$

ce qui entraîne  $J(v) \geq J(u)$ .

(2) Si la fonction est strictement convexe le même raisonnement conduit aux inégalités

$$0 \leq J(u + \theta_0 w) - J(u) < \theta_0(J(v) - J(u)). \quad \theta_0 \geq 0, w \neq 0.$$

ce qui établit le caractère strict du minimum et donc du même coup son unicité.

(3) On a montré à la proposition 1 la nécessité de la condition  $J'(u)(v - u) \geq 0$  pour tout

$v \in U$  (sans supposer convexe).  $\square$

### I-I-5- Condition d'optimalité

Dans cette section, l'objectif est d'une certaine manière beaucoup plus pratique, les conditions d'optimalité seront fréquemment utilisées pour tenter de calculer un minimum.

#### Définition 9(Contraintes qualifiées)

On dit que les contraintes sont **qualifiées** en  $u$  (minimum de  $J$ ) si :

- ou bien les fonctions  $\varphi_i$  sont affines
- ou bien les vecteurs  $\varphi_i(u)$ ,  $i \in I_0$  sont linéairement indépendants

$$(I_0(u) = \{i \in \{1, \dots, m\}, \varphi_i(u) = 0\}).$$

### Théorème 3 (Kuhn-Tucker)

Soit  $J : \Omega \subset V \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur un ouvert convexe d'un espace de Hilbert  $V$ , et  $U = \{v \in \Omega; \varphi_i(v) \leq 0, 1 \leq i \leq m\}$  une partie de  $\Omega$  ; les contraintes  $\varphi_i : \Omega \subset V \rightarrow \mathbb{R}, 1 \leq i \leq m$  étant supposées convexes. Soit  $u \in U$  un point en lequel les contraintes sont dérivables

(i) Si  $u$  est un minimum relatif de  $J$  par rapport à l'ensemble  $U$ , et si les contraintes sont qualifiées alors  $\exists \lambda_i(u) \in \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{cases} J'(u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(u) \varphi_i'(u) = 0 \\ \lambda_i(u) \geq 0, 1 \leq i \leq m, \sum_{i=1}^m \lambda_i(u) \varphi_i(u) = 0 \end{cases}$$

(ii) Réciproquement, si  $J : U \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe et s'il existe des nombres  $\lambda_i, 1 \leq i \leq m$ , tels que les relations précédentes soient satisfaites, alors  $u$  est un minimum de  $J$  par rapport à l'ensemble  $U$ .

DEMONSTRATION. (i) il suffit naturellement de montrer que, si des contraintes convexes  $\varphi_i$  sont qualifiées, elles le sont aussi en tout point  $u \in U$  au sens entendu antérieurement, ce qui permet d'utiliser la définition 9 et la proposition 1.

Or, si  $u \neq v$ , le vecteur  $w = v - u$  répond à la question puisque

$$\varphi_i'(u)w = \varphi_i(u) + \varphi_i'(u)(v-u) \leq \varphi_i(v) \quad \text{pour tout } i \in I(u).$$

les fonctions  $\varphi_i$  étant convexes ; si  $u = v$ , l'ensemble  $I(u)$  ne peut contenir que des indices  $i$  pour lesquels les fonctions  $\varphi_i$  correspondantes sont affines, et le vecteur  $w = 0$  répond à la question.

(ii) Soit  $v$  un point quelconque de l'ensemble (convexe)  $U$ . Alors

$$\begin{aligned} J(u) &\leq J(u) - \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(v) \quad (\lambda_i \geq 0, \varphi_i(v) \leq 0) \\ &= J(u) - \sum_{i \in I(u)} \lambda_i (\varphi_i(v) - \varphi_i(u)) \quad (\lambda_i = 0 \text{ si } i \in I(u), \varphi_i(u) = 0 \text{ si } i \in I(u)) \\ &\leq J(u) - \sum_{i \in I(u)} \lambda_i \varphi_i'(u)(v-u) \quad (\varphi_i \text{ Convexes}) \\ &\leq J(u) + J'(u)(v-u) \quad (\text{Kuhn et Tucker}) \\ &\leq J(v) \quad (J \text{ convexe}). \quad \square \end{aligned}$$

**Définition 10**(Lagrangien)

On appelle **Lagrangien** associé à J, la fonctionnelle définie par :

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$L(v, \lambda) = J(v) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(u) \quad ; \text{ les } \lambda_i \text{ sont les multiplicateurs de Lagrange}$$

**Définition 11**(Point selle)

On dit que le couple  $(u, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  est un **point selle** du Lagrangien si :

$$\inf_{v \in \mathbb{R}^n} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^m} L(v, \lambda) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^m} L(u, \lambda) = L(u, p) = \inf_{v \in \mathbb{R}^n} L(v, p) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^m} \inf_{v \in \mathbb{R}^n} L(v, \lambda)$$

**Définition 12**(Fonctionnelle V-elliptique)

On dit que la fonction J de V dans  $\mathbb{R}$  est **coercive** ou **V-elliptique** si :

$$\lim_{\|u\|_V \rightarrow +\infty} J(u) = +\infty$$

La fonction bilinéaire  $a(.,.)$  est dite V-elliptique s'il existe une constante  $\alpha > 0$  telle que :

$$\forall v \in V, \quad a(v, v) = \alpha \|v\|^2 \quad [1].$$

#### **Théorème 4 :**

- (i) Si  $(u, p) \in V \times \mathbb{R}_+^m$  est point selle du lagrangien  $L$  (associé à  $J$ ) alors le point  $u \in U$  est solution du problème (P) [3].
- (ii) On suppose que les fonctions  $J$  et  $\varphi_i (1 \leq i \leq m)$  sont convexes et dérivables en un point  $u \in U$ , et les contraintes sont qualifiées. Alors si  $u$  est solution du problème (P), il existe au moins un vecteur  $p \in \mathbb{R}_+^m$  tel que le couple  $(u, p) \in V \times \mathbb{R}_+^m$  soit pont selle du Lagrangien

DEMONSTRATION :

(1) Les inégalités  $L(u, \mu) \leq L(u, \lambda)$  pour tout  $\mu \in \mathbb{R}_+^m$  s'écrivent

$$\sum_{i=1}^m (\mu_i - \lambda_i) \varphi_i(u) \leq 0 \quad \text{pour tout } \mu \geq 0.$$

Ce qui entraîne  $\varphi_i(u) \leq 0, 1 \leq i \leq m$  (faire tendre chaque  $\mu_i$  vers  $+\infty$ ). Avec  $\mu = 0$ , on obtient  $\sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(u) \geq 0$ , et  $\sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(u) \leq 0$  par ailleurs ( $\lambda_i \geq 0, \varphi_i(u) \leq 0$ ). On a donc déjà montré que :

$$\mu \in U \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(u) = 0.$$

Combinant l'égalité ci-dessus avec les inégalités  $L(u, \mu) \leq L(u, \lambda)$  pour tout  $v \in V$ , on obtient

$$\begin{aligned} J(u) &\leq J(v) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(v) \quad \text{pour tout } v \in V \\ &\leq J(v) \quad \text{pour tout } v \in U \quad (\text{alors } \varphi_i(v) \leq 0). \end{aligned}$$

(2) On est exactement dans les conditions d'application du théorème 3 : si  $u$  est solution du problème (P), il existe un vecteur  $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$  tel que  $\sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(u) = 0$ ,

$$\begin{aligned} \text{et} \quad J'(u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i'(u) &= 0 \quad (\text{de Kuhn et Tucker}). \text{ La première égalité donne} \\ L(u, \mu) = J(u) + \sum_{i=1}^m \mu_i \varphi_i(u) &\leq J(u) = L(u, \lambda) \quad \text{pour tout } \mu \in \mathbb{R}_+^m, \end{aligned}$$

et la seconde égalité est une condition suffisante de minimum pour la fonction convexe (somme de fonctions convexes)

$$L(., \lambda) : v \in V \rightarrow J(v) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(u).$$

Par suite,  $L(u, \lambda) \leq L(v, \lambda)$  pour tout  $v \in V$ ,

Et on a donc établi que le point  $(u, \lambda)$  est un point-selle du Lagrangien  $L$ .  $\square$



## I-I-6- Méthode de pénalisation

Leur principe est le suivant :

On remplace le problème avec contraintes

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \min J(v) \\ v \in U \subset V \end{array} \right. \text{ par un problème sans contraintes } (P_\varepsilon) \left\{ \begin{array}{l} \min J(v) + \frac{1}{\varepsilon} \alpha(v) \\ v \in V \end{array} \right.$$

où  $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de pénalisation sans contraintes et  $\varepsilon > 0$

Le but est de trouver les fonctions  $\alpha$  telles que les problèmes  $(P)$  et  $(P_\varepsilon)$  aient les mêmes solutions

### Définition 1 3 (Fonction de pénalisation extérieure)

Dans ce cas, la méthode de pénalisation dite **extérieure** si une suite  $(v_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  converge vers un minimum  $u$  de  $J$  en venant de l'extérieur de  $U$ .

La fonctionnelle  $J_\varepsilon(v) = J(v) + \frac{1}{\varepsilon} \alpha(v)$  est appelé **fonction pénalisé** de  $J$  et  $\alpha$  est dite

**fonction pénalisation extérieure** qui vérifie les propriétés suivantes [3] :

- 1-  $\alpha$  fonction continue et convexe
- 2-  $\alpha(v) \geq 0, \forall v \in V$
- 3-  $\alpha(v) = 0$  si et seulement si  $v \in U$

**Théorème 5 .** Soit  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue coercive strictement convexe,  $U$  une partie non vide convexe fermée de  $\mathbb{R}^n$ , et  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue convexe vérifiant  $\psi(v) \geq 0$  pour tout  $v \in \mathbb{R}^n$  et  $\psi(v) = 0$  si et seulement si  $u \in U$ .

Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un et un seul élément  $u_\varepsilon$  vérifiant

$$(P_\varepsilon) \quad u_\varepsilon \in \mathbb{R}^n \text{ et } J_\varepsilon(u_\varepsilon) = \inf_{v \in \mathbb{R}^n} J_\varepsilon(v) \text{ où } J_\varepsilon(v) \stackrel{\text{déf}}{=} J(v) + \frac{1}{\varepsilon} \psi(v),$$

et  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon = u$  où  $u$  est la solution unique du problème : trouver  $u$  tel que

$$(P) \quad u \in U \text{ et } J(u) = \inf_{v \in U} J(v).$$

DEMONSTRATION. Il est clair que le problème (P) et les problèmes  $(P_\varepsilon)$  ont chacun une et une seule solution. Les fonctionnelles  $J_\varepsilon$  sont en effet encore coercives ( $J_\varepsilon(v) \geq J(v)$ )

et strictement convexes (puisque la somme d'une fonction strictement convexe et d'une fonction convexe est strictement convexe). Comme

$$J(u_\varepsilon) \leq J(u_\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \psi(v_\varepsilon) = J_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq J_\varepsilon(u) = J(u),$$

on déduit de la coercivité de la fonctionnelle  $J$  que la famille  $(u_\varepsilon)_{\varepsilon \geq 0}$  est bornée.

Par compacité, il existe une suite extraite  $(u_{\varepsilon'})_{\varepsilon' \geq 0}$  et un élément  $u' \in \mathbb{R}^n$  tels que

$$\lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} u_{\varepsilon'} = u'.$$

Des inégalités  $J(u_{\varepsilon'}) < J(u)$  de la continuité de la fonction  $J$ , on déduit

$$J(u') = \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} J(u_{\varepsilon'}) \leq J(u).$$

Puisque  $0 \leq \psi(u_{\varepsilon'}) \leq \varepsilon'(J(u) - J(u_{\varepsilon'}))$ .

et puisque la suite  $(u_{\varepsilon'})_{\varepsilon' \geq 0}$  converge, les nombres  $\{J(u) - J(u_{\varepsilon'})\}$  sont majorés indépendamment de  $\varepsilon'$ ; par suite  $0 = \lim_{\varepsilon' \rightarrow 0} \psi(u_{\varepsilon'}) \leq \psi(u')$ .

Puisque la fonction est continue, ce qui montre que  $u' \in U$  et donc que  $u = u'$  puisque, et  $u$  est la seule solution du problème (P). L'unicité de cette solution montre également que toute la famille  $(u_{\varepsilon'})_{\varepsilon' \geq 0}$  converge vers l'élément  $u$  (on peut en effet reproduire le raisonnement précédent pour toute suite extraite).  $\square$

## I-I-7- Algorithmes

### Définition 14 (Méthode d'UZAWA)

La **méthode d'Uzawa** est une méthode de pénalisation extérieure basée sur la formulation duale et la recherche de points selle [3]. La suivante est la formulation duale concernée par la méthode d'Uzawa :

○ Soit  $I = \{u \in \mathbb{R}^n; \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^m} L(u, \lambda) < +\infty\}$ , et pour  $k \geq 0$ , on a  $J(u) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^m} L(u, \lambda)$

Le problème primal associé s'écrit : trouver  $u^* \in I$  tel que  $J(u^*) = \inf_{u \in I} J(u)$

○ Soit  $I^* = \{\lambda \in \mathbb{R}_+^m; \inf_{u \in \mathbb{R}^n} L(u, \lambda) > -\infty\}$ , et pour  $\lambda \in I^*$ , on a  $K(\lambda) = \inf_{u \in \mathbb{R}^n} L(u, \lambda)$

Le problème dual associé s'écrit : trouver  $p \in I^*$  tel que  $K(p) = \sup_{\lambda \in I^*} K(\lambda)$

### Algorithme d'Uzawa [4]

$p^0 \in \mathbb{R}_+^m$  est arbitrairement donné, on définit une suite de couples  $(u^k, p^k) \in \mathbb{R}_+^m \times V, k \geq 0$  par les formules des récurrences suivantes :

$$\begin{cases} \text{calcul } u^k : & J(u^k) + \sum_{i=1}^m p_i^k \varphi_i(u^k) = \inf_{v \in V} \left[ J(v) + \sum_{i=1}^m p_i^k \varphi_i(v) \right] \\ \text{calcul } p_i^{k+1} : & p_i^{k+1} = \max(p_i^k + \rho \varphi_i(u^k); 0); \quad i = 1 \dots m; (\rho > 0 \text{ choisi}) \end{cases}$$

### **Théorème 6: Convergence de la méthode d'Uzawa**

On suppose que  $V = \mathbb{R}^n$ , que la fonction  $J$  est elliptique et que l'ensemble  $U$  de la forme :  $U = \{v \in \mathbb{R}^n; Cv \leq d\}$  ou  $C$  est une matrice de taille  $(m, n)$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $d \in \mathbb{R}^m$  est non vide. Alors si  $0 < \rho < \frac{2\alpha}{\|C\|^2}$ , ( $\alpha$  est la constante qui apparait dans la définition d'une fonctionnelle elliptique), la suite  $(u^k)$  converge vers la solution unique du problème primal.

Si le rang de  $C$  est  $m$ , la suite  $\forall v \in V$  converge également vers la solution unique du problème dual

DEMONSTRATION [3]. (i) *Préliminaires.* La fonction  $J$  étant elliptique et l'ensemble convexe non vide  $U$  étant fermé, le problème (P) a une solution et une seule  $u$ , ainsi que les problèmes de minimisation successifs, de solutions  $u^k$ , rencontrés dans la méthode d'Uzawa. Introduisons l'application affine de sorte que le Lagrangien du problème s'écrit :

$$\begin{aligned} \varphi : v \in \mathbb{R}^n &\rightarrow \varphi(v) = Cv - d \in \mathbb{R}^m, \\ L : (v, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^m &\rightarrow L(v, \mu) = J(v) + (\mu, \varphi(v))_m \\ &= J(v) + (C^T \mu, v)_n - (\mu, d)_m. \end{aligned}$$

D'après le théorème 1, il existe (au moins) un vecteur  $\lambda \in \mathbb{R}_+^m$  tel que le couple  $(u, \lambda)$  soit point-selle du Lagrangien  $L$  (c'est d'ailleurs ainsi que l'on obtient toutes les solutions du problème dual). On a donc d'un part  $\nabla J(u) + C^T \lambda = 0$  puisque  $L(u, \lambda) = \inf L(v, \lambda)$  et d'autre part  $(\varphi(u), \mu - \lambda)_m \leq 0 \quad \forall \mu \in \mathbb{R}_+^m$

Puisque  $L(u, \lambda) = \sup L(u, \mu)$  On remarque que la dernière relation peut encore s'écrire, pour tout nombre  $\zeta > 0$ ,

$$(\lambda - (\lambda + \zeta \varphi(u)), \mu - \lambda)_m \geq 0 \quad \text{pour tout} \quad \mu \in R_+^m,$$

ce qui montre que  $\lambda$  peut s'interpréter comme la projection sur  $R_+^m$  de l'élément  $\{\lambda + \zeta \varphi(u)\}$ .

En résumé 
$$\begin{cases} \nabla J(u) + C^T \lambda, \\ \lambda = P_+(\lambda + \zeta \varphi(u^k)). \end{cases}$$

Puisque, par définition de la méthode d'Uzawa, les relations analogues

$$\begin{cases} \nabla J(u^k) + C^T \lambda^k, \\ \lambda^{k+1} = P_+(\lambda + \zeta \varphi(u^k)). \end{cases}$$

sont également satisfaites, on déduit

$$\begin{cases} \nabla J(u^k) - \nabla J(u) + C^T (\lambda^k - \lambda) = 0, \\ \|\lambda^{k+1} - \lambda\|_m \leq \|\lambda^k - \lambda + \zeta C(u^k - u)\|, \end{cases}$$

(iii) *Convergence de la suite  $(u^k)$*

On utilise uniquement les deux dernières relations ci-dessous : élevant au carré les membres de l'inégalité, on obtient

$$\|\lambda^{k+1} - \lambda\|_m^2 \leq \|\lambda^k - \lambda\|_m^2 + 2\zeta (C^T (\lambda^k - \lambda), u^k - u)_n + \zeta^2 \|C(u^k - u)\|_m^2$$

Ce qui, compte-tenu de l'inégalité, s'écrit encore

$$\begin{aligned} \|\lambda^{k+1} - \lambda\|_m^2 &\leq \|\lambda^k - \lambda\|_m^2 + 2\zeta (\nabla J(u^k) - \nabla J(u), u^k - u)_n + \zeta^2 \|C(u^k - u)\|_m^2 \\ &\leq \|\lambda^k - \lambda\|_m^2 + \zeta \{2\alpha - \zeta \|C\|^2\} \|u^k - u\|_n^2. \end{aligned}$$

Dans ces conditions,

$$0 \leq \zeta \leq \frac{2\alpha}{\|C\|^2} \Rightarrow \|\lambda^{k+1} - \lambda\|_m \leq \|\lambda^k - \lambda\|_m \quad \text{pour tout} \quad k \geq 0.$$

La suite  $\left(\|\lambda^{k+1} - \lambda\|_m\right)_{k \geq 0}$  étant alors décroissante et minorée (par zéro...), est convergente, ce qui entraîne

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \|\lambda^{k+1} - \lambda\|_m^2 - \|\lambda^k - \lambda\|_m^2 \right\} = 0.$$

Comme

$$\zeta \left\{ 2\alpha - \zeta \|C\|^2 \right\} \|u^k - u\|_n^2 \leq \|\lambda^k - \lambda\|_m^2 - \|\lambda^{k+1} - \lambda\|_m^2,$$

On déduit

$$0 \leq \zeta \leq \frac{2\alpha}{\|C\|^2} \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|u^{k+1} - u\|_n = 0$$

(iii) *Convergence éventuelle de la suite  $(\lambda^k)$ .*

La suite  $\left(\|\lambda^k - \lambda\|_m\right)_{k \geq 0}$  étant décroissante, la suite  $(\lambda^k)$  est bornée. Il existe donc une suite extraite  $(\lambda^{k'})_{k' \geq 0}$  qui converge vers un élément  $\lambda' \in \mathbb{R}_+^m$ , vérifiant :

$$\nabla J(u) + C^T \lambda' = \lim_{k' \rightarrow \infty} \left\{ \nabla J(u^{k'}) + C^T \lambda^{k'} \right\} = 0.$$

Faisons alors l'hypothèse que le rang de la manière  $C$  est  $m$ . Des équivalences

$$r(C) = m \text{ si et seulement si } \text{Im}(C) = \mathbb{R}^m \text{ si et seulement si } \text{Ker}(C^T) = 0$$

On déduit l'unicité de la solution du problème dual  $\lambda$ . Cette dernière vérifie en effet

$$\nabla J(u) + C^T \lambda = 0,$$

Et la solution  $u$  du problème primal est unique. Par suite  $\lambda = \lambda'$ . Comme le raisonnement ci-dessus peut être répété pour n'importe quelle suite extraite de la suite  $(\lambda^k)$ , il en résulte que toute la suite  $(\lambda^k)$  converge vers  $\lambda$  lorsque  $r(C) = m$ .

Dans le cas d'une fonctionnelle quadratique :

$$J : v \in \mathbb{R}^n \rightarrow J(v) = \frac{1}{2} (Av, v) - (b, v),$$

Une itération de la méthode d'Uzawa s'écrit :

$$\begin{cases} \text{Calcul de} & u^k : Au^k - b + C^T \lambda^k = 0 \\ \text{Calcul de} & \lambda^{k+1} : \lambda_i^{k+1} = \max \left\{ \left( \lambda^k + \zeta (Cu^k - d) \right)_i, 0 \right\}, 1 \leq i \leq m. \end{cases}$$

On sait que la méthode converge si la matrice symétrique  $a$  est définie positive et si

$$0 < \zeta < \frac{2\lambda_1(A)}{\|C\|^2}, \quad \lambda_1(A) \text{ désignant la plus petite valeur propre de la matrice } A. \quad \square$$

## I-II-ETABLISSEMENT DES EQUATIONS DE STOKES

On considère un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  ( $N \leq 3$ ) et de frontière  $\Gamma = \partial\Omega$ . Dans le problème qui nous intéresse, ce domaine est occupé par un fluide visqueux incompressible caractérisé par sa masse volumique  $\rho$  et sa viscosité dynamique  $\mu$  exprimé en  $\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ .

Soit un espace de fonction  $V(\Omega)$  tel que  $V(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) / v = 0 \text{ sur } \Gamma \right\}$

Alors les équations de Stokes qui régissent ce problème sont de la forme [5] :

$$\begin{cases} -\mu \Delta \vec{u} + \nabla \vec{p} = \vec{f} & \text{dans } \Omega \\ \text{div} \vec{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \vec{u}_\Gamma = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad \begin{matrix} (1.2) \\ (1.3) \\ (1.4) \end{matrix}$$

$\text{div} \vec{u} = 0$  est la contrainte d'incompressibilité du fluide.

$\vec{f} = \rho \vec{g} = -\rho g \vec{k}$  est la densité volumique de forces extérieures agissantes sur le fluide

$p$  est la pression en Pa(Pascal)

Le domaine étudié est bidimensionnel donc  $x=(x_1, x_2)$  et  $\vec{f} = \rho \vec{g} = -\rho g \vec{k} = 0$  (il n'y a pas de coordonnée suivant  $z$ )

## I-III- MAILLAGES

### I-III-1-Définition 15(Maillage)

Un **maillage** est la discrétisation spatiale d'un milieu continu, ou aussi, une modélisation géométrique d'un domaine par des éléments proportionnés finis et bien définis. L'objet d'un maillage est de procéder à une simplification d'un système par un modèle représentant ce système et, éventuellement, son environnement (le milieu), dans l'optique de simulations de calculs ou de représentations graphiques. Il existe des logiciels de maillage (couramment appelés *mailleurs*) qui est fréquemment employé en simulation numérique dans la construction du modèle géométrique, avant sa résolution par un code de calcul par exemple : [Gmsh](#) (logiciel libre de maillage par éléments finis). Les **maillages 2D** permettent de partitionner un espace plan en un ensemble de triangles, ce qui permet alors de passer d'un espace continu à un espace discret [6]. Ceci pourra être utilisé par exemple en informatique

graphique et en conception assistée par ordinateur pour représenter et manipuler des objets tridimensionnels. On peut également utiliser un maillage pour approximer une fonction dont on ne peut pas connaître une forme analytique : c'est notamment le cas pour la résolution de certaines équations différentielles.

### I-III-2-Triangulation

Une triangulation  $T_h$  d'un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , de bord  $\Gamma = \partial\Omega$  est une partition de  $\Omega$  en triangles. Elle doit également vérifier certaines propriétés :

- l'intersection de deux triangles de  $T_h$  doit être réduite à un sommet commun, à une arête commune et entière ou à l'ensemble vide.
- l'aire des triangles ne doit pas être nulle.
- tous les coins du bord  $\Gamma = \partial\Omega$  sont des sommets de triangles de  $T_h$
- réciproquement, soit  $\Omega_h$  l'union des triangles. Tous les coins de  $\Gamma_h = \partial\Omega_h$  doivent être sur  $\Gamma$ .

#### EXEMPLE DE MAILLAGE [6]

Maillage d'un intervalle de  $\mathbb{R}$  :  $\Omega := ]a, b[$



Un maillage en dimension 1 correspond seulement à la donnée d'une grille de points :

$$\{a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$$

non nécessairement répartie de façon uniforme dans  $[a, b]$ . Les éléments géométriques

$$\text{sont des sous-intervalles : } T = ]x_i, x_{i+1}[$$

# CHAPITRE II- MATERIELS ET METHODES

## II-I- MATERIELS

Divers logiciels sont accessibles pour la résolution numérique de l'équation de Stokes mais nous avons utilisé le Gmsh et le Matlab pour effectuer notre étude :

### A-GMSH

GMSH : (GeometryMeshSolver Post-processing), est un logiciel libre développé par Geuzaine et Remacle en 2009. On peut l'exécuter soit avec Linux, Windows et Mac Os. Gmsh est indispensable pour le maillage de notre domaine d'étude [6].

### B-MATLAB

MATLAB est une abréviation de MATrix LABoratory. C'est un langage de développement informatique particulièrement dédié aux applications scientifiques dont il est utilisé pour développer des solutions nécessitant une très grande puissance de calcul. L'intérêt de Matlab est de pouvoir travailler sur des fichiers d'extension « .m » contenant des suites de commandes (créés avec un simple éditeur de texte) et lancé par leur nom (sans extension) comme une commande. L'utilisation du logiciel consiste à lancer des lignes de commandes, qui peuvent le plus souvent s'apparenter à de la programmation en C. Associé à Simulink (commande lancée sous Matlab), il devient un outil graphique très simple d'utilisation pour la simulation de processus (programmation par copier/coller de blocs fonctionnels). Par convention les commandes MATLAB apparaissent dans le texte dans une fonte <<true-type>. Matlab est constitué des plusieurs fenêtres (dépend de la version) dont le principal est la fenêtre de commande (Command Window) associée à l'espace de travail (Workspace).. C'est également dans cet espace de travail qu'on peut définir toutes les variables utilisées par Matlab.

L'existence de commande <<point-virgule>>' ;' en dernière empêche l'affichage du résultat qui est nécessaire lorsque le résultat est un vecteur de grande taille.

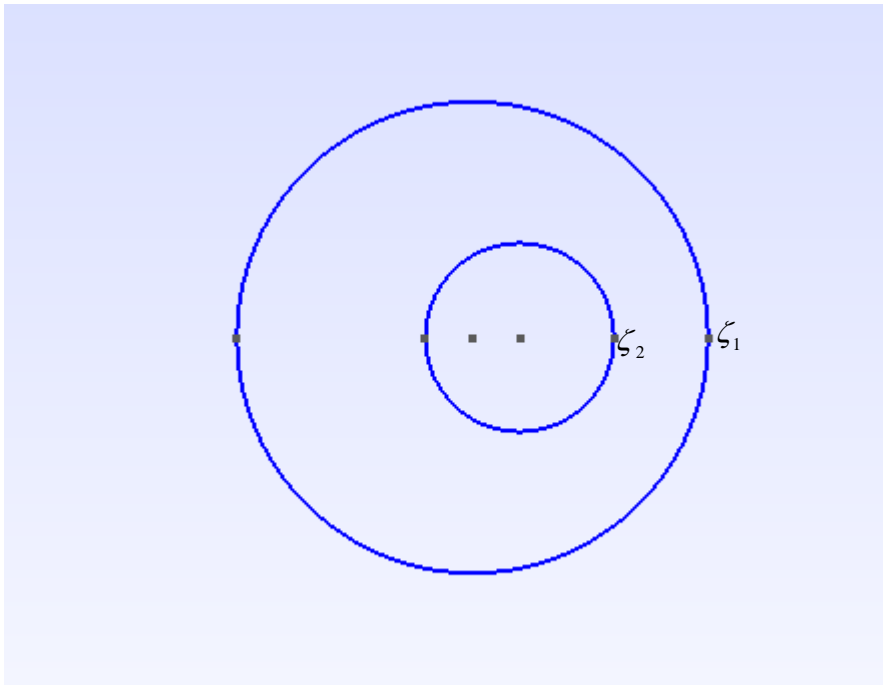


## II.II- METHODES DES RESOLUTIONS DES EQUATIONS DES STOKES

### A- MAILLAGE DE DOMAINE D'ETUDE

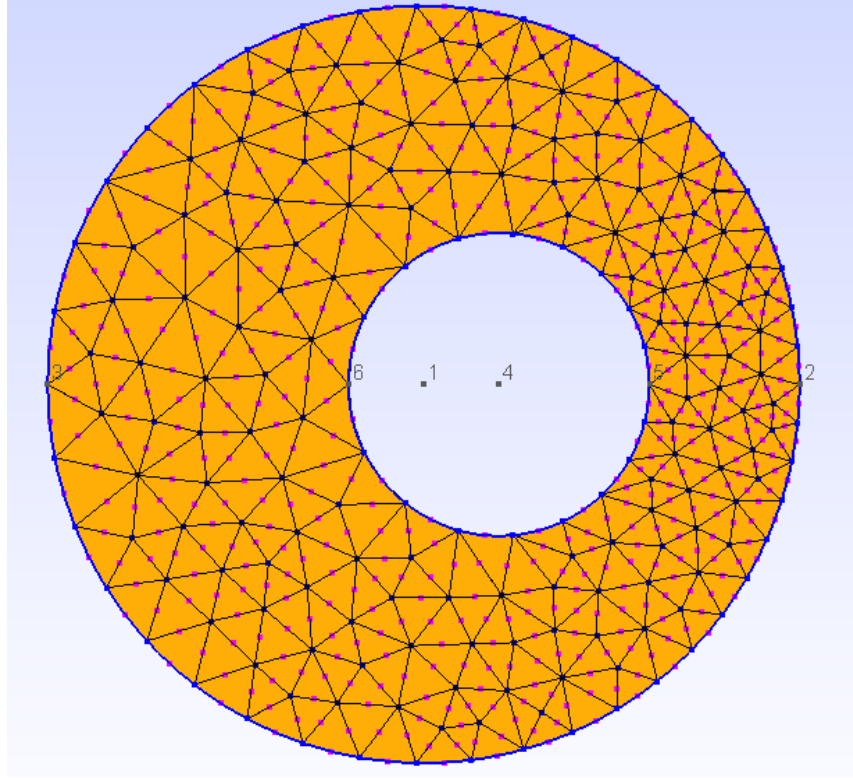
Notre domaine d'étude est formé de deux cylindres non-concentriques. Le cylindre extérieur ( $\zeta_1$ ) est centré en (0;0) et de rayon 5 cm. Le cylindre intérieur ( $\zeta_2$ ) est centré en (1;0) et de rayon 2 cm. ( $\zeta_2$ ) est fixe et ( $\zeta_1$ ) tourne à une vitesse constante.

( $\Omega$ ) est le domaine entre les deux cylindres, dont ( $\Gamma_1$ ) et ( $\Gamma_2$ ) sont les frontières respectives



**Figure 1: Domaine d'étude**

Le maillage du domaine généré par GMSH est représenté sur la figure 2 [3].



**Figure 2: Maillage du domaine d'étude**

Remarque : Le maillage ainsi obtenu contient au total 740 NŒUDS avec 406 ELEMENTS (triangles).

## **B- FORMULATIONS VARIATIONNELLES DU PROBLEME DE STOKES**

Soit  $\vec{v}$  quelconque. Multiplions l'équation précédente ( 1.2) par une fonction test  $\vec{v}$  et sommons sur le domaine  $\Omega$  ;puisque  $\vec{f}$  et  $\vec{v}$  sont tous deux de carré sommables sur ce domaine, on obtient l'équation [4] :

$$-\int_{\Omega} \mu \Delta \vec{u} \cdot \vec{v} d\Omega + \int_{\Omega} \nabla \vec{p} \cdot \vec{v} d\Omega = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Omega$$

Intégrons par parties les termes :

$$-\int_{\Omega} \mu \Delta \vec{u} \cdot \vec{v} d\Omega = -\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \vec{u} \cdot \vec{v}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} d\Omega$$

$$= - \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \right) \vec{v} \cdot \vec{n}_i d\Sigma + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} d\Omega$$

Et  $\nabla \vec{p} \cdot \vec{v} = \text{div} \vec{p} \cdot \vec{v} = \text{div}(\vec{p} \cdot \vec{v} - \vec{p} \text{div} \vec{v})$  ; en tenant compte des conditions aux limites, il vient :

$$a(\vec{u}, \vec{v}) = L(\vec{v}) \quad (2.1)$$

$$\text{Où } a(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} d\Omega$$

$$L(\vec{v}) = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} d\Omega \quad (2.2)$$

Donc on a le problème variationnelle abstrait :

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } \forall v \in V, a(\vec{u}, \vec{v}) = L(\vec{v}) \quad (2.3)$$

### **Théorème 3: Théorème de Lax-Milgram**

*On suppose que la forme bilinéaire continue  $a(.,.)$  est V-elliptique et que la forme linéaire  $L(.)$  est continue. Alors le problème (2.3) admet une solution unique  $u$  dans  $V$*

DEMONSTRATION : Unicité

Proposons  $a(u_1, v) = L(u, v) \quad \forall v \in V$

$$\text{et } a(u_2, v) = L(u, v) \quad \forall v \in V$$

$$a(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \forall v \in V$$

Choisissons  $v = u_1 - u_2$  alors  $a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$

Comme  $\alpha \|v\|^2 \leq a(v, v) \leq M \|v\|^2$  alors  $\|u_1 - u_2\| = 0$

$$\text{D'où } u_1 = u_2$$

Existence :

Considérons l'application linéaire  $Au$  sur  $V$  défini par

$$Au(v) = a(u, v), v \in V$$

**Théorème de représentation de Riesz (voir en annexe A)**

Si  $V$  est un espace de Hilbert.

Pour toute forme linéaire  $f$  sur  $V$ , il existe un unique élément  $w \in V$  tel que

$$f(v) = \langle w, v \rangle \quad \forall v \in V$$

Ici, d'après Riesz, il existe un unique  $w \in V$  tel que :

$$a(u, v) = \langle w, v \rangle \quad \forall v \in V$$

De même, il existe un unique  $\varphi \in V$  tel que

$$L(v) = \langle \varphi, v \rangle \quad \forall v \in V$$

D'où  $w = \varphi$  car  $a(u, v) = L(v)$  et  $v \in H'(\Omega)$

Fixons  $u$  et considérons la forme linéaire  $v \rightarrow a(u, v)$

d'après Théorème de Riesz (Annexe A), pour tout  $Au \in V$   $a(u, v) = \langle Au, v \rangle$

et encore, d'après Théorème de Riesz,  $\forall f \in V$ ,  $L(v) = \langle f, v \rangle$ .

Si  $a(.,.)$  est bilinéaire continue et elliptique sur  $V(\Omega)$  puis  $L$  est linéaire continue sur  $V(\Omega)$  alors le problème (2.3) admet une solution unique.  $\square$

## C- LES LAGRANGIENS

### C-1- Lagrangien

Le domaine  $\Omega$  est recouvert par une triangulation  $T_h$  respectant la discrétisation  $\Gamma_h$  de l'interface. On choisit comme espace d'approximation des vitesses  $v_h$  et  $p_h$  des pressions, respectivement, les sous-espaces de  $V$  et de  $p$ .

Dans la première équation de (1.1), on introduit les matrices,  $A \in \mathbf{M}_{n \times m}$ ;  $B \in \mathbf{M}_{n \times m}$  et un vecteur  $b \in \mathbb{R}^n$  correspondant au second membre. Alors, résoudre (1.1) revient à résoudre le système linéaire suivant [4] :

$$\begin{bmatrix} A & B^* \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad A = -\mu \Delta \quad \text{et} \quad B^* = -\overrightarrow{\text{grad}}; \quad b = \overrightarrow{f}$$

Introduisons l'espace de Hilbert :

$$V(\Omega) = \left\{ \vec{v} \in \left( H_0^1(\Omega) \right)^2 ; \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0 \text{ dans } \Omega \right\}$$

Et considérons la fonctionnelle J définie pour  $\vec{v} \in \left( H_0^1(\Omega) \right)^2$  par :

$$J(\vec{v}) = \frac{1}{2} (A\vec{v}, \vec{v}) - (b, \vec{v})$$

$$J(\vec{v}) = \frac{1}{2} [((-\mu\Delta)\vec{v}, \vec{v})] - (\vec{f}, \vec{v}) \quad (2.4)$$

(.,.) désigne le produit scalaire euclidien canonique de  $L^2(\Omega)$  défini par

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \vec{u} \cdot \vec{v} d\Omega = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} u_i \cdot v_i d\Omega \quad (2.5)$$

Résoudre (1.1) correspond à minimiser une fonctionnelle quadratique J tel que

$$\begin{cases} J(\vec{u}) \leq J(\vec{v}) & \forall \vec{v} \in V \\ \vec{u} \in V \end{cases} \quad (2.6)$$

L'existence d'une solution unique est une conséquence immédiate du théorème de Lax-Milgram. La forme bilinéaire  $a(.,.)$  étant symétrique, Le problème (2.3) consiste bien à minimiser une fonctionnelle quadratique sous une contrainte linéaire ( $\vec{u} \in V$  signifie  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ ) ; il est donc logique de chercher à imposer cette contrainte au moyen d'un multiplicateur de Lagrange  $\rho$ , transformant ainsi (2.3) en un problème de point-selle.

Définissons pour  $\vec{v} \in \left( H_0^1(\Omega) \right)^2$  et  $p \in L^2(\Omega)$ , le lagrangien du système qui s'écrit :

$$L(\vec{v}, p) = J(\vec{v}) - (p, \vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = \frac{1}{2} [((-\mu\Delta)\vec{v}, \vec{v})] - (\vec{f}, \vec{v}) - (p, \vec{\nabla} \cdot \vec{v}) \quad (2.7)$$

Le but est de chercher un couple  $\{\vec{u}^n, \vec{p}^n\}$  point-selle de L sur. Autrement dit :

$$\begin{cases} L(\vec{u}^n, p) \leq L(\vec{u}^n, p^n) \leq L(\vec{v}, p^n) & \forall \vec{v} \in \left( H_0^1(\Omega) \right)^2, p \in L^2(\Omega) \\ \vec{u}^n \in \left( H_0^1(\Omega) \right)^2 \end{cases} \quad (2.8)$$

### C-2- Lagrangien augmenté

Pour la résolution de l'équation précédente (2.7), on introduit le Lagrangien augmenté :

$$L_r(\vec{v}, p) = L(\vec{v}, p) + \frac{r^2}{2} \left\| \nabla \vec{v} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.9)$$

$$L_r(\vec{v}, p) = \frac{1}{2} [((- \mu \Delta) \vec{v}, \vec{v})] - (\vec{f}, \vec{v}) - (p, \vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \frac{r^2}{2} \left\| \nabla \vec{v} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (2.10)$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidien canonique de  $\mathbb{R}^2$

si la contrainte  $\nabla \vec{v} = \vec{0}$  est satisfaite alors le terme  $\frac{r^2}{2} \left\| \nabla \vec{v} \right\|^2$  est nul, donc on en déduit

simplement que le point selle de  $L_r$  est point-selle de  $L$

Le couple  $\{\vec{u}^n, \vec{p}^n\}$  est point selle de  $L_r$  si :

$$\begin{cases} L_r(\vec{u}^n, \vec{p}^n) \leq L_r(\vec{v}, \vec{p}^n) \\ \vec{u}^n \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2 \quad (2.11)$$

et équivaut à

$$(A + rB^* \cdot B) \vec{u}^n + B^* \cdot \vec{p}^n = b \quad (2.12)$$

Soit encore :

$$[\mu \Delta + r \vec{\nabla} \cdot \nabla] \vec{u}^n - \vec{\nabla} \cdot \vec{p}^n = \vec{0} \quad (2.13)$$

### D- ALGORITHME D'UZAWA

La mise en œuvre de cet algorithme demande la résolution du problème (2.11). L'algorithme d'Uzawa semblable à la recherche de point selle du Lagrangien augmenté  $L_r$  est :

$p_h^0$  est arbitrairement donné ;  $p_h^n$  étant connu ; on calcule  $u_h^n$  et  $p_h^{n+1}$  en utilisant

$$\text{l'équation (2.11) : } (A + rB^* \cdot B) \vec{u}_h^n + B^* \cdot \vec{p}_h^n = b \quad (2.14)$$

$$\text{et } p_h^{n+1} = p_h^n - \zeta B u_h^n ; \zeta < 0 \quad (2.15)$$

## E- METHODES DES ELEMENTS FINIS

### *E-1-Definition 16( MEF)*

**La Méthode des Eléments Finis** (MÉF) fait partie des outils de mathématiques appliquées et permet de résoudre de manière discrète et approchée ce problème ; on cherche une solution approchée « suffisamment » fiable. Il s'agit de mettre en place, à l'aide des principes hérités de la formulation variationnelle ou formulation faible, un algorithme discret mathématique permettant de rechercher une solution approchée d'une équation aux dérivées partielles (ou ÉDP) sur un domaine compact avec conditions aux bords (conditions aux limites) [7] . Puis grâce à la formulation variationnelle, les solutions du problème vérifient des conditions d'existence plus faibles que celles des solutions du problème de départ et où une discrétisation permet de trouver une solution approchée [8]. Comme de nombreuses autres méthodes numériques, outre l'algorithme de résolution en soi, se posent les questions de qualité de la discrétisation :

- existence de solutions
- unicité de la solution
- stabilité
- convergence
- mesure d'erreur entre une solution discrète et une solution unique du problème initial

### *E-2-Coordonnées barycentriques d'un point par rapport à un triangle du maillage*

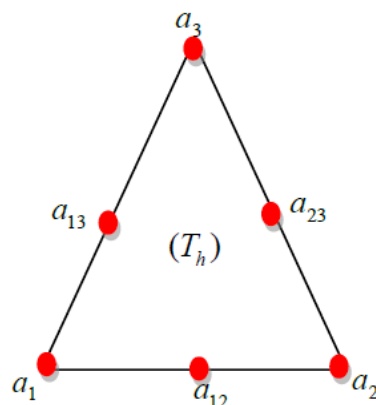


Figure 3: Un élément triangulaire de maillage

Soit  $a_1, a_2, a_3$  les sommets d'un triangle (T) de surface ( $\Delta$ ) non dégénéré du maillage.

Les coordonnées barycentriques d'un point  $x \in \mathbb{R}^2$  par rapport aux sommets  $a_1, a_2, a_3$  sont données par:

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_i(x) a_i = x \quad \text{Avec} \quad \sum_{i=1}^3 \lambda_i(x) = 1$$

$$a_1 = (a_{11}, a_{21}) ; \quad a_2 = (a_{12}, a_{22}) ; \quad a_3 = (a_{13}, a_{23})$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Et les  $\lambda_i$  sont données par les formules suivantes:

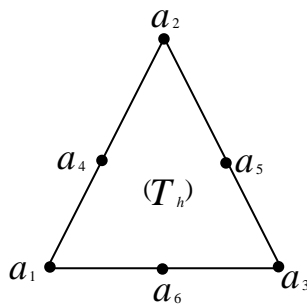
$$\lambda_1 = \frac{1}{2\Delta} (a_{22} - a_{23}) x_1 + (a_{13} - a_{12}) x_2 + a_{12} a_{23} - a_{22} a_{13} \quad (2.16)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2\Delta} (a_{23} - a_{21}) x_1 + (a_{11} - a_{13}) x_2 + a_{13} a_{21} - a_{23} a_{11} \quad (2.17)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2\Delta} (a_{21} - a_{22}) x_1 + (a_{12} - a_{11}) x_2 + a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} \quad (2.18)$$

### *E-3-Systemes élémentaires*

#### **a- Élément fini $P_2$ de la vitesse**





Dans chaque triangle  $T_h$ , on approche la vitesse  $\vec{v}$  par :

$$\vec{v}_h = \sum_{i=1}^6 \vec{v}_i(a_i) \varphi_i(a_i) \quad \text{avec} \quad \varphi_i(a_i) = \lambda_i (2\lambda_i - 1) \quad \text{pour } 1 \leq i \leq 3 \quad ;$$

$$\varphi_4(a_i) = 4\lambda_1\lambda_2 \quad ; \quad \varphi_5(a_i) = 4\lambda_2\lambda_3 \quad \text{et} \quad \varphi_6(a_i) = 4\lambda_1\lambda_3$$

Soit

$$P_2(T_h) = \{ \text{fonctions polynomiales de degré} \leq 2 \text{ dans le triangle } T_h \text{ de sommets } \{a_i\}_{i=1, \dots, 3} \} \quad .$$

La vitesse  $v$  est approchée par un élément de  $P_2$ . Elle est déterminée de manière unique par ses valeurs aux sommets  $\{a_i\}$  par :

$$u_{i_T}^n = \sum_{i=1}^2 \left( \sum_{k=1}^3 u_i^n(a_k) \cdot v_k + \sum_{k=1}^2 \sum_{j=2}^3 u_i^n(a_{kj}) \cdot v_{kj} \right)$$

**Tableau 1: Valeur de  $u$  en faisant varier la fonction test  $v$  dans chaque équation**

$v_i = \dots\dots\dots$	Equation	Coefficients de $u$
$v_i = (\varphi_1, 0)$	1 <sup>ère</sup> équation	$u_1(a_1)$
$v_i = (0, \varphi_1)$	2 <sup>ème</sup> équation	$u_2(a_1)$
$v_i = (\varphi_2, 0)$	3 <sup>ème</sup> équation	$u_1(a_2)$
$v_i = (0, \varphi_2)$	4 <sup>ème</sup> équation	$u_2(a_2)$
$v_i = (0, \varphi_3)$	5 <sup>ème</sup> équation	$u_1(a_3)$
$v_i = (\varphi_3, 0)$	6 <sup>ème</sup> équation	$u_2(a_3)$
$v_i = (\varphi_4, 0)$	7 <sup>ème</sup> équation	$u_1(a_4)$
$v_i = (0, \varphi_4)$	8 <sup>ème</sup> équation	$u_2(a_4)$
$v_i = (\varphi_5, 0)$	9 <sup>ème</sup> équation	$u_1(a_5)$

$v_i = (0, \varphi_5)$	10 <sup>ème</sup> équation	$u_2(a_5)$
$v_i = (\varphi_6, 0)$	11 <sup>ème</sup> équation	$u_1(a_6)$
$v_i = (0, \varphi_6)$	12 <sup>ème</sup> équation	$u_2(a_6)$

Pour le calcul d'intégration des coordonnées barycentriques  $\lambda_i$ ,  $i=1, 2, 3$  d'un triangle ( $T_h$ ) et de surface ( $\Delta$ ) nous utilisons la formule :

$$\int_{\Omega} \lambda_i^a \lambda_i^b \lambda_i^c d\Omega = 2|\Delta| \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!}$$

Et pour les intégrations sur  $\Gamma$  du second membre de (4.21), nous avons faire :

$$\int_{\Gamma} \lambda_i^a \lambda_i^b d\Gamma = \Gamma \frac{a!b!}{(a+b+1)!} \text{ Où } a, b \text{ et } c \text{ sont des entiers dans les deux intégrations}$$

#### **b- Élément fini $P_1$ de la pression**

Soit  $P_1(T) = \{ \text{fonctions polynomiales de degré } \leq 1 \text{ dans le triangle } T_h \text{ de sommets } \{a_i\}_{i=1,2,3} \}$  ;  
 $T \subset \mathbb{R}^2$  . La pression  $p$  est approchée par un élément de  $P_1$  . Elle est déterminée de manière unique par ses valeurs aux sommets  $\{a_i\}$

$$\text{on a : } p(x) = \sum_{i=1}^3 p(a_i) \lambda_i(x)$$

Sur les 3 sommets des triangles de chaque élément, la pression a 3 inconnues .c'est ainsi qu'on applique la même méthode comme dans la vitesse et nous avons varié la fonction test  $v$  pour obtenir ces 3 équations :

**Tableau 2: Valeur de la pression en faisant varier la fonction test  $v_i$  dans chaque équation**

V=	Equation	Pression
$v_1 = \lambda_1$	1 <sup>ère</sup> équation	$p(a_1)$
$v_2 = \lambda_2$	2 <sup>ème</sup> équation	$p(a_2)$
$v_3 = \lambda_3$	3 <sup>ème</sup> équation	$p(a_3)$

Et on a le système de type :

$$\begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} & k_{1,3} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & k_{2,3} \\ k_{3,1} & k_{3,2} & k_{3,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(a_1) \\ p(a_2) \\ p(a_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix}$$

#### **E-4-Matrice de rigidité élémentaire**

Multiplions l'équation (2.13) et (2.15) par  $\vec{v}$  et intégrons sur tout le domaine [9].

Le calcul détaillé est dans **l'annexe B**

On obtient :

$$\left[ (\mu\Delta) + r\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \right] \vec{u}^n \cdot \vec{v} - \vec{\nabla} \cdot \vec{p}^n \cdot \vec{v} = \vec{f} \cdot \vec{v}$$

$$\int_{\Omega} \mu \Delta \vec{u}^n \cdot \vec{v} \, d\Omega - \int_{\Omega} r \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \vec{u}^n \cdot \vec{v} \, d\Omega - \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{p}^n \cdot \vec{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \vec{f} \cdot \vec{v} \, d\Omega \text{ ou plus simplement}$$

$$\mu(\vec{u}^n, \vec{v}) - r(\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}^n), \vec{v}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{p}^n, \vec{v}) = (\vec{f}, \vec{v}) \quad (2.19)$$

$$\text{Et } \int_{T_h} \vec{p}^{n+1} \vec{v} \, d\Omega = \int_{T_h} \vec{p}^n \vec{v} \, d\Omega + \rho \int_{T_h} B \vec{u}^n \vec{v} \, d\Omega \quad (2.20)$$

**Rappels :**  $\Delta u \cdot v = \nabla(\nabla u) \cdot v = \nabla(\nabla u v) - \nabla u \nabla v$

En calculant chaque terme, on a :

$$\mu \left\{ \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \sum_{f=1}^2 \left( \sum_{k=1}^3 u_i^{n+1}(a_k) \frac{\partial v_k}{\partial x_f} + \sum_{k=1, j=2}^{2,3} u_i^{n+1}(a_{kj}) \frac{\partial v_{kj}}{\partial x_f} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_f} \, d\Omega \right\}$$

$$+r \left\{ \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left( \sum_{k=1}^3 u_i^n(a_k) \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \sum_{k=1, j=2}^{2,3} u_i^n(a_{kj}) \frac{\partial v_{kj}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_m} d\Omega \right\} = \int_{\Omega} p^n \sum_{i=1}^2 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} d\Omega \quad (2.21)$$

$$+ \mu \left\{ \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^2 \sum_{l=1}^2 \left( \sum_{k=1}^3 u_i^n(a_k) \frac{\partial v_k}{\partial x_l} + \sum_{k=1, j=2}^{2,3} u_i^n(a_{kj}) \frac{\partial v_{kj}}{\partial x_l} \right) v_i . n_l d\Gamma \right\}$$

On peut écrire l'équation (2.18) sous la forme :

$$[M^e] . (u^n) = (N)$$

où  $[M^e]$  : la matrice de Rigidité élémentaire,

$(N)$  : le vecteur de sollicitation élémentaire

$(u^n)$  : le vecteur des inconnues.

Sur chaque triangle du maillage il y a six nœuds (voir figure 3) dont chacun des nœuds a deux inconnues. Par exemple pour le nœud  $a_1$  :  $u(a_1) = (u_1^{n+1}(a_1), u_2^{n+1}(a_1))$ . Par

conséquent le matrice de rigidité élémentaire est de dimension (12x12) c'est-à-dire que :

$$[M^e] = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,12} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{12,1} & \cdots & m_{12,12} \end{pmatrix} u_1(a_1) : \text{la première colonne de } [M^e] \text{ qui désigne le}$$

coefficient de  $u_1^n(a_1)$  dans la  $i^{ème}$  équation.

Ainsi le système à résoudre devient :

$$\begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & \dots & \dots & m_{1,6} & \dots & \dots & m_{1,12} \\ & \ddots & & \dots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \dots & & & & \vdots \\ & \dots & & \ddots & \dots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ m_{6,1} & & \dots & & m_{6,6} & \dots & & m_{6,12} \\ & & & \ddots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \dots & & \ddots & & & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & \dots & & & & \vdots \\ m_{12,1} & \dots & & \dots & m_{12,6} & \dots & \dots & m_{12,12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^n(a_1) \\ u_2^n(a_1) \\ u_1^n(a_2) \\ u_2^n(a_2) \\ u_1^n(a_3) \\ u_2^n(a_3) \\ u_1^n(a_4) \\ u_2^n(a_4) \\ u_1^n(a_5) \\ u_2^n(a_5) \\ u_1^n(a_6) \\ u_2^n(a_6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \\ n_5 \\ n_6 \\ n_7 \\ n_8 \\ n_9 \\ n_{10} \\ n_{11} \\ n_{12} \end{pmatrix}$$

### E-5-Assemblage et résolution

L'assemblage permet de construire des matrices globales relatives à tout le domaine à partir des matrices élémentaires :

$$\begin{aligned}
 [m_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq 12} (u) = (n_i)_{1 \leq i \leq 12} & \longrightarrow [M_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq 740} (U) = (N_i)_{1 \leq i \leq 740} \\
 [k_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq 3} (p) = (l_i)_{1 \leq i \leq 3} & \longrightarrow [K_{i,j}]_{1 \leq i,j \leq 406} (P) = (L_i)_{1 \leq i \leq 406}
 \end{aligned}$$

(U) est donc un vecteur à 740 éléments

- pour  $i=1,\dots,406$  ; les éléments de (U) sont les valeurs de la composante  $x_1$  de la vitesse sur le nœud numéro  $i$
- pour  $i=407,\dots,740$  ; les éléments de (U) sont les valeurs de la composante  $x_2$  de la vitesse sur le nœud numéro  $i-406$

Définissons d'abord pour chaque élément, la table de LOCALisation Elémentaire

**LOCE** qui donne la position de chaque terme des inconnues.

Pour illustrer la table de localisation, considérons le cas de l'assemblage des deux triangles suivants :

Eléments	Nœuds		
1	1	2	4
2	1	4	3

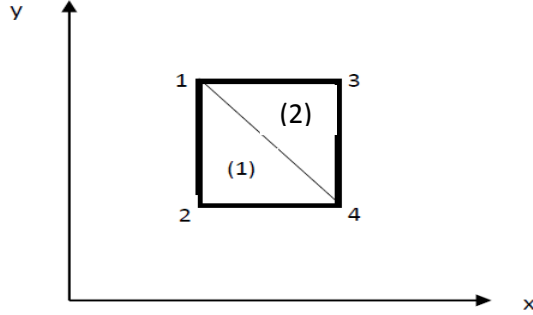


Figure 4:assemblage de deux triangles

1- s'il y a un degré de liberté par nœud (cas de la pression)

$$\left( P_h^{n+1} \right) = \begin{pmatrix} P_h^{n+1}(1) \\ P_h^{n+1}(2) \\ P_h^{n+1}(3) \\ P_h^{n+1}(4) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Elément 1 : } \left( p_h^{n+1} \right) &= \begin{pmatrix} p_h^{n+1}(1) \\ p_h^{n+1}(2) \\ p_h^{n+1}(4) \end{pmatrix}, & \text{LOCE} = (1, 2, 4) \\ \text{Elément 2 : } \left( p_h^{n+1} \right) &= \begin{pmatrix} p_h^{n+1}(1) \\ p_h^{n+1}(4) \\ p_h^{n+1}(3) \end{pmatrix}, & \text{LOCE} = (1, 4, 3) \end{aligned}$$

s'il y a deux degrés de liberté par nœud (cas de la vitesse) :

$$\left( U_{hk}^{n+1} \right) = \begin{pmatrix} U_{h1}^{n+1}(1) \\ U_{h1}^{n+1}(2) \\ U_{h1}^{n+1}(3) \\ U_{h1}^{n+1}(4) \\ U_{h2}^{n+1}(1) \\ U_{h2}^{n+1}(2) \\ U_{h2}^{n+1}(3) \\ U_{h2}^{n+1}(4) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Elément 1 : } \left( \mathbf{u}_{hk}^{n+1} \right) &= \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{h1}^{n+1}(1) \\ \mathbf{u}_{h1}^{n+1}(2) \\ \mathbf{u}_{h1}^{n+1}(4) \\ \mathbf{u}_{h2}^{n+1}(1) \\ \mathbf{u}_{h2}^{n+1}(2) \\ \mathbf{u}_{h2}^{n+1}(4) \end{pmatrix} & \text{LOCE} = (1, 2, 4, 5, 6, 8) \\ \\ \text{Elément 2 : } \left( \mathbf{u}_{hk}^{n+1} \right) &= \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{h1}^{n+1}(1) \\ \mathbf{u}_{h1}^{n+1}(4) \\ \mathbf{u}_{h1}^{n+1}(3) \\ \mathbf{u}_{h2}^{n+1}(1) \\ \mathbf{u}_{h2}^{n+1}(4) \\ \mathbf{u}_{h2}^{n+1}(3) \end{pmatrix}, & \text{LOCE} = (1, 4, 3, 5, 8, 6) \end{aligned}$$

Généralisons le cas de la pression et de la vitesse. Notons  $\mathbf{o}$  la matrice élémentaire,  $\mathbf{O}$  la matrice globale,  $\mathbf{s}$  le vecteur élémentaire, et  $\mathbf{S}$  le vecteur global. Le montage des matrices et vecteurs globaux se fait par l'algorithme suivant :

- initialiser les termes de  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{S}$  zéro.
- pour chaque élément :
  - ajouter chaque terme  $\mathbf{o}_{i,j}$  de sa matrice élémentaire, au terme  $\mathbf{O}_{I,J}$  de la matrice globale :  $\mathbf{O}_{I,J} = \mathbf{O}_{I,J} + \mathbf{o}_{i,j}$  où  $I = \text{LOCE}(i)$  et  $J = \text{LOCE}(j)$
  - ajouter chaque terme  $\mathbf{s}_i$  du vecteur élémentaire, au terme  $\mathbf{S}_I$  du vecteur global :  $\mathbf{S}_I = \mathbf{S}_I + \mathbf{s}_i$  où  $I = \text{LOCE}(i)$

De plus, pour la résolution des systèmes matriciels globaux, il faut tenir compte des conditions aux limites (1. 3) pour le cas de la vitesse.

Il existe plusieurs méthodes d'introduction des conditions aux limites. Dans notre cas, nous avons utilisé la méthode de suppression des équations. Ce dernier a l'avantage de réduire le nombre d'inconnues du système [1].

La mise en œuvre de l'algorithme d'Uzawa avec la résolution par éléments finis des équations (2.14) et (2.15) est exécutée dans un programme Matlab.

# CHAPITRE III- RESULTATS ET DISCUSSION

## III-I-RESULTATS

Nous avons effectué l'étude de la résolution de problème sur le cas de l'eau avec la viscosité cinématique  $\mu = 10^{-3}$  (exprimé en  $\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ ). Puis nous avons pris une vitesse de rotation constante  $\omega = 10^{-6} \text{ m.s}^{-1}$  et une valeur de nombre de Reynolds de l'ordre de  $10^{-3}$ .

Le critère d'arrêt de l'algorithme de résolution correspond au un erreur relative est

$$e_r^n = \left\| \frac{u^n - u^{n-1}}{u^n} \right\| < 10^{-3} \quad (3.1)$$

Pour la résolution numérique, nous avons utilisé le type d'algorithme d'Uzawa, et on démontre qu'il converge suivant les conditions :  $0 < \zeta < 2r$

DEMONSTRATION [5]

Introduisons l'équation (2.15) :  $p_h^{n+1} = p_h^n - \zeta B u_h^n$ , on obtient

$$\|p_h^{n+1}\|^2 = \|p_h^n\|^2 - 2p_h^n \zeta B u_h^n + \|\zeta B u_h^n\|^2 \text{ ou encore}$$

$$\|p_h^n\|^2 - \|p_h^{n+1}\|^2 = 2p_h^n \zeta B u_h^n - \|\zeta B u_h^n\|^2 = 2\zeta (p_h^n, \text{div } u_h^n) - \zeta^2 \|\text{div } u_h^n\|^2 \quad (3.2)$$

Par ailleurs, en multipliant scalairement (2.13) par  $u^n$ , on obtient

$$\mu \left( \frac{u^n}{\partial x}, \frac{u^n}{\partial x} \right) + r \|\nabla u^n\|^2 = (p^n, \nabla u^n) \quad (3.3)$$

D'où en substituant membre a membre (3.2) et (3.3), on écrit :

$$\|p_h^n\|^2 - \|p_h^{n+1}\|^2 = 2\mu \zeta \left( \frac{u^n}{\partial x}, \frac{u^n}{\partial x} \right) + \zeta (2r - \zeta) \|\text{div } u_h^n\|^2 \quad (3.4)$$



Donc si,  $0 < \zeta < 2r$ , le membre de droite de l'équation (3.4) est strictement positif.

La suite  $\|p_h^n\|^2$  est donc décroissante. Mais étant bornée inférieurement par 0, elle est donc

convergente. Alors :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\|p_h^n\|^2 - \|p_h^{n+1}\|^2) \rightarrow 0$  (3.5)

Par suite d'après (3.4), on a aussi :  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{u^n}{\partial x}, \frac{u^n}{\partial x}) \rightarrow 0$  (3.6)

(3.6) implique alors que  $\vec{u}^n \rightarrow 0$ . Soit encore  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{u^n}{\partial x}) = u$ .

On établit que quel que soit le choix de  $p_h^O$  la suite  $u_h^n$  converge vers  $u$ .  $\square$

Par conséquent, on arrête la résolution si  $e_r^n$  atteint la condition d'arrêt précédent où

$$e_r^n \leq \varepsilon = 10^{-3}$$

Nous avons fixé  $r=2$  et avons fait varier  $\zeta$  entre 0,1 et 0,5. Dans tous les cas la convergence est atteinte au bout de 2 itérations.

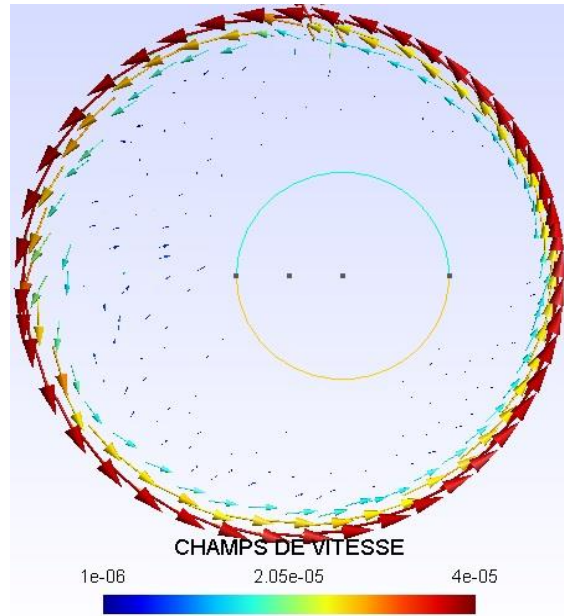
**Tableau 3: Variation de s en fonction de  $\zeta$**

$\zeta$	Nombre d'itération s
0.1	2
0.2	2
0.3	2
0.4	2
05	2

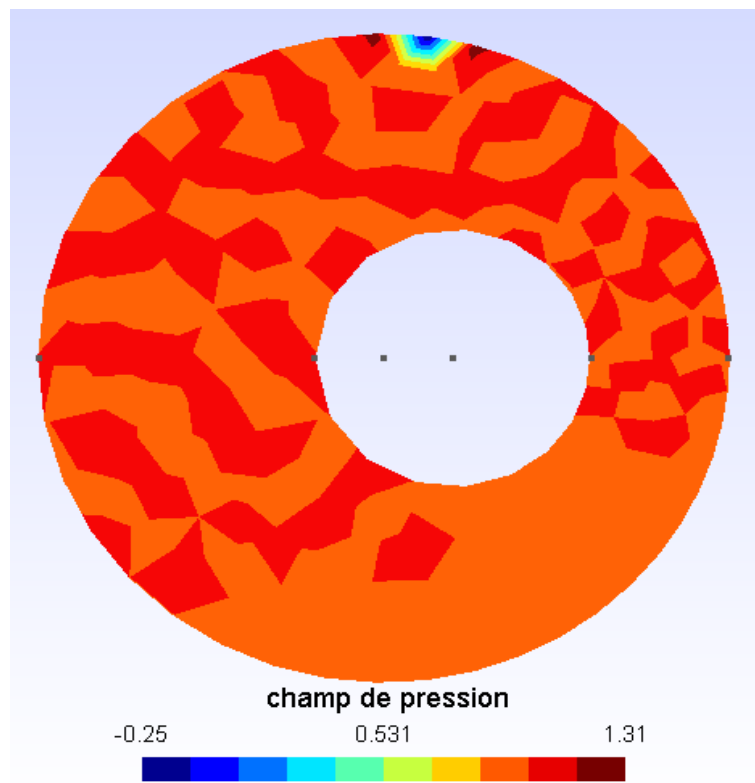
### III-II-DISCUSSION

Nous avons pris  $r = 2$  et  $\zeta = 0.5$ .

Puis nous avons présentés les champs de vitesse et de pression dans la figure suivante dont les valeurs affichées sont exprimées en  $m.s^{-1}$  pour les vitesses et en Pascal pour les pressions. La figure 5 nous montre les champs de vitesse qui sont tangent à la ligne de courant quand la convergence est atteinte. Nous avons un écoulement très lente c'est-à-dire que la vitesse d'écoulement du fluide est de l'ordre de  $10^{-5} ms^{-1}$ .



**Figure 5: Champ vectoriel de vitesse**



**Figure 6: Champ vectoriel de pression**

La figure 6 nous permet de constater que l'écoulement est plus fort dans la partie du domaine où le gradient de pression est élevé.

# CONCLUSION

Dans ce travail, avec la méthode de Lagrangien augmenté, nous avons effectué la résolution des équations de Stokes pour un écoulement bidimensionnel entre deux cylindres non concentriques. Ces équations ont été ramenées à un problème d'optimisation avec contrainte. C'est ainsi que nous avons utilisé la méthode Uzawa et un algorithme contenant les équations aux dérivées partielles pour les résoudre.

La méthode des éléments finis est aussi introduite pour le principe de ramener un problème continu à un problème discret. D'ailleurs, sous l'action de logiciel GMSH, le domaine a été maillé et les éléments triangulaires sont associés à des éléments de type  $P_2$  pour la vitesse et des éléments de type  $P_1$  pour la pression.

L'algorithme d'Uzawa que nous avons mis en œuvre détermine les valeurs discrètes de la vitesse  $u_h$  et la pression  $p_h$  dont le Lagrangien augmenté a été mis en jeu.

La convergence est atteinte à la 2<sup>ème</sup> itération et on prend la valeur optimale  $\zeta = 0.5$ .

En définitive, nous pouvons déduire que la méthode du Lagrangien augmenté améliore considérablement les propriétés de convergence des algorithmes de résolution et cette propriété est d'autant plus requise que la viscosité  $\mu$  est faible.

# REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Fortin, Glowinsky.« Méthodes de Lagrangien augmenté. Application à la résolution de problèmes aux limites. Méthodes mathématiques de l'informatique ». Dunod - Bordas, Paris, 1982.
  
- [2] Grégoire Allaire, « Analyse numérique et optimisation : une introduction à la modélisation mathématique et simulation numérique »
  
- [3] Ciarlet P.G,« Introduction à l'analyse numérique et matricielle et à l'optimisation », MASSON Paris Milan Barcelone Mexico.
  
- [4] Rasoloarijaona M. N., « Non linéarités de la loi de Darcy; Etudes théoriques, numériques et expérimentales ». Thèse de doctorat, Grenoble, 1993.
  
- [5] Girault V, Raviart P.A. Finite element approximation of Navier-Stokes equations. Lecture notes in math, vol 749, Springer-Verlag, Berlin, 1979.
  
- [6] Nicolas Kielbasiewicz, « TP GMSH et partitionnement de maillage » Septembre 2013.
  
- [7] Vincent Manet : Méthode des éléments finis. cel-00763690, version 5, 31 Mars 2014
  
- [8] Frédéric et Aude Rondepierre , « Introduction à l'optimisation numérique »
  
- [9] Gouri Dhatt Gilbert Touzout, « Une présentation de la méthode des éléments finis », Quebec 1981.

# ANNEXES

## ANNEXE A

Rappel **Théorème de Riez** : Soit  $H$  un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Soit  $f$  une fonction linéaire continue sur  $H$ , alors il existe un unique, tel que

$$\forall x \in H, f(x) = \langle y, x \rangle$$

Démonstration : l'application  $F = \ker f$  est fermée car  $f$  est continue

- Existence : si  $F^\perp = \{0\}$ , alors  $(F^\perp)^\perp = F = H$  et on prend  $y = 0$

Si non, soit  $y_1 = y_2$  tel que  $\|w\| = 1$ .

On a  $f(w) \neq 0$  et pour  $x \in H$ ,  $x - \frac{f(x)}{f(w)} w \in \ker f = F$  donc  $\langle w, x - \frac{f(x)}{f(w)} w \rangle = 0$

D'où pour  $x \in H$ ,  $f(x) = f(x) \langle w, w \rangle = f(w) \langle w, x \rangle = \langle y, w \rangle$  en posant

$$y = \overline{f(w)} w.$$

- Unicité : soit  $y_1, y_2 \in H$  tel que pour tout  $x \in H$ ,  $\langle y_1, x \rangle = f(x) = \langle y_2, x \rangle$ .

Alors en prenant  $x = y_1 - y_2$ , on obtient  $\langle y_1 - y_2, y_1 - y_2 \rangle = 0$  d'où  $y_1 = y_2$

## ANNEXE B

Calcul détaillé de la matrice de rigidité élémentaire

Le système à résoudre peut s'écrire de la forme

$$(A + rB^T . B) \vec{u}^{n+1} + B^T . \vec{p}^{n+1} = b$$

Après avoir introduire la fonction test  $v$  et en intégrant sur tout le domaine d'étude, on a

$$-\mu(\vec{u}^{n+1}, \vec{v}) - r(\vec{\nabla} . (\vec{\nabla} \vec{u}^{n+1}), \vec{v}) - (\vec{\nabla} . \vec{p}, \vec{v}) = k(\vec{f}, \vec{v})$$

et si on calcul chaque terme de cette équation, on obtient alors :

$$\int_{\Omega} \vec{u}^{n+1} . \vec{v} d\Omega = (\vec{u}^{n+1}, \vec{v}) = \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} \vec{u}_i^{n+1} . \vec{v}_i d\Omega$$

$$\text{or } \vec{u}_{i/T_h}^{n+1} = \sum_{i=1}^2 \left( \sum_{k=1}^2 \vec{u}_i^{n+1}(a_k) . v_k + \sum_{k=1, j=2}^{2,3} \vec{u}_i^{n+1}(a_{kj}) . v_{kj} \right)$$

$$(\vec{u}^n, \vec{v}) = \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^2 \left( \sum_{k=1}^3 u_i^n(a_k) . v_k + \sum_{k=1, j=2}^{2,3} u_i^n(a_{kj}) . v_{kj} \right) v_i \right) d\Omega$$

On a :

$$(\vec{u}^{n+1}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^2 \left( \sum_{k=1}^2 \vec{u}_i^{n+1}(a_k) . v_k + \sum_{k=1, j=2}^{2,3} \vec{u}_i^{n+1}(a_{kj}) . v_{kj} \right) v_i \right) d\Omega$$

$$\int_{\Omega} \mu \Delta \vec{u}^{n+1} . \vec{v} d\Omega = \mu \int_{\Omega} \Delta \vec{u}^{n+1} . \vec{v} d\Omega = \mu (\Delta \vec{u}^{n+1}, \vec{v})$$

$$\mu(\vec{u}^{n+1}, \vec{v}) = \mu \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 (\Delta u_i^{n+1} . v_i) d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 (\vec{\nabla} . (\vec{\nabla} . u_i^{n+1}) . v_i) d\Omega$$

$$\mu(\vec{u}^{n+1}, \vec{v}) = \mu \left\{ \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \vec{\nabla} . (\vec{\nabla} . u_i^{n+1} . v_i) d\Omega - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \vec{\nabla} u_i^{n+1} . \vec{\nabla} v_i d\Omega \right\}$$

En utilisant la formule de la divergence pour le premier terme, on a :

$$\mu(\vec{u}^{n+1}, \vec{v}) = \mu \left\{ \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^2 \vec{\nabla} u_i^{n+1} \cdot \vec{v}_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \vec{\nabla} u_i^{n+1} \cdot \vec{\nabla} v_i d\Omega \right\}$$

$$\mu(\vec{u}^{n+1}, \vec{v}) = \mu \left\{ \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^2 \sum_{f=1}^2 \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_f} v_i n_f d\Gamma - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \sum_{f=1}^2 \frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_f} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_f} d\Omega \right\}$$

$$\begin{aligned} \mu(\vec{u}^{n+1}, \vec{v}) = & \mu \left\{ \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^2 \sum_{f=1}^2 \left( \sum_{k=1}^3 u_i^{n+1}(a_k) \frac{\partial v_i}{\partial x_f} + \sum_{k=1, j=2}^{2,3} u_i^{n+1}(a_{kj}) \frac{\partial v_{kj}}{\partial x_f} \right) v_i n_j d\Gamma \right. \\ & \left. - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \sum_{f=1}^2 \left( \sum_{k=1}^3 u_i^{n+1}(a_k) \frac{\partial v_i}{\partial x_f} + \sum_{k=1, j=2}^{2,3} u_i^{n+1}(a_{kj}) \frac{\partial v_{kj}}{\partial x_f} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_f} d\Omega \right\} \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} r \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} u^{n+1} \cdot \vec{v} d\Omega = r(\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot u^{n+1}), \vec{v})$$

$$r(\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot u^{n+1}), \vec{v}) = r \left[ \int_{\Omega} (\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot u^{n+1}), \vec{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{\nabla} u^{n+1} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} d\Omega \right]$$

$$r(\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot u^{n+1}), \vec{v}) = r \left[ \int_{\Gamma} \vec{\nabla} \cdot (\vec{u}^{n+1} \cdot \vec{v} \cdot \vec{n}) d\Gamma - \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d\Omega \right]$$

$$r(\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot u^{n+1}), \vec{v}) = -r \left( \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d\Omega \right) = -r \left( \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \sum_{t=1}^2 \frac{\partial \vec{u}_i^{n+1}}{\partial x_i} \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_t} d\Omega \right)$$

$$r(\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot u^{n+1}), \vec{v}) = -r \left\{ \int \sum_{i=1}^2 \sum_{t=1}^2 \left( \sum_{k=1}^3 u_i^{n+1}(a_k) \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{k=1, j=2}^{2,3} u_i^{n+1}(a_{kj}) \frac{\partial v_{kj}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega \right\}$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{p}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \vec{\nabla} \cdot (\vec{p} \cdot \vec{v}) d\Omega - \int_{\Omega} \vec{p} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d\Omega$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{p}, \vec{v}) = \int_{\Gamma} \vec{p} \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \vec{p} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} d\Omega$$

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{p}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \vec{p} \sum_{i=1}^2 \frac{\delta v_i}{\delta x_i} d\Omega$$

Si on assemble tous ces résultats, on a :

$$\begin{aligned} & k \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^2 \left( \sum_{k=1}^2 \vec{u}_i^{n+1}(a_k) \cdot v_k + \sum_{k=1, j=2}^{2,3} \vec{u}_i^{n+1}(a_{kj}) \cdot v_{kj} \right) v_i \right) d\Omega \\ & - \left\{ \mu \left\{ \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^2 \sum_{f=1}^2 \left( \sum_{k=1}^3 u_i^{n+1}(a_k) \frac{\partial v_i}{\partial x_f} + \sum_{k=1, j=2}^{2,3} u_i^{n+1}(a_{kj}) \frac{\partial v_{kj}}{\partial x_f} \right) v_i n_f d\Gamma \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \sum_{f=1}^2 \left( \sum_{k=1}^3 u_i^{n+1}(a_k) \frac{\partial v_i}{\partial x_f} + \sum_{k=1, j=2}^{2,3} u_i^{n+1}(a_{kj}) \frac{\partial v_{kj}}{\partial x_f} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_f} d\Omega \right\} \right\} \\ & - \left\{ -r \left\{ \int \sum_{i=1}^2 \sum_{t=1}^2 \left( \sum_{k=1}^3 u_i^{n+1}(a_k) \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{k=1, j=2}^{2,3} u_i^{n+1}(a_{kj}) \frac{\partial v_{kj}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega \right\} \right\} - \\ & - \left\{ \int_{\Omega} p \sum_{i=1}^2 \frac{\delta y}{\delta x} d\Omega \right\} = k \int_{\Omega} \left( \sum_{i=1}^2 \left( \sum_{k=1}^3 u_i^n(a_k) \cdot v_k + \sum_{k=1, j=2}^{2,3} u_i^n(a_{kj}) \cdot v_{kj} \right) v_i \right) d\Omega \end{aligned}$$

En faisant le calcul des factorisations et en passant au second membre tous ceux qui sont connues, enfin on a :

$$\begin{aligned} & + \mu \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \sum_{f=1}^2 \left( \sum_{k=1}^3 u_i^{n+1}(a_k) \frac{\partial v_i}{\partial x_f} + \sum_{k=1, j=2}^{2,3} u_i^{n+1}(a_{kj}) \frac{\partial v_{kj}}{\partial x_f} \right) \frac{\partial v_i}{\partial x_f} d\Omega \left\{ \right. \\ & + r \left\{ \int_{\Omega} \sum_{i=1}^2 \sum_{t=1}^2 \left( \sum_{k=1}^3 u_i^{n+1}(a_k) \frac{\partial v}{\partial x_i} + \sum_{k=1, j=2}^{2,3} u_i^{n+1}(a_{kj}) \frac{\partial v_{kj}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega \right\} = \int_{\Omega} p \sum_{i=1}^2 \frac{\delta v_i}{\delta x_i} d\Omega \\ & + \mu \left\{ \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^2 \sum_{f=1}^2 \left( \sum_{k=1}^3 u_i^{n+1}(a_k) \frac{\partial v_i}{\partial x_f} + \sum_{k=1, j=2}^{2,3} u_i^{n+1}(a_{kj}) \frac{\partial v_{kj}}{\partial x_f} \right) v_i n_f d\Gamma \right. \end{aligned}$$

Le premier membre c'est la matrice de rigidité élémentaire.