TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

Soit X un ensemble non vide. On dit que X vérifie la propriété (I) si toute application injective $f : X \to X$ est bijective. Dans la catégorie Ens des ensembles, la propriété (I) caractérise les ensembles finis. Dans la catégorie $Vect_K$ des espaces vectoriels sur un corps K, la propriété (I) caractérise les K-espaces vectoriels de dimension finie.
Un A-module M vérifie la propriété (I) si tout A-endomorphisme injectif sur M est un automorphisme.
L'étude des A-modules vérifiant la propriété (I) a fait l'objet de plusieurs publications. Ainsi en 1945, Beaumont **[8],** a montré que tout groupe abélien de torsion, de type fini vérifie la propriété (I). Kaplansky **[15],** a donné la même année, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un module de type fini vérifie la propriété (I). En 1976 Vasconscelos **[26],** a donné une caractérisation des anneaux commutatifs pour lesquels tout module de type fini vérifie la propriété (I). En 1978 Armendariz et Fisher-Snider **[2],** étudient les anneaux non nécessairement commutatifs pour lesquels tout module de type fini vérifie la propriété (I). En 1992 Varadarajan **[22],** a étendu ces notions à des catégories plus générales. Il a montré qu'un anneau peut vérifier la propriété (I) dans la catégorie des A-modules à gauche ${}_A\mathrm{Mod}$ sans l'être dans la catégorie des A-modules à droite Mod_A..
On a aussi étudié d'autres problèmes relatifs à la propriété (I) parmi lesquels :

1. La caractérisation des anneaux sur lesquels tout module vérifiant la propriété (I) est artinien appelés I-anneaux.
2. La caractérisation des anneaux sur lesquels tout module vérifiant la propriété (I) est de type fini appelés FGI-anneaux.

La question 1. a été résolue dans le cas commutatif par Kaidi et Sangharé **[14],** en 1988. Ces derniers ont montré que ces anneaux sont exactement les anneaux artiniens à idéaux principaux.
Quant à la question 2. , elle a été résolue dans le cas commutatif par M. Barry,

O. Diankha et M. Sangharé **[5],** en 2005. Dans le cas d'un duo anneau aussi, la question 2. a été résolue par M. Barry, O. Diankha et M. Sangharé **[6].**

Le but du présent mémoire est de présenter les travaux de M. Barry, O. Diankha et M. Sangharé relatifs à l'étude des FGI- anneaux commutatifs.

Plus précisément, il s'agit d'établir une équivalence entre les FGI-anneaux commutatifs et les anneaux commutatifs artiniens à idéaux principaux.

Un anneau A est un FGI- anneau à gauche si A est un anneau dans lequel tout A-module à gauche vérifiant la propriété (I) est de type fini. Un anneau A est un FGI- anneau à droite si A est un anneau dans lequel tout A-module à droite vérifiant la propriété (I) est de type fini. Un anneau A est un FGI- anneau si A est à la fois un FGI- anneau à droite et à gauche.

Soit A un anneau commutatif tel que $1_A \neq 0$, F_A la classe des A-modules de type fini et I_A la classe des A-modules vérifiant la propriété (I). En général nous n'avons pas l'égalité $F_A = I_A$. Un résultat de W. Vasconscelos que nous verrons au chapitre II montre que $F_A \subseteq I_A$ si et seulement si tout idéal premier de A est maximal.

En général dans un anneau commutatif, il peut exister des A-modules de types finis qui ne vérifient pas la propriété (I). On a aussi des exemples de A-modules vérifiant la propriété (I) et qui ne sont pas de types finis.

Pour faire cette étude, nous avons divisé le travail en quatre principaux chapitres :

Le **chapitre I** est un rappel de certains résultats classiques sur les anneaux et les modules que nous utiliserons tout au long de ce travail.

Au **chapitre II**, nous donnons quelques exemples de A-modules vérifiant la propriété (I).

Le **chapitre III** est consacré à l'étude de quelques propriétés sur les FGI-anneaux commutatifs.

Au **chapitre IV,** nous donnons le théorème de caractérisation des FGI-anneaux commutatifs.

Dans tout le mémoire, et sauf mention express du contraire, le mot anneau désignera un anneau associatif, unitaire non nécessairement commutatif. Le mot module désignera un A-module à gauche unitaire.

CHAPITRE 1

GENERALITES SUR LES ANNEAUX ET LES MODULES :

INTRODUCTION

Ce chapitre contient essentiellement des résultats que nous utiliserons dans toute la suite de ce mémoire. On y trouve les propriétés et les aspects de bases sur les notions d'anneaux et de modules. Les anneaux et les modules semi-simples ainsi que les modules injectifs et leurs enveloppes injectives y sont aussi présentés.

1.1 GENERALITES SUR LES ANNEAUX

1.1.1 Anneaux, sous-anneaux, idéaux et homomorphisme d'anneaux

Définition 1.1.1.
On appelle anneau tout groupe $(A,+)$, muni d'une multiplication vérifiant :

* $a(b+c) = ab + ac \quad \forall\ a,b,c \in A$
* $(b+c)a = ba + ca \quad \forall\ a,b,c \in A$
* Si en outre $(ab)c = a(bc)$ $\forall a,b,c \in A$, alors $(A,+,\bullet)$ est un anneau associatif.
* Si ab = ba $\forall\ a,b \in A$, on dit que l'anneau $(A,+,\bullet)$ est commutatif.
* L'anneau $(A,+,\bullet)$ est dit unitaire s'il existe un élément 1_A tel que

$1_A.a = a.1_A = a \quad \forall\ a \in A$

Définition 1.1.2.
Soit $(A,+,\bullet)$ un anneau, une partie B de A est un sous-anneau de A si :

* $(B,+)$ est un sous-groupe de $(A,+)$
* $\forall\ a,b \in B,\ ab \in B.$
* $1_A \in$ B

Définition 1.1.3.
Soit $(A,+,\bullet)$ un anneau, une partie I de A est appelée idéal à gauche (respectivement à droite) de A si :

$*$ $(I,+)$ est un sous-groupe de $(A,+)$

$*$ $\forall\, a \in A, \forall\, x \in I,\ ax \in I\ (resp\ xa \in I)$.

On dit qu'un idéal I d'un anneau A est un idéal bilatère si seulement si I est à la fois idéal à gauche et idéal à droite de A.

Proposition 1.1.4.
Soit $(A,+,\bullet)$ un anneau, I_1 et I_2 deux idéaux à gauche de A.

$I_1 + I_2 = \{x + y \,/\, x \in I_1 ,\ y \in I_2 \}$

$I_1 \bigcap I_2 = \{x \in A \,/\, x \in I_1\ et\ x \in I_2 \}$

$I_1 \bullet I_2 = \left\{ \sum_{\alpha\in\Lambda,\Lambda\ fini} x_\alpha y_\alpha \,/\, x_\alpha \in I_1\ et\ y_\alpha \in I_2 \right\}$ est appelé produit de I_1 et I_2.

$\sqrt{I_1} = \{x \in A \,/\, \exists n \in N^*, x^n \in I_1 \}$ est appelé racine ou radical de I_1.

$I_1 : I_2 = \{x \in A \,/\, xI_1 \subseteq I_2\}$ est appelé transporteur de I_1 dans I_2.

$I_1 + I_2$; $I_1 \cap I_2$; $\sqrt{I_1}$; $I_1 : I_2$ *et* $I_1 \bullet I_2$ sont des idéaux à gauche de A.

Si $(I_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ est une famille d'idéaux de A, alors $(\bigcap I_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ est un idéal de A.

Définition 1.1.5.
Soit A et B deux anneaux. On appelle homomorphisme d'anneaux de A dans B toute application $f : A \to B$ tel que :

$f(a+b) = f(a) + f(b)$

$f(ab) = f(a) f(b)$

$f(1_A) = 1_B$

Définition 1.1.6.

Un anneau est intègre s'il vérifie la propriété suivante :

$\forall x, y \in A\,,\; xy = 0 \Rightarrow x = 0 \quad ou \quad y = 0$

Définition 1.1.7.

Un idéal d'un anneau A est principal s'il est engendré par un élément.

Un anneau A est dit principal, s'il est intègre et tout idéal de A est principal

.

1.1.2 IDÉAL PREMIER, RADICAL PREMIER

Définition 1.1.8.

Soit $(A,+,\bullet)$ un anneau. Un idéal I de A est premier s'il est différent de A et vérifie les conditions équivalentes suivantes :

i) $\forall\ a, b \in A, \quad si \quad aAb \subset I \quad alors \quad soit\ a \in I, soit\ b \in I$.

ii) *Si B et C sont deux idéaux de A tels que* $BC \subset I$ *alors* $B \subset I$ *ou* $C \subset I$

Lemme 1.1.9.

Un idéal I d'un anneau A est premier si et seulement si l'anneau A/I est intègre.

Lemme 1.1.10.

Soient I_1 , .., I_n des idéaux de A et P un idéal premier de A. Si P contient le produit $I_1 \ldots I_n$, il contient l'un des I_j.

Définition 1.1.11.

On appelle radical premier d'un anneau A et on le note rad (A), l'intersection des idéaux premiers de A.

Un anneau A est semi-premier si rad (A) = 0.

Définition 1.1.12.

∗ Soit A un anneau commutatif. L'élément x de A est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$, tel que $x^n = 0$.

* Soit I un idéal à gauche de A, on dit que I est nilpotent s'il existe

n $\in \mathbb{N}^*$, tel que $I^n = \{0\}$.

* L'ensemble des éléments nilpotents d'un anneau A est appelé nilidéal de A.

Lemme 1.1.13.

L'intersection de tous les idéaux premiers de A est un nilidéal.

Démonstration :

Soit N' l'ensemble des éléments nilpotents de A. Il nous faut montrer que

N'= rad (A).

* Montrons que N' $\subseteq$ rad (A).

Soit x$\in$ A, x nilpotent. Alors il existe un entier n ≥ 0 tel que $x^n = 0$. Mais alors $x^n \in$ P, d'où x $\in$ P, pour tout idéal premier P de A.

* Inversement : soit x$\in$ A, x non nilpotent.

On va montrer qu'il existe un idéal premier P de A tel que x $\notin$ P.

Soit $\Re = \{I \text{ idéal} \,/\, \forall n \succ 0, x^n \in I\}$

$\{0\} \in \Re$, donc $\Re$ est non vide.

$\Re$ est une partie ordonnée inductivement, par conséquent, d'après le lemme de Zorn, $\Re$ admet un élément maximal, appelons-le P.

On montre que P est un idéal premier.

Soit u, v $\notin$ P. Alors P est strictement inclus dans P + Au et dans P + Av d'où, par maximalité de P, ni l'un, ni l'autre de ces idéaux n'appartient à $\Re$.

Par conséquent, il existe des entiers m > 0 et n > 0 tel que $x^m \in$ P + Au et $x^n \in$ P + Av, d'où $x^{m+n} \in (P + Au)(P + Av) = P + Auv$.

D'où P + Auv n'appartient pas à $\Re$, autrement dit, uv $\notin$ P.

Donc P est un idéal premier de A, qui, par construction, ne contient pas x.

■

1.1.3 IDÉAL MAXIMAL, RADICAL DE JACOBSON

Définition 1.1.14.

Soit $(A,+,\bullet)$ un anneau. Un idéal M de A est dit maximal si et seulement si

M ≠ A et pour tout idéal I de A tel que M ⊆ I, on a : M = I ou I = A.

Lemme 1.1.15.

∗ Tout idéal maximal est premier.

∗ Un idéal M d'un anneau A est maximal si et seulement si l'anneau quotient A/M est un corps.

Lemme 1.1.16.

Soit A un anneau. Un élément a ∈ A est inversible si et seulement si a n'appartient pas à aucun idéal maximal de A.

Démonstration :

⇒) Supposons que a est inversible. Alors (a)= A et le seul idéal de A contenant A est A lui-même. Par suite, a ne peut appartenir à aucun idéal maximal.

⇐) Si a n'est pas inversible alors (a) ≠ A. Donc il existe un idéal maximal M de A contenant (a). Donc a ∈ M.

■

Définition 1.1.17.

On appelle radical de Jacobson d'un anneau A l'intersection des idéaux maximaux de A. On le note J (A).

Lemme 1.1.18.

Soit x ∈ A , les affirmations suivantes sont équivalentes :

i) x ∈ J (A).

ii) 1 – xy inversible à gauche, pour tout y∈ A.

Démonstration :

i) $\Rightarrow$ ii) Soit $x \in J(A)$.

Supposons qu'il existe $y \in A$, tel que $1 - xy$ non inversible. Donc $1 - xy$ est contenu dans un idéal maximal M.

Mais $x \in J(A) \subseteq M \Rightarrow xy \in M \Rightarrow 1 \in M \Rightarrow M = A$. Ceci est absurde.

ii) $\Rightarrow$ i) $1 - xy$ inversible à gauche, pour tout $y \in A$.

Supposons qu'il existe un idéal maximal M qui ne contient pas x.

$\Rightarrow xA + M = A \Rightarrow$ il existe $m \in M$ et $y \in A$ tels que $xy + m = 1$

$\Rightarrow m = 1 - xy \in M$. Absurde car $1 - xy$ inversible.

■

Remarque 1.1.19.

* $J(A) = \{a \in A \diagup 1 - ax \text{ inversible à droite, pour tout } x \in A\}$
* J (A) est le plus grand idéal tel que $1 - a$ soit inversible pour tout $a \in J(A)$.
* Tout nilidéal à gauche ou à droite de A est contenu dans J (A).

1.1.4 IDÉAUX ÉTRANGERS ET THÉORÈME CHINOIS

Définition 1.1.20.

Soient $I_1, \ldots, I_n$ des idéaux de A.

1) On dit que $I_1, \ldots, I_n$ sont étrangers (on dit aussi premiers entre eux) si l'on a $I_1 + \ldots + I_n = A$.
2) On dit que $I_1, \ldots, I_n$ sont étrangers deux à deux si I_r et I_s sont étrangers, pour tout $r \neq s$.

Lemme 1.1.21.

On suppose que I est étranger à $J_1, \ldots, J_m$ (on ne suppose pas les J_i nécessairement premiers entre eux). Alors I est étranger à $J_1 \ldots J_m$.

Démonstration :

Par hypothèse, il existe, pour i=1, …, m, des éléments $x_i \in I$ et $y_i \in J_i$ tel que $x_i + y_i = 1$. Alors $1 = \prod_{i=1}^{m}(x_i + y_i)$, et en développant ce produit, on obtient le terme $y_1 \ldots y_m$ qui appartient à $J_1 \ldots J_m$ et une somme de terme qui contient au moins un x_i donc appartient à I. D'où I est étranger à $J_1 \ldots J_m$.

■

Corollaire 1.1.22

Supposons $I_1, \ldots, I_n$ étrangers deux à deux et soient $m_1, \ldots, m_n$ des entiers ≥ 1.

1) $I_1 \ldots I_n = I_1 \cap \ldots \cap I_n$.

2) $I_1^{m_1}, \ldots, I_n^{m_n}$ sont étrangers deux à deux.

Démonstration :

1) $I_1 \ldots I_n$ étant l'idéal engendré par les produit $x_1 \ldots x_n$, on a $I_1 \ldots I_n \subseteq I_1 \cap \ldots \cap I_n$.

Montrons par récurrence que $I_1 \cap \ldots \cap I_n \subseteq I_1 \ldots I_n$

Supposons n=2.

Par hypothèse, il existe $x_1 \in I_1$ et $x_2 \in I_2$ tels que $x_1 + x_2 = 1$. Alors pour tout $a \in I_1 \cap I_2$, l'on a $a = a.1 = ax_1 + ax_2 \in I_1\ I_2$, d'où $I_1\ I_2 = I_1 \cap I_2$.

Supposons n ≥ 3.

Par hypothèse de récurrence $I_2 \cap \ldots \cap I_n = I_2 \ldots I_n$ et d'après le lemme précédent $I_2 \ldots I_n$ est étranger à I_1. Donc $I_1 \cap \ldots \cap I_n = I_1 \cap (I_2 \ldots I_n) = I_1 I_2 \ldots I_n$.

2) Montrons par récurrence que $I_1^{m_1}, \ldots, I_n^{m_n}$ sont étrangers deux à deux.

D'après le lemme précédent I_1 est étranger à $I_2^{m_2}$, puis $I_2^{m_2}$ est étranger à $I_1^{m_1}$ donc $I_1^{m_1}$ et $I_2^{m_2}$ sont étrangers.

Par hypothèse de récurrence, $I_2^{m_2}, \ldots, I_n^{m_n}$ sont étrangers deux à deux. De plus d'après le cas n= 2, chaque $I_k^{m_k}$ est étranger à $I_1^{m_1}$, d'où $I_1^{m_1}, \ldots, I_n^{m_n}$ sont étrangers deux à deux.

■

Théorème 1.1.23 (Théorème chinois)

On suppose $I_1, \ldots, I_n$ étrangers deux à deux. Le morphisme $\Psi : A \to A/I_1 \oplus \ldots \oplus A/I_n$

induit un isomorphisme $A/(I_1 \cap \ldots \cap I_n) \cong \overset{r=n}{\underset{r=1}{\oplus}} A/I_r$.

Démonstration :

Montrons que $Ker\ \Psi = \bigcap_{r=1}^{n} I_r$

Soit $x \in Ker\ \Psi \Rightarrow \Psi(x) = (\overline{0}, \ldots, \overline{0}) \Rightarrow (x + I_1, \ldots, x + I_n) = (I_1, \ldots, I_n) \Rightarrow \begin{cases} x + I_1 = I_1 \\ . \\ . \\ . \\ x + I_n = I_n \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x \in I_1 \\ . \\ . \\ . \\ x \in I_n \end{cases} \Rightarrow x \in \bigcap_{r=1}^{n} I_r$. D'où $Ker\ \Psi \subseteq \bigcap_{r=1}^{n} I_r$.

Soit $x \in \bigcap_{r=1}^{n} I_r \Rightarrow \overline{x} = \overline{0}$ pour tout r, $1 \leq r \leq n$ .Donc $\Psi(x) = (\overline{x}, \ldots, \overline{x}) = (\overline{0}, \ldots, \overline{0})$. D'où

$Ker\ \Psi = \bigcap_{r=1}^{n} I_r$.

Montrons que ψ est surjective.

Pour démontrer la surjectivité de ψ, il suffit de trouver $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in A$ tels que

$\Psi(\varepsilon_r) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ (où 1 est à la r-ième place), car alors un élément arbitraire

$(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n})$ sera l'image de $a_1\varepsilon_1 + \ldots + a_n\varepsilon_n \in A$.

Supposons n = 2.

Par hypothèse, il existe $x_1 \in I_1$ et $x_2 \in I_2$ tels que $x_1 + x_2 = 1$. Alors $1 - x_2 = x_1$ appartient à $1 + I_1$ et à I_2 et donc on peut prendre $\varepsilon_1 = 1 - x_1$ et de même

$\varepsilon_2 = 1 - x_2$. Ce qui prouve le théorème dans le cas n=2.

Supposons $n \geq 3$ et le théorème établi pour n- 1.

D'après le lemme et le corollaire précédent, $I_2 \cap ... \cap I_n = I_2 ... I_n$ est étranger à I_1.

Donc, d'après le cas n = 2, la projection $A \to A/I_1 \oplus A/(I_2 \cap ... \cap I_n)$ induit un isomorphisme $A/(I_1 \cap ... \cap I_n) \cong A/I_1 \oplus A/(I_2 \cap ... \cap I_n)$ **(1).**

De plus par hypothèse de récurrence, la projection $A \to \overset{n}{\underset{r=2}{\oplus}} A/I_r$ induit un

isomorphisme $A/(I_2 \cap ... \cap I_n) \cong \overset{n}{\underset{r=2}{\oplus}} A/I_r$ **(2).**

En composant les isomorphismes **(1)** et **(2) ,** on obtient l'isomorphisme

$A/(I_1 \cap ... \cap I_n) \cong \overset{r=n}{\underset{r=1}{\oplus}} A/I_r$.

■

1.1.5 ANNEAU LOCAL- ANNEAU SEMI-LOCAL

Définition 1.1.24

Un anneau A est dit local s'il admet un seul idéal maximal M. Le corps A/M est appelé corps résiduel.

Un anneau A est dit semi- local s'il admet un nombre fini d'idéaux maximaux.

Proposition 1.1.25

Les conditions suivantes sont équivalentes pour un anneau A.

i) A est local.
ii) Les éléments non inversibles de A forment un idéal bilatère.
iii) J (A) est un idéal à droite maximal, et donc le plus grand idéal à droite propre de A.
iv) J (A) est un idéal à gauche maximal, et donc le plus grand idéal à gauche propre de A.

Dans ce cas, J (A) est l'idéal bilatère formé des éléments non inversibles de A.

Proposition 1.1.26

Pour un anneau A les conditions suivantes sont équivalentes :

i) A est semi-local.
ii) Le quotient de A par son radical de Jacobson est un produit fini de corps.

Démonstration :

i) $\Rightarrow$ ii) Si $M_1,...,M_n$ sont des idéaux maximaux de A (deux à deux distincts) on a :

$M_1 \cap ... \cap M_n = M_1...M_n$, le théorème chinois donne $A/J(A) \cong \prod_{i=1}^{n} A/M_i$.

ii) $\Rightarrow$ i) Il est évident qu'un produit fini de corps n'a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux.

1.2 GÉNÉRALITÉS SUR LES MODULES

1.2.1 MODULES, SOUS - MODULES, HOMOMORPHISME DE MODULES

Définition 1.2.1.

Soit A un anneau unitaire.

i) Un A-module à gauche est un groupe abélien $(M,+)$

muni d'une application $\begin{matrix} A \times M \to M \\ (a,m) \to am \end{matrix}$ tel que :

* $(a_1 + a_2)m = a_1 m + a_2 m \qquad \forall\, (a_1, a_2, m) \in A \times A \times M$
* $a(m_1 + m_2) = a\ m_1 + am_2 \qquad \forall\, (m_1, m_2, a) \in M \times M \times A$
* $(a_1 a_2)m = a_1(a_2 m) \qquad \forall\, (a_1, a_2, m) \in A \times A \times M$
* $1_A.m = m \quad \forall m \in M$

ii) Un A-module à droite est un groupe abélien $(M,+)$

muni d'une application $\begin{matrix} M \times A \to M \\ (m,a) \to ma \end{matrix}$ tel que :

* $m(a_1 + a_2) = ma_1 + ma_2 \qquad \forall\, (a_1, a_2, m) \in A \times A \times M$
* $(m_1 + m_2)a = m_1 a + m_2 a \qquad \forall\, (m_1, m_2, a) \in M \times M \times A$
* $m(a_1 a_2) = (ma_1)a_2 \qquad \forall\, (a_1, a_2, m) \in A \times A \times M$
* $m.1_A = m \quad , \forall\, m \in M$.

Définition 1.2.2

Soit M un A-module et N une partie de M. On dit que N est un sous- module de M si et seulement si:

* $(N,+)$ est un sous-groupe de $(M,+)$.
* $\forall a \in A, \forall x \in N, ax \in N$.

Définition 1.2.3

Soit M un A-module. Un sous-module N de M est dit maximal si N $\neq$ M et il n'existe pas de sous-module L de M tel que $N \subseteq L \subseteq M$.

Définition 1.2.4

Soit M un A-module et $X \subseteq M$. L'intersection des sous-modules de M contenant X, s'appelle sous-module engendré par X, noté $\langle X \rangle$.

Par définition, $\langle X \rangle$ est le plus petit sous –module de M contenant X.

$\langle X \rangle = 0$ si $X = \varnothing$ et $\langle X \rangle = \sum_{x \in X} xA$ sinon.

On dit qu'un A-module M est de type fini ou est finiment généré , s'il existe une famille finie X telle que $M = \langle X \rangle$.

On dit qu'un A-module M est cyclique s'il existe un élément $x \in M$ tel que $M = \langle x \rangle$.

Définition 1.2.5

Soient M et M' deux A-modules à gauche. Un homomorphisme de A-module de M dans M' est une application $f : M \to M'$ vérifiant :

* $\forall x, y \in M, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$
* $\forall x \in M, a \in A, \quad f(ax) = af(x)$

Définition 1.2.6

Un sous-module N d'un A-module M est dit complètement invariant si pour tout endomorphisme f de M, on a $f(N) \subseteq N$.

Lemme 1.2.7

Soit M un A-module et N un sous-module complètement invariant de M. Alors pour tout endomorphisme f de M, il existe un unique endomorphisme de A-modules $\bar{f} : M/N \to M/N$ tel que $pof = \bar{f}op$ où p est la surjection canonique de M sur M/N c'est-à-dire le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & M \arrow[d, "p"] \\ M/N \arrow[r, "\bar{f}"'] & M/N \end{tikzcd}$$

Définition 1.2.8

Une famille $\{N_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ d'ensembles est une chaîne si pour

tout $\lambda, \mu \in \Lambda$, *soit* $N_\lambda \subseteq N_\mu$, *soit* $N_\mu \subseteq N_\lambda$.

Lemme 1.2.9

Soit M un A-module et $\Re = \{N_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ une famille de sous-modules de M.

* $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$ *et* $\sum_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$ sont des sous-modules de M.

* Si $\Re$ est une chaîne, alors $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} N_\lambda$ est un sous-module de M.

Définition 1.2.10

Soit M un A-module et S un partie de M. On appelle annulateur de S et on le note Ann (S) l'ensemble $Ann(S) = \{a \in A \,/\, \forall x \in S, ax = 0\}$. Pour tout a $\in$ A, on note $Ann_g(a) = \{b \in A : ba = 0\}$ et $Ann_d(a) = \{b \in A : ab = 0\}$. Et pour tout x $\in$ M, on note $Ann_A(x) = \{b \in A : bx = 0\}$

$*$ Si M est un A-module gauche, alors Ann (S) est un idéal à gauche de A.

$*$ Si M est un A-module droite, alors Ann (S) est un idéal à droite de A.

$*$ On peut cependant remarquer que quelque soit le type de A-module considéré, Ann (S) est un idéal bilatère de A.

$*$ Si $(x_i) 1 \le i \le n$ est un système générateur de M, alors $Ann(M) = \bigcap_{i=1}^{n} Ann(x_i)$.

Définition 1.2.11

1. a $\neq 0$ est un diviseur de zéro à gauche (resp. à droite) si $Ann_g(a) \neq 0$ (resp. $Ann_d(a) \neq 0$). a $\neq 0$ est un diviseur de zéro s'il l'est droite et à gauche.
2. a $\neq 0$ est régulier à gauche (resp. à droite) si $Ann_g(a) = 0$ (resp. $Ann_d(a) = 0$).

   a $\neq 0$ est régulier s'il l'est droite et à gauche.
3. a $\neq 0$ est inversible à gauche (resp. à droite) s'il existe c $\in$ A tel que c a= 1 (resp. ac=1). a $\neq 0$ est inversible s'il l'est à gauche et à droite.

1.2.2 SOMMES ET PRODUITS DIRECTS DE MODULES

Notation :

- Soit α $\in$ J et soit $\{M_\alpha, \alpha \in J\}$ une famille de A-modules à gauche. Si α $\in$ J et $M = M_\alpha$, on pose $\prod_{\alpha \in J} M_\alpha = M^J$. M^J est appelé *card (J)* copies de M.

- Si $\alpha \in J$, on pose
$$\pi_\alpha : \prod_{\beta \in J} M_\beta \to M_\alpha$$
$$(x_\beta)_{\beta \in J} \mapsto \pi_\alpha\left((x_\beta)_{\beta \in J}\right) = x_\alpha$$

Proposition 1.2.12

Soient $(M_\alpha)_{\alpha\in J}$ une famille de A-modules, N un A-module et $f_\alpha : N \to M_\alpha \quad \alpha \in J$ une famille d'homomorphismes. Alors il existe un homomorphisme unique $f : N \to \prod_{\alpha\in J} M_\alpha$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f_\alpha"'] & \prod_{\alpha\in J} M_\alpha \arrow[dl, "\pi_\alpha"] \\
M_\alpha &
\end{tikzcd}$$

f est appelé produit direct des f_α noté $f = \prod_{\alpha\in J} f_\alpha$

Corollaire 1.2.13

Soit $f_\alpha : N \to M_\alpha \quad \alpha \in J$ une famille d'homomorphismes de A-modules. Alors

$Ker\left(\prod_{\alpha\in J} f_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in J} Ker\ f_\alpha$.

Proposition 1.2.14

Soient $(M_\alpha)_{\alpha\in J}$ une famille de A-modules. Une somme directe de $(M_\alpha)_{\alpha\in J}$ est un couple $(M, (j_\alpha)_{\alpha\in J})$ où pour tout α : $j_\alpha : M_\alpha \to M$ est un homomorphisme de A-modules tel que pour tout A-module N et pour toute famille d'homomorphisme $f_\alpha : M_\alpha \to N,\ \alpha \in J$ il existe un unique homomorphisme $f : M \to N$ tel que le diagramme suivant soit commutatif.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] & N \\
M_\alpha \arrow[u, "j_\alpha"] \arrow[ur, "f_\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

L'unique homomorphisme $f : M \to N$ vérifiant $f_\alpha = f o j_\alpha$ est noté $f = \bigoplus_{\alpha\in J} f_\alpha$.

Lemme 1.2.15

Soient $\{M_\alpha, \alpha \in J\}$ et $\{N_\alpha, \alpha \in J\}$ deux familles de A-modules et $\{f_\alpha, \alpha \in J\}$ une famille d'homomorphismes $f_\alpha : M_\alpha \to N_\alpha \quad \alpha \in J$.

i) $\prod_{\alpha \in J} f_\alpha$ est un épimorphisme si et seulement si pour tout $\alpha \in J$, f_α est un épimorphisme si et seulement si $\underset{\alpha \in J}{\oplus} f_\alpha$ est un épimorphisme.

ii) $\prod_{\alpha \in J} f_\alpha$ est un monomorphisme si et seulement si pour tout $\alpha \in J$, f_α est un monomorphisme si et seulement si $\underset{\alpha \in J}{\oplus} f_\alpha$ est un monomorphisme.

Lemme 1.2.16

Soient $M = \underset{i \in I}{\oplus} M_i$ et $f = \underset{i \in I}{\oplus} f_i$ avec les f_i des A-endomorphismes de M_i . Alors $f = \underset{i \in I}{\oplus} f_i$ est un endomorphisme de M, de plus on a :

1) $(\underset{i \in I}{\oplus} f_i)^n = \underset{i \in I}{\oplus} f_i^n, \forall n.$

2) $\ker \underset{i \in I}{\oplus} f_i = \underset{i \in I}{\oplus} \ker f_i$

3) $\operatorname{Im} \underset{i \in I}{\oplus} f_i = \underset{i \in I}{\oplus} \operatorname{Im} f_i$

Démonstration :

Pour tout x $\in$ M, il existe J fini, J $\subset$ I tel que $x = \sum_{i \in I} x_i$ où les $x_i \in M_j$.

1) On procède par récurrence sur n.
Pour n = 1, c'est vraie, supposons que $(\underset{i \in I}{\oplus} f_i)^k = \underset{i \in I}{\oplus} f_i^k$ *pour* $k \prec n$ et montrons que c'est vraie pour n.

$$\begin{aligned} f^n(x) &= f(f^{n-1}(x)) \\ &= f(\underset{i \in I}{\oplus} f_i^{n-1}(x)) \\ &= f(\sum_{\substack{j \in J \\ J \text{ fini} \subset I}} f_j^{n-1}(x_j)) \\ &= \sum_{\substack{j \in J \\ J \text{ fini} \subset I}} f_j(f_j^{n-1}(x_j)) \end{aligned}$$

2) Se fait de façon similaire, en utilisant le fait que $\sum_{i \in I} M_i$ es une somme directe.

$$f(x)=0 \Leftrightarrow f\left(\sum_{\substack{j\in J\\ J\ fini\subset I}} x_j\right)=0 \Leftrightarrow \left(\sum_{\substack{j\in J\\ J\ fini\subset I}} f_j(x_j)\right)=0 \Leftrightarrow \ f_j(x_j)=0 \text{ pour tout j} \in \text{J}$$

$\Leftrightarrow x \in \underset{i\in I}{\oplus} \ker f_i$.

3) Soit y $\in$ *Im f*, alors il existe $x = \sum_{\substack{j\in J\\ J\ fini\subset I}} x_j \in M$ tel que y = f(x). D'où $y = \sum_{\substack{j\in J\\ J\ fini\subset I}} y_j$ avec $y_j = f_j(x_j)$ ce qui équivaut à y $\in \underset{i\in I}{\oplus} \operatorname{Im} f_i$.

■

Remarque 1.2.17

Puisque $(\underset{i\in I}{\oplus} f_i)^n = \underset{i\in I}{\oplus} f_i^n$, $\forall\, n$ alors 2) et 3) entraînent que $\ker(\underset{i\in I}{\oplus} f_i)^n = \underset{i\in I}{\oplus} \ker f_i^n$ et $\operatorname{Im}(\underset{i\in I}{\oplus} f_i)^n = \underset{i\in I}{\oplus} \operatorname{Im} f_i^n$

Proposition 1.2.18

Soit A un anneau tel que $A=\prod_{i=1}^{n} A_i$ où les A_i sont des anneaux. Si M est un A-module alors M est un A_i-module tel que tout A-endomorphisme f de M est un produit de A_i- endomorphismes f_i de M_i.

Démonstration :

Soit $A=\prod_{i=1}^{n} A_i$ $\quad pour\ 1\le i\le n$, posons $e_i = (0,0,\ldots,1,0,\ldots 0)$
$\uparrow$ *ième place*

Soit $\begin{aligned}\varphi : A_i &\to Ae_i\\ a_i &\to (0,0,\ldots,a_i,0,\ldots,0)\end{aligned}$

φ est un isomorphisme d'anneaux.

Soit M un A-module, posons $M_i = e_i M$ avec $e_i \in$ A. M_i est un sous module de M. M_i est un e_iA-module, c'est-à-dire un A_i-module par le produit suivant :

$a_i(e_i m) = \varphi(a_i)e_i m = e_i(0,0,\ldots a_i,0,\ldots,0)m$

Or $e_i(0,0,\ldots a_i,0,\ldots,0)m \in e_i M$.

Si i $\neq$ j, $e_i e_j = (0,0,\ldots,0,\ldots,0)$ **(1)**

De plus $(1,\ldots,1) = e_1 + e_2 + \ldots + e_n = 1$.

Donc $m = 1m = e_1 m + \ldots + e_n m$.

Et d'après **(1)** , $M_j \cap \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} M_i = \{0\}$, *avec* $i \neq j$ .D'où $M = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} M_i$.

On obtient le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p_i"'] & M \arrow[d, "p_i"] \\ e_i M \arrow[r, "f_i"'] & e_i M \end{tikzcd}$$

tel que $f_i o p_i = p_i o f \quad et \quad f = \prod_{i=1}^{n} f_i$.

f est un produit de A_i-endomorphisme f_i de $M_i = e_i M$.

■

1.2.3 MODULES ARTINIENS

Définitions 1.2.19

1. Soit A un anneau et $_A M$ un A-module à gauche. On dit que M est artinien s'il satisfait à la condition des chaînes décroissantes disant que toute chaîne décroissante infinie $M_0 \supseteq M_1 \supseteq \ldots \supseteq M_n \supseteq \ldots$ de sous-modules de M est stationnaire, c'est-à-dire il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que $M_n = M_{n0}$, pour tout $n \geq n_0$.
2. Un anneau A est artinien à gauche si le A-module $_A A$ est artinien.
3. De même A est artinien à droite si le A-module A_A est artinien.

Proposition 1.2.20

Soit ${}_A M$ un A-module à gauche, les conditions suivantes sont équivalentes :

1) Toute chaîne strictement décroissante de sous- modules de ${}_A M$ est stationnaire.
2) ${}_A M$ possède la condition de chaîne minimal, c'est-à-dire, tout ensemble non vide de sous ensembles de M possède un élément minimal.

La proposition précédente est vraie pour un A-module à droite.

Démonstration :

1)$\Rightarrow$ 2) Supposons que toute chaîne strictement décroissante de sous- module de ${}_A M$ est stationnaire.

Si $M_0 \supseteq M_1 \supseteq ... \supseteq M_n \supseteq ...$ est une chaîne décroissante de sous-modules de M, alors $\{M_n, n \geq 0\}$ admet un élément minimal M_{n0}.

Pour tout $n \geq n_0$, on a $M_{n0} \subseteq M_n$. D'où $M_{n0} = M_n$.

Donc M est artinien.

2)$\Rightarrow$ 1) Supposons réciproquement qu'il existe un ensemble non vide Ω de sous-module de M qui n'a pas d'élément minimal.

Prenons $M_0 \in \Omega$. Comme M_0 non minimal, il existe $M_1 \in \Omega$ tel que

$M_0 \subseteq M_1$.

Supposons $n \geq 1$ et on a une chaîne $M_0 \supseteq M_1 \supseteq ... \supseteq M_n \supseteq ...$, $M_i \in \Omega$.

Comme M_n n'est pas minimal, il existe $M_{n+1} \in \Omega$ tel que $M_n \supseteq M_{n+1}$.

Par récurrence, on a une chaîne décroissante infinie $M_0 \supseteq M_1 \supseteq ... \supseteq M_n \supseteq ...$ qui est non stationnaire. Donc M n'est pas artinien.

■

Proposition 1.2.21

a) Un anneau artinien intègre est un corps.

b) Tout idéal premier d'un anneau intègre, artinien est un idéal maximal.

c) Un anneau artinien n'a qu'un nombre fini d'idéaux premiers, tous maximaux.

Démonstration :

a) Soit A un anneau artinien intègre.

Soit $a \in A$ et $a \neq 0$.

Posons $I_n = \langle a^n \rangle$, $n \in \mathbb{N}^*$. Donc $I_{n+1} = \langle a^{n+1} \rangle \subseteq I_n = \langle a^n \rangle$.

Comme A est artinien, il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $\langle a^r \rangle = \langle a^{r+1} \rangle$. Donc il existe $b \in A$ tel que $a^r = b\, a^{r+1} \Rightarrow a^r - b\, a^{r+1} = 0 \Rightarrow (1 - b\, a)a^r = 0$. Comme $a^r \neq 0 \Rightarrow 1 - b\, a = 0$
$\Rightarrow ba = 1$. Donc a est inversible. Par conséquent A est un corps.

b) Soit P un idéal premier de A. Donc A/P est intègre. Or A/P est artinien donc A/P est un corps. D'où la maximalité de P.

c) Supposons par l'absurde que A possède une infinité d'idéaux maximaux distincts $M_1, M_2, \ldots$

La suite décroissante d'idéaux $M_1 \supseteq M_1M_2 \supseteq M_1M_2M_3 \supseteq \ldots$ est stationnaire.

D'où l'égalité $M_1 \ldots M_{n-1} = M_1 \ldots M_n$.

Ceci implique $M_1 \ldots M_{n-1} \subseteq M_n$. Donc d'après le lemme d'évitement, l'un des M_i est contenu dans M_n. Ceci contredit le fait que M_i est maximal.

Ainsi, A n'a qu'un nombre fini d'idéaux maximaux.

■

Proposition 1.2.22

Si A est un anneau artinien à gauche (resp à droite), le radical de Jacobson de A est le plus grand idéal à gauche nilpotent. C'est aussi le plus grand idéal à droite nilpotent.

Démonstration :

La condition de chaîne décroissante montre qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que
$J^l = J^{l+1} = \ldots$

Montrons que $J^l = 0$

Si $J^l \neq 0$, parmi les idéaux U tels que $J^l U \neq 0$, choisissons en un élément minimal : U_0.

Soit a $\in$ U_0 tel que $J^l a \neq 0$.

On a alors $J^l(J^l a) = J^{2l} a = J^l a \neq 0$.

La minimalité de U_0 implique $J^l a = U_0$.

En particulier, il existe $y \in J^l \subseteq J(A)$ tel que a= ya.

Mais puisque (1- y) est inversible, on en déduit que a = 0.

Cette contradiction montre que J (A) est nilpotent.

■

Proposition 1.2.23

Soit A un anneau artinien. Alors A est un produit fini d'anneaux artiniens locaux.

Démonstration :

Soit M_i $(1 \leq i \leq n)$ des idéaux maximaux de A. On sait que

$$\prod_{i=1}^{n} M_i^k = \left(\prod_{i=1}^{n} M_i\right)^n = \left(\bigcap_{i=1}^{n} M_i\right)^k .$$

Posons $J = \bigcap_{i=1}^{n} M_i$, le radical de Jacobson de A. Puisque A est artinien, il existe un entier $n_0 > 0$ tel que $J^{n_0} = \{0\}$. Soit $n_0 = k$ donc $\left(\bigcap_{i=1}^{n} M_i\right)^k = \{0\}$. Or les M_i^k sont deux à deux étrangers (car un idéal maximal qui contient $M_i^k + M_j^k$ $(i \neq j)$ contient aussi M_i et M_j ce qui contredit le fait que M_i et M_j sont distincts si $i \neq j$) donc $\prod_{i=1}^{n} M_i^k = \left(\bigcap_{i=1}^{n} M_i\right)^k = \{0\}$. Puisque $\bigcap_{i=1}^{n} M_i^k = \{0\}$, alors d'après le théorème chinois l'homomorphisme $\varphi : A \to \prod_{i=1}^{n}\left(A/M_i^k \right)$ est injectif. De même φ est surjectif car les M_i^k sont étrangers. Donc φ est un isomorphisme. Puisque A est artinien alors A/M_i^k est artinien. De plus les A/M_i^k sont des anneaux locaux. Donc A est un produit fini d'anneaux artiniens locaux. ■

Proposition 1.2.24 [10]

Soit A un anneau commutatif. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) A est artinien et tout idéal de A est principal.

ii) Tout A-module est somme directe de module cyclique.

1.3 ANNEAUX ET MODULES DES FRACTIONS

1.3.1 ANNEAUX DES FRACTIONS, IDEAL D'UN ANNEAU DE FRACTION, IDEAL FRACTIONNAIRE

Soit A un anneau commutatif. Un sous-ensemble S de A est une **partie multiplicative** si $1 \in$ S et $\forall\ x,\ y \in S,\ xy \in S$.

Considérons la relation suivante sur l'ensemble produit $A \times S$:

$(a, s) \sim (b, t) \Leftrightarrow$ il existe u $\in$ S tel que $u(at - bs) = 0$.

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.

Notons $S^{-1}A$ l'ensemble des classes d'équivalence et $\frac{a}{s}$ un représentant de la classe du couple (a, s).

On peut munir $S^{-1}A$ d'une structure d'anneau en le munissant des deux opérations suivantes :

- **Addition** : $\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}$. On vérifie que c'est bien défini et que cette loi confère à $S^{-1}A$ une structure de groupe abélien.
- **Multiplication** : $\frac{a}{s} \times \frac{b}{t} = \frac{ab}{st}$

L'anneau $(S^{-1}A, +, \times)$ est appelé anneau des fractions de A relativement à S.

L'élément unité de $S^{-1}A$ est $\frac{1}{1}=\frac{s}{s}$ $\forall\, s \in S$ et l'élément zéros de $S^{-1}A$ est $\frac{0}{1}=\frac{0}{s}$ $\forall\, s \in S$.

On a une application naturelle $i : A \to S^{-1}A$ définie par $i(a)=\frac{a}{1}$ qu'on vérifie être un homomorphisme d'anneaux unitaires. De plus, pour tout s $\in$ S, $i(s)$ est inversible dans $S^{-1}A$.

Proposition 1.3.1

Soit $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux unitaires et S une partie multiplicative de A telle que, pour tout s $\in$ S, $f(s)$ inversible dans B. Alors, il existe un unique homorphisme $\varphi : S^{-1}A \to B$ tel que $f = \varphi o i$, autrement dit le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & B \\
S^{-1}A \arrow[ur, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Démonstration :

Si un tel φ existe, il doit vérifier $\varphi\left(\frac{a}{s}\right) f(s) = \varphi\left(\frac{a}{s}\right)\varphi(i(s))=\varphi\left(\frac{a}{s}\right)\varphi\left(\frac{s}{1}\right)=\varphi\left(\frac{a}{1}\right)$ $=\varphi(i(a))$=f(a).

Donc $\varphi\left(\frac{a}{s}\right) = f(a) f(s)^{-1}$ où $f(s)^{-1}$ désigne l'inverse de f(s) dans B. Cela prouve qu'il existe au plus un tel homomorphisme φ.

Pour montrer son existence, il suffit de vérifier que la formule indiquée définit un homomorphisme $\varphi : S^{-1}A \to B$ tel que $\varphi o i = f$.

Tout d'abord, si $\frac{a}{s} = \frac{b}{t}$, soit u $\in$ S tel que $u(at - bs) = 0$.

$f(s)^{-1} f(a) = f(s)^{-1} f(tu)^{-1} f(tu) f(a) = f(stu)^{-1} f(bsu) = f(t)^{-1} f(b)$ ce qui prouve que φ est bien définie.

$\varphi(0) = f\left(\frac{0}{1}\right) = f(1)^{-1} f(0) = 0.$

$\varphi(1) = f\left(\frac{1}{1}\right) = f(1)^{-1} f(1) = 1.$

$\varphi\left(\frac{a}{s}\right) + \varphi\left(\frac{b}{t}\right) = f(s)^{-1} f(a) + f(t)^{-1} f(b) = f(st)^{-1}\left[f(at) + f(bs)\right] = f(st)^{-1}\left[f(at + bs)\right]$

$= \varphi\left(\frac{at + bs}{st}\right) = \varphi\left(\frac{a}{s} + \frac{b}{t}\right).$

Enfin $\varphi\left(\frac{a}{s}\right)\varphi\left(\frac{b}{t}\right) = f(s)^{-1} f(a) f(t)^{-1} f(b) = f(st)^{-1} f(ab) = \varphi\left(\frac{ab}{st}\right) = \varphi\left(\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{b}{t}\right)\right).$

L'application φ est donc un homomorphisme.

■

Remarque 1.3.2

∗ 0 $\in$ S si et seulement si $S^{-1}A = \{0\}$.

∗ Soit A un anneau intègre. La partie $S = A \diagup \{0\}$ est une partie multiplicative de A. L'anneau $S^{-1}A$ est alors un corps, appelé corps des fractions de A.

∗ Si S et T, avec $S \subseteq T$, sont deux parties multiplicatives de A, l'application : $\frac{a}{t} \rightarrow \frac{\frac{a}{1}}{\frac{t}{1}}$ de $T^{-1}A$ dans $\left(S^{-1}T\right)^{-1} S^{-1}A$ est un isomorphisme d'anneaux. En effet, elle est injective car si $\frac{\frac{a}{1}}{\frac{t}{1}} = 0$, il existe un $\frac{t'}{s}$ tel que $\left(\frac{t'}{s}\right)\left(\frac{a}{1}\right) = 0$, c'est-à-dire $\frac{t'a}{s} = 0$ et il existe donc un autre s' $\in$ S tel que s't'a = 0. Puisque s't' $\in$ T (car $S \subseteq T$), alors $\frac{a}{t} = 0$.

La surjectivité se voit en écrivant un élément $\dfrac{\frac{a}{s}}{\frac{t}{s'}}$ sous la forme $\dfrac{\frac{s'a}{1}}{\frac{ts}{1}}$.

Définition 1.3.3

Soit A un anneau et S une partie multiplicative de A.

Si I est un idéal de A, l'idéal engendré par $i(I)$ dans $S^{-1}A$ est l'ensemble des éléments qui s'écrivent $\frac{a}{s}$ où a $\in$ I, s $\in$ S. On le note $S^{-1}I$.

$*$ $S^{-1}I = S^{-1}A \Leftrightarrow 1 \in S^{-1}I \Leftrightarrow I \cap S \neq \varnothing$.

Remarque 1.3.4

$*$ Si $\overline{S}$ est l'image de S dans A/I, on a l'isomorphisme : $\overline{S}^{-1}\left(A/I\right) \cong S^{-1}A / S^{-1}I$

Il suffit de vérifier que : $\begin{array}{l} f : S^{-1}A \to \overline{S}^{-1}\left(A/I\right) \\ \frac{a}{s} \to \frac{\overline{a}}{\overline{s}} \end{array}$ est un homomorphisme surjectif de noyau $S^{-1}I$.

Proposition 1.3.5

Soit A un anneau et S une partie multiplicative de A, alors :

i) Tout idéal propre J de $S^{-1}A$ provient d'un idéal de A ne rencontrant pas S.

ii) $S^{-1}(I+J) = S^{-1}I + S^{-1}J$, $S^{-1}(IJ) = (S^{-1}I)(S^{-1}J)$, $S^{-1}(I \cap J) = (S^{-1}I) \cap (S^{-1}J)$.

iii) Les idéaux premiers de $S^{-1}A$ sont en bijection avec les idéaux premiers de A ne rencontrant pas S.

Définition 1.3.6

Soit A un anneau intègre de corps des fractions K. On appelle idéal fractionnaire de A une partie I, non vide de K, telle que :

$*$ x, y $\in$ I $\Rightarrow$ x + y $\in$ I.

$*$ x $\in$ I, a $\in$ A $\Rightarrow$ a x $\in$ I.

$*$ Il existe d $\in$ A, d $\neq 0$, tel que $dI \subseteq A$.

Remarque 1.3.7

$*$ Un idéal fractionnaire de A n'est pas nécessairement un idéal de A.

$*$ On peut encore définir un idéal fractionnaire I de A comme un sous-A-module de K tel qu'il existe d $\in$ A, d $\neq 0$, vérifiant $I \subseteq \frac{1}{d}A$.

$*$ Si I et J sont deux idéaux fractionnaires de A, leur produit I J est un idéal fractionnaire de A.

$*$ Si I et J sont deux idéaux fractionnaires de A, leur somme I+ J est un idéal fractionnaire de A.

$*$ Tout sous-A-module de type fini M de K est un idéal fractionnaire.

$*$ On dit qu'un idéal fractionnaire I de A est inversible s'il existe un idéal fractionnaire J de A tel que I J = A. On note alors I^{-1} son inverse.

1.3.2 MODULES DES FRACTIONS

Soit A un anneau commutatif et M un A-module. Soit S une partie multiplicative de A. Nous allons construire par un calcul de fraction similaire à celui qui nous a permis de définir l'anneau des fractions $S^{-1}A$, un $S^{-1}A$-module $S^{-1}M$ ainsi qu'un homomorphisme de A-modules $M \to S^{-1}M$.

Soit sur l'ensemble $M \times S = \{(m,s) / m \in M, s \in S\}$ la relation

$(m,s) \sim (n,t) \Leftrightarrow$ il existe u $\in$ S tel que $u(tm - sn) = 0$.

On vérifie que $\sim$ est une relation d'équivalence, on note $S^{-1}M$ l'ensemble des classes d'équivalence et $\frac{m}{s} \in S^{-1}M$ la classe du couple $(m,s) \in M \times S$.

On définit sur $S^{-1}M$ deux lois :

$*$ Si m, n $\in$ M, et s, t $\in$ S, $\frac{m}{s} + \frac{n}{t} = \frac{mt + ns}{st}$.

$*$ Si a, m$\in$ M et s, t $\in$ S, $\frac{a}{t} \times \frac{m}{s} = \frac{am}{ts}$.

Muni de ces lois $S^{-1}M$ est un $S^{-1}A$-module. $S^{-1}M$ est appelé module des fractions de M.

L'application $i : M \to S^{-1}M$ telle que $i(m) = \dfrac{m}{1}$ est un homomorphisme de A-modules.

Remarque 1.3.8

$*$ $\dfrac{m}{s} = 0 \Leftrightarrow$ il existe t $\in$ S tel que tm = 0. D'où ker (i) est l'ensemble des éléments de M annulés par un élément de S.

$*$ Si $S \subseteq T$, sont deux parties multiplicatives de A, et M un A-module, l'application :

$\dfrac{m}{t} \to \dfrac{\frac{m}{1}}{\frac{t}{1}}$ de $T^{-1}A$ dans $\left(S^{-1}T\right)^{-1}S^{-1}M$ est un isomorphisme de A-modules.

Proposition 1.3.9

Soit A un anneau commutatif et S une partie multiplicative de A. Soit $f : M \to N$ un homorphisme de A-modules. Il existe alors un unique homomorphisme de $S^{-1}A$-module $\tilde{f} : S^{-1}M \to S^{-1}N$ tel pour tout m $\in$ M et tout s $\in$ S, $\tilde{f}\left(\dfrac{m}{s}\right) = \dfrac{f(m)}{s}$ autrement dit le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & N \arrow[d, "i"] \\
S^{-1}M \arrow[r, "\tilde{f}"'] & S^{-1}M
\end{tikzcd}$$

Démonstration :

Vérifions que cette définition a un sens.

Si $\frac{m}{s}=\frac{n}{t}$, soit u ∈ S tel que $u(tm-sn)=0$. Alors $\frac{f(m)}{s}=\frac{utf(m)}{uts}=\frac{f(utm)}{uts}=\frac{f(n)}{t}$, ce qui prouve que $\tilde{f}$ est bien définie.

Soit m, n ∈ M et s, t ∈ S, on a $\tilde{f}\left(\frac{m}{s}+\frac{n}{t}\right)=\tilde{f}\left(\frac{tm+sn}{st}\right)=\frac{tf(m)}{st}+\frac{sf(n)}{st}=\frac{f(m)}{s}+\frac{f(n)}{t}$

$=\tilde{f}\left(\frac{m}{s}\right)+\tilde{f}\left(\frac{n}{t}\right)$ et donc $\tilde{f}$ est additive.

Soit m ∈ M, a∈ A et t ∈ S, on a $\tilde{f}\left(\frac{a}{t}\frac{m}{s}\right)=\tilde{f}\left(\frac{am}{st}\right)=\frac{af(m)}{st}=\frac{a}{t}\frac{f(m)}{s}=\frac{a}{t}\tilde{f}\left(\frac{m}{s}\right)$ et $\tilde{f}$ est A-linéaire.

■

Proposition 1.3.10

Soit A un anneau commutatif et S une partie multiplicative de A. Soit $f: M \to N$ un homorphisme de A-modules. On suppose que pour tout s ∈ S, l'homomorphisme $\mu_s : \begin{matrix} N \to N \\ n \to sn \end{matrix}$ est un isomorphisme. Alors, il existe un unique homomorphisme de A-module $\varphi : S^{-1}M \to N$ tel que $\tilde{f}\left(\frac{m}{1}\right)=f(m)$.

Démonstration :

En fait, si $\tilde{f}: S^{-1}M \to S^{-1}N$ désigne l'homomorphisme fourni par la proposition précédente et $i: N \to S^{-1}N$ l'homomorphisme canonique, la proposition voulue par φ équivaut à $io\varphi=\tilde{f}$.

Comme i est dans ce cas un isomorphisme, on a $\varphi=i^{-1}o\tilde{f}$.

■

Proposition 1.3.11

Soient A un anneau commutatif, M un A-module et S une partie multiplicative de A. Notons $i: M \to S^{-1}M$ l'homomorphisme canonique de A-module. Si P est un sous-$S^{-1}A$-module de $S^{-1}M$, alors N= $i^{-1}(P)$ est un sous-A-module de M tel que $P=S^{-1}N$.

Démonstration :

Si m $\in$ N, on a $\frac{m}{1}$ $\in$ P, donc pour tout s $\in$ S, $\frac{m}{s}$ $\in$ P. D'où $S^{-1}N \subseteq P$.

Réciproquement, soit x $\in$ P. On peut écrire x = $\frac{m}{s}$ avec m$\in$ M et s $\in$ S.

Par suite, $sx = \frac{m}{1} \in N$ et $x = \frac{sx}{s} \in S^{-1}N$. D'où $P \subseteq S^{-1}N$. ■

Proposition 1.3.12

Soit A un anneau commutatif et S une partie multiplicative de A. Soit M un A-module et soit $(N_i)_{i \in I}$ une famille de sous-modules de M. Alors on a une égalité des sous-modules de $S^{-1}M$: $\sum_i S^{-1}N_i = S^{-1}\sum_i N_i$.

Démonstration :

Notons $N = \sum_i N_i$. Pour tout i, $N_i \subseteq N$, d'où $S^{-1}N_i \subseteq S^{-1}N$. Par suite $\sum_i S^{-1}N_i \subseteq S^{-1}N$.

Réciproquement, soit $\frac{n}{s} \in S^{-1}N$. On peut écrire $n = \sum_i n_i$, où pour tout i, n_i $\in$ N, la somme étant presque nulle. Alors, $\frac{n}{s} = \sum_i \left(\frac{n_i}{s}\right) \in \sum_i S^{-1}N$. D'où $S^{-1}N \subseteq \sum_i S^{-1}N_i$. ■

1.4 ANNEAU ET MODULE SEMI-SIMPLE :

1.4.1 MODULE SIMPLE:

Définition 1.4.1

Un A-module non nul S est simple si 0 et S sont les seuls sous-modules de S.

Remarque 1.4.2

Si N est un sous-module de M, alors M/N est simple si et seulement si N est un sous module maximal de M.

Proposition 1.4.3

Soit S un A-module à droite non nul. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) S est simple.

ii) S = xA, pour tout x $\in$ S non nul

iii) Il existe un idéal à droite maximal I de A tel que $S \cong A/I$

Démonstration :

Il suffit de prouver que i)$\Rightarrow$ ii)

Soit $0 \neq$ x $\in$ S. Alors $S = xA \cong A/I$, où $I = \{a \in A / xa = 0\}$.

Soit J un idéal à droite de A tel que I $\subseteq$ J.

Prenons $a \in J/I$. Alors xa $\neq$ 0, et donc xA = S = (xa) A= xJ.

En particulier, x = xb avec b $\in$ J. D'où 1 – b $\in$ I.

Donc 1 $\in$J, d'où J = A.

■

Proposition 1.4.4

1) Soient M et N deux A-Modules. On suppose que M est simple. Alors :

a) Toute application linéaire $f : M \to N$ est soit nulle, soit injective.

b) Toute application linéaire $g : N \to M$ est soit nulle, soit surjective.

2) Soient M et M' deux A-modules simples non isomorphes. Alors $Hom_A(M, M') = \{0\}$ et l'anneau $Hom_A(M, M')$ est un corps non nécessairement commutatifs.

Démonstration :

1) a) soit $f : M \to N$ une application linéaire. Supposons que f est non nulle.

Ker (f) est un sous-module de M. Comme M est simple , Kerf = $\{0\}\Rightarrow$ f est injective.

b) Soit $g : N \to M$ une application linéaire. Supposons que g est non nulle.

Im (f) est un sous-module de M. Comme M est simple et Im (g) $\neq \{0\}$, donc

Im(g) = M $\{0\} \Rightarrow$ g est surjective.

2) Soit $f : M \to M'$, avec M et M' deux A-modules simples non isomorphes.

Si f $\neq$ 0, alors f est injective et surjective $\Rightarrow$ f est un isomorphisme. Ceci est absurde par hypothèse. Donc $Hom_A(M, M') = \{0\}$

$Hom_A(M, M')$ est un anneau unitaire non commutatif.

Soit f $\in$ $Hom_A(M, M')$. Puisque M est simple, alors f est un automorphisme. Par conséquent f admet un inverse f^{-1}. D'où $Hom_A(M, M')$ est un corps.

■

Lemme 1.4.5 (Lemme de SCHUR)

Si S est un A-module simple, alors $End_A(S)$ est un corps.

Démonstration :

Soit $f : S \to S$ un homomorphisme non nul. Alors ker (f) et im (f) sont des sous-modules de S avec ker (f) $\neq$ S et im (f) $\neq \{0\}$.

Ainsi ker (f) = $\{0\}$ et im (f)= S. Donc f est bijectif, et donc un isomorphisme. Par conséquent $End_A(S)$ est un corps.

■

1.4.2 MODULE SEMI-SIMPLE

Définition 1.4.6

Soit A un anneau unitaire et $0 \neq {}_AM$ un A-module à gauche.

- ${}_AM$ est semi-simple si tout A-sous-module N de M est un facteur direct, c'est-à-dire s'il existe ${}_AN'$ tel que $N \oplus N' = M$
- Un anneau A est semi-simple à gauche (resp. à droite) si le A-module ${}_AA$ (resp. A_A) est semi-simple.

Proposition 1.4.7

Soit M un A-module semi-simple. Tout sous- module de M est semi -simple et tout module quotient M/N où N est un sous –module de M est aussi semi-simple.

Démonstration :

Soient N un sous-module de M et X $\subseteq$ N un sous-module de N.

La semi-simplicité de M montre qu'il existe un sous-module U de M tel que $X \oplus U = M$.

Puisque X $\subseteq$ N, $N = N \bigcap M = X \bigcap (X \oplus U) = X + (N + U)$

La somme $X + (N \bigcap U)$ est directe car $(N \bigcap U) \subseteq U$.

Ainsi X est un sommant direct de N et N est semi-simple.

Si N est un sous-module de M, la semi-simplicité de M implique que N est un facteur direct de M, c'est-à-dire il existe N' tel que $N \oplus N' = M$ et donc $M/N \cong N'$.

N' étant un sous-module de M, N' est semi-simple, donc M/N est semi-simple.

■

Lemme 1.4.8

Tout module semi-simple non nul contient un sous-module simple.

Démonstration :

Soit 0 $\neq$ m $\in$ M et $Am \cong A/L$, où $L = \{m \in A \,/\, xm = 0, \forall x \in A\}$.

Soit I un idéal à gauche maximal contenant L. Alors I/L est un sous-module maximal de A/L. L'isomorphisme $Am \cong A/L$ applique I/L sur *Im* qui est donc un sous-module maximal de *Am*.

Puisque M est semi-simple, $M = \mathrm{Im} \oplus P$ pour un certain sous-module P.

On a alors $Am = \mathrm{Im} \oplus (P \bigcap Am)$.

Puisque *Im* est un sous-module maximal de *Am*, $P \bigcap Am$ est un sous-module simple.

Donc $P \bigcap Am$ est un sous-module simple de M.

Théorème 1.4.9 ([18] théorème 2.4 P.26)

Soit M un A-module. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.

i) M est semi-simple.

ii) M est une somme de sous-modules semi-simples.

iii) Tout sous-module de M est un facteur direct.

Théorème 1.4.10 ([18] p.58)

Un anneau A est semi-simple si et seulement si A est artinien à droite (resp à gauche) et J (A) = 0.

1.4.3 IDEMPOTENTS :

Définition 1.4.11

Si A un anneau. Un élément e $\in$ A est dit idempotent si $e^2 = e$.

Deux idempotents e_1 et e_2 sont dit orthogonaux si $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$

Un idempotent e d'un anneau A est dit primitif si e $\neq$ 0 et si pour tout couple d'idempotents orthogonaux $(e_1 ; e_2)$ de A tel que $e = e_1 + e_2$ alors e $= e_1$ ou e $= e_2$.

La proposition suivante donne une caractérisation des anneaux semi-parfaits.

Proposition 1.4.12

Soit A un anneau et J son radical de Jacobson. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) A est semi-parfait à gauche.

b) A est semi-parfait à droite.

c) A/J est semi-simple et pour tout idempotent $\bar{x}$ de A/J, il existe un idempotent e de A tel que $\bar{e} = \bar{x}$.

1.5 MODULES INJECTIFS, ENVELOPPE INJECTIVE ET MODULES QUASI-INJECTIFS:

1.5.1 MODULES INJECTIFS :

Définition 1.5.1

Soient M, K, N des A-modules à gauche. M est dit injectif si, pour tout diagramme

$$
\begin{tikzcd}
 & M & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"'] & N \arrow[ul, "\exists h"']
\end{tikzcd}
$$

avec f injectif, il existe un homomorphisme $h : N \to M$ tel que $g = hof$.

Théorème 1.5.2

Pour tout A-module M, les conditions suivantes sont équivalentes :

i) M est injectif

ii) M est facteur direct tout module le contenant, c'est-à-dire, si $M \subseteq N$ il existe un A-module L tel que $N = M \oplus L$.

iii) Pour tout idéal à gauche I de A et pour tout homomorphisme $g : I \to M$ il existe $m_0 \in$ M tel que $\forall$ b $\in$ I, g(b) = b m_0. (**Critère de Baer).**

Démonstration :

i)$\Rightarrow$ ii) Considérons le diagramme suivant :

$$
\begin{tikzcd}
 & M & \\
0 \arrow[r] & M \arrow[u, "1_M"] \arrow[r, "f"'] & N \arrow[ul, "h"']
\end{tikzcd}
$$

f : M $\rightarrow$ N est un homomorphisme injectif de A-modules.

Par hypothèse, il existe un homomorphisme h : N $\rightarrow$ M tel que $hof = 1_M$.

Posons M′= f(M) = Im f et K = ker h.

Montrons que $N = K \oplus M'$.

$$\begin{cases} K \subseteq N \\ M' \subseteq N \end{cases} \Rightarrow M' + K \subseteq N$$

Soit x $\in$ N. x = $f(h(x)) + (x - f(h(x)))$

$f(h(x)) \in$ Im f.

$h(x - f(h(x))) = h(x) - h[f(h(x))] = h(x) - (hof)(h(x)) = h(x) - h(x) = 0$. Ce qui implique que $x - f(h(x)) \in \ker h$.

Donc $x \in \operatorname{Im} f + \ker h = M' + K$ c'est-à-dire que $N \subseteq M' + K$.

Par conséquent M′ + K = N.

Montrons que $K \cap M' = \{0\}$

Soit x $\in$ $K \cap M'$ $\Rightarrow$ h(x) = 0 et il existe y $\in$ M tel que x = f(y).

$0 = h(x) = h(f(y)) = (hof)(y) = y$. Donc y = 0. Ce qui implique x = f(y) = f(0) = 0.

D'où $K \cap M' = \{0\}$. Par conséquent M′ est facteur directe de N.

ii) $\Rightarrow$ i) Montrons que diagramme suivant est commutatif avec f injectif.

$$\begin{tikzcd}
 & M & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}$$

Posons R = $\{(g(k), f(k)), k \in K\}$

•Montrons R est un sous-module de $M \times N$.

$*$ (0, 0) = $(g(0), f(0)) \in$ R. Donc $R \neq \varnothing$.

$*$ Soient $r_1 = (g(k_1), f(k_1))$ $k_1 \in K$ et $r_2 = (g(k_2), f(k_2))$ $k_2 \in K$.

$r_1 - r_2 = \big(g(k_1) - g(k_2), f(k_1) - f(k_2)\big) = \big(g(k_1 - k_2), f(k_1 - k_2)\big) \in$ R.

$*$ Soient a $\in$ A et $r = \big(g(k), f(k)\big)$ $k \in K$.

$ar = \big(ag(k), af(k)\big) = \big(g(ak), f(ka)\big)$ $\in$ R.

Donc R est un sous-module de $M \times N$.

• Posons $P = {M \times N}/{R}$ un A-module.

Soit $f': M \to P$

$m \to f'(m) = \overline{(m,0)}$

f ′ est un homomorphisme de A-modules.

Soit $g': N \to P$

$n \to g'(m) = \overline{(0,-n)}$

g′ est un homomorphisme de A-module.

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[r, "f'"] & P \arrow[r, "h'"] & M \\
0 \arrow[r] & K \arrow[u, "g"] \arrow[r, "f"'] \arrow[urr, "g"] & N \arrow[u, "g'"] &
\end{tikzcd}$$

$\forall\, k \in K,\quad g'\big(f(k)\big) = \overline{\big(0, -f(k)\big)} = f'\big(g(k)\big) = \big(g(k), 0\big)$.

$\big(g(k), f(k)\big) \in R \Rightarrow \overline{\big(g(k), f(k)\big)} = \bar{0} \Rightarrow \overline{\big(g(k),0\big)} + \overline{\big(0, f(k)\big)} = \bar{0} \Rightarrow \overline{\big(g(k),0\big)} = \overline{\big(0, -f(k)\big)}$

$\Rightarrow f'\big(g(k)\big) = g'\big(f(k)\big) \Rightarrow f'og = g'of$ D'où le diagramme carré est commutatif.

• Vérifions que f′ est injectif.

Soit m $\in$ M tel que $f'(m) = \bar{0} \Rightarrow \overline{(m,0)} = \bar{0} \Rightarrow$ (m, 0) $\in$ R $\Rightarrow$il existe k$\in$ K tel que

$(m,0) = \big(g(k), f(k)\big) \Rightarrow$ m= g(k) et f(k)=0.

Puisque f est injective, f(k)=0 $\Rightarrow$ k=0. Donc m = g(k) = g(0) = 0.

On en déduit que f′ est injectif.

• f′ est injectif $\Rightarrow$ il existe $h': P \to M$ tel que $h'of' = 1_M$.

Posons h = h′og′.

Soit k$\in$ K. $(hof)(k) = h(f(k)) = (h'og')(f(k)) = h'[(g'of)(k)] = h'o(f'og)(k) = (h'of')(g(k) =$ g(k)

Donc hof = g.

i) $\Rightarrow$ iii) Soit I un idéal à gauche de A.

$$\begin{tikzcd} & M & \\ 0 \arrow[r] & I \arrow[u, "g"] \arrow[r, "j"'] & A \end{tikzcd}$$

j est l'injection canonique.

Donc il existe $h : A \to M$ tel que hoj= g.

Soit b $\in$ I. Posons h(1)=m_0.

$g(b) = (hoj)(b) = h(j(b)) = h(b) = h(b.1) = bh(1) = bm_0$

iii) $\Rightarrow$ i) Soient Q un A-module , P un sous-module de Q et f un homomorphisme de P dans M.

Soit $\Im$ la famille des couples (P_i, f_i) où P_i est un sous-module de Q contenant P et f_i un homomorphisme de P_i dans M qui prolonge f.

Soit la relation d'ordre définie par : $(P_i, f_i) \leq (P_j, f_j)$ si et seulement si $P_i \subseteq P_j$ et f_i est la restriction de f_j à P_i.

$\Im$ est non vide car il contient le couple (P, f) et cette famille est inductive. Elle admet d'après le lemme de Zorn un élément maximal (P_0, f_0).

On va prouver que P_0 = Q.

Supposons P $\neq$ Q.

Soit $I = \{a \in A \,/\, ax \in P_0\}$ et $i \to f_0(ix)$ l'homomorphisme de I dans M.

Par hypothèse, il existe m ∈ M tel que $f_0(ix) = im$.

Pour $x_0 \in P_0$, et $\lambda \in A$, on pose $\overline{f}(x_0 + \lambda x) = f_0(x_0) + \lambda x$. $\overline{f}$ est un homomorphisme de $P_0 + Ax$ dans M.

On a $(P_0, f_0) \prec (P_0 + Ax, \overline{f})$ ce qui contredit le choix de (P_0, f_0).

Donc $P_0 = Q$. ■

Proposition 1.5.3 ([21] proposition 2.2 p.30)

Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille de A-modules. Alors $\prod_{i \in I} M_i$ est injectif si et seulement si chaque M_i est injectif.

Corollaire 1.5.4 ([21] proposition 2.3 p.32)

Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille de A-modules.

i) Si $\bigoplus_{i \in I} M_i$ est injectif, alors M_i est injectif pour tout i ∈ I.

ii) Si I est fini et si M_i est injectif, alors $\bigoplus_{i \in I} M_i$ est injectif.

Théorème 1.5.5 ([21] proposition 3.7 p.61)

Soit A un anneau. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) A est semi-simple à gauche.

ii) Tout A-module à gauche est injectif.

iii) Tout A-module à gauche de type fini est injectif.

iv) Tout A-module à gauche cyclique est injectif.

1.5.2 ENVELOPPE INJECTIVE:

Définition 1.5.6

Soit X un sous-module d'un A-module Y.

X est un **sous-module essentiel** de Y, oubien Y est une **extension essentielle** de X, si pour tout sous-module N de Y, on a $N \cap X \neq \{0\}$ c'est-à-dire $N \cap X = \{0\} \Rightarrow N = \{0\}$.

Proposition 1.5.7

Le A-module E est une extension du A-module M si et seulement si pour tout $x \neq 0$ de E, il existe $a \in A$ tel que $ax \neq 0$ et $ax \in M$.

Démonstration :

Soit X un sous-module non nul de E.

Soit x $\in$ X et $x \neq 0$, Ax est un sous-module non nul de E, donc $M \cap Ax \neq \{0\}$.

Il existe a$\in$ A tel que ax $\in M \cap Ax$ et $ax \neq 0$. Ainsi il existe a$\in$ A tel que $ax \neq 0$ et $ax \in M$.

Réciproquement, supposons que pour tout $x \neq 0$ de E, il existe $a \in A$ tel que $ax \neq 0$ et $ax \in M$.

Soit X un sous-module non nul de E. Il existe $x \neq 0$ et x $\in$ X. Donc il existe $a \in A$ tel que $ax \neq 0$ et $ax \in M$. X étant un sous-module de M, $ax \in X$.

Ainsi $M \cap X \neq \{0\}$.

■

Définition 1.5.8

Soit le A-module E, une extension du A-module N. Alors E est une **extension essentielle maximale** de N si :

i) E est une extension essentielle de N.

ii) Toute autre extension propre E′ de E n'est pas une extension essentielle de N.

Définition 1.5.9

Soit le A-module N, une extension du A-module M. Alors N est une **extension injective minimale** de M si :

i) N est injectif

ii) Si N′ est un sous-module de N contenant M, alors N′ n'est pas injectif.

Théorème 1.5.10

Soit M un A-module, il existe un A-module E contenant M, défini à un isomorphisme prés relativement à M et ayant les propriétés suivantes :

i) E est une extension essentielle maximale de M.

ii) E est une extension essentielle de M et E est facteur direct dans toute extension de E.

iii) E est une extension essentielle injective de M.

iv) E est une extension injective minimale de M.

Définition 1.5.11

Un A-module satisfaisant aux propriétés du théorème précédent est appelé enveloppe injective de E et se note $E(M)$.

Remarque 1.5.12

a) Tout A-module admet une enveloppe injective à un isomorphisme prés.

b) Un A-module M est injectif si et seulement si E(M) = M.

c) Si M est un A-module et N un sous-module de E(M) qui contient M, alors E(M) est une enveloppe injective de N.

d) Si $M_1,...,M_2$ sont des A-modules, alors $E(M_1 \oplus ... \oplus M_n) = E(M_1) \oplus ... \oplus E(M_n)$ car une somme directe finie de A-modules injectifs est un A-modules injectif.

Proposition 1.5.13 ([4] proposition 2.6 p.39)

Soit A un anneau semi-local, si le radical de Jacobson J de A est un nilidéal et si de plus l'enveloppe injective de chaque A-module simple est dénombrable alors A est artinien.

1.5.3 MODULE QUASI-INJECTIF:

Définition 1.5.14

Un A-module M est quasi-injectif si pour tout A-module N, pour tout monomorphisme $f : N \to M$, et pour tout homomorphisme de A-modules $g : N \to M$, il existe un homomorphisme de A-modules $h : M \to M$ qui rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & M \arrow[d, "\exists\, h"] \\
& & M
\end{tikzcd}$$

c'est-à-dire $g = hof$.

Proposition 1.5.15

- Tout module injectif est quasi-injectif.
- Tout produit direct de A-modules quasi-injectifs est un A-module quasi-injectif.
- Toute somme directe d'un nombre fini de A-modules quasi-injectifs est un A-module quasi-injectif. En particulier, si M est un A-module quasi-injectif alors $\forall$ n $\in \mathbb{N}$ M^n est quasi-injectif.

Définition 1.5.16

- Soient $f : E \to F$ une application et E' un sous–ensemble de E. La **restriction** de f à E' , notée $f|_{E'}$ est l'application définie par : $\begin{aligned} f|_{E'} : E' &\to F \\ x &\mapsto (f|_{E'})(x) = f(x) \end{aligned}$

- Soient $f : E \to F$ une application et F′ un sous–ensemble de F tel que $f(E) \subseteq F'$.

La **corestriction** de f à F′ , notée $f\big|^{F'}$ est l'application définie par :

$$f\big|^{F'} : E \to F'$$
$$x \mapsto \left(f\big|^{F'}\right)(x) = f(x)$$

- Soient $f : E \to E$ une application, $E' \subseteq E$ tel que $f(E') \subseteq E'$. **L'application induite** par sur E′ , notée $f\big\|_{E'}$, est définie par : $f\big\|_{E'} : E' \to E'$, $x \mapsto \left(f\big\|_{E'}\right)(x) = f(x)$

- Soient $f : E \to F$ et $f' : E' \to F'$ deux applications. On dit que f′ est un **prolongement** de f si : $E \subseteq E', F \subseteq F'$ et $f'\big|_{E} = f$

Proposition 1.5.17

Soit M un A-module. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) M est quasi-injectif.

ii) M est un sous-module complètement invariant de $E(M)$.

Démonstration :

i)⇒ ii) Soit f un endomorphisme de $E(M)$.. Posons $X = \{x \in M \ / \ f(x) \in M\}$. On vérifie aisément que X est un sous-module de M.

Comme M est injectif, la restriction de f à X que nous notons f_X se prolonge en un endomorphisme g de M.

Posons f_M la restriction de f à M.

∗ Vérifions que $Ker(f_M - g) = X$

$\forall\ x \in X, (f_M - g)(x) = f_M(x) - g(x)$

$x \in X \Rightarrow x \in M \Rightarrow f_M(x) = f(x)$

$x \in X \Rightarrow f(x) = f_X(x) = g(x)$

Donc $\forall\ x \in X$, $f_M(x) = g(x)$ c'est-à-dire $(f_M - g)(x) = 0$ donc $x \in Ker(f_M - g)$. Ainsi $X \subseteq Ker(f_M - g)$ **(1).**

Si $x \in Ker(f_M - g)$ alors $(f_M - g)(x) = 0$ c'est-à-dire $f_M(x) = g(x)$. Or $g(x) \in M$. Donc $f_M(x) \in M$ c'est-à-dire $f(x) \in M$. Ainsi $x \in X$. D'où $Ker(f_M - g) \subseteq X$ **(2) .**

(1) et (2) $\Rightarrow Ker(f_M - g) = X$.

$*$ Montrons que M = X.

Supposons X $\neq$ M. Alors il existe y $\in$ M tel que $(f_M - g)(y) \in E(M) \setminus \{0\}$ car $Ker(f_M - g) = X$.

Comme $E(M)$ est une extension essentielle de M, il existe $a \in A \setminus \{0\}$ tel que $a(f_M - g)(y) = m$, avec $m \in M \setminus \{0\}$.

Ainsi $(f_M - g)(ay) \in M \setminus \{0\}$ et donc $ay \notin Ker(f_M - g)$ c'est- à-dire $ay \notin X$. Ce qui contredit la définition de X. Donc X = M.

Ainsi $\forall x \in M$, $f(x) \in M$ c'est à dire $f(M) \subseteq M$. Donc M est un sous-module complètement invariant de $E(M)$.

ii)$\Rightarrow$ i) Supposons que M est un sous-module complètement invariant de $E(M)$.

Soit $f : N \to M$ un homomorphisme injectif de A-modules.

$E(M)$ étant injectif, il existe un endomorphisme g de $E(M)$ tel que $g\, o\, i\, o\, f = i\, o\, h$ où i est l'injection canonique de M dans $E(M)$.

On a donc $g|_M\, o\, f = i\, o\, h$. D'où $i\, o\, g\|_M\, o\, f = i\, o\, h$ où $g\|_M$ est l'application induite par g sur M.

Comme i est un monomorphisme, i est simplifiable à gauche. Donc $g\|_M\, o\, f = h$.

Ainsi M est quasi-injectif. ■

Proposition 1.5.18

Soient M un A-module quasi-injectif et N un sous-module de M complètement invariant, alors N est quasi-injectif.

Démonstration :

Il suffit donc de montrer que N un sous-module complètement invariant $E(N)$. Soit $f \in End(E(N))$.Puisque $E(N)$ est un facteur direct $E(M)$, il existe $g \in End(E(M))$ prolongeant f.

Puisque M est complètement invariant dans $E(M)$, on a $g(M) \subseteq M$ .Donc $g|_M \in End(M)$. Puisque N est complètement invariant dans M, $g(N) \subseteq N$. De l'égalité $g|_{E(N)} = f$, on a $f(N) \subseteq N$. Par conséquent N un sous-module complètement invariant $E(N)$ ce qui équivaut à N est quasi-injectif.

■

1.6 MODULE INDECOMPOSABLE, SOUS- MODULE IRREDUCTIBLE:

Définition 1.6.1

Soit M un A-module non nul :

a) Une décomposition de M est une somme direct $M = M_1 \oplus M_2 \oplus ... \oplus M_n$, avec n > 1, $M_i \neq 0$ pour tout i ($1 \leq i \leq n$).

b) M est dit indécomposable s'il n'admet aucune décomposition.

Si M est indécomposable, les seuls facteurs directs de M sont 0 et M.

Définition 1.6.2

Soit M un A-module et N un sous-module de M. Alors N est appelé sous- module irréductible de M si :

ii) $M \neq N$

iii) Il n'existe pas deux sous-modules N_1 et N_2 de M tels que :

$$N \subseteq N_1 , N \subseteq N_2 \quad et \quad N_1 \cap N_2 = N$$

* Soit M un A-module. Le sous-module nul de M est irréductible si pour tous sous-modules X et Y non nuls de M, $X \cap Y = \{0\} \Rightarrow X = \{0\}$ ou $Y = \{0\}$.

Proposition 1.6.3

Soit A un anneau et M un A-module injectif. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) M est indécomposable.

ii) M est non nul et M est l'enveloppe injective de chacun de ses sous-modules non nuls.

iii) Le sous-module nul est irréductible.

Démonstration :

i)$\Rightarrow$ ii) supposons M $\neq$ 0. Soit N un sous-module non nul de M, alors M admet un sous-module N′ qui est l'enveloppe injective de N. Puisque N′ est injectif, il est facteur direct de M. puisque M est indécomposable donc N′ = M.

ii)$\Rightarrow$ iii) Soit M_1 et M_2 des sous-modules de M tels que $M_1 \cap M_2 = \{0\}$.

Supposons que $M_1 \neq \{0\}$ donc E (M_1)=M et ainsi M est une extension essentielle de M_1, par conséquent $M_2 = \{0\}$.

iii)$\Rightarrow$ i) Supposons qu'il existe deux sous-modules non nuls M_1 et M_2 tels que $M = M_1 \oplus M_2$. Par conséquent $M_1 \cap M_2 = \{0\}$. Ce qui est contraire avec l'hypothèse.

■

Corollaire 1.6.4

Soit M un A-module. E (M) est indécomposable si et seulement si le sous-module nul de M est irréductible.

Démonstration :

$\Rightarrow$) Supposons que E (M) soit indécomposable. D'après la proposition précédente le sous-module nul n'est indécomposable.

$\Leftarrow$) Supposons que le sous-module nul soit irréductible.

Soit M_1 et M_2 des sous-modules de E(M) tels que $M_1 \cap M_2 = \{0\}$.

Ainsi E (M) est une extension essentielle de M, si $M_1 \neq \{0\}$ alors $M_1 \cap M \neq \{0\}$. De même si $M_2 \neq \{0\}$ alors $M_2 \cap M \neq \{0\}$.

Mais $(M_1 \cap M) \cap (M_2 \cap M) = \{0\}$ et que $M_1 \cap M$ et $M_2 \cap M$ sont deux sous-modules de M. Il en résulte que soit M_1 est nul soit M_2 est nul.

Donc le sous-module nul de E (M) est irréductible. Ce qui implique que E (M) est indécomposable. ■

Corollaire 1.6.5

Si S est un A-module simple alors E (S) est indécomposable.

Démonstration :

Il découle du corollaire précédent et du fait que le sous-module nul d'un module simple est irréductible. ■

CHAPITRE 2

MODULE VERIFIANT LA PROPRIÉTÉ (I)

INTRODUCTION:

Dans ce chapitre nous donnons un aperçu des travaux plus ou moins récents concernant les A-modules M pour lesquels tout endomorphisme injectif sur M est un automorphisme. Dans la première partie nous donnons d'abord quelques exemples de A-modules vérifiant la propriété (I) ensuite nous étudions la stabilité de la propriété (I) pour les opérations algébriques standards à savoir, la stabilité par passage au quotient, la stabilité par produit et somme direct et le problème de transfert de la propriété (I) d'un module ou d'un anneau à l'anneau des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans A noté M_n (A). La seconde partie traite les anneaux pour lesquels tout A-module de type fini vérifie la propriété (I).

2.1 GENERALITES SUR LA PROPRIÉTÉ (I)

2.1.1 ANNEAU VERIFIANT LA PROPRIÉTÉ (I)

Définition 2.1.1

Un A-module M vérifie la propriété (I) si tout endomorphisme injectif sur M est un automorphisme. Un A-module M vérifiant la propriété (I) est aussi appelé module co-Hopfien.

Définition 2.1.2

La définition d'un anneau vérifiant la propriété (I) est catégorique :

- Un anneau A vérifie la propriété (I) dans la catégorie des A-modules à gauche ${}_A$Mod si le A-module à gauche ${}_A$A vérifie la propriété (I).

• Un anneau A vérifie la propriété (I) dans la catégorie des A-modules à droite Mod_A si le A-module à droite A_A vérifie la propriété (I).

• Dans la catégorie des anneaux, un anneau A vérifie la propriété (I) si tout homomorphisme injectif d'anneaux $f : A \to A$ est un automorphisme.

Définition 2.1.3

Soit A un anneau intègre. Un A-module M est divisible si pour tout a $\in$ A, a $\neq$ 0 et pour tout x $\in$ M, il existe y $\in$ M tel que x = ay.

On dit que M est un A-module de torsion si $Ann(m) \neq \{0\}$ pour tout m $\in$ M.

Proposition 2.1.4

Le A-module ${}_AA$ vérifie la propriété (I) si et seulement si tout élément régulier à gauche de A est inversible à gauche et à droite.

Démonstration :

Supposons que le A-module ${}_AA$ vérifie la propriété (I).

Soit $\begin{array}{l} f : A \to A \\ \quad x \to xa \end{array}$ un endomorphisme et soit a un élément régulier à gauche de A.

Puisque a est régulier, $Ker\ f = \{0\}$ c'est-à-dire f est injectif donc f est surjectif. Il existe b $\in$ A tel que 1 = f(b) = ba par suite a est inversible à gauche. Puisque a est régulier, a est aussi inversible à droite.

Supposons que tout élément régulier à gauche de A est inversible à gauche et à droite.

Soit $\begin{array}{l} f : A \to A \\ \quad x \to xa \end{array}$ un endomorphisme injectif, avec a régulier à gauche de A ce qui entraîne que a est inversible. Ainsi il existe b $\in$ A, tel que ab =1 = ba , donc pour tout x $\in$ A on a x=x 1= x (b a) = (x b) a= f(x b) par conséquent f est surjective.

■

Proposition 2.1.5

Soient A un anneau intègre, K son corps des fractions et M un A-module libre de torsion. Si M vérifie la propriété (I) alors M est divisible.

Démonstration :

Soient M $\in$ ${}_A$Mod libre de torsion vérifiant la propriété (I), 0 $\neq$ a $\in$ A et $\begin{aligned} f : M &\rightarrow M \\ m &\rightarrow am \end{aligned}$ un endomorphisme. On a a m= a m′ implique a (m – m′) = 0 donc m= m′ car a $\neq$ 0 et M est libre de torsion. D'où f est un homomorphisme injectif de M. Comme M vérifie la propriété (I) alors f est surjectif, par suite, M = f(M) = a M, c'est-à-dire M est divisible.

■

Remarque 2.1.6

• Un anneau intègre A (non nécessairement commutatif) vérifie la propriété (I) dans ${}_A$Mod si et seulement si A est un anneau de division si et seulement si A vérifie la propriété (I) dans Mod$_A$.

• Un anneau commutatif A vérifie la propriété (I) comme A-module si et seulement si A est égal à son anneau total des fractions.

EXEMPLES :

• Tout anneau fini vérifie la propriété (I) comme anneau aussi bien que comme objet des catégories ${}_A$Mod et Mod$_A$.

• $\mathbb{Z}$ vérifie la propriété (I) comme anneau car le seul endomorphisme de l'anneau $\mathbb{Z}$ est l'identité. Mais $\mathbb{Z}$ pris comme $\mathbb{Z}$ - module ne vérifie pas la propriété (I) car l'endomorphisme : a$\mapsto$ 2a du $\mathbb{Z}$ - module ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ est injectif mais n'est pas surjectif.

Remarque 2.1.7

Ces exemples montrent que la notion d'anneau vérifiant la propriété (I) comme anneau et comme A-module sont indépendantes.

2.1.2 EXEMPLES DE MODULES VERIFIANT LA PROPRIÉTÉ (I)

Proposition 2.1.8

Tout A-module simple vérifie la propriété (I).

Démonstration :

Soit S un A-module simple et $f : S \to S$ un homomorphisme non nul. Alors ker (f) et im (f) sont des sous-modules de S avec ker (f) ≠ S et im (f) ≠ $\{0\}$. Ainsi ker (f)= $\{0\}$ et im (f)= S. Donc f est bijectif, et donc un isomorphisme. ■

Proposition 2.1.9

Tout A-module artinien vérifie la propriété (I).

Démonstration :

Soit M un A-module artinien et f un endomorphisme injectif de M.

$\left(\operatorname{Im} f^{n}\right) = \left(f^{n}(M)\right)$ n ∈ $\mathbb{N}^*$ est une suite décroissante de sous-module de M. Comme M est artinien, cette suite est stationnaire.

Soit n_0 le plus petit entier tel que $f^{n_0}(M) = f^{n_{0+1}}(M)$.

Soit m ∈ M. Comme $f^{n_0}(M) = f^{n_{0+1}}(M)$, il existe m′ ∈ M tel que $f^{n_0}(m) = f^{n_{0+1}}(m')$.

Il en résulte que $f^{n_0}\left(m - f(m')\right) = 0$. Ce qui implique que $m - f(m') \in \ker f^{n}$.

Or $\ker f^{n} = \{0\}$, car f est injectif. Ce qui implique $f(m') = m$ et f est surjective.

Donc M vérifie la propriété (I). ■

Proposition 2.1.10

Tout A-module injectif indécomposable vérifie la propriété (I).

Démonstration :

Soit M un A-module injectif indécomposable et f un endomorphisme injectif de M. Comme f (M) est un sous-module injectif de M, f (M) est un facteur direct de M. De plus on a f (M) ≠ $\{0\}$car f est injectif .

M étant indécomposable et f (M) ≠ $\{0\}$, on a donc l'égalité f (M) = M. D'où f est surjectif. Par conséquent f est un automorphisme de M.

■

2.1.3 SOUS- MODULES ET QUOTIENTS

Proposition 2.1.11

Soit M un A-module dont tout sous-module propre vérifie la propriété (I), alors M vérifie la propriété (I).

Démonstration :

Supposons que M ne vérifie pas la propriété (I). Alors il existe un endomorphisme injectif $g : M \to M$ qui n'est pas un isomorphisme. Posons $N = \operatorname{Im} g$. Puisque N est un sous-module propre de M, g induit un isomorphisme $\overline{g} : M \to N$. Donc $\overline{g}|_N : N \to N$ est injectif mais $\overline{g}|_N$ n'est pas surjectif. Ce qui contredit le fait que N vérifie la propriété (I).

■

Proposition 2.1.12

Soit M un A-module. Si H est un sous-module complètement invariant de M tel que H et M/H vérifie la propriété (I) alors M vérifie la propriété (I).

Démonstration :

Soit f un endomorphisme de M .H étant complètement invariant dans M, on a le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f'"'] & M \arrow[r, "p"] \arrow[d, "f"'] & M/H \arrow[d, "\overline{f}"] \\
H \arrow[r, "i"'] & M \arrow[r, "p"'] & M/H
\end{tikzcd}$$

Où i est l'injection canonique de H dans M ; p la surjection canonique de M dans M/H.

Supposons que H et M/H vérifie la propriété (I) et que f est injectif.

La relation $iof' = foi$ implique que f′ est injectif, et il en résulte f′ est bijectif, car H vérifie la propriété (I).

On a alors les relations suivantes : $f(H) =(foi) (H)= (iof') (H)= i(f' (H))= i (H)=H$

Comme f est injectif, on déduit de la relation f (H) = H que $\overline{f}$ est bijectif, car $M/_{H}$ vérifie la propriété (I).

Soit y ∈ M, il existe z ∈ M tel que $p(y) = \overline{f}(p(z)) = p(f(z))$, car f et p sont surjectifs.

Soit t ∈ H tel que y = f(z) + t et soit s ∈ H tel que $t = f' (s) = f(s)$. On a $y = f(z+s)$.

Donc f est bijectif.

■

Proposition 2.1.13

Soient M un module quasi-injectif et N un sous-module complètement invariant tel que N soit un sous-module essentiel de M. Alors N vérifie la propriété (I) si et seulement si M vérifie la propriété (I).

Démonstration :

Supposons que M vérifie la propriété (I) et soit f un endomorphisme injectif de N. Comme M est quasi-injectif, il existe g ∈ End (M) tel que $g|_N = f$. g est injectif car N un sous-module essentiel de M et puisque M vérifie la propriété (I), g est inversible.

Soit x ∈ M, il existe y ∈ M tel que x = g(y). Or g^{-1} ∈ End (M) et N est complètement invariant, donc y = $g^{-1}(y)$ ∈ N, d'où f est surjectif.

Inversement, supposons que N vérifie la propriété (I) et soit f un endomorphisme injectif de M. Alors $f|_N$ est endomorphisme injectif de N. Par conséquent $f|_N$ est bijectif, c'est-à-dire f(N) = N. Comme M est un module quasi-injectif, alors $M = f(M) \oplus L$ pour un certain sous-module L de M. On a donc $0 = f(N) \cap L = N \cap L$, ce qui implique L=0 car L est un sous-module essentiel de M.

Par suite M= f(M) et M vérifie la propriété (I).

■

Définition 2.1.14

Un A- module M est dit de cogénération finie si pour toute famille $\{M_i, i \in I\}$ de sous-module de M telles que $\bigcap_{i \in I} M_i = \{0\}$,il existe $I_0 \subset$ I tel que $\bigcap_{i \in I_0} M_i = \{0\}$.

Définition 2.1.15

Soit M un A-module. Le socle de M, noté Soc (M), est un sous-module de M défini par : $Soc(M) = \begin{cases} 0 & si\ M\ n'a\ pas\ de\ sous-\text{mod}ule\ simple \\ \sum S_\lambda, S_\lambda & parcourt\ les\ sous\ \text{mod}ules\ simples\ de\ M \end{cases}$

Remarque 2.1.16

a) Un A- module M est de cogénération finie si et seulement si il existe des A-modules simples $S_1, ..., S_n$ tel que $E(M) \cong E(S_1) \oplus .... \oplus E(S_n)$

b) Un A- module M est de cogénération finie si et seulement si Soc (M) est un sous-module essentiel de M et Soc (M) est finiment généré.

Proposition 2.1.17

Tout module quasi-injectif de cogénération finie vérifie la propriété (I). En particulier, pour toute famille de A-modules simples $S_1, ..., S_k$, le A-module $E(S_1) \oplus ... \oplus E(S_k)$ vérifie la propriété (I).

Démonstration :

Soit M un A-module de cogénération finie, alors $Soc(M)$ est un sous-module essentiel de M et $Soc(M) = S_1 \oplus ... \oplus S_n$ est une somme directe finie de A-modules simples S_i , $(1 \le i \le n)$. $Soc(M) = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} S_i$ est semi-simple, artinien donc $Soc(M)$ vérifie la propriété (I) . Comme M est quasi-injectif et $Soc(M)$ est complètement invariant et essentiel dans M, alors d'après la **Proposition 2.1.13** M vérifie la propriété (I).

Posons $M = E(S_1) \oplus ... \oplus E(S_k)$ .Puisque M est injectif alors M est quasi-injectif. De plus M est de cogénération finie. Par conséquent, $M = E(S_1) \oplus ... \oplus E(S_k)$ vérifie la propriété (I).

2.1.4 SOMME ET PRODUIT DIRECTS

Proposition 2.1.18

Soit $M = \underset{i \in I}{\oplus} M_i$ où $(M_i)_{i \in I}$ est une famille de A-sous-modules de M. Alors :

i) Si M vérifie la propriété (I), alors pour tout $i \in I$, M_i vérifie la propriété (I).

ii) Si, pour tout $i \in I$, M_i est complètement invariant dans M, alors M vérifie la propriété (I) si et seulement si chaque M_i ($i \in I$) vérifie la propriété (I).

Démonstration :

i) Pour $i \in I$ quelconque, considérons $f_i \in End(M_i)$ et posons

$f = \underset{j \neq i}{\oplus} Id_{M_j} \oplus f_i$. Si pour tout $i \in I$, f_i est injective alors f l'est aussi.

Si M vérifie la propriété (I), alors f est un automorphisme de M et, par conséquent , f_i est un automorphisme de M_i.

ii) Si pour tout $i \in I$, M_i est complètement invariant dans M alors pour tout $f \in End(M_i)$, $f_i = f|_{M_i}$ est un endomorphisme de M_i et $f = \underset{I}{\oplus} f_i$. De plus on a : f injectif si et seulement si f_i injectif.

■

Remarque 2.1.19

Etant donné un A-module M, toute somme directe infini de copies de M ne vérifie pas la propriété (I). Un tel module $M' = \underset{I}{\oplus} M_i = M^I$ admet un sous-module $N = \underset{n \geq 1}{\oplus} M_i$ comme facteur direct, où $M_n = M$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $f : N = \underset{n \geq 1}{\oplus} M_i \to N$ qui applique la $n^{ième}$ copie de M à la $(n+1)^{ième}$ copie identiquement, est un endomorphisme injectif non surjectif.

Proposition 2.1.20

Soient $\{A_\alpha, \alpha \in J\}$ une famille d'anneaux et $A = \prod_{\alpha \in J} A_\alpha$ leur produit direct :

i) A vérifie la propriété (I) comme A-module si et seulement si chaque A_α vérifie la propriété (I) comme A_α -module.

ii) Si A vérifie la propriété (I) comme anneau, alors chaque A_α vérifie la propriété (I) comme anneau.

Démonstration :

i) Tout A-endomorphisme $f : A \to A$ est uniquement de la forme $\prod_{\alpha \in J} f_\alpha : \prod_{\alpha \in J} A_\alpha \to \prod_{\alpha \in J} A_\alpha$ où $f_\alpha \in End(A_\alpha)$ pour tout $\alpha \in$ j. Donc f est injectif si et seulement si chaque f_α est injectif.

ii) Soit $\{f_\alpha, \alpha \in J\}$ une famille de A-endomorphisme et posons $f = \prod_{\alpha \in J} f_\alpha : \prod_{\alpha \in J} A_\alpha \to \prod_{\alpha \in J} A_\alpha$. Alors f est un homomorphisme d'anneaux. De plus f est injectif si et seulement si chaque f_α est injectif.

■

Proposition 2.1.21

Soient $\{A_\alpha, \alpha \in J\}$ une famille d'anneaux et $\{M_\alpha, \alpha \in J\}$ une famille de A_α -module. En posant $A = \prod_{\alpha \in J} A_\alpha$, $M = \prod_{\alpha \in J} M_\alpha$ et $a\,m = (a_\alpha\, m_\alpha)_{\alpha \in J}$ où $a = (a_\alpha)_{\alpha \in J}$ $a_\alpha \in A_\alpha$ et $m = (m_\alpha)_{\alpha \in J}$ $m_\alpha \in M_\alpha$. Alors :

M vérifie la propriété (I) dans ${}_A$Mod si et seulement si chaque M_α vérifie la propriété (I) comme A_α -module à gauche.

Démonstration :

Tout A-endomorphisme $f : M \to M$ est uniquement de la forme $\prod_{\alpha \in J} f_\alpha : \prod_{\alpha \in J} M_\alpha \to \prod_{\alpha \in J} M_\alpha$ où $f_\alpha \in End(M_\alpha)$ pour tout $\alpha \in$ j. Donc f est injectif si et seulement si chaque f_α est injectif.

■

2.1.5 ANNEAUX DES MATRICES

Proposition 2.1.22

Soit A un anneau et n $\in \mathbb{N}^*$.

i) Si M_n (A) vérifie la propriété (I) comme anneau, alors A vérifie la propriété (I) comme anneau.

ii) Si M_n (A) vérifie la propriété (I) comme M_n (A)-module, alors A vérifie la propriété (I) comme A-module.

iii) Si M_n (A) vérifie la propriété (I) comme A-module, alors A vérifie la propriété (I) comme A-module.

Démonstration :

i) Si $f : A \to A$ est un homomorphisme d'anneau alors $M_n(f) : M_n(A) \to M_n(A)$ est un homomorphisme d'anneau. Donc si $M_n(f)$ est injectif alors f est injectif.

ii) Si $f : A \to A$ est un homomorphisme d'anneau alors $M_n(f) : M_n(A) \to M_n(A)$ est un homomorphisme de M_n (A)-module. Donc si $M_n(f)$ est injectif alors f est injectif.

iii) Découle du fait que A est une somme direct de M_n (A)-module.

■

Remarque 2.1.23

Dans le cas commutatif, les réciproques de ii) et iii) sont vraies et nous ferons la preuve dans la proposition **(2.1.25)**.

Lemme 2.1.24

Soit A un anneau commutatif et $X \in M_n(A)$. Alors il existe un vecteur colonne non nul $a \in A^n$ tel que X a=0 si et seulement si oubien det X = 0 oubien det X est un diviseur de zéro dans A.

Démonstration :

Supposons qu'il existe un vecteur non nul $a = \begin{pmatrix} a_n \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix}$ de A^n tel que X a= 0 et posons $\tilde{X}$ la comatrice de X et ${}^t\tilde{X}$ la transposée de $\tilde{X}$. On alors $0 = {}^t\tilde{X}\, X\, a = (\det X)\, I_n\, a$, donc

$$(\det X)\begin{pmatrix} a_n \\ . \\ . \\ . \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$$. Par suite (Det X) $a_j = 0$ pour tout j=1,…,n et $a_j \in A$. Or $a \neq 0$, donc il existe $i \in \{1,\dots,n\}$ tel que $a_i \neq 0$, alors (Det X) $a_i = 0$ entraîne que

$$\begin{cases} \det X = 0 \\ ou\, bien \\ \det X \;\; est\ un\ diviseur\ de\ 0 \end{cases}$$

Inversement, soit d= Det X et supposons qu'il existe $a \neq 0$ dans A^n tel que d a= 0.

Par récurrence sur n, on montre qu'il existe $c \neq 0$ dans A^n tel que X c= 0.

Pour n = 1, on a X = (d) $\in M_1$ (A) et X a= 0.

Supposons que ce résultat est valide pour toute matrice d'ordre inférieur ou égale à n – 1 et soit C_{ij} le (i,j)ième cofacteur de X. De $X\,\tilde{X}\begin{pmatrix} a \\ . \\ . \\ . \\ a \end{pmatrix} = (\det X)\begin{pmatrix} a \\ . \\ . \\ . \\ a \end{pmatrix} = 0$,on obtient

$X\begin{pmatrix} c_{11}a \\ . \\ . \\ . \\ c_{1n}a \end{pmatrix} = 0$. Donc si $\begin{pmatrix} c_{11}a \\ . \\ . \\ . \\ c_{1n}a \end{pmatrix} \neq 0$ c'est fini, sinon C_{11} a= 0 et C_{11} est le déterminant de la (n-1)× (n-1) matrice Y obtenue de X en éliminant la première ligne et la première colonne. Par hypothèse de récurrence il existe v ≠ 0 dans A^{n-1} avec Y v =0 dans A^{n-1} .

Soit $c = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \in A^n$, on a a c ≠ 0 dans A^n et X c = 0 dans A^n.

Proposition 2.1.25

Soit A un anneau commutatif tel que ${}_AA$ vérifie la propriété (I). Alors M_n (A) vérifie la propriété (I) dans les catégories ${}_{M_n(A)}Mod$ et $Mod_{M_n(A)}$.

Démonstration :

Soit X ∈ M_n (A) un élément régulier à gauche de M_n (A) alors il n'existe pas de vecteur ligne (a_1,…, a_n) ∈ A\ $\{0\}$ tel que a X =0 , car sinon, la matrice

$Y = \begin{pmatrix} a_1 & . & . & . & a_n \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ a_1 & & & & a_n \end{pmatrix}$ vérifierait Y X = 0 avec Y ≠ 0 ce qui contredit le fait que X n'est pas un diviseur de zéro dans M_n (A) et d'après le **lemme (2.1.24)**, on en déduit que det (X) n'est pas un diviseur de zéro dans A. Or A vérifie la propriété (I) donc det (X) est inversible dans A, d'où X est inversible dans M_n (A). Ainsi M_n (A) vérifie la propriété (I) dans ${}_{M_n(A)}Mod$.

La même preuve se fait pour le reste de la démonstration. ■

Théorème 2.1.26

Soit A un anneau commutatif. Si ${}_AA$ vérifie la propriété (I), alors pour tout n ∈ $\mathbb{N}^*$, A^n est un A-module qui vérifie la propriété (I).

Démonstration :

Soit $f : A^n \to A^n$ un A-homomorphisme injectif, soit X la matrice de f relativement à la base A^n. f étant injectif alors pour tout a $\in A^n \setminus \{0\}$, X a $\neq 0$ ce qui entraîne det (X) n'est pas un diviseur de zéro dans A. Puisque A est commutatif et vérifie la propriété (I), alors A est égal à son anneau total de fractions donc det (X) est inversible dans A, d'où X $\in A^n$ est inversible. Ce qui entraîne que f est un isomorphisme.

■

2.2 ANNEAUX SUR LESQUELS TOUT MODULE DE TYPE FINI VÉRIFIE LA PROPRIÉTÉ (I) :

Certaines classes d'anneaux ont la propriété que tout A-module de type fini vérifie la propriété (I), par exemples les anneaux artiniens.

2.2.1 THEOREME DE VASCONSCELOS

Vasconscelos a donné une caractérisation des anneaux commutatifs pour lesquels tout A-module de type fini vérifie la propriété (I). La démonstration s'appuie sur les résultats préliminaires suivants :

Définition 2.2.1

Soit B un anneau et A un sous-anneau de B.

∗ Un élément x de B est dit entier sur A, s'il est racine d'un polynôme unitaire à coefficient dans A.

∗ On dit que B entier sur A si tout élément de B est entier sur A.

∗ Un homomorphisme d'anneaux f de A dans B est dit entier si B entier sur A.

∗ On appelle chaîne d'idéaux premiers d'un anneau A, toute suite finie $I_0 \subseteq I_1 \subseteq ... \subseteq I_n$ d'idéaux premiers de A, où n est la longueur de la chaîne.

∗ La dimension d'un anneau A est la borne supérieur des longueurs des chaînes d'idéaux premiers de A et on la note dim (A).

Lemme 2.2.2

Soit $f : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux entier, I un idéal de A et J un idéal de B contenant f (I). Alors $f : A/I \to B/J$ est un homomorphisme entier.

Lemme 2.2.3

Soit $f : A \to B$ un homomorphisme entier et injectif. Alors dim (A) =dim (B)

Théorème 2.2.4 : (Théorème de Vasconscelos)

Soit A un anneau commutatif. Alors tout A-module de type fini vérifie la propriété (I) si et seulement si tout idéal premier de A est maximal.

Démonstration :

$\Rightarrow$) Supposons le contraire, c'est-à-dire P et Q sont deux idéaux premiers distincts de A tels que $P \subset Q$. Donc tout élément a $\in$ P – Q induit une application φ définie de $A/P \to A/P$ par $\varphi(\bar{x}) = a\bar{x}$ pour tout $\bar{x} \in A/P$.

Donc φ est un endomorphisme injectif.

φ n'est pas surjectif car l'élément $\bar{a}$ n'a pas d'antécédent dans A/P.

$\Leftarrow$) Supposons que tout idéal premier de A est maximal, donc la dimension de Krull de A est nulle.

Soit M un A-module de type fini, et soit $f : M \to M$ un endomorphisme injectif de M.

On peut munir (M,+) d'une structure de $A[x]$-module définie par : $h(x).m = h(f).m$.

En particulier x.m=f(m), $\forall$ m $\in$ M.

Il résulte du théorème de Cayley-Hamilton que I= Ann (M) existe et est non nul, avec $Ann(M) = \{h(x) \in A[x] / h(x).m = 0, \forall m \in M\}$.

$*$ Montrons d'abord que $S = {}^{A[x]}\!/\!_{P}$ est de dimension de Krull nulle.

Soit $\{m_1, m_2, ..., m_n\}$ un système générateur fini de M.

On a $xm_i = \sum r_{ij} m_i \quad (1 \le i \le n) \quad avec \quad r_{ij} \in A$.

Donc $r_{1i} m_1 + ... + (r_{ii} - x) m_i + ... + r_{1n} m_n = 0, \forall i \in \{1,...,n\}$.

Ce qui implique $\begin{pmatrix} r_{11} - x....................r_{1n} \\ \\ r_{i1}.........r_{ii} - x........... \\ \\ r_{n1}.......................r_{nn} - x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \\ \\ \\ m_n \end{pmatrix} = 0$

Posons $\alpha = \left(r_{ij} - \delta_{ij} x\right)_{1 \le i \le n \ et \ 1 \le j \le n}$.

On a det(α).M=0 , où det(α) est un polynôme unitaire de degré n en x et à coefficients dans A.

Posons P(x)= det(α) ∈ Ann(M)et $S_0 = \left({}^{A[x]}\!/\!_{(P(x))} \right)$, où $(P(x))$ est un idéal de $A[x]$ engendré par P(x).

On a S_0 est entier sur A car ${}^{A[x]}\!/\!_{(P(x))}$ est isomorphe à $A[1, x \ ,..., x^n]$ et chaque $x_i (0 \le i \le n)$est entier sur A. D'où d'après le théorème de Cohen-Seidenberg, Lemme (**2.2.3**) S_0 est de dimension de Krull nulle.

Soit $\varphi : A[x] \to A[x]$ est un homomorphisme entier d'anneaux défini par φ (h(x))=h(x).

Comme Ann (M)= I est un idéal de $A[x]$ contenant $(P(x))$ donc l'application $\varphi : {}^{A[x]}\!/\!_{Ann(M)} \to {}^{Ann(x)}\!/\!_{(P(x))}$ est un homomorphisme entier d'après le lemme (**2.2.2**) .

Mais $\overline{\varphi}$ est aussi injectif, donc il résulte du Lemme (**2.2.3**) que $\dim\left({}^{A[x]}\!/\!_{(P(x))} \right) = \dim\left({}^{A[x]}\!/\!_{I} \right)$ et comme $\dim\left({}^{A[x]}\!/\!_{(P(x))} \right) = \dim(S_0) = 0$, d'où $\dim(S) = \dim\left({}^{A[x]}\!/\!_{I} \right) = 0$.

Soit maintenant ψ l'application de $A[x] \to S$ tel que ψ(x)=u.

Vérifions que u est inversible.

Supposons u non inversible.

Il est clair que u ∈ P, où P est un idéal premier de S.

Sinon si u ∉ P, u serait inversible, car tout idéal premier de S est maximal.

Dans ce cas, posons T= S – P.

On a $T^{-1}S = S_P$ est un anneau local, d'idéal maximal $T^{-1}P$ car tout idéal premier de S est maximal.

Ainsi $T^{-1}P$ est le nilradical de $T^{-1}S$.

Donc si u ∈ P, l'image de u dans le localisé S_P est dans le nilradical de $T^{-1}S$.

Par conséquent u est nilpotent ; ceci implique que, $J = Ann(u) \neq \{0\}$.

On a $uJ\,M$ = (0) ⇒ JM= (0).

Comme M est S-fidèle donc J= (0). Ce qui est une contradiction.

D'où u est inversible, donc il existe u' ∈ S tel que u'u = $\bar{1}$.

Or $u' = \bar{y}$ et $u = \bar{x}$, donc $\overline{yx} = \bar{1}$.⇒ yx - 1∈ Ann (M).

Ainsi (yx-1)m = 0, ∀ m ∈ M.

D'où y f(m) = m, mais m= f(my).

Par conséquent f est surjectif. ■

2.2.2 THEOREME DE DISHINGER

Dischinger a donné une caractérisation des anneaux non nécessairement commutatifs pour lesquels tout A-module de type fini vérifie la propriété (I).

Définition 2.2.5

Un anneau A est dit $\Pi - \textit{régulier}$ à gauche (resp. à droite) si et seulement si pour tout élément a ∈ A, il existe b ∈ A et un entier n ≥ 1 tel que l'on ait $a^n = ba^{n+1}$ (resp. $a^n = a^{n+1}b$).

Théorème 2.2.6 : (Théorème de F. Dischinger)

Soit A un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout entier $n \geq 1$, l'anneau M_n (A) des matrices carrés n x n à coefficients dans A est $\Pi - regulier$ à gauche.

b) Tout A-module de type fini vérifie la propriété (I).

Démonstration :

b) $\Rightarrow$ a) Identifions $M_n(A)$ à $End_A(A^n) = B$, muni du produit $(f,g) \to fog = f.g$.

Soit $f \in B$, $f \neq 0$ et $T = \bigcup_{t\geq 1} Kerf^t$.

On a $f(T) \subseteq T$, donc f induit un élément $\overline{f} \in End_A\left(A^n/T\right)$ défini par :

$\overline{f}(x+T) = f(x) + T$ pour tout $x \in A^n$.

Soit $(x+T) \in A^n/T$ tel que $\overline{f}(x+T) = T$.

Alors $f(x) \in T$, il existe donc un entier $t \geq 1$ tel que $f^t(f(x)) = 0$. D'où $x \in Kerf^{t+1} \subseteq T$.

Donc $\overline{f}$ est injectif.

Comme A^n/T est un A-module de type fini, soit $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ une base du A-module A^n. il existe une famille $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ d'élément du A-module A^n, tel que pour tout i ($1 \leq i \leq n$),

$e_i + T = \overline{f}(u_i + T)$.

Il en résulte qu'il existe un entier $k \geq 0$ tel que $(e_i - f(u_i)) \in \ker f^k$ pour

tout i ($1 \leq i \leq n$).

Soit g l'élément de B défini sur les $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ par $g(e_i) = u_i$, pour tout i, ($1 \leq i \leq n$).

$$\begin{aligned} On\ a\quad (gf^{k+1} - f^k)(e_i) &= (f^{k+1}og - f^k)(e_i) \\ &= f^k o(fog - Id)(e_i) \\ &= f^k(f(u_i) - e_i) = 0 \quad pour\ tout\ 1 \leq i \leq n \end{aligned}$$

Donc $gf^{k+1} = f^k$.

a) $\Rightarrow$ b) Soit M un A-module de type fini, f un endomorphisme injectif de M.

1) On suppose d'abord que M est monogène et $M = A/D$ où D est un idéal à gauche de A.

Posons $f(1+D) = x + D$. Alors pour tout entier k ≥ 1, on a : $f^k(1+D) = x^k + D$.

A étant $\Pi - regulier$ à gauche, il existe y ∈ A et un entier t≥ 1 tel que $x^t = yx^{t+1}$.

On a alors : $f^t(1+D) = x^t + D = yx^{t+1} + D = yf^{t+1}(1+D)$.

Il en résulte que : $f^t(M) = f^{t+1}(M)$.

Soit u + D un élément quelconque de M, il existe alors (v + D) ∈ M tel que $f^t(u+D) = f^{t+1}(v+D)$. D'où en vertu de l'injectivité de f, $u + D = f(v+D)$.

2) On suppose que maintenant que $M = \sum_{i=1}^{n} Au_i$ (n ≥ 2).

Le produit cartésien $M^n = M \times M \times ... \times M$ (n facteurs) a une structure de $M_n(A)$-module monogène défini par le produit :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} \dots \alpha_{1j} \dots \alpha_{1n} \\ \\ \alpha_{i1} \dots \alpha_{ij} \dots \alpha_{in} \\ \\ \alpha_{n1} \dots \alpha_{nj} \dots \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_i \\ \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j \\ \\ y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \\ \\ y_n = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{nj} x_j \end{pmatrix}$$

Donc un générateur est l'élément $\begin{pmatrix} u_1 \\ \\ u_i \\ \\ u_n \end{pmatrix}$.

Soit f^* l'élément de $End_{M_n(A)}(M^n)$ défini par :

$$f^*\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_i \\ \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ \\ f(x_i) \\ \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$ f^* est injectif d'après 1) , f^* est surjectif.

Ce qui implique la surjectivité de f.

■

2.2.3 MODULES DE FITTING

Définition 2.2.7

Un A-module M est dit module de **Fitting** si pour tout $f \in End(M)$, il existe un entier n ≥ 1 tel que $M = \operatorname{Im} f^n \oplus \ker f^n$

Lemme 2.2.8

Soit M un A-module et $f \in End(M)$. Alors :

i) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \Leftrightarrow M = \operatorname{Im} f + Kerf$

ii) $Kerf = \ker f^2 \Leftrightarrow \{0\} = \operatorname{Im} f \cap Kerf$

Théorème 2.2.9

Soit M un A-module. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) M est de Fitting.

ii) End (M) est Π-régulier à gauche et à droite.

Démonstration :

ii)⇒ i) Soit f ∈ End (M) = E, comme E est Π-régulier à gauche et à droite, il existe n ∈ $\mathbb{N}^*$ tel que $f^n = gf^{2n} = f^{2n}g$ pour certains endomorphismes g et h de M. Et $f^n(M) = f^{2n}(h(M)) \subseteq f^{2n}(M)$. D'où , $M = \operatorname{Im} f^n + Kerf^n$. Si x ∈ $Kerf^{2n}$ alors

$f^{2n}(x)=0$ donc $0=g(f^{2n}(x))=f^{n}(x)$ d'où $x\in Kerf^{n}$. Par suite $Kerf^{2n}=Kerf^{n}$ donc $\mathrm{Im}\, f^{n}\bigcap Kerf^{n}=0$. Ainsi M est de Fitting.

i)⇒ ii) Soit f ∈ End (M), alors il existe n ∈ $\mathbb{N}^*$ tel que $M=\mathrm{Im}\, f^{n}\oplus \ker f^{n}$ ce qui implique que : $\begin{cases}\mathrm{Im}\, f^{2n}=\mathrm{Im}\, f^{n}\\ Kerf^{2n}=Kerf^{n}\end{cases}$ (∗)

Posons M′ = f(M) et on considère f_1 la restriction de f^{n} à M′, c'est donc un endomorphisme injectif de M′, de plus d'après (∗) f_1 est un isomorphisme. Il existe donc $g_1\in End(M')$ tel que $f_1g_1=g_1f_1=Id_{M'}$. On considère $\begin{array}{rl} g: M=M'\oplus Kerf & \to M\\ x=y+z & \mapsto g(x)\end{array}$

g est bien définie et c'est un endomorphisme de M. De plus ,pour tout x∈ M on a : $(f^{n}-gf^{2n})(x)=f^{n}(x)-gf^{n}(f^{n}(x))=f^{n}(x)-gf_1(f^{n}(x))=0$. D'où $f^{n}=gf^{2n}$. Par conséquence End (M) est Π-régulier à gauche et à droite.

■

Corollaire 2.2.10

Si M est un A-module de Fitting alors M vérifie la propriété (I).

Démonstration :

Soit f ∈ End (M) injectif, alors comme End (M) est Π-régulier à gauche et à droite, il existe n ∈ $\mathbb{N}^*$ tel que $f^{n}=f^{2n}h$ pour un certain h ∈ End (M). Soit x ∈ M on a $f^{n}(x-f^{n}h(x))=0$ alors $x-f^{n}(h(x))\in Kerf^{n}=0$, donc $x=f^{n}(h(x))$, et f est surjectif. Par suite M vérifie la propriété (I).

■

Définition 2.2.11

Un A-module M vérifie la propriété (S) si tout endomorphisme surjectif sur M est un automorphisme.

Théorème 2.2.12 ([12] Théorème 1 p.623)

Pour un anneau A les conditions suivantes sont équivalentes :

i) Tout A-module de type fini est de Fitting.

ii) Tout A-module de type fini vérifie la propriété (I) et (S).

CHAPITRE 3

QUELQUES PROPRIÉTÉS SUR LES FGI-ANNEAUX

INTRODUCTION:

Dans ce chapitre, nous avons donné quelques propriétés sur les FGI-anneaux. On a montré que si A est un FGI-anneau commutatif, tout idéal premier de A est maximal et A admet un nombre fini d'idéaux maximaux. On a montré aussi que si A est un anneau artinien à idéaux principaux alors A est un FGI-anneau.

Définition 3.1

Un anneau A est un FGI- anneau à gauche si A est un anneau dans lequel tout A-module à gauche vérifiant la propriété (I) est de type fini. Un anneau A est un FGI-anneau à droite si A est un anneau dans lequel tout A-module à droite vérifiant la propriété (I) est de type fini. Un anneau A est un FGI- anneau si A est à la fois un FGI- anneau à droite et à gauche.

Remarque 3.2

En général dans un anneau commutatif, il peut exister un A-module de type fini qui ne vérifie pas la propriété (I). On a aussi des exemples de A-modules vérifiant la propriété (I) et qui ne sont pas de type finis.

Exemple : Le $\mathbb{Z}$ - module ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ est de type fini mais ne vérifie pas la propriété (I)

car l'endomorphisme : $a \mapsto 2a$ du $\mathbb{Z}$ - module ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ est injectif mais n'est pas surjectif.

Le $\mathbb{Z}$ - module $\mathbb{Q}$ vérifie la propriété (I) mais n'est pas de type fini.

Proposition 3.3

Soit A un anneau commutatif, S l'ensemble des éléments réguliers de A et AS^{-1} l'anneau total des fractions de A. Le A-module AS^{-1} vérifie la propriété (I).

Démonstration :

Si f est un endomorphisme du A-module AS^{-1}, pour tout élément $as^{-1} \in AS^{-1}$, on a :

$sf(as^{-1}) = f(sas^{-1}) = f(a) = af(1)$ .D'où $f(as^{-1}) = as^{-1}f(1)$.

Donc un endomorphisme de AS^{-1} est une multiplication par un élément de AS^{-1}.Par conséquent le A-module AS^{-1} vérifie la propriété (I). ■

Proposition 3.4

Soit A un FGI-anneau commutatif. Alors :

a) Si A est intègre alors A est un corps.

b) L'image homomorphe de A est aussi un FGI-anneau.

Démonstration :

a) Soit K le corps des fractions de A, donc K= AS^{-1} est un A-module.

Soit $f \in End_A(K)$ et f injectif.

Comme K est un corps, il est clair que f est un isomorphisme. D'où K est de type fini.

Il en résulte que K est un idéal fractionnaire de A. Donc il existe d $\in$ A tel que $dK \subset A \subset K$ .D'où A est un corps.

b) Soit B un anneau et soit $\varphi : A \to B$ un homomorphisme d'anneaux.

Soit M un B-module alors M induit une structure de A-module par la structure du groupe additif $(M,+)$

$$\begin{aligned} A \times M &\to M \\ (a,m) &\mapsto \varphi(a)m \end{aligned}$$

Ainsi $(M,+)$ muni de ce produit est un A-module. Et tout B-endomorphisme de M est un A-endomorphisme de M. Donc si A est un FGI-anneau alors B l'est aussi. ■

Proposition 3.5

Un produit fini d'anneaux $A_i(1 \le i \le n)$ est un FGI-anneau si et seulement si chaque A_i est un FGI-anneau.

Démonstration :

$\Rightarrow$) Soit $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$.

Supposons que A est un FGI-anneau, comme $A_i(1 \le i \le n)$ est image homomorphe de A par la ième projection $A \xrightarrow{p_i} A_i$, d'après la proposition (**3.4**), A_i est un FGI-anneau en tant que image homomorphe de A.

$\Leftarrow$) Inversement supposons que A_i est un FGI-anneau pour tout i, $(1 \le i \le n)$.
Soit M un A-module, alors M est un A_i –module pour tout i, $(1 \le i \le n)$.
Donc si M vérifie la propriété (I),alors M en tant que A_i –module est de type fini pour tout i, $(1 \le i \le n)$. Puisque $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$, donc M est de type fini en tant que A-module.

■

Proposition 3.6

Soit A un FGI-anneau commutatif. Alors tout idéal premier de A est maximal et les idéaux premiers de A sont en nombres finis.

Démonstration :

∗ A/P est un FGI-anneau, car A/P est une image homomorphe de A. Puisque P un idéal premier de A, alors A/P est un anneau intègre. Donc d'après la **proposition 3.4** A/P est un corps. Par conséquent P est un idéal maximal de A.

∗ Posons L = ensemble de tous les idéaux premiers de A.

Soit P $\in$ L, il résulte de la première partie de cette proposition que A/P est un corps.

Donc A/P vérifie la propriété (I).

$\forall$ P$\in$ L et P' $\in$ L, vérifions que $Hom_A\left(A/P ; A/P'\right) = \{0\}$.

Supposons que $Hom_A\left(A/P ; A/P'\right) \neq \{0\}$. Donc il existe h $\in$ $Hom_A\left(A/P ; A/P'\right)$ tel que h $\neq$ 0.

D'où h est un isomorphisme de A/P sur A/P' .Alors Ker h = $\{0\}$.

Par conséquent P $\subseteq$ P'. Or P et P' sont deux idéaux maximaux de A. Ce qui est une contradiction.

Posons maintenant $M = \underset{P \in L}{\oplus} A/P$.

Comme $Hom_A\left(A/P ; A/P'\right) = \{0\}$, $\forall$ P$\in$ L et P' $\in$ L, on a donc

$\forall$ f$\in$ $End_A(M)$, $f\left(A/P\right) \subseteq A/P$.

$$\begin{cases} f\left(A/P\right) \subseteq A/P, \forall f \in End_A(M) \\ A/P \textit{ vérifie la propriété } (I) \end{cases} \Rightarrow \textit{d'aprés la proposition } (2.1.18), M \textit{ vérifie la propriété } (I)$$

Donc $M = \underset{P \in L}{\oplus} A/P$ est de type fini. D'où L est un ensemble fini.

■

Corollaire 3.7

Soit A un FGI-anneau commutatif. Alors les conditions suivantes sont vérifiées :

i) Le radical de Jacobson J de A est un nilidéal.

ii) A est un anneau semi-local. Par conséquent A/J est un anneau semi-simple.

Démonstration :

i) Si A un FGI-anneau alors tout idéal premier de A est maximal. Donc le radical premier de A est égal au radical de Jacobson de A qui est un nilidéal.

ii) Si A un FGI-anneau alors A admet un nombre fini d'idéaux premier tous maximaux. D'où A est semi-local.

■

Corollaire 3.8

Soit A un FGI-anneau commutatif et J son radical de Jacobson. Alors pour tout idempotent $\overline{x}$ de A/J, il existe un idempotent e de A tel que $\overline{e} = \overline{x}$.

Démonstration :

Soit $\overline{x}$ un idempotent de A/J, alors $\overline{x}^2 = \overline{x}$. Donc $x^2 - x \in J$.

Puisque A est un FGI-anneau commutatif, alors J est un nilidéal. Dons il existe un entier $n \geq 0$ tel que $(x^2 - x)^n = 0$.

En développant par la formule du binôme on obtient la relation suivante :

$x^n = x^{n+1}P(x)$, où P(x) est un polynôme en x à coefficients entiers.

$x^n = x^{n+1}P(x) = x^{n+2}P^2(x) = x^{n+3}P^3(x) = ... = x^{2n}P^n(x)$

Donc l'élément e = $x^nP^n(x)$ est un idempotent de A.

$e^2 = x^{2n}P^{2n}(x) = [x^{2n}P^n(x)]P^n(x) = x^nP^n(x) = e$.

Dans l'anneau A/J on a les relations suivantes : $\overline{x} = \overline{x}^n = \overline{x}P(\overline{x}) = \overline{x}^n P^n(\overline{x}) = \overline{e}$.

■

Proposition 3.9

Un anneau artinien à idéaux principaux est un FGI-anneau.

Démonstration :

Supposons que A est un anneau artinien à idéaux principaux. Alors d'après le théorème de Cohen-Kaplansky, tout A-module est une somme directe de modules cycliques.

Raisonnons par l'absurde.

Soit M un A-module qui vérifie la propriété (I) et qui n'est pas de type fini.

Comme il existe seulement un nombre fini de A-modules indécomposables cycliques non isomorphes, M possède un facteur direct N qui est une somme directe d'un nombre infini dénombrable de modules cycliques $L_i (i = 1,2,...)$ deux à deux isomorphes .

Ecrivons $N = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\oplus}} L_i$.

Pour tout i=1,2,…, soit φ_i un isomorphisme de L_i *sur* L_{i+1}.

Considérons l'application
$$\begin{aligned} \varphi : N = \overset{\infty}{\underset{i=1}{\oplus}} L_i &\to N \\ n = e_{i1} + e_{i2} + ... + e_{is} &\to \varphi(n) = \varphi_{i1}(e_{i1}) + \varphi_{i1}(e_{i2}) + ... + \varphi_{is}(e_{is}) \end{aligned}$$

Il est clair que φ est un endomorphisme injectif car tous les φ_i sont des isomorphismes.

Cependant φ n'est pas surjectif.

Si $n = e_1 + e_2 + ... + e_n \in N$, alors n'admet pas d'antécédent dans N par construction de φ et φ_i .

D'où l'application
$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : M = N \oplus T &\to M \\ x = n + t &\to \tilde{\varphi}(x) = \varphi(n) + t \end{aligned}$$
est un endomorphisme injectif et non surjectif.

Il en résulte que M ne possède pas la propriété (I) ce qui est une contradiction.

■

Proposition 3.10

Soit A un FGI-anneau commutatif et dénombrable. Alors A est artinien.

Démonstration :

Soit A un FGI-anneau commutatif. Alors A est un anneau semi-local et le radical de Jacobson de A est un nilidéal. Donc pour montrer que A est un anneau artinien, il suffit de prouver que l'enveloppe injective de chaque A-module simple est dénombrable.

Soit M un A-module simple et E (M) son enveloppe injective.

Puisque M est simple, alors E (M) est indécomposable. Ainsi E (M) est un A-module injectif indécomposable. Donc E (M) vérifie la propriété (I). D'où E (M) est de type fini.

A étant dénombrable et E (M) de type fini donc E (M) est dénombrable. D'après le théorème de C. Megibben **[20]** on a donc A est artinien. ■

CHAPITRE 4

THÉORÈME DE CARACTERISATION DES FGI-ANNEAUX COMMUTATIFS

INTRODUCTION

Ce chapitre est divisé en deux parties :

Dans la première partie, le résultat principal est la **Proposition 4.1.5**, qui dit que si A est un anneau artinien, commutatif et si A admet un idéal non principal alors il existe un A-module qui vérifie la propriété (I) et qui n'est pas de type fini.

Dans la deuxième partie, nous donnons le théorème de caractérisation des FGI-anneaux commutatifs qui dit qu'un anneau A est un FGI-anneau commutatif si seulement si A est un anneau commutatif, artinien à idéaux principaux. Pour prouver ce théorème, nous allons utiliser certains résultats des chapitres précédents.

4.1 EXEMPLE D'UN A-MODULE VERIFIANT LA PROPRIETE (I) ET QUI N'EST PAS DE TYPE FINI.

Pour construire ce A-module, nous supposons sans perdre de généralités que A est un anneau local d'idéal maximal J (A)= $a\ A + b\ A$ avec $a \neq 0$, $b \neq 0$, tels que $a^2 = b^2 = ab = 0$. Donc d'après l'article **[9]**, il existe un sous-anneau artinien à idéaux principaux C de A, dont le radical de Jacobson J (C)= aC avec $a \neq 0$.

Posons Maintenant $M = \bigoplus_{i \geq 0} Ce_i$ un C-module libre avec une base infinie dénombrable $\{ e_i \ / \ i \in \mathbb{N} \}$.

Soit σ l'endomorphisme du C-module M défini par : $\begin{cases} \sigma(e_0) = 0 \\ \sigma(e_i) = ae_{i-1},\ si \quad i \geq 1 \end{cases}$

Soit enfin f un endomorphisme injectif du C-module M, vérifiant : $fo\sigma = \sigma\ of$.

Avec ces hypothèses nous avons les lemmes suivants :

Lemme 4.1.1

i) $a\sigma = \sigma^2 = 0$

ii) Pour tout entier i ≥ 1, $\sigma[f(e_i)] = af(e_{i-1})$

Démonstration :

i) $a\sigma(e_i) = a(ae_{i-1}) = a^2 e_{i-1} = 0, \forall\ i \geq 1$

$a\sigma(e_0) = a(0) = 0$

Donc $a\sigma = \sigma^2 = 0$

ii) pour tout entier i ≥ 0, $\sigma[f(e_i)] = f[\sigma(e_i)] = f(ae_{i-1}) = af(e_{i-1})$.

■

Lemme 4.1.2

Pour tout entier i ≥ 0, $f(e_i) = \sum_{j \prec i} \alpha_j^i e_j + \alpha_i^i e_i + a \sum_{k \succ i} \alpha_k^i e_k$, avec α_i^i un élément inversible de l'anneau A.

Démonstration :

Nous allons utiliser une démonstration par récurrence.

∗ Nous avons $\sigma[f(e_0)] = f[\sigma(e_0)] = f(0) = 0$ et $af(e_0) = f(ae_0) \neq 0$, car f est injective.

Posons $f(e_0) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_i^0 e_i$,alors d'après l'égalité $\sigma[f(e_0)] = 0$, on obtient $\sum_{i=0}^{m-1} a\alpha_{i+1}^0 e_i = 0$.

Comme $\{e_i, i \in N\}$ est une base, on a $a\alpha_k^0 = 0, \forall k = 1,...,m$. On en déduit que α_k^0 n'est pas inversible, $\forall k = 1,...,m$. Donc $\alpha_k^0 \in J(C) = aC$, pour $k = 1,...,m$.

D'autre part la relation $af(e_0) = a\sum_{i=0}^{m} \alpha_i^0 e_i = a\alpha_0^0 e_0 + \sum_{i=1}^{m} a\alpha_i^0 e_i \neq 0$ implique que

$a\alpha_0^0 \neq 0$ et α_0^0 est inversible.

∗ Supposons que $f(e_i) = \sum_{j \prec i} \alpha_j^i e_j + \alpha_i^i e_i + a\sum_{k \succ i} \alpha_k^i e_k$ avec α_i^i inversible.

Posons $f(e_{i+1}) = \sum_{j \prec i+1} \alpha_j^{i+1} e_j + \alpha_{i+1}^{i+1} e_{i+1} + \sum_{k \succ i+1} \alpha_k^{i+1} e_k$

De la relation $\sigma\left[f\left(e_{i+1}\right)\right] = af\left(e_i\right)$, nous avons

$$a \sum_{j \prec i+1} \alpha_j^{i+1} e_{j-1} + a\alpha_{i+1}^{i+1} e_{i+1} + a \sum_{k \succ i+1} \alpha_k^{i+1} e_{k-1} = a \sum_{j \prec i} \alpha_j^i e_j + a\alpha_i^i e_i$$

Donc pour k $>$ i+1, $a\alpha_k^{i+1} = 0$ et α_k^{i+1} est non inversible. Donc $\alpha_k^{i+1} \in J(C) = aC$.

D'autre part, on a $a\alpha_{i+1}^{i+1} = a\alpha_i^i \neq 0$, donc α_{i+1}^{i+1} est inversible. D'où le résultat.

■

Lemme 4.1.3

Pour tout entier i $\geq$ 0, $ae_i \in \operatorname{Im} f$.

Démonstration :

$*$ D'après le lemme (**4.1.2**), $f(e_0) = \alpha_0^0 e_0 + a \sum_{i \geq 1} \alpha_i^0 e_i$, avec α_0^0 inversible.

Donc $f(ae_0) = af(e_0) = a\alpha_0^0 e_0$ et $ae_0 = \left(\alpha_0^0\right)^{-1}\left[f(ae_0)\right] = f\left[\left(\alpha_0^0\right)^{-1} ae_0\right] \in \operatorname{Im} f$

$*$ Supposons que $ae_k \in \operatorname{Im} f$ pour tout k$\leq$ i.

D'après le lemme (**4.1.2**), nous pouvons écrire $f(e_{i+1}) = \sum_{j \leq i} \alpha_j^{i+1} e_j + \alpha_{i+1}^{i+1} e_{i+1} + a \sum_{k \succ i+1} \alpha_k^{i+1} e_k$

avec α_{i+1}^{i+1} inversible.

Donc nous avons $f(ae_{i+1}) = af(e_{i+1}) = \sum_{j \leq i} \alpha_j^{i+1} e_j + a\alpha_{i+1}^{i+1} e_{i+1}$

Or α_{i+1}^{i+1} étant inversible et par hypothèse $\sum_{j \leq i} a\alpha_j^{i+1} e_j \in \operatorname{Im} f$.

Donc $ae_{i+1} = \left(\alpha_{i+1}^{i+1}\right)^{-1}\left[f(ae_{i+1}) - \sum_{j \leq i} a\alpha_j^{i+1} e_j\right] \in \operatorname{Im} f$.

D'où le résultat.

■

Lemme 4.1.4

Pour tout entier i $\geq$ 0, $e_i \in \operatorname{Im} f$.

Démonstration :

$*$ D'après le lemme (**4.1.2**), $f(e_0) = \alpha_0^0 e_0 + a \sum_{i \geq 1} \alpha_i^0 e_i$, avec α_0^0 inversible.

Mais d'après le lemme (**4.1.3),** on a $a\left(\sum_{k\succ 0}\alpha_k^0 e_k\right)\in \operatorname{Im} f$ donc $e_0 \in \operatorname{Im} f$

$*$ Supposons que $e_k \in \operatorname{Im} f$ pour tout k$\leq$ i et écrivons

$f(e_{i+1}) = \sum_{j\prec i+1}\alpha_j^{i+1}e_j + \alpha_{i+1}^{i+1}e_{i+1} + a\sum_{k\succ i+1}\alpha_k^{i+1}e_k$ avec α_{i+1}^{i+1} inversible.

Il résulte du lemme (**4.1.3**) que $a\left(\sum_{j\succ i+1}\alpha_j^{i+1}e_j\right)\in \operatorname{Im} f$.

Donc $e_{i+1} = \left(\alpha_{i+1}^{i+1}\right)^{-1}\left[f(e_{i+1}) - \sum_{j\leq i}\alpha_j^{i+1}e_j - a\sum_{j\succ i+1}\alpha_j^{i+1}e_j\right]\in \operatorname{Im} f$ ■

Proposition 4.1.5

Soit A un anneau commutatif artinien. Si A admet un idéal non principal, alors A possède un A-module M vérifiant la propriété (I) et qui n'est pas de type fini.

Démonstration :

Comme A est un produit d'anneau artiniens locaux, on peut supposer que A est un anneau local de radical de Jacobson J (A)=$aA+bA$ avec a $\neq$ 0, b $\neq$ 0, tel que $a^2 = b^2 = ab = 0$. Donc d'après l'article **[9]**, il existe un sous-anneau artinien à idéaux principaux C de A, dont le radical de Jacobson J (C)=aC avec a $\neq$ 0 et $a^2 = 0$, tel que $A = C\oplus bC$ (considéré comme C-module).

Considérons l'homomorphisme d'anneaux :

$$\begin{aligned}\varphi : A = C\oplus bC &\to End_C M\\ \alpha + b\lambda &\to \alpha\ Id_M + \lambda\sigma\end{aligned}$$

Avec α, λ ∈ C, Id_M est l'homomorphisme identité du C-module $M = \bigoplus_{i\geq 0} Ce_i$.

Par φ , M a une structure de A-module défini par $r\ m = \varphi(r)\ m,\quad \forall\ m\in M$ dont les endomorphismes du A-module M sont les éléments $f\in End_C M$ vérifiant $fo\sigma = \sigma\ of$.

Donc il résulte des lemmes : lemme (**4.1.1**), lemme (**4.1.2**), lemme (**4.1.3**), lemme (**4.1.4**) que Im f = M, par conséquent M satisfait à la propriété (I).

Comme { e_i / i ∈ ℕ } est une base du C-module M, ainsi M considéré comme A-module n'est pas de type fini.

Théorème 4.1.6:

Soit A un anneau commutatif et dénombrable. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

i) A est un FGI-anneau.

ii) A est un anneau artinien à idéaux principaux.

Démonstration :

i)$\Rightarrow$ ii) D'après la **proposition (3.10),** A est un anneau artinien. Supposons par l'absurde que A admet au moins un idéal non principal, d'où d'après **proposition (4.1.5)** il existe un A-module M vérifiant la propriété (I) et qui n'est pas de type fini. Ce qui est contraire à l'hypothèse. Par conséquent A est un anneau artinien à idéaux principaux.

ii)$\Rightarrow$ i) D'après la **proposition (3.9),** si A anneau artinien à idéaux principaux alors A est un FGI-anneau. ■

4.2 CARACTERISATION DES FGI-ANNEAUX COMMUTATIFS

D'après le **chapitre 3**, si A est un FGI-anneau commutatif alors le radical de Jacobson de A est un nilidéal et A est un anneau semi-local. En particulier pour tout idempotent $\bar{x}$ de A/J, il existe un idempotent e de A tel que $\bar{e} = \bar{x}$.Donc A est un anneau semi-parfait c'est-à-dire un produit d'anneaux artiniens locaux.

Nous supposons dans la suite que A est un anneau local, dont le radical de Jacobson J (A)= J est un nilidéal.

Soit S = A/J un A-module simple et E = $E(A/J)$ l'enveloppe injective de S.

Définition 4.2.1

Un A-module M est finiment annulé s'il existe des éléments $m_1, \ldots, m_n \in$ M tels que : $Ann_A(M) = Ann_A(m_1, m_2, \ldots, m_n)$

$$= \{a \in A / am_i = 0, \forall\ i = 1, \ldots, k\}$$

$$= \bigcap_{i=1}^{k} Ann_A(m_i)$$

$$= \{a \in A / am = 0, \forall m \in M\}$$

Remarque 4.2.2

Soit A un anneau commutatif. Si M est un A-module de type fini alors M est finiment annulé.

Proposition 4.2.3

Soit A est un FGI-anneau, local et commutatif. Soit S = A/J et E= E(S), alors E est finiment annulé.

Démonstration :

A est un anneau local donc S = A/J est un A-module simple.

Puisque S est un A-module simple, alors E= E(S) est un A-module injectif indécomposable. Par conséquent E vérifie la propriété (I).

On en déduit que E est de type fini ce qui implique E est finiment annulé.

■

Proposition 4.2.4

Soit A est un FGI-anneau, local et commutatif. Si N est un sous-module de E totalement invariant alors N est finiment annulé.

Démonstration :

Il suffit de montrer d'abord que N est de type fini ou de façon équivalente de montrer que N vérifie la propriété (I).

Soit u un endomorphisme injectif de N et $i : N \to E$ l'injection canonique.

On a : $u_1 : N \xrightarrow{u} N \xrightarrow{i} E$ est aussi une injection avec $u_1 = i \, o \, u$.

Nous avons le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & E & \\ 0 \arrow[r] & N \arrow[u, "u_1"] \arrow[r, "i"'] & E \arrow[ul, "\tilde{u}"'] \end{tikzcd}$$

Puisque E est un A-module injectif, alors il existe un endomorphisme $\tilde{u}$ de E tel que : $\tilde{u} \, o \, i = u_1$.

$*$ Prouvons que $\tilde{u}$ est un monomorphisme.

Soit x un élément de E tel que x ≠ 0, donc $Ax \neq \{0\}$.

Ax est un sous-module non nul de E, donc $S \cap Ax \neq \{0\}$, car E est un extension essentielle de S. Ceci implique que $S \subset Ax$ car S est un A-module simple.

Donc il existe λ ∈ A tel que $\lambda x \neq 0$ et $\lambda x \in S \subset N$.

De plus on a $0 \neq u_1(\lambda x) = \tilde{u}(\lambda x) = \lambda \tilde{u}(x)$.

Donc $\tilde{u}(x) \neq 0$, et $\tilde{u}$ est un monomorphisme. Il s'en suit que $\tilde{u}$ est un automorphisme de E car un E est un A-module injectif indécomposable.

Soit y un élément de N, alors il existe z ∈ E tel que $\tilde{u}(z) = y$. Donc $z = \tilde{u}^{-1}(y) \in N$ car N est totalement invariant.

Ainsi on a : $y = \tilde{u}(z) = u_1(z) = u(z)$. Donc u est un automorphisme de N. Par conséquent N est de type fini d'où le résultat. ■

Théorème 4.2.5 ([7] Théorème 2.7 p.18)

Soit A un anneau, de radical premier N, tel que tout sous-module de $E\left(A/N\right)$ soit finiment annulé. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

i) A est artinien à gauche.

ii) Pour tout idéal premier P de A, A/P est artinien à gauche.

iii) Tout A-module à gauche de type fini est finiment annulé, et tout idéal premier de A est maximal.

■

Proposition 4.2.6

Soit A est un FGI-anneau, local commutatif. Alors A est artinien.

Démonstration :

Posons N l'unique idéal maximal de A.

A étant un FGI-anneau, le radical de Jacobson de A= radical premier de A= N.

Donc A/N est un A-module simple par conséquent $E\left(A/N\right)$ est indécomposable.

On en déduit que $E\left(A/N\right)$ vérifie la propriété (I). Donc $E\left(A/N\right)$ est finiment annulé.

D'après le théorème (**4.2.5**) A est un anneau artinien. ■

Théorème 4.2.7

Un anneau A est un FGI-anneau si seulement si A est un anneau artinien à idéaux principaux.

Démonstration :

$\Rightarrow$) $A/J(A)$ est un FGI-anneau car $A/J(A)$ est une image homomorphe de A.

Soient $M_1,\dots,M_n$ les idéaux maximaux de A. D'après le théorème chinois

$A/J(A) \cong \bigoplus_{i=1}^{n} A/M_i$ par suite $E(A/J(A)) \cong E(\bigoplus_{i=1}^{n} A/M_i)$. Puisque A/M_i est un A-module simple alors $E(A/M_i)$ est un A-module injectif indécomposable donc $E(A/M_i)$ vérifie la propriété (I) pour tout i, $(1 \leq i \leq n)$. Or $E\left(\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} A/M_i\right) = \overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} E(A/M_i)$ on en déduit d'après la **Proposition 2.1.17** que $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} E(A/M_i)$ vérifie propriété (I) . Par conséquent $\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} E(A/M_i)$ est de type fini. Puisque $E(A/J(A)) \cong E(\overset{n}{\underset{i=1}{\oplus}} A/M_i)$, alors $E(A/J(A))$ est de type fini donc $E(A/J(A))$ est finiment annulé. Donc D'après le **Théorème 4.2.5** A est artinien.

Supposons par l'absurde que A admet au moins un idéal non principal, d'où, d'après la **proposition (4.1.5)**, A admet un A-module vérifiant la propriété (I) et qui n'est pas de type fini. Ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc A est artinien à idéaux principaux.

$\Leftarrow$) Supposons que A est un anneau artinien à idéaux principaux. D'après la **proposition (3.9)**, A est un FGI-anneau

■

Corollaire 4.2.8

Soit A un anneau commutatif. Les conditions suivantes sont équivalentes :

i) A est un anneau artinien à idéaux principaux.

ii) Un A-module est de type fini si et seulement s'il vérifie la propriété (I). ■

Remarque 4.2.9

1) Comme exemple de FGI-anneaux on peut citer les corps, les anneaux simples et les anneaux semi-simples.

2) Un sous-anneau d'un FGI anneau n'est pas nécessairement un FGI-anneau.

Exemple : Soit A un anneau et K= AS^{-1} son corps des fractions. Supposons que K ≠ A. Alors K est un FGI-anneau alors que A ne l'est pas.

BIBLIOGRAPHIE

[1] F.W Anderson and K.R Fuller: Rings and categories of modules, New York Springer-verlag, Belin,1973.

[2] E. P. Armendariz, J. W. Fisher and R. L. Snider : On injective and surjective endomorphism of finitely generated modules Comm. in Algebra 6 (7), (1978) 659-672.

[3] Atiyah M. F and Mac Donald, I. G: Introduction to commutative algebra Addison-Wesley (1969).

[4] Barry, M: Caractérisation des anneaux commutatifs pour lesquels les modules vérifiant la propriété (I) sont de type fini. Thèse de troisième cycle, Faculté des Sciences et Techniques, Dakar (1998).

[5] Barry M., Diankha O., Sangharé M.: On commutative FGI-rings. Math. Sc. Res. J.9 (4) (2005) 87-91.

[6] Barry M., Diankha O., Sangharé M.: Characterisation of FG-duo rings (à paraitre dans journal of algebra, group and geometrics).

[7] J.A Beachy, W.D Blair : Finitely annihilated modules and orders in artinian rings, Comm.in Algebra, vol.6, No.1,(1978),1-34.

[8] R. A Beaumont: Group with isomorphic proper subgroup, Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945) , 381-387.

[9] I.S Cohen: On the structure and ideal theory of complete local rings, Trans.Amer.Soc.,59 (1946),54-106.

[10] I.S Cohen, I. Kaplansky: Ring for which every module is a direct sum of cyclic modules, Math.Zeitschr Bd.,54(H2S), 97-101.

[11] Dischinger, M.F. : Sur les anneaux fortement Π-réguliers. C. R. Acad. S.C Paris 283 (1976) 571-573.

[12] Y. Hirano : On Fitting's Lemma, Hiroshima Math. J. 9, (1979), 623-626.

[13] V. A. Hiremath : Hopfian rings and Hopfian modules, Indian. J. Pure and appl. Math. 17, (1986), 895-900.

[14] M.A Kaidi, M. Sangharé: Une caractérisation des anneaux artiniens à idéaux principaux in L.N.M., vol.1328, Springer-verlag, Belin, 1988, 245-254

[15] I. Kaplansky: A note on groups without isomorphic subgroup, Bull.Amer.Soc.,51 (1945),529-530.

[16] F. Kash: Modules and rings, academic press, Inc. , New York (1992).

[17] Lafon, J. P: Les formalismes fondamentaux de l'algèbre commutative. Hermann, Paris, (1977).

[18] T.Y Lam: A first course in noncommutative rings. Graduate Texbook in Math. Vol. 131, Springer-verlag. Belin-Heidelber, New York (1991).

[19] T.Y Lam: Lectures on modules and rings. G. T. M. (189), Springer-verlag. Belin-Heidelber, New York (1999).

[20] C. Megibben : Countable injective modules are sigma injective. Proc. Am. Math. Soc.84 (1) (1982) 8-10.

[21] Renault, G.: Algebre non commutatif. Gauthier Villars (1975).

[22] Sharpe, D.W. and Vamos, P. :Injective modules. Cambridge University Press (1972).

[23] K. Varadarajan: Hopfian and Co-Hopfian objects, Publications Matemàtiques, Vol. 36, (1992), 293-317.

[24] K. Varadarajan: Properties of endomorphism rings, Acta Math. Hungar. 74 (1-2), (1977), 83-92.

[25] K. Varadarajan et A. Haghany: Study of modules over formal triangular matrix rings. J. Pure and appl. Alg. 147, (2000) 41-58,

[26] K. Varadarajan: On certains classes of modules , Publications Matemàtiques, Vol. 36, n^0 2B (1992), 1011-1027.

[27] W.V Vasconscelos: On finitely generated flats modules. Proc. Am. Math. Soc.138 (1969) 900-901.

[28] W.V Vasconscelos: Injective endomorphism of finitely generated modules. Proc. Am. Math. Soc. 25(1970) 505-512.

WEBOGRAPHIE

[29] Antoine Chambert-Loir: Polycopié d'un cours enseigné par correspondance à l'université Pierre et Marie Curie (Paris 6) année 2001-2002.