Table des matières

Nomenclature

Lettres romaines

A, B Grandeurs d'illustration

C Constante universelle (s^{-1})

c_p Capacité thermique massique à pression constante (J.kg^{-1}.K^{-1})

e Energie interne (m^{2}.s^{-2})

f Force de volume (m.s^{-2})

k Energie cinétique turbulente (m^{2}.s^{-2})

ℓ Scalaire d'illustration

l Taille caractéristique des petits tourbillons (m)

L Taille caractéristique des gros tourbillons (m)

p Pression (Pa)

q Flux de chaleur (m^{2}.s^{-3})

T Température (K)

U Vitesse caractéristique des gros tourbillons (m.s^{-1})

v Composantes tensorielles de vitesse (m.s^{-1})

Lettres grecques

ε Energie de dissipation (m^{2}.s^{-2})

η Longueur caractéristique d l'échelle de Kolmogorov (m)

ν Viscosité cinématique (m^{2}.s^{-1})

ρ Masse volumique (kg.m^{-3})

τ Contraintes visqueuses (kg.m^{-1}.s^{-2})

τ_l Temps caractéristique de l'échelle de l'écoulement des petits tourbillons (s)

τ_η Temps caractéristique de l'échelle de Kolmogorov (s)

μ Viscosité dynamique (kg.m^{-1}.s^{-1})

$\phi(r)$ Discriminant de Rayleigh (m^2.s^{-2})

Indices

i, j Composantes tensorielles

o Grandeurs de référence

r Grandeurs réduites

l Echelle de petits tourbillons

L Echelle de gros tourbillons

η Echelle de Kolmogorov

x *et* y Composantes axiales

Nombres sans dimension

F_r Nombre de Froude, $F_r = \frac{v_o}{f_o x_o}$

R_e Nombre de Reynolds, $R_e = \frac{\rho_o v_o x_o}{\mu_o}$

P_r Nombre de Prandtl, $P_r = \frac{\mu_o c_{po} T_o}{q_o}$ avec $q_o = \frac{\lambda_o T_o}{x_o}$

Exposants

$-$ Valeurs moyennes

□ Valeurs fluctuantes

Opérateurs

$\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ Dérivées spatiales

$\frac{\partial}{\partial t}$ Dérivée temporelle

$\sum$ Somme

$\int$ Intégrale

$\lim$ Limite

INTRODUCTION

La mécanique des fluides repose fondamentalement sur les équations de Navier - Stokes qui admettent dans certains cas des solutions mathématiques exactes. Cependant la plupart des phénomènes physiques réels tels que le panache de fumée, la couche limite sur la voilure d'un avion, le jet d'un turboréacteur…, fait intervenir dans ces équations fondamentales des termes supplémentaires qui compliquent ainsi l'obtention de résultats par un simple calcul.

En mécanique des fluides la turbulence est considérée comme l'état d'un fluide dont l'écoulement est irrégulier spatialement et temporellement. L'écoulement turbulent est de ce fait imprévisible ; elle est l'objet de beaucoup d'études et des approches diverses sont utilisées pour appréhender la complexité de ce type d'écoulement.

Notre travail consiste à modéliser, grâce aux équations adimensionnelles, les écoulements turbulents plans dont la masse volumique est variable. Notre démarche se base surtout sur la décomposition de Reynolds que nous allons appliquer à toutes les grandeurs variables.

Dans un premier temps, une description de quelques phénomènes de transition entre les écoulements laminaire et turbulent est menée, suivie d'une introduction à la théorie de la turbulence, avant l'écriture des équations qui régissent « *les écoulements turbulents plans à masse volumique variable* » avec les conditions initiales et aux limites. La fin du travail porte sur la discussion de quelques résultats expérimentaux des travaux cités dans la bibliographie. Dans cette discussion nous allons nous intéresser surtout à l'influence de la masse volumique sur les autres grandeurs physiques de l'écoulement turbulent plan, du fait de la composition chimique des fluides réels qui n'est pas toujours homogène.

Malgré la difficile disponibilité de la documentation sur ce thème, notre travail s'inscrit dans un cadre global car il considère les écoulements incompressible et compressible. La plupart des documents que nous avons utilisés pour ce mémoire ont été pris sur internet.

PARTIE 1 :

TRANSITION ENTRE LES REGIMES LAMINAIRE ET TURBULENT

L'expérience de Reynolds, réalisée vers 1886, a permis de mettre en évidence l'étroite relation entre la quantité $R_e = \dfrac{U \times L}{\nu}$, aujourd'hui appelée nombre de Reynolds (R_e), et la structure d'un écoulement. En effet, suivant la géométrie caractéristique du mouvement et la vitesse de l'écoulement d'un fluide, il existe une valeur limite de R_e au-dessus da laquelle les couches laminaires de formes régulières ont tendance à prendre des formes irrégulières pour conduire à la turbulence.

Le passage de l'écoulement laminaire, dont la solution dans certains cas peut être déterminée par un simple calcul, à l'écoulement turbulent se fait par le biais des instabilités et d'autres phénomènes physiques connus tels que le décollement, etc.

Les instabilités sont directement liées au terme non linéaire inertiel de l'équation de Navier - Stokes [2] et sont essentielles pour le développement de la turbulence. Une instabilité est une bifurcation dans la solution d'une équation non linéaire qui s'opère pour une certaine valeur de paramètre de contrôle ; dans l'équation de Navier – Stokes, le paramètre de contrôle considéré est le nombre de Reynolds. Les instabilités sont classées généralement en deux familles [2] :

- ✓ Bifurcation super - critique,
- ✓ Bifurcation sous - critique.

Pour illustrer nos propos sur les instabilités, nous utilisons deux instabilités sachant qu'il en existe beaucoup d'autres. Toutes ces illustrations sont considérées dans un fluide inviscible.

1.1 - Les instabilités

1.1.1- Les instabilités de cisaillement

Une forme plus restrictive du t héorème de Rayleigh stipule que tout profil de vitesse présentant un point d'inflexion $(v''(y_s) = 0)$ et vérifiant la relation [2] :

$$v''(y)[v(y) - v(y_s)] \leq 0$$

est potentiellement instable.

Un écoulement qui présente un po int d'inflexion est en fait une nappe de vorticité. Si nous considérons une nappe de vorticité infiniment fine où l a vorticité est distribuée suivant une ligne, la moindre déformation de la nappe va être amplifiée par le jeu des vitesses induites et la nappe va s'enrouler. L'instabilité de cisaillement est à l 'origine de l'enroulement des nappes de vorticité en tourbillons. Elle est un cas p articulier de l'instabilité de Kelvin – Helmholtz qui s'opère à l'interface entre deux fluides de vitesse, de masse volumique et de tension superficielle différentes. Elle est de dimension 2 (2D) et la figure1.1 illustre sa structure.

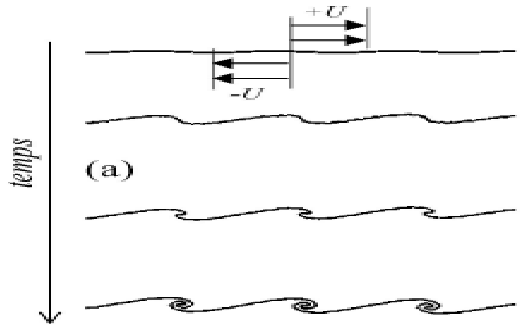

Fig. 1. 1: Ecoulement d'une nappe de circulation (ou saut de vitesse) Δ U = 2U tournant dans le sens horaire. Cette nappe est déformée sinusoïdalement [3]

1.1.2 - Les instabilités centrifuges

D'après le critère de stabilité de Rayleigh pour les écoulements courbes, un é coulement axisymétrique est potentiellement instable si le discriminant de Rayleigh $\phi(r)$ est négatif [2] :

$$\phi(r) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[ru(r)]^2 \langle 0$$

On retient qu'un écoulement localement courbé dans une région est potentiellement instable dans cette région si le moment cinétique $ru(r)$ décroît en s'éloignant du centre de courbure. Cette instabilité est 3D et elle se déclare avec apparition de vortex (ou rouleau) qui brise la symétrie axiale de la translation.

Ainsi tous les écoulements couche limite sur une paroi concave sont potentiellement instables (voir les figures 1.2.a et 1.2.b).

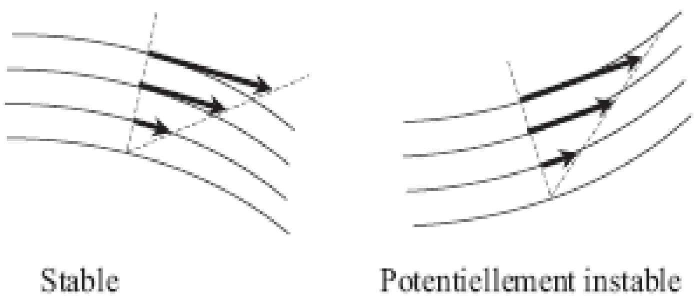

Fig. 1.2.a: Critère de stabilité centrifuge pour les écoulements courbes [3]

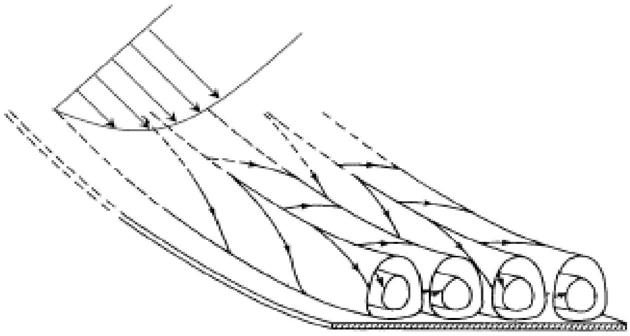

Fig. 1.2.b: Structures produites par une instabilité centrifuge d'une couche limite sur une paroi concave [3]

1.1.3 - Les instabilités de tourbillons

Si on considère un écoulement non visqueux des deux côtés d'une couche tourbillonnaire plane ayant des vitesses constantes mais inégales, une petite perturbation de la planéité de cette couche fait décroître la pression sur l'extrados perturbé en faisant augmenter la vitesse sur celui-ci. Le phénomène inverse se produit sur l'intrados. La différence de pression sert ainsi à l'amplification de la perturbation rendant ainsi l'écoulement instable. On observe la formation de tourbillons distincts et une transition 2D vers 3D (fig. 1.3).

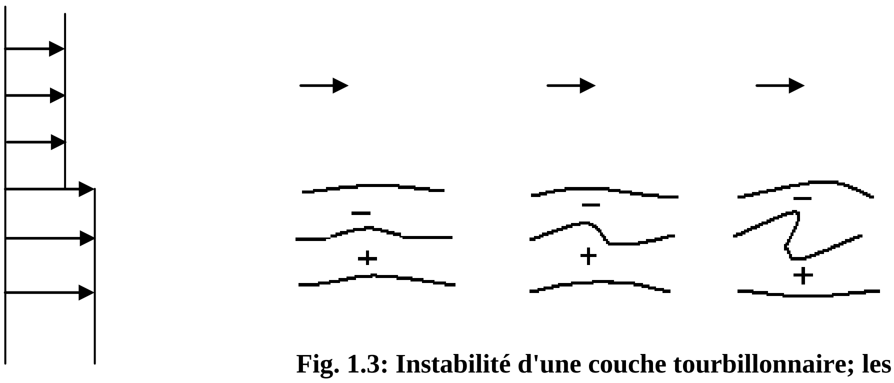

Fig. 1.3: Instabilité d'une couche tourbillonnaire; les signes + et - indiquent respectivement une diminution ou une augmentation de la pression

1.2 - Phénomène de décollement

Le phénomène de décollement a lieu dans la couche laminaire d'un écoulement permanent. Il est lié au comportement dynamique de la couche limite et est responsable de la création de zones potentiellement instables aux abords des parois. Il intervient lorsque cette couche limite se développe en présence d'un gradient de pression adverse, c'est – à – dire dans une situation où la pression augmente dans la direction de l'écoulement. La vitesse de l'écoulement au voisinage de la paroi subit une décélération et ceci est augmenté par le transfert de la quantité de mouvement par les forces visqueuses. Ainsi la quantité de mouvement du fluide diminue graduellement pour compenser le gradient de pression et les forces de frottement pariétales ;

ce qui conduit à l'annulation de la vitesse en un point du fluide. En aval du point de décollement, le gradient de pression induit un écoulement à contre - courant, l'épaisseur de la couche limite augmente et les filets fluides quittent la paroi. On observe alors la formation d'un sillage et le décollement est généralement accompagné d'instabilités de l'écoulement. Très souvent des tourbillons se forment dans la région décollée. Ce phénomène n'est pas considéré comme une instabilité car il ne résulte pas de l'amplification du phénomène de bruit [2]. La figure 1.4 illustre le développement de ce phénomène de décollement.

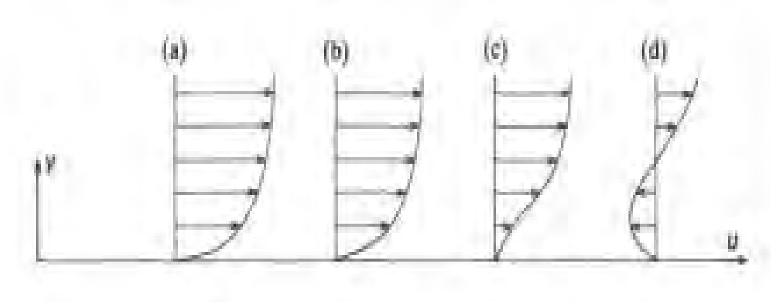

Fig. 1. 4: Développement du phénomène de décollement de (a) où le gradient de vitesse est >0 vers (d) où il est <0 [3]

1.3 - Théories sur la turbulence

Dans ce paragraphe d'introduction sur la théorie de la turbulence, nous allons présenter les concepts de base ainsi que le traitement statistique de la turbulence.

1.3.1 - Cascade d'énergies de Richardson

Dans cette théorie on considère que la turbulence est composée de tourbillons de tailles différentes. Les tourbillons de taille (l) ont une vitesse caractéristique (u_l) et une durée de vie $(\tau_l = \frac{l}{u_l})$. Les plus gros tourbillons, de taille (L), ont pour vitesse caractéristique (U) et pour nombre de Reynolds $R_e = \frac{U \times L}{\nu}$, ν est la viscosité cinématique. Ce nombre de Reynolds est très grand, de sorte qu'on néglige les effets visqueux ; il ne peut donc pas avoir de dissipation d'énergie sous forme de chaleur. Cependant, ces gros tourbillons sont instables et par conséquent vont mourir en se cassant pour donner des tourbillons de taille plus petite que les précédents. Ces derniers vont hériter l'énergie de leurs pères et vont mourir à leur tour jusqu'à ce qu'on ait des tourbillons suffisamment petits qui ne seront plus sujets aux instabilités. Les effets visqueux deviennent alors prépondérants et la disparition de ces tourbillons entraîne une dissipation de chaleur.

1.3.2 - Théorie de Kolmogorov

Cette théorie de turbulence se place dans un contexte d'isotropie à laquelle n'obéissent pas tous les écoulements réels. Cependant, en considérant des échelles suffisamment petites ($l << L$, L étant l'échelle caractéristique de l'écoulement) les mouvements auront tendance à oublier le contexte inhomogène et anisotrope par lequel la turbulence a été engendrée. Cette théorie est basée sur deux hypothèses que sont :

- H1 : Echelle dissipative de la turbulence

Pour $(R_e >> 1)$, la statistique des mouvements turbulents est uniquement déterminée à partir de la viscosité cinématique (ν) et du taux moyen de dissipation en énergie $(<\varepsilon>)$. A partir de ces deux grandeurs on construit dimensionnellement l'échelle de Kolmogorov, η, ayant pour vitesse u_η et pour temps caractéristique τ_η.

$$<\varepsilon> \alpha \frac{U^3}{L} = \frac{U^2}{\tau_L}$$

$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{<\varepsilon>}\right)^{1/4}$$

$$u_\eta = \left(\nu <\varepsilon>\right)^{1/4}$$

$$\tau_\eta = \left(\frac{\nu}{<\varepsilon>}\right)^{1/2}$$

On remarque que pour $R_\eta = 1$ les effets visqueux sont égaux aux effets inertiels, et les mouvements de plus petites tailles que η sont responsables de la dissipation d'énergie, η est appelée échelle de dissipation.

- H2 : Echelle inertielle

La statistique des mouvements de taille telle que $(\eta < \mathrm{l} < \mathrm{L})$ est déterminée par $<\varepsilon>$. Pour ces échelles intermédiaires (l), le taux moyen d'énergie (quantité d'énergie par unité de masse) vaut :

$$<\varepsilon> = \frac{\nu u_l^{\ 2}}{l^2} \ [1]$$

La figure 1.5 illustre la multitude d'échelles que l'on rencontre dans un écoulement turbulent

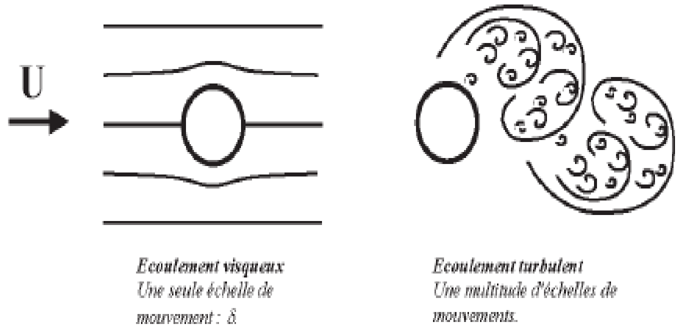

Fig. 1. 5: Mise en évidence des échelles caractéristiques dans un écoulement turbulent [3]

1.3.3 - Traitement statistique des écoulements turbulents

La description spatiale et temporelle des écoulements turbulents en tout point est difficile en général à cause du caractère aléatoire de la turbulence. La méthode de simulation la plus utilisée pour les écoulements turbulents reste celle fondée sur une approche statistique. Dans cette méthode, les variables qui décrivent l'écoulement turbulent sont décomposées en une valeur moyenne et une fluctuation.

Le traitement statistique que nous présentons ici va d'abord nous permettre de définir la moyenne d'une variable avant d'introduire la décomposition de Reynolds.

1.3.3.1 - Opérateurs de la moyenne

Nous pouvons définir de deux manières différentes la moyenne d'une variable $A(x,t)$. La première méthode consiste à effectuer une moyenne sur le temps.

$$\overline{A} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{t\ -t/2}^{t+t/2} A(x,t)dt$$

Avec cette moyenne la période d'intégration doit être suffisamment grande par rapport au temps caractéristique des fluctuations de A.

Dans la deuxième méthode de calcul de la moyenne on utilise un ensemble de N réalisations $A^k(x,\ t)$ de la variable $A(x,\ t)$. On mesure la variable sur un ensemble d'expériences et on forme à chaque instant la moyenne d'ensemble comme suit :

$$< A >= \frac{1}{N} \lim \sum_{k=1}^{N} A^k (x,t)$$

Nous pouvons utiliser l'une des deux formes de la moyenne sans influencer les résultats de l'analyse. Pour des raisons de faciliter l'écriture dans notre travail, nous utiliserons dans la suite la notation de la moyenne $\overline{A}$.

S'il y a équivalence entre la moyenne temporelle et la moyenne d'ensemble on est dans le cas des processus stationnaires ergodiques.

1.3.3.2 - Décomposition de Reynolds

La décomposition de Reynolds consiste à présenter chaque variable de l'écoulement comme la somme d'une valeur moyenne et d'une fluctuation dont la moyenne est nulle.

$$\mathrm{A}(\mathrm{x},\mathrm{t}) = \overline{\mathrm{A}} + \mathrm{A}'$$

La valeur de la fluctuation est obtenue à chaque instant en retranchant la valeur moyenne de la valeur de la variable A(x, t).

Si on considère une deuxième variable B(x, t) et un réel ℓ, on a les propriétés suivantes:

$$\overline{\mathrm{A}+\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{B}}$$

$$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{A}}.\overline{\mathrm{B}} + \overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}'}$$

$$\overline{\ell \mathrm{A}} = \ell \overline{\mathrm{A}}$$

$$\overline{\overline{\mathrm{A}}+\mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} + \overline{\mathrm{B}}$$

$$\overline{\frac{\partial A}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial t}\overline{A}$$

$$\overline{\frac{\partial A}{\partial \mathbf{x}}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\overline{A}$$

Dans toute cette partie nous avons essayé de présenter un aspect important du thème de notre mémoire, à savoir la turbulence. Ceci, afin de nous permettre d'avoir un a perçu de ce phénomène et de la théorie de base qui gouverne ce type d'écoulement avant de passer aux autres aspects de planéité et de variation de la masse volumique. Nous reviendrons sur ces deux aspects dans la partie suivante.

PARTIE 2 :

ETABLISSEMENT DES EQUATIONS DYNAMIQUES DE L'ECOULEMENT TURBULENT PLAN A MASSE VOLUMIQUE VARIABLE

Après la présentation introductive de la turbulence dans la première partie de notre travail, dans cette seconde partie nous allons nous concentrer à établir les équations qui régissent notre étude. Pour ce faire, nous allons établir les équations qui gouvernent l'écoulement turbulent plan à masse volumique variable, à partir des équations fondamentales de la dynamique, en tenant compte de la statistique que l'on a présentée plus haut et en considérant les hypothèses suivantes :

- Hypothèse 3 :

La capacité thermique massique à pression constante (C_p) est constante

- Hypothèse 4 :

La conductivité thermique est constante

- Hypothèse 5 :

La viscosité dynamique est constante.

Ensuite, nous allons rendre les équations adimensionnelles avant d'introduire les conditions de planéité.

2.1 Etablissement des équations de l'écoulement turbulent

2.1.1 Rappel des équations fondamentales de la dynamique

Un fluide est un corps contigu, sans rigidité, qui peut subir de grandes déformations, même sous l'action de forces faibles. Il n'a pas de forme propre et a la propriété caractéristique de pouvoir s'écouler. Les liquides et les gaz sont des fluides. Pour étudier un fluide on est conduit à s'intéresser aux équations qui régissent l'état de mouvement ou non du fluide. Ces équations renseignent sur :

- la quantité de matière (transfert de masse);
- la quantité de mouvement (transfert d'énergie cinétique);
- l'énergie thermique (transfert de chaleur), etc.

Elles utilisent les variables physiques telles que la masse volumique, la vitesse, la pression, la température, etc. Elles peuvent s'écrire sous différentes formes, vectorielle, tensorielle et indicielle. Nous avons choisi d'adopter dans toute la suite du travail les notations tensorielle et indicielle pour l'écriture des équations. Nous rappelons dans ce sous paragraphe les équations fondamentales de la dynamique telles que données dans le livre de Sébastien Candel [1].

Equation de conservation de la matière

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla\rho v = 0 \qquad \textbf{(E.1)}$$

Equation de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v + \nabla.\rho vv = -\nabla p + \nabla.\tau + \rho f \qquad \textbf{(E.2)}$$

Equation de l'énergie cinétique

$$\frac{\partial}{\partial t}\left({}^{1}\!/_{2}\,\rho v^{2}\right) + \nabla.\left({}^{1}\!/_{2}\,\rho v^{2} v\right) = -v.\nabla p + v.\nabla.\tau + \rho f.v \qquad \textbf{(E.3)}$$

Equation de l'énergie interne

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho e + \nabla.\rho ve = -\nabla q - p\nabla.v + \tau : \nabla v \qquad \textbf{(E.4)}$$

Avec $\tau : \nabla v = \tau_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i}v_j$

Equation d'échange thermique

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t}\rho T + c_p \nabla.\rho T v = -\nabla.q - \left(\frac{\partial ln\rho}{\partial lnT}\right)_p \frac{d}{dt}p + \tau : \nabla v + \rho T \frac{d}{dt}c_p \qquad \textbf{(E.5)}$$

2.1.2 Equations moyennées de la turbulence

A partir des équations ci-dessus, nous pouvons établir les équations moyennées de la turbulence. Ces dernières constituent la meilleure alternative, actuellement, pour représenter les écoulements réalistes. Pour l'établissement de ces éq uations, nous allons appliquer la décomposition de Reynolds à toutes les grandeurs physiques variables y c ompris la masse volumique.

Les détails sur les étapes de l'établissement des équations moyennées se trouvent en annexes.

Equation moyennée de conservation de la matière

On part de l'équation (E.1) en prenant la moyenne de chacun deux termes de l'équation, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\rho} + \overline{\nabla.\rho v} = 0 \qquad \textbf{(E.6)}$$

En appliquant la décomposition de Reynolds aux deux variables et en utilisant la forme indicielle, l'équation moyennée de la conservation de la matière sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\bar{\rho}\,\overline{v_i} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\acute{\rho}\acute{v_i}} \qquad \textbf{(E.7)}$$

Cette équation contient, par rapport à (E.1), un deuxième membre non nul qui est le produit des fluctuations de la masse volumique et de la vitesse. Le produit ***ρ'u'*** peut être assimilé à une quantité de mouvement turbulent. Son effet est non négligeable car il annule tous les deux termes du membre de droite de l'équation.

Equation moyennée de conservation de la quantité de mouvement

Nous partons de l'équation (E.2) en prenant sa forme indicielle à laquelle avant d'appliquer la décomposition de Reynolds à chacun des termes, ainsi nous avons :

$$\overline{\frac{\partial \rho v_i}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial v_i v_j}{\partial x_j}} = -\overline{\frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{\rho f_i} + \overline{\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}} \qquad \textbf{(E.8)}$$

Du fait des développements, l'équation moyennée de la quantité de mouvement se présente comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\,\overline{v_i}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\,\overline{v_i}\,\overline{v_j}) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \bar{\rho}\,\overline{f_i} + \frac{\partial \overline{\tau_{ij}}}{\partial x_j} + \overline{\acute{\rho}\acute{f_i}} - \frac{\partial}{\partial t}(\overline{\acute{\rho}\acute{v_i}}) - \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\,\overline{\acute{v_i}\acute{v_j}} + \overline{\acute{\rho}\acute{v_i}}\,\overline{v_j} + \overline{\acute{\rho}\acute{v_j}}\,\overline{v_i}) - \frac{\partial \tau_{ij}{}^{t}}{\partial x_j} \qquad \textbf{(E.9)}$$

Avec $\tau_{ij}{}^{t} = \overline{\acute{\rho}\acute{v_i}\acute{v_j}}$

Comparativement à l'équation de conservation de la quantité de mouvement (E.2) celle de la moyenne comporte des termes additionnels qui sont dus à l'application de la décomposition de Reynolds et sont le résultat des variations de la masse volumique, de la vitesse et de la force de volume (nous allons la confondre après à la force de pesanteur).

$\boldsymbol{\bar{\rho}\,\overline{\acute{v_i}\acute{v_j}}, \overline{\acute{\rho}\acute{v_i}}\,\overline{v_j}, \overline{\acute{\rho}\acute{v_j}}\,\overline{v_i}}$ ***et*** $\boldsymbol{\overline{\acute{\rho}\acute{v_i}\acute{v_j}}}$ de manière analogue on définit les contraintes turbulentes ou contraintes de Reynolds par ces termes.

Equation moyennée de l'énergie cinétique

La forme indicielle de l'équation (E.3) nous donne :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left({}^{1}\!/_{2}\,\rho v_i{}^2\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left({}^{1}\!/_{2}\,\rho v_i{}^2 v_j\right) = -v_i.\frac{\partial p}{\partial x_i} + v_i.\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i.v_i \qquad \textbf{(E.10)}$$

Nous prenons la moyenne de chacun des termes de cette équation que nous développons.

Ainsi nous obtenons pour l'équation de la moyenne de l'énergie cinétique :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left({}^{1}\!/_{2}\,(\bar{\rho}\overline{v^2}_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left({}^{1}\!/_{2}\,(\bar{\rho}.\bar{v}_j\overline{v^2}_i\right) = -\overline{v_i}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \bar{v}_i\frac{\partial \overline{\tau_{ij}}}{\partial x_j} + \bar{\rho}\overline{f_i}.\overline{v_i} + \overline{\acute{v_i}\frac{\partial \acute{p}}{\partial x_i}} + \overline{\acute{v_i}\frac{\partial \acute{\tau}_{ij}}{\partial x_j}} + \overline{\acute{\rho}\acute{f_i}}.\overline{v_i} + \bar{\rho}\overline{\acute{f_i}.\acute{v_i}} + \overline{\acute{\rho}\acute{v_i}}.\overline{f_i} + \overline{\acute{\rho}\acute{f_i}.\acute{v_i}} - \frac{\partial}{\partial t}\left({}^{1}\!/_{2}\,(\bar{\rho}\overline{\acute{v}^2}_i + 2\overline{\acute{\rho}\acute{v_i}}\overline{v_i} + \overline{\acute{\rho}v^2}_i\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left({}^{1}\!/_{2}\,(\bar{\rho}.\overline{v_j}\overline{\acute{v_i}^2} + 2\bar{\rho}.\overline{v_i}\overline{\acute{v_i}\acute{v_j}} + \bar{\rho}\overline{\acute{v_j}\acute{v_i}^2} + \overline{\acute{\rho}v_j}\overline{v^2}_i + 2\overline{\acute{\rho}v_i}\bar{v}_i.\bar{v}_j + \overline{\acute{\rho}v_i{}^2}\overline{v_j} + \overline{\acute{\rho}\acute{v_j}}\overline{v_i{}^2} + 2\overline{\acute{\rho}\acute{v_i}\acute{v_j}}\bar{v}_i + \overline{\acute{\rho}\acute{v_j}v_i{}^2}\right) \qquad \textbf{(E.11)}$$

Dans l'équation de la moyenne de l'énergie cinétique nous notons également l'apparition de nouveaux termes par rapport à l'équation (E.3). (E.11) fait intervenir des phénomènes de production et de dissipation.

Equation moyennée de l'énergie interne

Pour l'établissement de cette équation nous partons de l'équation (E.4) en prenant la forme indicielle.

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t}+\frac{\partial \rho v_i e}{\partial x_j}=-\frac{\partial q_i}{\partial x_i}-p\frac{\partial v_i}{\partial x_i}+\tau_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \qquad \textbf{(E.12)}$$

En tenant compte de tous les développements nécessaires, l'équation de la moyenne de l'énergie interne s'écrit après quelques arrangements :

$$\frac{\partial \bar{\rho}.\bar{e}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\,\bar{v}_i\bar{e})=-\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial x_i}-\bar{p}\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i}+\overline{\tau_{ij}}\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i}-\overline{\acute{p}\frac{\partial \acute{v}_i}{\partial x_i}}+\overline{\acute{\tau}_{ij}\frac{\partial \acute{v}_j}{\partial x_i}}-\frac{\partial \overline{\acute{\rho}\acute{e}}}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\overline{\acute{v}_i\acute{e}}+\overline{\acute{\rho}\acute{e}}\bar{v}_i+\overline{\acute{\rho}\acute{v}_i}\bar{e}+\overline{\acute{\rho}\acute{v}\acute{e}_i}\right) \qquad \textbf{(E.13)}$$

Equation moyennée d'échange thermique

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}c_pT+\frac{\partial}{\partial x_j}\rho c_pTv_i=-\frac{\partial q_i}{\partial x_j}-\left(\frac{\partial ln\rho}{\partial lnT}\right)_p\frac{dp}{dt}+\tau_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}+\rho T\frac{dc_p}{dt} \qquad \textbf{(E.14)}$$

Nous obtenons pour l'échange thermique l'équation moyenne suivante :

$$c_p\bar{\rho}\frac{\partial \bar{T}}{\partial t}+c_p\frac{\partial \bar{\rho}\bar{T}\bar{v}_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial x_j}-\overline{\left(\frac{\partial ln\rho}{\partial lnT}\right)_p\frac{dp}{dt}}+\overline{\tau_{ij}}\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i}+\overline{\acute{\tau}_{ij}\frac{\partial \acute{v}_j}{\partial x_i}}-c_p\overline{\acute{\rho}\frac{\partial \acute{T}}{\partial t}}-c_p\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\overline{\acute{T}\acute{v}_i}+\overline{\acute{\rho}\acute{v}_i}\bar{T}+\overline{\acute{\rho}\acute{T}}\bar{v}_i+\overline{\acute{\rho}\acute{T}\acute{v}}\right) \qquad \textbf{(E.15)}$$

Nous avons remarqué dans chacune des équations moyennées l'apparition de termes supplémentaires, produits de la variation des grandeurs physiques auxquelles s'intéresse notre étude. La présence de ces nouveaux termes pose un problème de fermeture des équations, car il y a plus d'inconnues que d'équations. Ceci complique la résolution du système d'équations car il faut établir des modèles de turbulence prenant en compte ces t ermes à partir des variables qui décrivent l'écoulement moyen.

2.2 Adimensionnalisation des équations

L'adimensionnalisation permet de réduire les équations sous forme de produits sans dimensions et ceci principalement pour faciliter la conception d'un programme numérique pour la simulation des équations. Du fait de la multitude des termes et leur complexité, une résolution par les méthodes numériques s'avère nécessaire pour la résolution. En outre l'adimensionnalisation fait apparaître des nombres sans dimensions servant souvent à caractériser un écoulement en mécanique des fluides.

Il faut considérer des quantités de référence que nous allons désignés par l'indice o pour adimensionnaliser les équations dynamiques. Ainsi ces grandeurs de référence permettent de former les variables réduites suivantes [1] :

$$t_r = \frac{t}{t_o}\ ,\ x_{ir} = \frac{x_i}{x_o}\ ,\ v_{ir} = \frac{\bar{v_i}}{v_o}\ ,\ f_{ir} = \frac{\bar{f_i}}{f_o}\ ,\ T_r = \frac{\bar{T}}{T_o}\ ,\ p_r = \frac{\bar{p}}{p_o}\ ,\ \rho_o = \frac{\bar{\rho}}{\rho_o}$$

Nous obtenons alors les équations ci-dessous :

Equation adimensionnée de conservation de la matière

$$\frac{\partial \rho_r}{\partial t_o} + \frac{\partial \rho_r v_r}{\partial x_o} = -\frac{\partial \acute{\rho}_r \acute{v}_{ir}}{\partial x_r} \tag{E.16}$$

Equation adimensionnée de conservation de la quantité de mouvement

$$\frac{\partial}{\partial t_r}(\rho_r v_{ir}) + \frac{\partial}{\partial x_{jr}}\left(\rho_r v_{ir} v_{jr}\right) = -\frac{\partial p_r}{\partial x_{ir}} + \frac{1}{F_r}\rho_r f_{ir} + \frac{1}{R_e}\frac{\partial \tau_{ijr}}{\partial x_{jr}} + \frac{1}{F_r}\acute{\rho}_r \acute{f}_{ir} - \frac{\partial}{\partial t_r}(\acute{\rho}_r \acute{v}_r) - \frac{\partial}{\partial x_{jr}}\left(\rho_r \acute{v}_{ir}\acute{v}_{jr} + \acute{\rho}_r \acute{v}_{ir} v_{jr} + \acute{\rho}_r v_{ir}\acute{v}_{jr} + \acute{\rho}_r \acute{v}_{ir}\acute{v}_{jr}\right) \tag{E.17}$$

En posant, $\frac{p_o}{\rho_o {v_{io}}^2} = 1$ ***et*** $\tau_{ijr} = \mu_r\left(\frac{\partial v_{ir}}{\partial x_{jr}} + \frac{\partial v_{jr}}{\partial x_{ir}} - {}^2/_3 \frac{\partial v_{jr}}{\partial x_{jr}}\right)$

Equation adimensionnée moyennée de l'énergie cinétique

$$\frac{\partial}{\partial t_r}\left({}^1/_2\,(\rho_r v_{ri}^2\right) + \frac{\partial}{\partial x_{jr}}\left({}^1/_2\,(\rho_r v_{jr} v_{ir}^2\right) = -v_{ir}\frac{\partial p_r}{\partial x_{ir}} + \frac{1}{R_e} v_{ir}\frac{\partial \tau_{ijr}}{\partial x_{jr}} + \frac{1}{F_r}\rho_r f_{ir} v_{ir} - \acute{v}_{ir}\frac{\partial \acute{p}_r}{\partial x_{ir}} + \frac{1}{R_e}\acute{v}_{ir}\frac{\partial \acute{\tau}_{ijr}}{\partial x_{jr}} + \frac{1}{F_r}\acute{\rho}_r \acute{f}_{ir} v_{ir} + \frac{1}{F_{r_o}}\rho_r \acute{f}_{ir}\acute{v}_{ir} + \frac{1}{F_r}\acute{\rho}_r f_{ir}\acute{v}_{ir} + \frac{1}{F_{r_o}}\acute{\rho}_r \acute{f}_{ir}\acute{v}_{ir} - \frac{\partial}{\partial t_r}\left({}^1/_2\,(\rho_r \acute{v}_{ri}^2 + 2\acute{\rho}_r \acute{v}_{ir} v_{ir} + \acute{\rho}_r \acute{v}_{ri}^2\right) - \frac{\partial}{\partial x_{jr}}\left({}^1/_2\,(\rho_r v_{jr}\acute{v}_{ir}^2 + 2\rho_r v_{ir}\acute{v}_{ir}\acute{v}_{jr} + \rho_r \acute{v}_{jr}\acute{v}_{ir}^2 + 2\acute{\rho}_r v_{ir}\acute{v}_{ir} v_{jr} + 2\acute{}\rho_r v_{jr} v_{ir}^2 + \acute{\rho}_r \acute{v}_{jr} v_{ir}^2 + 2\acute{\rho}_r v_{ir}\acute{v}_{ir}\acute{v}_{jr} + \acute{\rho}_r \acute{v}_{jr} v_{ir}^2\right) \tag{E.18}$$

Equation adimensionnée de l'énergie interne

$$\frac{\partial \rho_r e_r}{\partial t_r} + \frac{\partial}{\partial x_{jr}}(\rho_r v_{ir} e_r) = -\frac{q_o}{\rho_o v_o e_o}\frac{\partial q_{ir}}{\partial x_{jr}} - \frac{p_o}{\rho_o e_o}\frac{\partial p_r v_{ir}}{\partial x_{ir}} + \frac{\mu_o v_o}{\rho_o e_o x_o}\tau_{ijr}\frac{\partial v_{jr}}{\partial x_{ir}} - \frac{p_o}{\rho_o e_o}\acute{p}_r\frac{\partial \acute{v}_{ir}}{\partial x_{ir}} + \frac{\mu_o v_o}{\rho_o e_o x_o}\acute{\tau}_{ir}\frac{\partial \acute{v}_{jr}}{\partial x_{ir}} - \frac{\partial \acute{\rho}_r \acute{e}_r}{\partial t_r} - \frac{\partial}{\partial x_{jr}}(\rho_r \acute{v}_{ri}\acute{e}_r + \acute{\rho}_r \acute{e}_r v_{ir} + \rho_r \acute{v}_{ir} e_r + \acute{\rho}_r \acute{v}_{ir}\acute{e}_r) \tag{E.19}$$

Equation adimensionnée d'échange thermique

$$\rho_r \frac{\partial T_r}{\partial t_r} + \frac{\partial \rho_r T_r v_{ir}}{\partial x_{jr}} = -\frac{1}{R_e P_r c_{pr}} \frac{\partial q_{ir}}{\partial x_{jr}} - \frac{p_o}{\rho_o T_o c_{po} c_{pr}} \left(\frac{\partial \ln \rho_r}{\partial \ln T_r}\right)_p \frac{dp_r}{dt_r} + \frac{\mu_o v_o}{\rho_o T_o c_{po} c_{pr} x_o} \tau_{ir} \frac{\partial v_{jr}}{\partial x_{ir}} + \frac{\mu_o v_o}{\rho_o T_o c_{po} c_{pr} x_o} \acute{\tau}_{ir} \frac{\partial \acute{v}_{jr}}{\partial x_{ir}} - \acute{\rho}_r \frac{\partial \acute{T}_r}{\partial \acute{t}_r} - \frac{\partial}{\partial x_{jr}} \left(\rho_r \acute{T}_r \acute{v}_{ir} + \acute{\rho}_r T_r \acute{v}_{ir} + \acute{\rho}_r \acute{T}_r v_{ir} + \acute{\rho}_r \acute{T}_r \acute{v}_{ir}\right) \quad \textbf{(E.20)}$$

2.3 Hypothèses de la planéité

Notre étude porte sur les écoulements plans, ainsi le mouvement est astreint à se f aire sur deux dimensions. Nous choisissons le plan formé par les axes (ox) et (oy). Ceci nous permet alors de poser les hypothèses suivantes :

- Hypothèse 6 :

Toutes les variables dans les équations ne dépendent pas de z.

-Hypothèse 7 :

Le mouvement se fait dans la direction (ox). Ainsi les seules composantes de vitesse non-nulles vérifient :

$$\overline{u_x} = \overline{u_x}(y) \ et \ \acute{u}_x = \acute{u}_x(y)$$

En tenant compte de ces hypothèses d'écoulement plan nous donnerons ci-dessous les équations de l'écoulement turbulent plan à masse volumique variable.

Equations moyennées de conservation de la matière

$$\frac{\partial \rho_r v_{xr}}{\partial x_r} + \frac{\partial \rho_r v_{xr}}{\partial y_r} = -\frac{\partial \acute{\rho}_r \acute{v}_{xr}}{\partial x_r} - \frac{\partial \acute{\rho}_r \acute{v}_{xr}}{\partial y_r} \quad \textbf{(E.21)}$$

$$\frac{\partial \rho_r}{\partial t_r} = 0 \quad \textbf{(E.22)}$$

Equations moyennées de conservation de la quantité de mouvement

$$\rho_r \frac{\partial}{\partial t_r}(v_{xr}) + v_{xr} v_{xr} \frac{\partial}{\partial x_r}(\rho_r) + \frac{\partial}{\partial y_r}(\rho_r v_{xr} v_{xr}) = -\frac{\partial p_r}{\partial x_r} + \frac{1}{F_r}\rho_r f_{xr} + \frac{\mu_r}{R_e}\left[\frac{\partial^2 v_{xr}}{\partial y_r^2}\right] + \frac{1}{F_r}\acute{\rho}_r \acute{f}_{xr} - \frac{\partial}{\partial t_r}(\acute{\rho}_r \acute{v}_{xr}) - \frac{\partial}{\partial x_r}(\rho_r \acute{v}_{xr} \acute{v}_{xr} + \acute{\rho}_r \acute{v}_{xr} v_{xr} + \acute{\rho}_r v_{xr} \acute{v}_{xr} + \acute{\rho}_r \acute{v}_{xr} \acute{v}_{xr}) - \frac{\partial}{\partial y_r}(\rho_r \acute{v}_{xr} \acute{v}_{xr} + \acute{\rho}_r \acute{v}_{xr} v_{xr} + \acute{\rho}_r v_{xr} \acute{v}_{xr} + \acute{\rho}_r \acute{v}_{xr} \acute{v}_{xr}) \quad \textbf{(E.23)}$$

$$\frac{\partial p_r}{\partial y_r} = \frac{1}{F_r}\rho_r f_{yr} + \frac{1}{F_r}\acute{\rho}_r \acute{f}_{yr} \quad \textbf{(E.24)}$$

Equation moyennée de l'énergie cinétique pour l'écoulement turbulent plan

$$\frac{\partial}{\partial t_r}\left(1/_2\,(\rho_r v_{xr}^2)\right)+\frac{\partial}{\partial x_r}\left(1/_2\,(\rho_r v_{xr} v_{xr}^2)\right)+\frac{\partial}{\partial y_r}\left(1/_2\,(\rho_r v_{xr} v_{xr}^2)\right)$$
$$= -v_{xr}\frac{\partial p_r}{\partial x_r}+\frac{\mu_r}{R_e}v_{xr}\frac{\partial^2 v_{xr}}{\partial {y^2}_r}+\frac{1}{F_r}\rho_r f_{xr} v_{xr} - \acute{v}_{xr}\left(\frac{\partial \acute{p}_r}{\partial x_r}+\frac{\mu_r}{R_e}\frac{\partial^2 \acute{v}_{xr}}{\partial {y^2}_r}\right)$$
$$+\frac{1}{F_r}(\acute{\rho}_r \acute{f}_{xr} v_{xr}+\rho_r \acute{f}_{xr}\acute{v}_{xr}\ +\acute{\rho}_r f_{xr}\acute{v}_{xr}+\acute{\rho}_r \acute{f}_{xr}\acute{v}_{xr})$$
$$-\frac{\partial}{\partial t_r}\left(1/_2\,(\rho_r \acute{v}_{xr}^2+2\acute{\rho}_r \acute{v}_{xr} v_{xr}+\acute{\rho}_r \acute{v}_{xr}^2)\right)$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_r}\left(1/_2\,(3\rho_r v_{xr}\acute{v}_{xr}^2+3\acute{\rho}_r {v^2}_{xr}\acute{v}_{xr}+2\acute{}\rho_r v_{xr} v_{xr}^2+2\acute{\rho}_r v_{xr}\acute{v}_{xr}^2\right.$$
$$\left.+\rho_r \acute{v}_{xr}\acute{v}_{xr}^2+\acute{\rho}_r \acute{v}_{xr} v_{xr}^2)\right)$$
$$-\frac{\partial}{\partial y_r}\left(1/_2\,(3\rho_r v_{x\,r}\acute{v}_{xr}^2+3\acute{\rho}_r {v^2}_{xr}\acute{v}_{xr}+2\acute{}\rho_r v_{xr} v_{xr}^2+2\acute{\rho}_r v_{xr}\acute{v}_{xr}^2\right.$$
$$\left.+\rho_r \acute{v}_{xr}\acute{v}_{xr}^2+\acute{\rho}_r \acute{v}_{xr} v_{xr}^2)\right)$$

(E.25)

Equations moyennées de l'énergie interne pour l'écoulement turbulent plan

$$\frac{\partial \rho_r e_r}{\partial t_r}+\frac{\partial}{\partial x_r}(\rho_r v_{xr} e_r)+\frac{\partial}{\partial y_r}(\rho_r v_{xr} e_r) = -\frac{q_o}{\rho_o v_o e_o}\left(\frac{\partial q_{xr}}{\partial x_r}+\frac{\partial q_{xr}}{\partial y_r}\right)-\frac{\partial \acute{\rho}_r \acute{e}_r}{\partial t_r}- \frac{\partial}{\partial x_r}(\rho_r \acute{v}_{xr}\acute{e}_r\ +\acute{\rho}_r \acute{e}_r v_{xr}+\rho_r \acute{v}_{xr} e_r+\acute{\rho}_r \acute{v}_{xr}\acute{e}_r)-\frac{\partial}{\partial y_r}(\rho_r \acute{v}_{xr}\acute{e}_r\ +\acute{\rho}_r \acute{e}_r v_{xr}+ \rho_r \acute{v}_{xr} e_r+\acute{\rho}_r \acute{v}_{xr}\acute{e}_r)$$

(E.26)

$$\frac{\partial \rho_r e_r}{\partial t_r} = -\frac{q_o}{\rho_o v_o e_o}\left(\frac{\partial q_{yr}}{\partial x_r}+\frac{\partial q_{yr}}{\partial y_r}\right)+1/_3\,\frac{\mu_o v_o}{\rho_o e_o x_o}\left(\frac{\partial v_{xr}}{\partial y_r}\right)\left(\frac{\partial v_{xr}}{\partial y_r}\right)+1/_3\,\frac{\mu_o v_o}{\rho_o e_o x_o}\left(\frac{\partial \acute{v}_{xr}}{\partial y_r}\right)\left(\frac{\partial \acute{v}_{xr}}{\partial y_r}\right)- \frac{\partial \acute{\rho}_r \acute{e}_r}{\partial t_r}$$

(E.27)

Equations moyennées de la température pour l'écoulement turbulent plan

$$\rho_r \frac{\partial T_r}{\partial t_r} + \frac{\partial \rho_r T_r v_{xr}}{\partial x_r} + \frac{\partial \rho_r T_r v_{xr}}{\partial y_r} = -\frac{1}{R_e P_r c_{pr}}\left(\frac{\partial q_{xr}}{\partial x_r} + \frac{\partial q_{xr}}{\partial y_r}\right) - \frac{p_o}{\rho_o T_o c_{po} c_{pr}}\left(\frac{\partial \ln \rho_r}{\partial \ln T_r}\right)_p \frac{dp_r}{dt_r} - \acute{\rho}_r \frac{\partial \acute{T}_r}{\partial \acute{t}_r} - \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\rho_r \acute{T}_r \acute{v}_{xr} + \acute{\rho}_r T_r \acute{v}_{xr} + \acute{\rho}_r \acute{T}_r v_{xr} + \acute{\rho}_r \acute{T}_r \acute{v}_{xr}\right) - \frac{\partial}{\partial y_r}\left(\rho_r \acute{T}_r \acute{v}_{xr} + \acute{\rho}_r T_r \acute{v}_{xr} + \acute{\rho}_r \acute{T}_r v_{xr} + \acute{\rho}_r \acute{T}_r \acute{v}_{xr}\right)$$

(E.28)

$$\rho_r \frac{\partial T_r}{\partial t_r} = -\frac{1}{R_e P_r c_{pr}}\left(\frac{\partial q_{yr}}{\partial x_r} + \frac{\partial q_{yr}}{\partial y_r}\right) - \frac{p_o}{\rho_o T_o c_{po} c_{pr}}\left(\frac{\partial \ln \rho_r}{\partial \ln T_r}\right)_p \frac{dp_r}{dt_r} + {}^1\!/_3 \frac{\mu_o v_o}{\rho_o T_o c_{po} c_{pr} x_o}\left(\frac{\partial v_{xr}}{\partial y_r}\right)\left(\frac{\partial v_{xr}}{\partial y_r}\right) + {}^1\!/_3 \frac{\mu_o v_o}{\rho_o T_o c_{po} c_{pr} x_o}\left(\frac{\partial \acute{v}_{xr}}{\partial y_r}\right)\left(\frac{\partial \acute{v}_{xr}}{\partial y_r}\right) - \acute{\rho}_r \frac{\partial \acute{T}_r}{\partial \acute{t}_r}$$

(E.29)

Les études menées sur les écoulements turbulents diffèrent les unes des autres à cause du modèle choisi par l'auteur ou les auteurs des études. Le modèle se présente en général sous la forme d'un ensemble d'équations dans lesquelles apparaissent ces nouveaux termes. Par exemple avec le modèle ***k-ε***, on utilise l'énergie cinétique turbulente ***k*** et la dissipation d'énergie ***ε***. Le modèle de Prandtl – Kolmogorov utilise quant à lui seulement l'énergie cinétique turbulente pour exprimer la viscosité turbulente.

2.4 Application du modèle *k* ou modèle de Prandtl-Kolmogorov

Pour définir une modélisation à caractère plus général, il faut recourir à des équations de transport supplémentaires. Il est logique de considérer d'abord l'énergie cinétique turbulente [1]: $k = \frac{1}{2}\acute{v}_{xr}\acute{v}_{xr}$

Ce modèle permet en outre de fournir une équation supplémentaire pour la résolution du problème de fermeture. Ce modèle se base sur l'équation de l'énergie cinétique turbulente ***k***. Pour l'équation de l'énergie cinétique turbulente, nous partons des équations (E.11) et (E.9).

$$\frac{\partial}{\partial t_r}(\rho_r k)+\frac{\partial}{\partial x_r}(\rho_r v_{xr} k) = {}^{1}/_{2}\frac{\partial}{\partial t_r}(2\acute{\rho}_r \acute{v}_{xr} v_{xr} + \acute{\rho}_r \acute{v}_{xr}^2 + \rho_r v_{xr}^2) -$$

$$\rho_r v_{xr}\frac{\partial}{\partial t_r}(v_{xr}) - v_{xr}\frac{\partial}{\partial x_r}(\acute{\rho}_r \acute{v}_{xr}) - \acute{v}_{xr}\frac{\partial \acute{p}_r}{\partial x_r} + \frac{1}{R_e}\acute{v}_{xr}\mu_r\frac{\partial^2 \acute{v}_{xr}}{\partial y_r^2} + \frac{1}{F_r}\rho_r \acute{f}_{x\,r}\acute{v}_{xr} +$$

$$\frac{1}{F_r}\acute{\rho}_r f_{xr}\acute{v}_{xr} + \frac{1}{F_r}\acute{\rho}_r \acute{f}_{xr}\acute{v}_{xr} - \frac{\partial}{\partial x_r}\Big({}^{1}/_{2}(\rho_r v_{xr} v_{xr}^2 + 4\rho_r v_{xr}\acute{v}_{xr}\acute{v}_{xr} + \rho_r \acute{v}_{xr}\acute{v}_{xr}^2 +$$

$$4\acute{\rho}_r v_{xr}\acute{v}_{xr} v_{xr} + 3\acute{\rho}_r \acute{v}_{xr} v_{xr}^2 + \acute{\rho}_r \acute{v}_{xr} v_{xr}^2 + 4\acute{\rho}_r v_{xr}\acute{v}_{xr}\acute{v}_{xr} + \acute{\rho}_r \acute{v}_{xr} v_{xr}^2)\Big) -$$

$$\frac{\partial}{\partial y_r}\Big({}^{1}/_{2}(\rho_r v_{xr} v_{xr}^2 + 4\rho_r v_{xr}\acute{v}_{xr}\acute{v}_{xr} + \rho_r \acute{v}_{xr}\acute{v}_{xr}^2 + 4\acute{\rho}_r v_{xr}\acute{v}_{xr} v_{xr} +$$

$$3\acute{\rho}_r \acute{v}_{xr} v_{xr}^2 + \acute{\rho}_r \acute{v}_{xr} v_{xr}^2 + 4\acute{\rho}_r v_{xr}\acute{v}_{xr}\acute{v}_{xr} + \acute{\rho}_r \acute{v}_{xr} v_{xr}^2)\Big) + (-\rho_r v_{xr} v_{xr} +$$

$$\rho_r \acute{v}_{xr}\acute{v}_{xr} + \acute{\rho}_r \acute{v}_{xr} v_{xr} + \acute{\rho}_r v_{xr}\acute{v}_{xr} + \acute{\rho}_r \acute{v}_{xr}\acute{v}_{xr})\frac{\partial v_{xr}}{\partial x_r}$$

(E.30)

En projetant les équations suivant les axes du plan (ox, oy), on not e que la direction de l'écoulement est importante car elle contient presque tous les termes des équations. Nous remarquons dans toutes les équations l'abondance de termes, ceci est dû au fait que notre travail s'inscrit dans un carde général d'études. Donc, nous avons restreint les hypothèses simplificatrices qui, selon le type d'écoulement, permettent de réduire ces termes grâce aux transformations adéquates. Nous remarquons aussi que, dans le cas des écoulements plans, l'axe de l'écoulement est très important pour les études car les variations des grandeurs physiques se font surtout le long de cet axe.

PARTIE 3 :

RESULTATS EXPERIMENTAUX ET DISCUSSION

Dans cette partie nous allons présenter et discuter quelques résultats expérimentaux se rapportant à notre étude.

3.1 Présentation

«Développement d'un jet à masse volumique variable impactant sur une plaque » [4]

Cet article visant à apporter une meilleure compréhension des phénomènes gouvernant l'écoulement dans les brûleurs domestiques, utilise un dispositif expérimental transparent. L'étude qui est faite, met en évidence l'influence de la variation de la masse volumique ainsi que celle d'une longueur caractéristique de l'écoulement sur les phénomènes d'entraînement. Elle présente cet avantage de comparer deux jets différents, le premier étant constitué de l'air et le second d'un mélange d'Hélium et de diazote. Le dispositif expérimental, montré sur la figure3.1, comporte quatre (4) zones d'études.

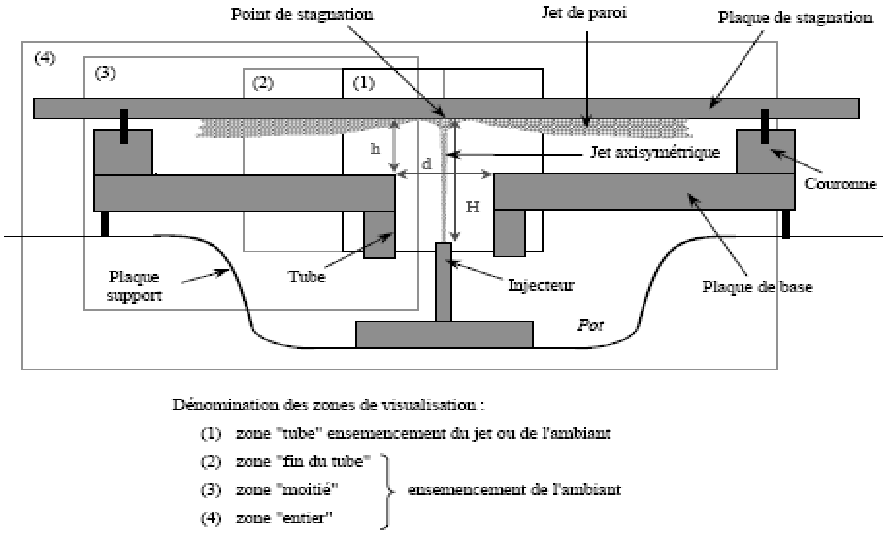

Fig. 3. 1: Dispositif expérimental [4]

« Simulation Numérique d'un écoulement de Type Jet Plan à Masse Volumique Variable par deux modèles de turbulence » [5]

Cet article propose une résolution numérique basée sur deux modèles de turbulence au premier ordre, modèles k-ε standard et k-ε modifié. Les résultats numériques sont comparés aux résultats expérimentaux de N.E Kotsovinos. Cette étude permet de mettre en évidence l'importance d'un couplage entre le champ de vitesse et du scalaire pour la compréhension de ce type d'écoulement.

3.2 Résultats et discussion

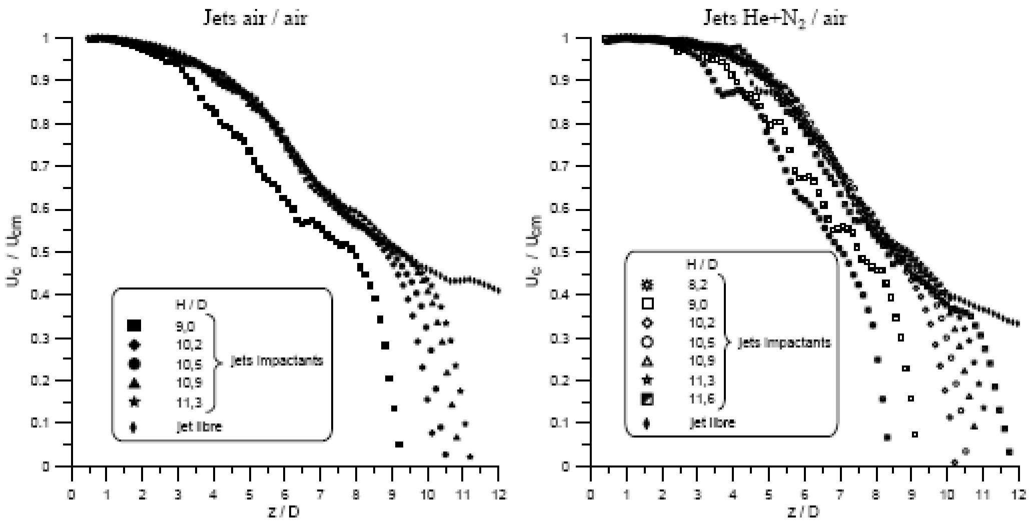

Fig. 3. 2: Jets impactants et jets libres turbulents [4]

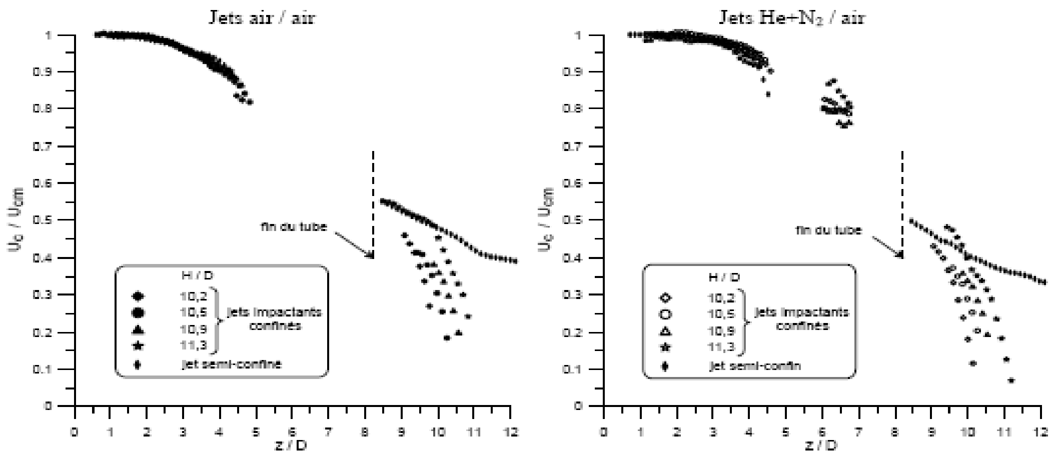

Fig. 3. 3: Jets impactants confinés et jets semi-confinés turbulents [4]

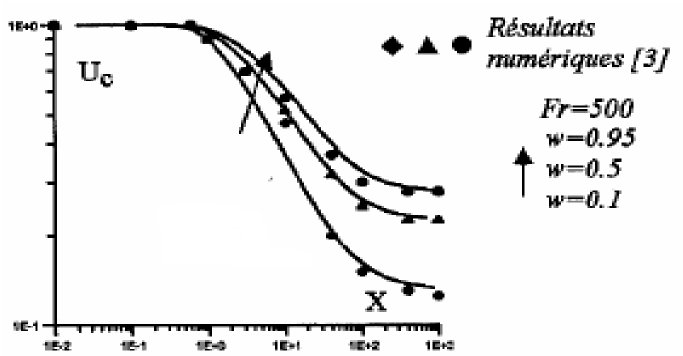

Fig. 3. 4: Evolution longitudinale de la vitesse verticale sur l'axe du jet [5]

Les figures 3.2, 3.3 e t 3.4 montrent les variations de la vitesse en fonction de l'axe de l'écoulement. Elles permettent également mettre en évidence l'influence de la masse volumique représentée dans le deuxième article par le paramètre w, sur l'évolution de la vitesse.

On remarque que les trois (3) courbes présentent la même allure formée de trois (3) zones :

- ✓ Une zone proche de la buse d'éjection où l'influence de la variation de la masse volumique n'est pas visible. En effet l'allure des courbes dans cette zone est quasi horizontale et la vitesse varie peu en fonction de la masse volumique. A la sortie de la buse la turbulence n'est pas encore totalement développée le fluide se comporte comme un mélange homogène dont les différentes particules constitutives sont animées de la même vitesse.
- ✓ Une zone moyennement éloignée de la buse qui correspond à la partie décroissante des courbes et dans laquelle l'effet de la variation de la masse volumique devient visible. On remarque une augmentation de la vitesse en fonction de la masse volumique. Ceci peut s'expliquer par le développement du phénomène turbulent et les fluides les plus légers sont les premiers à être soumis à ce phénomène. Les fluides lourds ne subissent pas encore les effets. Ce qui confirme l'existence de différentes échelles dans la turbulence.
- ✓ La dernière est la plus éloignée de la buse, on distingue nettement les différentes particules constitutives du fluides. Cette partie doit correspondre au développement total de la turbulence dans lequel les fluides denses sont toujours animés de vitesse plus grande. Les forces de flottabilité en s'ajoutant aux forces d'inertie augmentent la vitesse de ces particules. L'énergie cinétique de ces fluides doit être, de ce fait, importante ; ce qui peut favoriser lors des chocs des cassures et une dissipation ou une transmission d'énergie vers une échelle plus petite. Ceci a pour conséquence d'entretenir la turbulence.

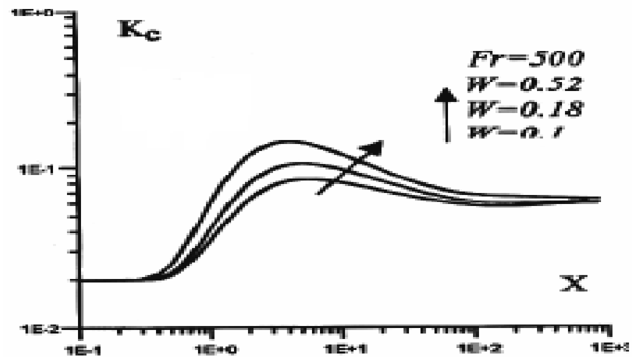

Fig. 3. 5: Evolution longitudinale de l'énergie cinétique turbulente sur l'axe du jet [5]

La figure 3.5 montre l'évolution de l'énergie cinétique par rapport à la sortie de la buse en mettant en évidence l'influence de la masse volumique. L'allure de la courbe comprend quatre (4) parties dont deux ne font pas ressortir l'effet de variation de la masse volumique et l'énergie cinétique est quasi constante, et deux qui correspondent respectivement à l'augmentation et à la diminution de l'énergie cinétique. Dans ces deux zones les fluides les plus denses ont une énergie cinétique plus élevée. On remarque que les maxima de l'énergie cinétique sont atteints à la même distance de la buse pour les différentes densités de fluide. Cette figure montre que l'énergie cinétique croit dans une certaine zone géographique pas très éloignée de la buse, ce qui correspond au développement de la turbulence au cours duquel les tourbillons plus gros en cassant cèdent leur énergie cinétique aux tourbillons fils dont le nombre augmente faisant ainsi croître l'énergie cinétique. La partie décroissante correspond à un développement total de la turbulence et les chocs entre les particules conduisent à une dissipation d'énergie qui fait baisser l'énergie cinétique.

Les variations de l'énergie cinétique sont dues aux phénomènes de production et de dissipation qui agissent de manières antagonistes. Si la production est plus importante que la dissipation, l'énergie cinétique croît et si elle moins importante, l'énergie cinétique décroît. Les parties constantes pourraient montrer l'éloignement par rapport à la sortie de la buse où les lames fluides glissent entre elles sans dissipation d'énergie.

Il serait intéressant de faire une étude complémentaire car le modèle de Prandtl – Kolmogorov montre que l'énergie cinétique turbulente, terme supplémentaire dans l'équation moyennée de l'énergie, est plus importante lorsqu'on s'éloigne transversalement de l'axe du jet.

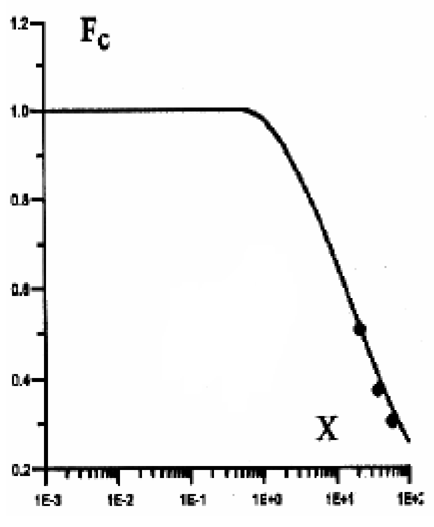

Fig. 3. 6: Evolution longitudinale de la température le long de l'axe du jet [5]

La figure ci-dessus montre l'évolution de la température le long de l'axe du jet. Cependant elle ne permet pas de voir l'importance de la masse volumique sur cette évolution. La courbe est caractérisée par une première partie constante qui correspond à une valeur constante de la température, et une deuxième partie décroissante qui montre une baisse rapide de la température plus on s'éloigne de la buse d'éjection. On peut dire alors que pendant la transition vers la turbulence la température garde une même valeur qui diminue lorsque la turbulence est développée.

Ces deux articles permettent de mettre en évidence l'influence de la variation de la masse volumique qui exprime la composition chimique des fluides, sur la vitesse et l'énergie cinétique d'un écoulement turbulent plan. Ceci montre l'intérêt légitime dans ce type d'écoulement que l'on peut porter à analyser le lien qu'il y a entre l'évolution de la température et celle de la masse volumique. Car ces deux paramètres sont aussi importants pour une meilleure compréhension des écoulements réels. En effet les effets de la température sont l'une des causes de la variation de la masse volumique [6].

L'analyse de ces deux travaux révèle la multitude des possibilités qui existent encore pour des études approfondies sur l'***écoulement turbulent plan à masse volumique variable***. Par exemple, une étude expérimentale basée sur le dispositif expérimental du premier article combinée à une résolution numérique appliquant la décomposition de Reynolds à la masse volumique pourrait aider à la compréhension de ce type d'écoulement.

CONCLUSION

Les écoulements fluides réels sont souvent imprévisibles, du fait de leur caractère aléatoire dans l'espace et dans le temps. Comprendre ces écoulements est l'un des objectifs de la dynamique des turbulences qui profite aujourd'hui de la grande puissance des machines pour simuler les équations complexes qui régissent ces m ouvements. La non-uniformité de la composition chimique des fluides réels suscite également l'intérêt qu'il y a à co mprendre la variation de la masse volumique dans ces écoulements.

L'étude que nous avons menée nous a permis de modéliser les écoulements turbulents plans à masse volumique variable grâce aux équations adimensionnées en appliquant à toutes les grandeurs variables la décomposition de Reynolds, ce qui constitue l'originalité de notre travail. Pour ce faire, une introduction à la théorie de la turbulence faite dans la première partie a été nécessaire, suivie de l'écriture des équations dans la deuxième partie, et la troisième partie a p orté sur la présentation et la discussion de deux articles qui a montré l'influence de la masse volumique sur certaines variables de l'écoulement.

Bibliographie

[1] CANDEL S. Mécanique des fluides cours. Dunod. 2e Ed.

[2] CHASSAING P. Mécanique des fluides Eléments d'un premier parcours. CEPADUES-EDITIONS, 111 Rue Nicolas-Vauquelin. 2e Ed.

[3] CADOT O. Introduction à la turbulence. Polycopié de cours 2e année cycle Ingénieur ENSTA MF-205.
Disponible le 07/02/08 sur :
http://wwwy.ensta.fr/~cadot/Cours%20de%20Turbulence/coursdeturbulence.pdf

[4] SERRES I., SARH B., CHEAUVOU C., GOKALP I. Développement d'un jet à masse volumique variable sur une plaque. Article, 9e Congrès Francophone de Vélocimétrie Laser.
Disponible le 12/02/08 sur :
http://www.vki.ac.be/cfvl04/cd/j2.pdf

[5] HABLI S., MHIRI H., EL GOLLI S., LE PALEC G., BOURNOT P. Simulation Numérique d'un Ecoulement de Type Jet Plan à Masse Volumique Variable par Deux Modèles de Turbulence au Premier Ordre. Article, Rev. Energ. Ren : Journées de Thermique.
Disponible le 07/05/08 sur :
http://www.cder.dz/download/Jith10_15.pdf

[6] KOTSOVINOS N.E. A study of the entrainment and turbulence in a plane buoyant jet. Thèse, California Institute of Technology.
Disponible le 07/08/02 sur :
http://etd.caltech.edu/etd/available/etd-05162007-81622/unrestricted/Kotsovinos_n_1975.pdf

Annexes

Annexe 1

Equations de l'écoulement laminaire

- **Equation de conservation de la matière**

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \nabla \rho v = 0 \qquad \textbf{(A.1)}$$

- **Equation de conservation de la quantité de mouvement**

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v + \nabla . \rho v v = -\nabla p + \nabla . \tau + \rho f \qquad \textbf{(A.2)}$$

- **Equation de conservation de l'énergie cinétique**

$$\frac{\partial}{\partial t}\left({}^{1}\!/_{2}\, \rho v^{2} \right) + \nabla . \left({}^{1}\!/_{2}\, \rho v^{2} v \right) = -v . \nabla p + v . \nabla . \tau + \rho f . v \qquad \textbf{(A.3)}$$

- **Equation de l'énergie interne**

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho e + \nabla . \rho v e = -\nabla q - p \nabla . v + \tau : \nabla v \qquad \textbf{(A.4)}$$

Avec $\tau : \nabla v = \tau_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} v_j$

- **Equation d'échange thermique**

$$\rho c_p \frac{\partial}{\partial t}\rho T + c_p \nabla . \rho T v = -\nabla . q - \left(\frac{\partial ln\rho}{\partial lnT}\right)_p \frac{d}{dt} p + \tau : \nabla v + \rho T \frac{d}{dt} c_p \qquad \textbf{(A.5)}$$

Annexe 2

Equations dynamiques moyennées de la turbulence

- Equation moyennée de la conservation de la matière

On part de l'équation (A.1) en prenant la moyenne de chacun deux termes de l'équation, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\rho} + \overline{\nabla.\rho v} = 0 \qquad \textbf{(A.6)}$$

En appliquant la décomposition de Reynolds aux deux variables et en utilisant la forme indicielle, nous obtenons :

$$\frac{\overline{\partial \rho}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\acute{\rho} + \overline{\rho}}\right) \qquad \textbf{(A.7)}$$

$$\frac{\overline{\partial \rho}}{\partial t} = \frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} \qquad \textbf{(A.8)}$$

$$\frac{\overline{\partial \rho v_\iota}}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\bar{\rho}\,\overline{v_\iota} + \overline{\acute{\rho}\acute{v}}\right) \qquad \textbf{(A.9)}$$

Ces développements nous permettent de donner l'équation moyennée de la conservation de la matière sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\bar{\rho}\,\overline{v_\iota} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\acute{\rho}\acute{v}_\iota} \qquad \textbf{(E.10)}$$

- Equation moyennée de la quantité de mouvement

Nous partons de l'équation (E.2) en prenant sa forme indicielle à laquelle avant d'appliquer la décomposition de Reynolds à chacun des termes, ainsi nous avons :

$$\overline{\frac{\partial \rho v_i}{\partial t}} + \overline{\frac{\partial v_i v_j}{\partial x_j}} = -\overline{\frac{\partial p}{\partial x_i}} + \overline{\rho f_i} + \overline{\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}} \quad \textbf{(A.11)}$$

$$\overline{\frac{\partial \rho v_i}{\partial t}} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\bar{\rho}\,\overline{v_i} + \overline{\acute{\rho}\acute{v}_i}\right) \quad \textbf{(A.12)}$$

$$\overline{\frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\left((\bar{\rho} + \acute{\rho})(\overline{v_i} + \acute{v}_i)(\overline{v_j} + \acute{v}_j)\right)} \quad \textbf{(A.13)}$$

$$\overline{\frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\,\overline{v_i}\,\overline{v_j} + \bar{\rho}\,\overline{\acute{v}_i\acute{v}_j} + \overline{\acute{\rho}\acute{v}_i}\,\overline{v_j} + \overline{\acute{\rho}\acute{v}_j}\,\overline{v_i} + \overline{\acute{\rho}\acute{v}_i\acute{v}_j}\right) \quad \textbf{(A.14)}$$

$$\overline{\frac{\partial p}{\partial x_i}} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} \quad \textbf{(A.15)}$$

$$\overline{\rho f_i} = \bar{\rho}\,\overline{f_i} + \overline{\acute{\rho}\acute{f}_i} \quad \textbf{(A.16)}$$

$$\overline{\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j}\mu\left(\overline{\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - {}^{2}\!/_{3}\frac{\partial v_j}{\partial x_j}}\right) \quad \textbf{(A.17)}$$

$$\overline{\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}} = \frac{\partial \overline{\tau_{ij}}}{\partial x_j} \quad \textbf{(A.18)}$$

Du fait de ces développements, l'équation moyennée de la quantité de mouvement se présente comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\,\overline{v_i}) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\,\overline{v_i}\,\overline{v_j}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \bar{\rho}\,\overline{f_i} + \frac{\partial \overline{\tau_{ij}}}{\partial x_j} + \overline{\acute{\rho}\acute{f}_i} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\acute{\rho}\acute{v}_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\,\overline{\acute{v}_i\acute{v}_j} + \overline{\acute{\rho}\acute{v}_i}\,\overline{v_j} + \overline{\acute{\rho}\acute{v}_j}\,\overline{v_i}\right) - \frac{\partial \tau_{ij}{}^{t}}{\partial x_j} \quad \textbf{(A.19)}$$

Avec $\tau_{ij}{}^{t} = \overline{\acute{\rho}\acute{v}_i\acute{v}_j}$

- **Equation moyennée de l'énergie cinétique**

La forme indicielle de l'équation (A.3) nous donne :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(1/_2\,\rho v_i^{\,2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(1/_2\,\rho v_i^{\,2} v_j\right)=-v_i.\frac{\partial p}{\partial x_i}+v_i.\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}+\rho f_i.v_i \qquad \textbf{(A.20)}$$

Nous prenons la moyenne de chacun des termes de cette équation que nous développons,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(1/_2\,\overline{\rho v_i^{\,2}}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(1/_2\,\overline{(\bar\rho+\acute\rho)(\overline{v_i}+\acute v_i)^2}\right) \qquad \textbf{(A.21)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(1/_2\,\overline{\rho v_i^{\,2}}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(1/_2\,\overline{(\bar\rho+\acute\rho)(\overline{v^2}_i+2\bar v_i\acute v_i+\acute{v^2}_i)}\right) \qquad \textbf{(A.22)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(1/_2\,\overline{\rho v_i^{\,2}}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(1/_2\,\overline{(\bar\rho\overline{v^2}_i+\overline{2\rho}\bar v_i\acute v_i+\bar\rho\acute{v^2}_i+\acute\rho.\overline{v^2}_i+2\acute\rho\bar v_i\acute v_i+\acute\rho\acute{v^2}_i)}\right) \qquad \textbf{(A.23)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(1/_2\,\overline{\rho v_i^{\,2}}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(1/_2\,(\bar\rho\overline{v^2}_i+\bar\rho\overline{\acute v^2}_i+2\overline{\acute\rho\acute v_i}\overline{v_i}+\overline{\acute\rho\acute{v^2}_i}\right) \qquad \textbf{(A.24)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(1/_2\,\overline{\rho v_i^{\,2} v_j}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(1/_2\,\overline{(\bar\rho+\acute\rho)(\overline{v_i}+\acute v_i)^2(\overline{v_j}+\acute v_j)}\right) \qquad \textbf{(A.25)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(1/_2\,\overline{\rho v_i^{\,2} v_j}\right)=$$
$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{(\bar\rho\overline{v^2}_i+\overline{2\rho}\bar v_i\acute v_i+\bar\rho\acute{v^2}_i+\acute\rho.\overline{v^2}_i+2\acute\rho\bar v_i\acute v_i+\acute\rho\acute{v^2}_i)(\overline{v_j}+\acute v_j)}\right) \qquad \textbf{(A.26)}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(1/_2\,\overline{\rho v_i^{\,2} v_j}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(1/_2\,(\bar\rho.\bar v_j\overline{v^2}_i+\bar\rho.\overline{v_j}\overline{\acute v_i^{\,2}}+2\bar\rho.\overline{v_i}\overline{\acute v_i\acute v_j}+\bar\rho\overline{\acute v_j\acute v_i^{\,2}}+$$
$$\acute\rho\bar v_j\overline{v^2}_i+2\overline{\acute\rho\acute v_i}\bar v_i.\bar v_j+\overline{\acute\rho v_i^{\,2}}\overline{v_j}+\overline{\acute\rho\acute v_j}\overline{v_i^{\,2}}+2\overline{\acute\rho\acute v_i\acute v_j}\bar v_i+\overline{\acute\rho\acute v_j v_i^{\,2}}\Big) \qquad \textbf{(A.27)}$$

$$\overline{v_i.\frac{\partial p}{\partial x_i}}=\overline{(\overline{v_i}+\acute v_i)\frac{\partial}{\partial x_i}(\bar p+\acute p)} \qquad \textbf{(A.28)}$$

$$\overline{v_i.\frac{\partial p}{\partial x_i}}=\overline{v_i}\frac{\partial\bar p}{\partial x_i}+\overline{\acute v_i\frac{\partial\acute p}{\partial x_i}} \qquad \textbf{(A.29)}$$

$$\overline{v_i.\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}} = \bar{v}_i \frac{\partial \overline{\tau_{ij}}}{\partial x_j} + \overline{\acute{v}_i \frac{\partial \acute{\tau}_{ij}}{\partial x_j}} \tag{A.30}$$

$$\overline{\rho f_i.v_i} = \bar{\rho}\overline{f_i}.\overline{v_i} + \overline{\acute{\rho}\acute{f_i}}.\overline{v_i} + \bar{\rho}\overline{\acute{f_i}.\acute{v_i}} + \overline{\acute{\rho}\acute{v_i}}.\overline{f_i} + \overline{\acute{\rho}\acute{f_i}.\acute{v_i}} \tag{A.31}$$

Ainsi nous obtenons pour l’équation de la moyenne de l’énergie cinétique :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(1/_2\,(\bar{\rho}\overline{v^2}_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(1/_2\,(\bar{\rho}.\bar{v}_j\overline{v^2}_i\right) = -\overline{v_i}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \bar{v}_i\frac{\partial \overline{\tau_{ij}}}{\partial x_j} + \bar{\rho}\overline{f_i}.\overline{v_i} + \overline{\acute{v}_i\frac{\partial \acute{}}{\partial x_i}} + \overline{\acute{v}_i\frac{\partial \acute{\tau}_{ij}}{\partial x_j}} + \overline{\acute{\rho}\acute{f_i}}.\overline{v_i} + \bar{\rho}\overline{\acute{f_i}.\acute{v_i}} + \overline{\acute{\rho}\acute{v_i}}.\overline{f_i} + \overline{\acute{\rho}\acute{f_i}.\acute{v_i}} - \frac{\partial}{\partial t}\left(1/_2\,(\bar{\rho}\overline{\acute{v}^2}_i + 2\overline{\acute{\rho}\acute{v}_i}\overline{v_i} + \overline{\acute{\rho}\acute{v}^2_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(1/_2\,(\bar{\rho}.\overline{v_j}\overline{\acute{v_i}^2} + 2\bar{\rho}.\overline{v_i}\overline{\acute{v}_i\acute{v}_j} + \bar{\rho}\overline{\acute{v}_j\acute{v}_i^2} + \overline{\acute{\rho}v_j}\overline{v^2}_i + 2\overline{\acute{\rho}\acute{v}_i}\bar{v}_i.\bar{v}_j + \overline{\acute{\rho}v_i}^2\overline{v_j} + \overline{\acute{\rho}\acute{v}_j}\overline{v_i^2} + 2\overline{\acute{\rho}\acute{v}_i\acute{v}_j}\bar{v}_i + \overline{\acute{\rho}\acute{v}_j v_i^2}\right) \tag{A.32}$$

- Equation de la moyenne de l'énergie interne

Pour l'établissement de cette équation nous partons de l'équation (A.4) en prenant la forme indicielle.

$$\frac{\partial \rho e}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i e}{\partial x_j} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_i} - p\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \tau_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad \textbf{(A.33)}$$

Ensuite on prend la moyenne de chacun des termes de l'équation (A.33)

$$\frac{\partial \overline{\rho e}}{\partial t} = \frac{\partial \bar{\rho}.\bar{e}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{\acute{\rho}\acute{e}}}{\partial t} \quad \textbf{(A.34)}$$

$$\frac{\partial \overline{\rho v_i e}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{\left((\bar{\rho} + \acute{\rho})(\bar{v} + \acute{v})(\bar{e} + \acute{e})\right)} \quad \textbf{(A.35)}$$

$$\frac{\partial \overline{\rho v_i e}}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\,\bar{v}_i\bar{e} + \bar{\rho}\overline{\acute{v}_i\acute{e}} + \overline{\acute{\rho}\acute{e}}\bar{v}_i + \overline{\acute{\rho}\acute{v}_i}\bar{e} + \overline{\acute{\rho}\acute{v}\acute{e}}\right) \quad \textbf{(A.36)}$$

$$\overline{\frac{\partial q_i}{\partial x_j}} = \frac{\partial \bar{q}_i}{\partial x_j} \quad \textbf{(A.37)}$$

$$\overline{p\frac{\partial v_i}{\partial x_i}} = \bar{p}\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} + \overline{\acute{p}\frac{\partial \acute{v}_i}{\partial x_i}} \quad \textbf{(A.38)}$$

$$\overline{\tau_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}} = \mu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - {}^{2}/_{3}\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right)\frac{\partial v_j}{\partial x_i}}\right) \quad \textbf{(A.39)}$$

$$\overline{\tau_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}} = \overline{\tau_{ij}}\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} + \overline{\acute{\tau}_{ij}\frac{\partial \acute{v}_j}{\partial x_i}} \quad \textbf{(A.40)}$$

En tenant compte de ces développements, l'équation de la moyenne de l'énergie interne s'écrit après quelques arrangements :

$$\frac{\partial \bar{\rho}.\bar{e}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{\rho}\,\bar{v}_i\bar{e}) = -\frac{\partial \bar{q}_i}{\partial x_i} - \bar{p}\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} + \overline{\tau_{ij}}\frac{\partial \bar{v}_j}{\partial x_i} - \overline{\acute{p}\frac{\partial \acute{v}_i}{\partial x_i}} + \overline{\acute{\tau}_{ij}\frac{\partial \acute{v}_j}{\partial x_i}} - \frac{\partial \overline{\acute{\rho}\acute{e}}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\overline{\acute{v}_i\acute{e}} + \overline{\acute{\rho}\acute{e}}\bar{v}_i + \overline{\acute{\rho}\acute{v}_i}\bar{e} + \overline{\acute{\rho}\acute{v}\acute{e}_i}\right) \quad \textbf{(A.41)}$$

- Equation de la moyenne d’échange thermique

Nous partons de l’équation (A.6) en prenant la notation indicielle avant d’appliquer la décomposition de Reynolds à tous les termes.

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}c_pT+\frac{\partial}{\partial x_j}\rho c_pTv_i=-\frac{\partial q_i}{\partial x_j}-\left(\frac{\partial ln\rho}{\partial lnT}\right)_p\frac{dp}{dt}+\tau_{ij}\frac{\partial v_j}{\partial x_i}+\rho T\frac{dc_p}{dt} \quad \text{(A.42)}$$

$$\overline{\rho\frac{\partial}{\partial t}c_pT}=c_p\overline{\rho\frac{\partial T}{\partial t}} \quad \text{(A.43)}$$

$$c_p\overline{\rho\frac{\partial T}{\partial t}}=c_p\left(\bar{\rho}\frac{\partial\bar{T}}{\partial t}+\overline{\acute{\rho}\frac{\partial\acute{T}}{\partial t}}\right) \quad \text{(A.44)}$$

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x_j}\rho c_pTv_i}=c_p\frac{\partial\overline{\rho Tv_i}}{\partial x_j} \quad \text{(A.45)}$$

$$\overline{\frac{\partial}{\partial x_j}\rho c_pTv_i}=c_p\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\bar{T}\bar{v}_i+\bar{\rho}\overline{\acute{T}\acute{v}_i}+\overline{\acute{\rho}\acute{v}_i}\bar{T}+\overline{\acute{\rho}\acute{T}}\bar{v}_i+\overline{\acute{\rho}\acute{T}\acute{v}}\right) \quad \text{(A.46)}$$

$$\overline{\frac{\partial q_i}{\partial x_j}}=\frac{\partial\bar{q}_i}{\partial x_j} \quad \text{(A.47)}$$

Nous rappelons que nous avons considérer Cp comme constante, de ce fait $\frac{dc_p}{dt}=0$. Finalement l’équation de la moyenne de la température peut s’écrire :

$$c_p\bar{\rho}\frac{\partial\bar{T}}{\partial t}+c_p\frac{\partial\bar{\rho}\bar{T}\bar{v}_i}{\partial x_j}=-\frac{\partial\bar{q}_i}{\partial x_j}-\overline{\left(\frac{\partial ln\rho}{\partial lnT}\right)_p\frac{dp}{dt}}+\bar{\tau}_{ij}\frac{\partial\bar{v}_j}{\partial x_i}+\overline{\acute{\tau}_{ij}\frac{\partial\acute{v}_j}{\partial x_i}}-c_p\overline{\acute{\rho}\frac{\partial\acute{T}}{\partial t}}-$$
$$c_p\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\overline{\acute{T}\acute{v}_i}+\overline{\acute{\rho}\acute{v}_i}\bar{T}+\overline{\acute{\rho}\acute{T}}\bar{v}_i+\overline{\acute{\rho}\acute{T}\acute{v}}\right) \quad \text{(A.48)}$$

Annexe 3

Adimensionnalisation

$t_r = \frac{t}{t_o}$, $x_{ir} = \frac{x_i}{x_o}$, $v_{ir} = \frac{\bar{v_i}}{v_o}$, $f_{ir} = \frac{\bar{f_i}}{f_o}$, $T_r = \frac{\bar{T}}{T_o}$, $p_r = \frac{\bar{p}}{p_o}$, $\rho_o = \frac{\bar{\rho}}{\rho_o}$

- **Equation adimensionnée de la conservation de la matière**

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \bar{\rho}\, \bar{v_i} = -\frac{\partial}{\partial x_j} \overline{\acute{\rho} \acute{v_i}} \quad \textbf{(A.49)}$$

$$\frac{\rho_o}{t_o} \frac{\partial \rho_r}{\partial t_o} + \frac{\rho_o v_o}{x_o} \frac{\partial \rho_r v_r}{\partial x_o} = -\frac{\rho_o v_o}{x_o} \frac{\partial \acute{\rho}_r \acute{v}_{ir}}{\partial x_r} \quad \textbf{(A.50)}$$

$$\frac{\partial \rho_r}{\partial t_o} + \frac{\partial \rho_r v_r}{\partial x_o} = -\frac{\partial \acute{\rho}_r \acute{v}_{ir}}{\partial x_r} \quad \textbf{(A.51)}$$

- **Equation adimensionnée de la quantité de mouvement**

$$\frac{\partial}{\partial t}(\bar{\rho}\, \bar{v_i}) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\, \bar{v_i}\, \bar{v_j}\right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \bar{\rho}\, \bar{f_i} + \frac{\partial \overline{\tau_{ij}}}{\partial x_j} + \overline{\acute{\rho} \acute{f_i}} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\overline{\acute{\rho} \acute{v_i}}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\rho}\, \overline{\acute{v_i} \acute{v_j}} + \overline{\acute{\rho} \acute{v_i}}\, \bar{v_j} + \overline{\acute{\rho} \acute{v_j}}\, \bar{v_i}\right) - \frac{\partial \tau_{ij}{}^{t}}{\partial x_j} \quad \textbf{(A.52)}$$

$$\frac{\rho_o v_o}{t_o} \frac{\partial}{\partial t_r}(\rho_r v_{ir}) + \frac{\rho_o v_o{}^2}{x_o} \frac{\partial}{\partial x_{jr}}\left(\rho_r v_{ir} v_{jr}\right) = -\frac{p_o}{x_o} \frac{\partial p_r}{\partial x_r} + \rho_o f_o \rho_r f_{ir} + \frac{v_o \mu_o}{x_o^2} \frac{\partial \tau_{ijr}}{\partial x_{jr}} + \rho_o f_o \acute{\rho}_r \acute{f}_{ir} - \frac{\rho_o v_o}{t_o} \frac{\partial}{\partial t_r}(\acute{\rho}_r \acute{v}_r) - \frac{\rho_o v^2{}_o}{x_o} \frac{\partial}{\partial x_{jr}}\left(\rho_r \acute{v}_{ir} \acute{v}_{jr} + \acute{\rho}_r \acute{v}_{ir} v_{jr} + \acute{\rho}_r v_{ir} \acute{v}_{jr} + \acute{\rho}_r \acute{v}_{ir} \acute{v}_{jr}\right) \quad \textbf{(A.53)}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_r}(\rho_r v_{ir}) + \frac{\partial}{\partial x_{jr}}\left(\rho_r v_{ir} v_{jr}\right) = -\frac{\partial p_r}{\partial x_{ir}} + \frac{1}{F_r} \rho_r f_{ir} + \frac{1}{R_e} \frac{\partial \tau_{ijr}}{\partial x_{jr}} + \frac{1}{F_r} \acute{\rho}_r \acute{f}_{ir} - \frac{\partial}{\partial t_r}(\acute{\rho}_r \acute{v}_r) - \frac{\partial}{\partial x_{jr}}\left(\rho_r \acute{v}_{ir} \acute{v}_{jr} + \acute{\rho}_r \acute{v}_{ir} v_{jr} + \acute{\rho}_r v_{ir} \acute{v}_{jr} + \acute{\rho}_r \acute{v}_{ir} \acute{v}_{jr}\right) \quad \textbf{(A.54)}$$

$\frac{p_o}{\rho_o v_{io}{}^2} = 1$ ***et*** $\tau_{ijr} = \mu_r\left(\frac{\partial v_{ir}}{\partial x_{jr}} + \frac{\partial v_{jr}}{\partial x_{ir}} - {}^{2}/{}_{3} \frac{\partial v_{jr}}{\partial x_{jr}}\right)$

- Equation adimensionnée de l'énergie cinétique

$$\frac{\rho_o v_o^2}{t_o}\frac{\partial}{\partial t_r}\left(1/2\,(\rho_r v_{ri}^2\right)+\frac{\rho_o v_o^3}{x_o}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(1/2\,(\rho_r v_{jr} v_{ir}^2\right)=-\frac{p_o v_o}{x_o} v_{ir}\frac{\partial p_r}{\partial x_{ir}}+\frac{\mu_o v^2{}_o}{x_o} v_{ir}\frac{\partial \tau_{ijr}}{\partial x_{jr}}+\rho_o f_o v_o \rho_r f_{ir} v_{ir}-\frac{p_o v_o}{x_o}\acute{v}_{ir}\frac{\partial \acute{p}_r}{\partial x_{ir}}+\frac{\mu_o v^2{}_o}{x_o}\acute{v}_{ir}\frac{\partial \acute{\tau}_{ijr}}{\partial x_{jr}}+\rho_o f_o v_o \acute{\rho}_r \acute{f}_{ir}+\rho_o f_o v_o \rho_r \acute{f}_{ir}\acute{v}_{ir}+\rho_o f_o v_o \acute{\rho}_r f_{ir}\acute{v}_{ir}+\rho_o f_o v_o \acute{\rho}_r \acute{f}_{ir}\acute{v}_{ir}-\frac{\rho_o v_o^2}{t_o}\frac{\partial}{\partial t_r}\left(1/2\,(\rho_r \acute{v}_{ri}^2+2\acute{\rho}_r \acute{v}_{ir} v_{ir}+\acute{\rho}_r \acute{v}_{ri}^2\right)-\frac{\rho_o v_o^3}{x_o}\frac{\partial}{\partial x_{jr}}\left(1/2\,(\rho_r v_{jr}\acute{v}_{ir}^2+2\rho_r v_{ir}\acute{v}_{ir}\acute{v}_{jr}+\rho_r \acute{v}_{jr}\acute{v}_{ir}^2++2\acute{\rho}_r v_{ir}\acute{v}_{ir} v_{jr}+\acute{\rho}_r v_{jr} v_{ir}^2+\acute{\rho}_r \acute{v}_{jr} v_{ir}^2+2\acute{\rho}_r v_{ir}\acute{v}_{ir}\acute{v}_{jr}+\acute{\rho}_r \acute{v}_{jr} v_{ir}^2\right) \tag{A.55}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_r}\left(1/2\,(\,\rho_r v_{ri}^2\right)+\frac{\partial}{\partial x_{jr}}\left(1/2\,(\rho_r v_{jr} v_{ir}^2\right)=-v_{ir}\frac{\partial p_r}{\partial x_{ir}}+\frac{1}{R_e} v_{ir}\frac{\partial \tau_{ijr}}{\partial x_{jr}}+\frac{1}{F_r}\rho_r f_{ir} v_{ir}-\acute{v}_{ir}\frac{\partial \acute{p}_r}{\partial x_{ir}}+\frac{1}{R_e}\acute{v}_{ir}\frac{\partial \acute{\tau}_{ijr}}{\partial x_{jr}}+\frac{1}{F_r}\acute{\rho}_r \acute{f}_{ir} v_{ir}+\frac{1}{F_{r_o}}\rho_r \acute{f}_{ir}\acute{v}_{ir}+\frac{1}{F_r}\acute{\rho}_r f_{ir}\acute{v}_{ir}+\frac{1}{F_{r_o}}\acute{\rho}_r \acute{f}_{ir}\acute{v}_{ir}-\frac{\partial}{\partial t_r}\left(1/2\,(\rho_r \acute{v}_{ri}^2+2\acute{\rho}_r \acute{v}_{ir} v_{ir}+\acute{\rho}_r \acute{v}_{ri}^2\right)-\frac{\partial}{\partial x_{jr}}\left(1/2\,(\rho_r v_{jr}\acute{v}_{ir}^2+2\rho_r v_{ir}\acute{v}_{ir}\acute{v}_{jr}+\rho_r \acute{v}_{jr}\acute{v}_{ir}^2+2\acute{\rho}_r v_{ir}\acute{v}_{ir} v_{jr}+2\acute{\rho}_r v_{jr} v_{ir}^2+\acute{\rho}_r \acute{v}_{jr} v_{ir}^2+2\acute{\rho}_r v_{ir}\acute{v}_{ir}\acute{v}_{jr}+\acute{\rho}_r \acute{v}_{jr} v_{ir}^2\right) \tag{A.56}$$

- Equation adimensionnée de l'énergie interne

$$\frac{\rho_o e_o}{t_o}\frac{\partial \rho_r e_r}{\partial t_r}+\frac{\rho_o v_o e_o}{x_o}\frac{\partial}{\partial x_{jr}}(\rho_r v_{ir} e_r)=-\frac{q_o}{x_o}\frac{\partial q_{ir}}{\partial x_{jr}}-\frac{p_o v_o}{x_o}\frac{\partial p_r v_{ir}}{\partial x_{ir}}+\frac{\mu_o v_o^2}{x_o^2}\tau_{ijr}\frac{\partial v_{jr}}{\partial x_{ir}}-\frac{p_o v_o}{x_o}\acute{p}_r\frac{\partial \acute{v}_{ir}}{\partial x_{ir}}+\frac{\mu_o v_o^2}{x_o^2}\acute{\tau}_{ir}\frac{\partial \acute{v}_{jr}}{\partial x_{ir}}-\frac{\rho_o e_o}{t_o}\frac{\partial \acute{\rho}_r \acute{e}_r}{\partial t_r}-\frac{\rho_o v_o e_o}{x_o}\frac{\partial}{\partial x_{jr}}(\rho_r \acute{v}_{ri}\acute{e}_r+\acute{\rho}_r \acute{e}_r v_{ir}+\rho_r \acute{v}_{ir} e_r+\acute{\rho}_r \acute{v}_{ir}\acute{e}_r) \tag{A.57}$$

$$\frac{\partial \rho_r e_r}{\partial t_r}+\frac{\partial}{\partial x_{jr}}(\rho_r v_{ir} e_r)=-\frac{q_o}{\rho_o v_o e_o}\frac{\partial q_{ir}}{\partial x_{jr}}-\frac{p_o}{\rho_o e_o}\frac{\partial p_r v_{ir}}{\partial x_{ir}}+\frac{\mu_o v_o}{\rho_o e_o x_o}\tau_{ijr}\frac{\partial v_{jr}}{\partial x_{ir}}-\frac{p_o}{\rho_o e_o}\acute{p}_r\frac{\partial \acute{v}_{ir}}{\partial x_{ir}}+\frac{\mu_o v_o}{\rho_o e_o x_o}\acute{\tau}_{ir}\frac{\partial \acute{v}_{jr}}{\partial x_{ir}}-\frac{\partial \acute{\rho}_r \acute{e}_r}{\partial t_r}-\frac{\partial}{\partial x_{jr}}(\rho_r \acute{v}_{ri}\acute{e}_r+\acute{\rho}_r \acute{e}_r v_{ir}+\rho_r \acute{v}_{ir} e_r+\acute{\rho}_r \acute{v}_{ir}\acute{e}_r) \tag{A.58}$$

- Equation adimensionnée d'échange thermique

$$c_{po}c_{pr}\frac{\rho_o T_o}{t_o}\rho_r\frac{\partial T_r}{\partial t_r}+c_{po}c_{pr}\frac{\rho_o T_o v_o}{x_o}\frac{\partial \rho_r T_r v_{ir}}{\partial x_{jr}}=-\frac{q_o}{x_o}\frac{\partial q_{ir}}{\partial x_{jr}}-\frac{p_o}{t_o}\left(\frac{\partial \ln \rho_r}{\partial \ln T_r}\right)_p\frac{dp_r}{dt_r}+$$
$$\frac{\mu_o v_o^2}{x_o^2}\tau_{ir}\frac{\partial v_{jr}}{\partial x_{ir}}+\frac{\mu_o v_o^2}{x_o^2}\acute{\tau}_{ir}\frac{\partial \acute{v}_{jr}}{\partial x_{ir}}-c_{po}c_{pr}\frac{\rho_o T_o}{t_o}\acute{\rho}_r\frac{\partial \acute{T}_r}{\partial \acute{t}_r}-c_{po}c_{pr}\frac{\rho_o T_o v_o}{x_o}\frac{\partial}{\partial x_{jr}}\left(\rho_r\acute{T}_r\acute{v}_{ir}+\right.$$
$$\left.\acute{\rho}_r T_r\acute{v}_{ir}+\acute{\rho}_r\acute{T}_r v_{ir}+\acute{\rho}_r\acute{T}_r\acute{v}_{ir}\right)$$

(A.59)

$$\rho_r\frac{\partial T_r}{\partial t_r}+\frac{\partial \rho_r T_r v_{ir}}{\partial x_{jr}}=$$
$$-\frac{1}{R_e P_r c_{pr}}\frac{\partial q_{ir}}{\partial x_{jr}}-\frac{p_o}{\rho_o T_o c_{po} c_{pr}}\left(\frac{\partial \ln \rho_r}{\partial \ln T_r}\right)_p\frac{dp_r}{dt_r}+\frac{\mu_o v_o}{\rho_o T_o c_{po} c_{pr} x_o}\tau_{ir}\frac{\partial v_{jr}}{\partial x_{ir}}+$$
$$\frac{\mu_o v_o}{\rho_o T_o c_{po} c_{pr} x_o}\acute{\tau}_{ir}\frac{\partial \acute{v}_{jr}}{\partial x_{ir}}-\acute{\rho}_r\frac{\partial \acute{T}_r}{\partial \acute{t}_r}-\frac{\partial}{\partial x_{jr}}\left(\rho_r\acute{T}_r\acute{v}_{ir}+\acute{\rho}_r T_r\acute{v}_{ir}+\acute{\rho}_r\acute{T}_r v_{ir}+\acute{\rho}_r\acute{T}_r\acute{v}_{ir}\right)$$

(A.60)

Equations de l'écoulement turbulent plan à masse volumique variable

- Equation de conservation de la matière de l'écoulement turbulent plan

Nous partons de l'équation (A.51)

$$\frac{\partial \rho_r v_{xr}}{\partial x_r} + \frac{\partial \rho_r v_{xr}}{\partial y_r} = -\frac{\partial \acute{\rho}_r \acute{v}_{xr}}{\partial x_r} - \frac{\partial \acute{\rho}_r \acute{v}_{xr}}{\partial y_r} \qquad \textbf{(A.61)}$$

$$\frac{\partial \rho_r}{\partial t_r} = 0 \qquad \textbf{(A.62)}$$

- Equations de la quantité de mouvement de l'écoulement turbulent plan

En projetant sur les axes l'équation (A.53) en tenant compte de la transformation au niveau de la viscosité nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial t_r}(\rho_r v_{ir}) + \frac{\partial}{\partial x_{jr}}\left(\rho_r v_{ir} v_{jr}\right) = -\frac{\partial p_r}{\partial x_{ir}} + \frac{1}{F_r}\rho_r f_{ir} + \frac{1}{R_e}\frac{\partial \tau_{ijr}}{\partial x_{jr}} + \frac{1}{F_r}\acute{\rho}_r \acute{f}_{ir} - \frac{\partial}{\partial t_r}(\acute{\rho}_r \acute{v}_r) - \frac{\partial}{\partial x_{jr}}\left(\rho_r \acute{v}_{ir} \acute{v}_{jr} + \acute{\rho}_r \acute{v}_{ir} v_{jr} + \acute{\rho}_r v_{ir} \acute{v}_{jr} + \acute{\rho}_r \acute{v}_{ir} \acute{v}_{jr}\right)$$

(A.63)

$$\frac{\partial \tau_{ijr}}{\partial x_{jr}} = \frac{\partial}{\partial x_{jr}}\mu_r\left[\left(\frac{\partial v_{ir}}{\partial x_{jr}} + \frac{\partial v_{jr}}{\partial x_{ir}}\right) - {}^{2}\!/_{3}\frac{\partial v_{ir}}{\partial x_{ir}}\right] \qquad \textbf{(A.64)}$$

$$\frac{\partial \tau_{ijr}}{\partial x_{jr}} = \mu_r\left[\Delta v_{ir} + {}^{1}\!/_{3}\frac{\partial \nabla v_{ir}}{\partial x_{ir}}\right] \qquad \textbf{(A.65)}$$

$$\mu_r\left[\Delta v_{xr} + {}^{1}\!/_{3}\frac{\partial v_{xr}}{\partial x_r}\right] = \mu_r\left[\frac{\partial^2 v_{xr}}{\partial y_r^2}\right] \qquad \textbf{(A.66)}$$

$$\rho_r \frac{\partial}{\partial t_r}(v_{xr}) + v_{xr}v_{xr}\frac{\partial}{\partial x_r}(\rho_r) + \frac{\partial}{\partial y_r}(\rho_r v_{xr} v_{xr}) = -\frac{\partial p_r}{\partial x_r} + \frac{1}{F_r}\rho_r f_{xr} + \frac{\mu_r}{R_e}\left[\frac{\partial^2 v_{xr}}{\partial y_r^2}\right] + \frac{1}{F_r}\acute{\rho}_r\acute{f}_{xr} - \frac{\partial}{\partial t_r}(\acute{\rho}_r\acute{v}_{xr}) - \frac{\partial}{\partial x_r}(\rho_r\acute{v}_{xr}\acute{v}_{xr} + \acute{\rho}_r\acute{v}_{xr}v_{xr} + \acute{\rho}_r v_{xr}\acute{v}_{xr} + \acute{\rho}_r\acute{v}_{xr}\acute{v}_{xr}) - \frac{\partial}{\partial y_r}(\rho_r\acute{v}_{xr}\acute{v}_{xr} + \acute{\rho}_r\acute{v}_{xr}v_{xr} + \acute{\rho}_r v_{xr}\acute{v}_{xr} + \acute{\rho}_r\acute{v}_{xr}\acute{v}_{xr}) \tag{A.67}$$

$$\frac{\partial p_r}{\partial y_r} = \frac{1}{F_r}\rho_r f_{yr} + \frac{1}{F_r}\acute{\rho}_r\acute{f}_{yr} \tag{A.68}$$

- Equation l'énergie cinétique de l'écoulement turbulent plan

$$\frac{\partial}{\partial t_r}\left({}^{1}/_{2}\,(\rho_r v_{ri}^2\right) + \frac{\partial}{\partial x_{jr}}\left({}^{1}/_{2}\,(\rho_r v_{jr} v_{ir}^2\right) = -v_{ir}\frac{\partial p_r}{\partial x_{ir}} + \frac{1}{R_e}v_{ir}\frac{\partial \tau_{ijr}}{\partial x_{jr}} + \frac{1}{F_r}\rho_r f_{ir} v_{ir} - \acute{v}_{ir}\frac{\partial \acute{p}_r}{\partial x_{ir}} + \frac{1}{R_e}\acute{v}_{ir}\frac{\partial \acute{\tau}_{ijr}}{\partial x_{jr}} + \frac{1}{F_r}\acute{\rho}_r\acute{f}_{ir}v_{ir} + \frac{1}{F_r}\rho_r\acute{f}_{ir}\acute{v}_{ir} + \frac{1}{F_r}\acute{\rho}_r f_{ir}\acute{v}_{ir} + \frac{1}{F_r}\acute{\rho}_r\acute{f}_{ir}\acute{v}_{ir} - \frac{\partial}{\partial t_r}\left({}^{1}/_{2}\,(\rho_r\acute{v}_{ri}^2 + 2\acute{\rho}_r\acute{v}_{ir}v_{ir} + \acute{\rho}_r\acute{v}_{ri}^2)\right) - \frac{\partial}{\partial x_{jr}}\left({}^{1}/_{2}\,(\rho_r v_{jr}\acute{v}_{ir}^2 + 2\rho_r v_{ir}\acute{v}_{ir}\acute{v}_{jr} + \rho_r\acute{v}_{jr}\acute{v}_{ir}^2 + 2\acute{\rho}_r v_{ir}\acute{v}_{ir}v_{jr} + \acute{2}\rho_r v_{jr}v_{ir}^2 + \acute{\rho}_r\acute{v}_{jr}v_{ir}^2 + 2\acute{\rho}_r v_{ir}\acute{v}_{ir}\acute{v}_{jr} + \acute{\rho}_r\acute{v}_{jr}v_{ir}^2)\right) \tag{A.69}$$

$$\frac{\partial}{\partial t_r}\left({}^{1}/_{2}\,(\rho_r v_{xr}^2)\right) + \frac{\partial}{\partial x_r}\left({}^{1}/_{2}\,(\rho_r v_{xr} v_{xr}^2)\right) + \frac{\partial}{\partial y_r}\left({}^{1}/_{2}\,(\rho_r v_{xr} v_{xr}^2)\right)$$

$$= -v_{xr}\frac{\partial p_r}{\partial x_r} + \frac{\mu_r}{R_e}v_{xr}\frac{\partial^2 v_{xr}}{\partial y^2{}_r} + \frac{1}{F_r}\rho_r f_{xr}v_{xr} - \acute{v}_{xr}\left(\frac{\partial \acute{p}_r}{\partial x_r} + \frac{\mu_r}{R_e}\frac{\partial^2 \acute{v}_{xr}}{\partial y^2{}_r}\right)$$

$$+ \frac{1}{F_r}(\acute{\rho}_r\acute{f}_{xr}v_{xr} + \rho_r\acute{f}_{xr}\acute{v}_{xr} + \acute{\rho}_r f_{xr}\acute{v}_{xr} + \acute{\rho}_r\acute{f}_{xr}\acute{v}_{xr})$$

$$- \frac{\partial}{\partial t_r}\left({}^{1}/_{2}\,(\rho_r\acute{v}_{xr}^2 + 2\acute{\rho}_r\acute{v}_{xr}v_{xr} + \acute{\rho}_r\acute{v}_{xr}^2)\right)$$

$$- \frac{\partial}{\partial x_r}\left({}^{1}/_{2}\,(3\rho_r v_{xr}\acute{v}_{xr}^2 + 3\acute{\rho}_r v^2{}_{xr}\acute{v}_{xr} + \acute{2}\rho_r v_{xr}v_{xr}^2 + 2\acute{\rho}_r v_{xr}\acute{v}_{xr}^2 + \rho_r\acute{v}_{xr}\acute{v}_{xr}^2 + \acute{\rho}_r\acute{v}_{xr}v_{xr}^2)\right)$$

$$- \frac{\partial}{\partial y_r}\left({}^{1}/_{2}\,(3\rho_r v_{x\,r}\acute{v}_{xr}^2 + 3\acute{\rho}_r v^2{}_{xr}\acute{v}_{xr} + \acute{2}\rho_r v_{xr}v_{xr}^2 + 2\acute{\rho}_r v_{xr}\acute{v}_{xr}^2 + \rho_r\acute{v}_{xr}\acute{v}_{xr}^2 + \acute{\rho}_r\acute{v}_{xr}v_{xr}^2)\right)$$

(A.70)

- **Equations de l'énergie interne de l'écoulement turbulent plan**

$$\frac{\partial \rho_r e_r}{\partial t_r} + \frac{\partial}{\partial x_{jr}}(\rho_r v_{ir} e_r) = -\frac{q_o}{\rho_o v_o e_o}\frac{\partial q_{ir}}{\partial x_{jr}} - \frac{p_o p_r}{\rho_o e_o}\frac{\partial v_{ir}}{\partial x_{ir}} + \frac{\mu_o v_o}{\rho_o e_o x_o}\tau_{ijr}\frac{\partial v_{jr}}{\partial x_{ir}} - \frac{p_o}{\rho_o e_o}\acute{p}_r \frac{\partial \acute{v}_{ir}}{\partial x_{ir}} + \frac{\mu_o v_o}{\rho_o e_o x_o}\acute{t}_{ir}\frac{\partial \acute{v}_{jr}}{\partial x_{ir}} - \frac{\partial \acute{\rho}_r \acute{e}_r}{\partial t_r} - \frac{\partial}{\partial x_{jr}}(\rho_r \acute{v}_{ri}\acute{e}_r + \acute{\rho}_r \acute{e}_r v_{ir} + \rho_r \acute{v}_{ir} e_r + \acute{\rho}_r \acute{v}_{ir}\acute{e}_r)$$

(A.71)

$$\frac{\partial \rho_r e_r}{\partial t_r} + \frac{\partial}{\partial x_r}(\rho_r v_{xr} e_r) + \frac{\partial}{\partial y_r}(\rho_r v_{xr} e_r) = -\frac{q_o}{\rho_o v_o e_o}\left(\frac{\partial q_{xr}}{\partial x_r} + \frac{\partial q_{xr}}{\partial y_r}\right) - \frac{\partial \acute{\rho}_r \acute{e}_r}{\partial t_r} - \frac{\partial}{\partial x_r}(\rho_r \acute{v}_{xr}\acute{e}_r + \acute{\rho}_r \acute{e}_r v_{xr} + \rho_r \acute{v}_{xr} e_r + \acute{\rho}_r \acute{v}_{xr}\acute{e}_r) - \frac{\partial}{\partial y_r}(\rho_r \acute{v}_{xr}\acute{e}_r + \acute{\rho}_r \acute{e}_r v_{xr} + \rho_r \acute{v}_{xr} e_r + \acute{\rho}_r \acute{v}_{xr}\acute{e}_r)$$

(A.72)

$$\frac{\partial \rho_r e_r}{\partial t_r} = -\frac{q_o}{\rho_o v_o e_o}\left(\frac{\partial q_{yr}}{\partial x_r} + \frac{\partial q_{yr}}{\partial y_r}\right) + {}^1\!/_3\frac{\mu_o v_o}{\rho_o e_o x_o}\left(\frac{\partial v_{xr}}{\partial y_r}\right)\left(\frac{\partial v_{xr}}{\partial y_r}\right) + {}^1\!/_3\frac{\mu_o v_o}{\rho_o e_o x_o}\left(\frac{\partial \acute{v}_{xr}}{\partial y_r}\right)\left(\frac{\partial \acute{v}_{xr}}{\partial y_r}\right) - \frac{\partial \acute{\rho}_r \acute{e}_r}{\partial t_r}$$

(A.73)

- **Equations d'échange thermique de l'écoulement turbulent plan**

$$\rho_r\frac{\partial T_r}{\partial t_r} + \frac{\partial \rho_r T_r v_{ir}}{\partial x_{jr}} = -\frac{1}{R_e P_r c_{pr}}\frac{\partial q_{ir}}{\partial x_{jr}} - \frac{p_o}{\rho_o T_o c_{po} c_{pr}}\left(\frac{\partial \ln \rho_r}{\partial \ln T_r}\right)_p \frac{dp_r}{dt_r} + \frac{\mu_o v_o}{\rho_o T_o c_{po} c_{pr} x_o}\tau_{ijr}\frac{\partial v_{jr}}{\partial x_{ir}} + \frac{\mu_o v_o}{\rho_o T_o c_{po} c_{pr} x_o}\acute{t}_{ijr}\frac{\partial \acute{v}_{jr}}{\partial x_{ir}} - \acute{\rho}_r\frac{\partial \acute{T}_r}{\partial \acute{t}_r} - \frac{\partial}{\partial x_{jr}}(\rho_r \acute{T}_r \acute{v}_{ir} + \acute{\rho}_r T_r \acute{v}_{ir} + \acute{\rho}_r \acute{T}_r v_{ir} + \acute{\rho}_r \acute{T}_r \acute{v}_{ir})$$

(A.74)

$$\rho_r\frac{\partial T_r}{\partial t_r} + \frac{\partial \rho_r T_r v_{xr}}{\partial x_r} + \frac{\partial \rho_r T_r v_{xr}}{\partial y_r} = -\frac{1}{R_e P_r c_{pr}}\left(\frac{\partial q_{xr}}{\partial x_r} + \frac{\partial q_{xr}}{\partial y_r}\right) - \frac{p_o}{\rho_o T_o c_{po} c_{pr}}\left(\frac{\partial \ln \rho_r}{\partial \ln T_r}\right)_p \frac{dp_r}{dt_r} - \acute{\rho}_r\frac{\partial \acute{T}_r}{\partial \acute{t}_r} - \frac{\partial}{\partial x_r}(\rho_r \acute{T}_r \acute{v}_{xr} + \acute{\rho}_r T_r \acute{v}_{xr} + \acute{\rho}_r \acute{T}_r v_{xr} + \acute{\rho}_r \acute{T}_r \acute{v}_{xr}) - \frac{\partial}{\partial y_r}(\rho_r \acute{T}_r \acute{v}_{xr} + \acute{\rho}_r T_r \acute{v}_{xr} + \acute{\rho}_r \acute{T}_r v_{xr} + \acute{\rho}_r \acute{T}_r \acute{v}_{xr})$$

(A.74)

$$\rho_r \frac{\partial T_r}{\partial t_r} =$$

$$-\frac{1}{R_e P_r c_{pr}} (\frac{\partial q_{yr}}{\partial x_r} + \frac{\partial q_{yr}}{\partial y_r}) - \frac{p_o}{\rho_o T_o c_{po} c_{pr}} (\frac{\partial \ln \rho_r}{\partial \ln T_r})_p \frac{dp_r}{dt_r} +$$

$$1/_3 \frac{\mu_o v_o}{\rho_o T_o c_{po} c_{pr} x_o} \left(\frac{\partial v_{xr}}{\partial y_r}\right) \left(\frac{\partial v_{xr}}{\partial y_r}\right) + 1/_3 \frac{\mu_o v_o}{\rho_o T_o c_{po} c_{pr} x_o} \left(\frac{\partial \acute{v}_{xr}}{\partial y_r}\right) \left(\frac{\partial \acute{v}_{xr}}{\partial y_r}\right) - \acute{\rho}_r \frac{\partial \acute{T}_r}{\partial \acute{t}_r}$$

(A.75)

Equation de l’énergie cinétique turbulente

Pour établir l’équation de l’énergie cinétique turbulente, on part des équations (A.56) et (A.54)

$$\frac{\partial}{\partial t_r}\left({}^{1}\!/_{2}\,\rho_r v_{ri}^2\right)+\frac{\partial}{\partial x_{jr}}\left({}^{1}\!/_{2}\,\rho_r v_{<r} v_{ir}^2\right)=-v_{ir}\frac{\partial p_r}{\partial x_{ir}}+\frac{1}{R_e}v_{ir}\frac{\partial \tau_{ijr}}{\partial x_{jr}}+ \frac{1}{F_r}\rho_r f_{ir}v_{ir}-\acute{v}_{ir}\frac{\partial \acute{p}_r}{\partial x_{ir}}+\frac{1}{R_e}\acute{v}_{ir}\frac{\partial \acute{\tau}_{ijr}}{\partial x_{jr}}+\frac{1}{F_r}\acute{\rho}_r\acute{f}_{ir}v_{ir}+\frac{1}{F_r}\rho_r\acute{f}_{ir}\acute{v}_i+\acute{\rho}_r f_{ir}\acute{v}_{ir}+ \frac{1}{F_{r_o}}\acute{\rho}_r\acute{f}_{ir}\acute{v}_{ir}-\frac{\partial}{\partial t_r}\left({}^{1}\!/_{2}\left(\rho_r\acute{v}_{ri}^2+2\acute{\rho}_r\acute{v}_{ir}v_{ir}+\acute{\rho}_r\acute{v}_{ri}^2\right)\right)-\frac{\partial}{\partial x_{jr}}\left({}^{1}\!/_{2}\left(\rho_r v_{jr}\acute{v}_{ir}^2+ 2\rho_r v_{ir}\acute{v}_{ir}\acute{v}_{jr}+\rho_r\acute{v}_{jr}\acute{v}_{ir}^2+2\acute{\rho}_r v_{ir}\acute{v}_{ir}v_{jr}+2\acute{\rho}_r v_{jr}v_{ir}^2+\acute{\rho}_r\acute{v}_{jr}v_{ir}^2+ 2\acute{\rho}_r v_{ir}\acute{v}_{ir}\acute{v}_{jr}+\acute{\rho}_r\acute{v}_{jr}v_{ir}^2\right)\right)$$

(A.76)

Multiplions l’équation (A.54) par $\boldsymbol{v_{ir}}$, nous obtenons :

$$v_{ir}\frac{\partial}{\partial t_r}(\rho_r v_{ir})+v_{ir}\frac{\partial}{\partial x_{jr}}(\rho_r v_{ir}v_{jr})=-v_{ir}\frac{\partial p_r}{\partial x_{ir}}+\frac{1}{F_r}v_{ir}\rho_r f_{ir}+\frac{1}{R_e}v_{ir}\frac{\partial \tau_{ijr}}{\partial x_{jr}}+ v_{ir}\frac{1}{F_r}\acute{\rho}_r\acute{f}_{ir}-v_{ir}\frac{\partial}{\partial t_r}(\acute{\rho}_r\acute{v}_r)-v_{ir}\frac{\partial}{\partial x_{jr}}\left(\rho_r\acute{v}_{ir}\acute{v}_{jr}+\acute{\rho}_r\acute{v}_{ir}v_{jr}+\acute{\rho}_r v_{.r}\acute{v}_{jr}+ \acute{\rho}_r\acute{v}_{ir}\acute{v}_{jr}\right)$$

(A.77)

En faisant (A.77) – (A.78) et après quelques arrangements, nous obtenons :

$$-\frac{\partial}{\partial t_r}\left({}^{1}\!/_{2}\left(\rho_r v_{ri}^2\right)\right)+\rho_r v_{ir}\frac{\partial}{\partial t_r}(v_{ir})-\frac{\partial}{\partial x_{jr}}\left({}^{1}\!/_{2}\left(\rho_r v_{jr}v_{ir}^2\right)\right)+ \rho_r v_{ir}v_{jr}\frac{\partial}{\partial x_{jr}}(v_{ir})=-\acute{v}_{ir}\frac{\partial \acute{p}_r}{\partial x_{ir}}+\frac{1}{R_e}\acute{v}_{ir}\frac{\partial \acute{\tau}_{ijr}}{\partial x_{jr}}+\frac{1}{F_r}\rho_r\acute{f}_{ir}\acute{v}_{ir}+\frac{1}{F_r}\acute{\rho}_r f_{ir}\acute{v}_{ir}+ \frac{1}{F_r}\acute{\rho}_r\acute{f}_{ir}\acute{v}_{ir}-\frac{\partial}{\partial t_r}\left({}^{1}\!/_{2}\left(\rho_r\acute{v}_{ir}^2+2\acute{\rho}_r\acute{v}_{ir}v_{ir}+\acute{\rho}_r\acute{v}_{ri}^2\right)\right)-v_{ir}\frac{\partial}{\partial t_r}(\acute{\rho}_r\acute{v}_{ir})- \frac{\partial}{\partial x_{jr}}\left({}^{1}\!/_{2}\left(\rho_r v_{jr}\acute{v}_{ir}^2+4\rho_r v_{ir}\acute{v}_{ir}\acute{v}_{jr}+\rho_r\acute{v}_{jr}\acute{v}_{ir}^2+4\acute{\rho}_r v_{ir}\acute{v}_{ir}v_{jr}+3\acute{\rho}_r\acute{v}_{jr}v_{ri}^2+ \acute{\rho}_r\acute{v}_{jr}v_{ir}^2+4\acute{\rho}_r v_{ir}\acute{v}_{ir}\acute{v}_{jr}+\acute{\rho}_r\acute{v}_{jr}v_{ir}^2\right)\right)+\left(\rho\_\acute{v}_{ir}\acute{v}_{jr}+\acute{\rho}_r\acute{v}_{ir}v_{jr}+\acute{\rho}_r v_{ir}\acute{v}_{jr}+ \acute{\rho}_r\acute{v}_{ir}\acute{v}_{jr}\right)\frac{\partial v_{ir}}{\partial x_{jr}}$$

(A.78)

Finalement l'équation de l'énergie cinétique turbulente peut s'écrire après quelques arrangements :

$$\frac{\partial}{\partial t_r}(\rho_r k) + \frac{\partial}{\partial x_{jr}}(\rho_r v_{jr}\ k) = {}^1\!/_2 \frac{\partial}{\partial t_r}(2\acute{\rho}_r \acute{v}_{ir} v_{ir} + \acute{\rho}_r \acute{v}_{ir}^2 + \rho_r v_{ir}^2) -$$

$$\rho_r v_{ir}\frac{\partial}{\partial t_r}(v_{ir}) - v_{ir}\frac{\partial}{\partial t_r}(\acute{\rho}_r \acute{v}_{ir}) - \acute{v}_{ir}\frac{\partial \acute{p}_r}{\partial x_{ir}} + \frac{1}{R_e}\acute{v}_{ir}\mu_r\left[\Delta\,\acute{v}_{ir} + {}^1\!/_3 \frac{\partial \nabla \acute{v}_{jr}}{\partial x_{jr}}\right] +$$

$$\frac{1}{F_r}\rho_r \acute{f}_{ir}\acute{v}_{ir} + \frac{1}{F_r}\acute{\rho}_r f_{ir}\acute{v}_{ir} + \frac{1}{F_r}\acute{\rho}_r \acute{f}_{ir}\acute{v}_{ir} - \frac{\partial}{\partial x_{jr}}\Big({}^1\!/_2 (\rho_r v_{jr} v_{ir}^2 + 4\rho_r v_{ir}\acute{v}_{ir}\acute{v}_{jr} +$$

$$\rho_r \acute{v}_{jr}\acute{v}_{ir}^2 + 4\acute{\rho}_r v_{ir}\acute{v}_{ir} v_{jr} + 3\acute{\rho}_r \acute{v}_{jr} v_{ri}^2 + \acute{\rho}_r \acute{v}_{jr} v_{ir}^2 + 4\acute{\rho}_r v_{ir}\acute{v}_{ir}\acute{v}_{jr} + \acute{\rho}_r \acute{v}_{jr} v_{ir}^2)\Big) +$$

$$(-\rho_r v_{ir} v_{jr} + \rho_r\ \acute{v}_{ir}\acute{v}_{jr} + \acute{\rho}_r \acute{v}_{ir} v_{jr} + \acute{\rho}_r v_{ir}\acute{v}_{jr} + \acute{\rho}_r \acute{v}_{ir}\acute{v}_{jr})\frac{\partial v_{ir}}{\partial x_{jr}}$$

(A.79)

$$\frac{\partial \acute{\tau}_{ijr}}{\partial x_{jr}} = \mu_r\left[\Delta \acute{v}_{ir} + {}^1\!/_3 \frac{\partial \nabla \acute{v}_{jr}}{\partial x_{jr}}\right] \tag{A.80}$$

$$k = \frac{1}{2}\acute{v}_{xr}\acute{v}_{xr} \tag{A.81}$$

Pour l'écoulement plan, l'équation de l'énergie cinétique turbulente a pour expression :

$$\frac{\partial}{\partial t_r}(\rho_r k) + \frac{\partial}{\partial x_r}(\rho_r v_{xr} k) = {}^1\!/_2 \frac{\partial}{\partial t_r}(2\acute{\rho}_r \acute{v}_{xr} v_{xr} + \acute{\rho}_r \acute{v}_{xr}^2 + \rho_r v_{xr}^2) -$$

$$\rho_r v_{xr}\frac{\partial}{\partial t_r}(v_{xr}) - v_{xr}\frac{\partial}{\partial x_r}(\acute{\rho}_r \acute{v}_{xr}) - \acute{v}_{xr}\frac{\partial \acute{p}_r}{\partial x_r} + \frac{1}{R_e}\acute{v}_{xr}\mu_r\frac{\partial^2 \acute{v}_{xr}}{\partial y_r^2} + \frac{1}{F_r}\rho_r \acute{f}_{x\,r}\acute{v}_{xr} +$$

$$\frac{1}{F_r}\acute{\rho}_r f_{xr}\acute{v}_{xr} + \frac{1}{F_r}\acute{\rho}_r \acute{f}_{xr}\acute{v}_{xr} - \frac{\partial}{\partial x_r}\Big({}^1\!/_2 (\rho_r v_{xr} v_{xr}^2 + 4\rho_r v_{xr}\acute{v}_{xr}\acute{v}_{xr} + \rho_r \acute{v}_{xr}\acute{v}_{xr}^2 +$$

$$4\acute{\rho}_r v_{xr}\acute{v}_{xr} v_{xr} + 3\acute{\rho}_r \acute{v}_{xr} v_{xr}^2 + \acute{\rho}_r \acute{v}_{xr} v_{xr}^2 + 4\acute{\rho}_r v_{xr}\acute{v}_{xr}\acute{v}_{xr} + \acute{\rho}_r \acute{v}_{xr} v_{xr}^2)\Big) -$$

$$\frac{\partial}{\partial y_r}\Big({}^1\!/_2 (\rho_r v_{xr} v_{xr}^2 + 4\rho_r v_{xr}\acute{v}_{xr}\acute{v}_{xr} + \rho_r \acute{v}_{xr}\acute{v}_{xr}^2 + 4\acute{\rho}_r v_{xr}\acute{v}_{xr} v_{xr} +$$

$$3\acute{\rho}_r \acute{v}_{xr} v_{xr}^2 + \acute{\rho}_r \acute{v}_{xr} v_{xr}^2 + 4\acute{\rho}_r v_{xr}\acute{v}_{xr}\acute{v}_{xr} + \acute{\rho}_r \acute{v}_{xr} v_{xr}^2)\Big) + (-\rho_r v_{xr} v_{xr} +$$

$$\rho_r \acute{v}_{xr}\acute{v}_{xr} + \acute{\rho}_r \acute{v}_{xr} v_{xr} + \acute{\rho}_r v_{xr}\acute{v}_{xr} + \acute{\rho}_r \acute{v}_{xr}\acute{v}_{xr})\frac{\partial v_{xr}}{\partial x_r}$$

(A.82)