

## Table des matières

Nomenclature .....	VI
Introduction Générale .....	1
<b>CHAPITRE I .....</b>	<b>5</b>
I.1 Définitions : .....	5
I.2 Lois constitutives ou modèles de fluides viscoélastiques : .....	5
I.2.1 Le modèle de Maxwell .....	6
I.2.2 Le modèle d'Oldroyd-B .....	7
I.2.3 1.2.3 Les modèles de Phan-Thien-Tanner (PTT) .....	8
I.2.4 1.2.4 Le modèle de White Metzner .....	9
<b>CHAPITRE II .....</b>	<b>10</b>
II.1 Introduction : .....	10
II.2 Description et position du problème : .....	10
II.2.1 Équation de continuité : .....	11
II.2.2 Équation du mouvement.....	11
II.2.3 La loi de comportement de la solution de polymère .....	11
II.3 Équations du système physique.....	12
II.4 Conditions initiales et aux limites : .....	12
II.4.1 Conditions initiales : .....	12
II.4.2 Conditions aux limites : .....	12
II.5 Écoulement de base : .....	12
II.6 Adimensionnalisation des solutions de l'écoulement à l'état de base et des équations du système : .....	14
II.7 Analyse de stabilité linaire : .....	15
II.7.1 Établissement des équations de perturbation : .....	15
II.7.2 Décomposition en modes normaux : .....	17
II.7.3 Fonction de courant.....	18
II.8 Conclusion.....	18
<b>CHAPITRE III .....</b>	<b>19</b>

III.1	Introduction :	19
III.1	L'équation d'Orr-Sommerfeld.....	19
III.1.1	L'équation aux valeurs propres .....	20
III.2	Résolution numérique de l'équation d'Orr-Sommerfeld par la méthode spectrale de collocation .....	21
III.2.1	Formulation de l'équation aux valeurs propres d'après les coefficients <b><i>an</i></b> .....	23
III.2.2	Formulation des conditions aux limites d'après les coefficients <b><i>an</i></b> .....	25
III.2.3	Ecriture des systèmes algébriques par la méthode des résidus pondérés .....	25
III.3	Conclusion.....	26
	Conclusion générale et perspective .....	27
	Références bibliographiques .....	28
	Résumé .....	1
	Abstract .....	1

## Nomenclature

### Lettres grecques

$\alpha$	Nombre d'ondes ( $m^{-1}$ )
$\delta_{nm}$	Symbole de Kronecker
$\varphi$	Fonction propre ( $m^2 s^{-1}$ )
$\lambda_1$	Temps de relaxation du tenseur ( $s$ )
$\lambda_2$	Temps de retard du tenseur ( $s$ )
$\mu_1$	Viscosité dynamique du solvant ( $kg m^{-1} s^{-1}$ )
$\mu_2$	Viscosité dynamique du soluté (polymère) ( $kg m^{-1} s^{-1}$ )
$\mu$	Viscosité de la solution ( $kg m^{-1} s^{-1}$ )
$\rho$	Masse volumique du fluide ( $kg m^{-3}$ )
$\psi(x, y; t)$	Fonction de courant associée à la perturbation ( $m^2 s^{-1}$ )

### Lettres latines

A et B	Matrices
c	Vitesse de propagation ( $ms^{-1}$ )
h	Demi-écartement des plaques ( $m$ )
N	Représente le rang de troncature dans les fonctions d'essai
$T_n(y)$	Polynômes de Chebyshev
P	Pression de l'écoulement (Pa)
t	Temps ( $s$ )
U	Vitesse maximale ( $ms^{-1}$ )
$\vec{u}$	Champ de vitesse ( $ms^{-1}$ )
$(x; y)$	Coordonnées de l'espace ( $m$ )

**Nombres sans dimensions**

$R_e$	.....	Nombre de Reynolds
$W_e$	.....	Nombre de Weissenberg
$\mu_r$	.....	Rapport de la viscosité du solvant sur la viscosité totale

**Tenseur**

$\dot{\gamma}$	.....	Tenseur taux de déformation
$\bar{\sigma}$	.....	Tenseur des contraintes
$\bar{\tau}$	.....	tenseur des extra-contraintes
$\bar{\tau}_s$	.....	Partie newtonienne du tenseur des extra-contraintes
$\bar{\tau}_p$	.....	Tenseur polymérique du tenseur des extra-contraintes
$\bar{W}$	.....	Tenseur taux de rotation
$\bar{I}$	.....	Tenseur identité.

**Opérateur**

$\vec{\nabla}$	.....	Opérateur gradient
$D = \frac{d}{dy}$	.....	Opérateur dérivé par rapport à y.
$\frac{D_a}{Dt}$	.....	Dérivée d'Oldroyd
$L_{Orr}$	.....	Opérateur d'Orr-Sommerfeld

**Indice**

b	.....	Relatif à l'écoulement de base
i	.....	Relatif à la partie imaginaire

## Introduction Générale

La théorie classique de la stabilité porte essentiellement sur les écoulements cisaillés quasi parallèles ou parallèles tels que la couche de mélange, le jet, le sillage, l'écoulement de Poiseuille plan dans un canal, l'écoulement de couche limite [2]. Le théorème de Rayleigh stipule que la présence d'un point d'inflexion dans le profil de vitesse des écoulements parallèles ou quasi parallèles cisaillés est une condition nécessaire (mais non suffisante) d'instabilité. Et d'après ce théorème, l'écoulement de Poiseuille plan est stable, car ne présente pas de point d'inflexion. Ce pendant la mise en évidence des phénomènes d'instabilité pour la configuration d'écoulement de Poiseuille par l'expérience d'Osborne Reynolds (1883), donne naissance à un nouveau champ d'investigation. L'origine et la nature de ces instabilités ont par ailleurs motivé un grand nombre de publications ces dernières années. Plusieurs résultats rencontrés dans la littérature bibliographique ont en effet mené à la conclusion de l'existence de ces instabilités.

Ces différents résultats ont été obtenu par différentes méthodes d'analyse. On peut citer parmi ces méthodes la théorie de la stabilité linéaire, théorie de la stabilité non linéaire etc. La théorie de la stabilité linéaire ou hydrodynamique qui sera développée dans ce présent mémoire, est une technique qui vise à décrire quantitativement le comportement d'un fluide soumis à des perturbations. Cette théorie linéaire de stabilité est actuellement complètement achevée avec l'écoulement de Poiseuille plan des liquides newtoniens et le nombre de Reynolds critique gouvernant l'apparition de ces instabilités est égal à 5772,225 [11]. Au-dessus de cette valeur, des ondes bidimensionnelles appelées ondes de Tollmien-Schlichting visqueuse ment instables apparaissent et peuvent se propager dans l'écoulement.

Certains fluides d'intérêt pratique présentent un comportement très différent de celui des liquides newtoniens, c'est-à-dire ne satisfont pas à la loi newtonienne  $\bar{\tau} = 2\mu\bar{\gamma}$ . Ces derniers sont dits fluides non-newtonien ou complexe. Ils présentent un comportement supplémentaire souvent élastique lorsqu'ils sont comparés aux fluides visqueux newtoniens. Les fluides viscoélastiques sont des exemples de fluide complexe et ils sont à la base de nombreuses applications industrielles, notamment dans l'industrie des pâtes et papiers, l'industrie des polymères, le transport des gaz ou des hydrocarbures. Dès lors, la question des instabilités susceptibles de se développer dans les écoulements parallèles tels que l'écoulement de Poiseuille plan des fluides viscoélastiques demeure primordial dans l'activité de la recherche scientifique et fait l'objet de nombreuses recherches. La problématique qui apparaît dans la

modélisation de ces fluides se trouve précisément au niveau du couplage entre le champ de vitesse et le tenseur des extra-contraintes. Mais l'évolution des instabilités avec les propriétés des fluides viscoélastiques aux lois de comportements multiples souffre encore d'une incompréhension imparfaite.

En effet, Squire (1933) [17] avait étudié la stabilité de l'écoulement entre deux parois planes d'un fluide viscoélastique en s'appuyant sur la méthode des petites oscillations aux perturbations tridimensionnelles. Ainsi, Khorasani et Mirzolou (2012) [6] ont investigué la stabilité de l'écoulement de Poiseuille entre deux plans parallèles d'un fluide viscoélastique de type Johnson-Segalman avec viscosité newtonienne ajoutée. L'écoulement est entraîné par un gradient de pression variant et l'équation constitutive est supposée être une dérivée d'Oldroyd-B. En adoptant une approche systémique dynamique basée sur la méthode de projection de Galerkin, ils ont examiné en plus de l'influence du gradient de pression les effets des nombres de Reynolds et Weissenberg. Récemment, Lamine et Hifdia (2015) [7] ont conclu que le jet transversal a un effet à la fois stabilisateur et déstabilisateur sur la stabilité hydrodynamique d'un écoulement dans un canal d'un fluide viscoélastique de second ordre. Plus récemment I. Kama (2019) [4] a étudié les instabilités d'un fluide viscoélastique dans une conduite cylindrique d'axe horizontal et a montré que dans cette géométrie des instabilités pourraient apparaître même pour des faibles nombres de Weissenberg ( $We = 10^{-2}$ ).

Toujours dans le but de bien cerner l'origine et la nature des instabilités qui sont présentes dans les écoulements parallèles de fluides viscoélastiques, l'effet de tous les paramètres décrivant la viscoélasticité doit être examiné. De ce fait, Shaqfeh et al. (1989) [16] ont examiné la nature déstabilisante des effets viscoélastiques d'un fluide d'Oldroyd-B tombant sous son propre poids sur une surface inclinée suite à une analyse de stabilité par la théorie des petites perturbations. Ray et al. (2000) [13] ont analysé la stabilité linéaire de l'écoulement plan de Poiseuille à faible nombre de Reynolds d'un fluide viscoélastique de type d'Oldroyd conducteur en présence d'un champ magnétique transversal. Ils ont cerné les effets déstabilisateurs du facteur d'élasticité et stabilisateur du champ magnétique transversal. Ainsi, l'effet combiné du champ magnétique transversal et des temps de relaxation et de retard d'un fluide d'Oldroyd-B a été également analysé par Rafiki et al. (2013) [12].

L'analyse de la stabilité linéaire des écoulements parallèles de Poiseuille plans et de Couette conduit toujours à une équation différentielle du quatrième ordre : équation d'Orr-

Sommerfeld, dont la résolution par des méthodes numériques a fait l'objet de nombreux travaux dans la littérature bibliographique. En effet, Orszag (1971) [11] a étudié numériquement le problème de la stabilité des écoulements parallèles plans de Poiseuille dans un canal avec la méthode des expansions des polynômes de Chebyshev. Il résulte de son étude que l'écoulement du fluide newtonien peut devenir instable au-dessus d'un certain nombre de Reynold critique lorsque les effets d'inerties sont présents[2]. Baranger et Sandri (1992) [1] ont utilisé la méthode d'approximation par élément fini à un écoulement de fluide viscoélastique de type d'Oldroyd-B. Ainsi, Ray et al. (2000) [13] ont analysé l'équation d'Orr-Sommerfeld par la méthode spectrale tau avec expansion dans les polynômes de Chebyshev.

L'objectif de ce travail est d'effectuer, l'analyse de la stabilité linéaire de l'écoulement de Poiseuille plan des fluides viscoélastiques (modèle d'Oldroyd-B) entraîné par un gradient de pression horizontal constant, en s'appuyant sur les équations aux petites perturbations et la méthode de collocation des polynômes de Chebyshev pour résoudre l'équation d'Orr-Sommerfeld moyennant l'hypothèse des faibles nombres de Weissenberg.

Après cette partie introductory dans laquelle on présente l'objectif de l'étude et quelques investigations antérieures effectuées dans ce domaine de recherche, le présent mémoire est structuré de la façon suivante :

Le chapitre 1 est consacré à la définition des fluides viscoélastiques et de quelques relations permettant de décrire ces derniers.

Un deuxième chapitre présent le problème physique et les équations gouvernantes. Dans ce chapitre est décrite l'étude de la stabilité d'une solution de polymère (fluide viscoélastique) obéissant au modèle d'Oldroyd-B à partir de la théorie des perturbations. L'équation d'Orr-Sommerfeld considérée comme l'équation de base de l'étude de stabilité linéaire est enfin déterminée pour ce modèle de fluide viscoélastique.

Le chapitre trois fait finalement l'objet de la résolution numérique de l'équation d'Orr-Sommerfeld résultant de l'analyse de stabilité. La méthode spectrale de collocation (méthode dite « pseudo-spectrale ») dans le cas où les fonctions de bases sont des polynômes de Chebyshev est élaborée. Ainsi, le système algébrique (matrice complexe) résultant de cette méthode est établie.

Et le mémoire se termine par une conclusion dans laquelle est rappelé l'essentielle de l'étude ainsi que les perspectives.

## CHAPITRE I

### Définitions et modèles de fluides viscoélastiques

#### I.1 Définitions :

Les fluides viscoélastiques sont des matériaux qui concernent le domaine de la rhéologie, la science de l'écoulement. Ils peuvent être définis comme étant des fluides complexes qui possèdent à la fois des propriétés élastiques (temps courts) et visqueuses (temps long). Les fluides viscoélastiques peuvent également être définis comme des fluides qui ont une mémoire continue du comportement du milieu. Ce phénomène de mémoire est très souvent dû au fait que, vu à l'échelle microscopique, le fluide est le mélange d'un solvant et de microstructures qui flottent dans ce solvant (par exemple des chaînes de polymères ou de petits cristaux). Un exemple typique de fluide viscoélastique est la pâte de silly-putty : une boule de silly-putty apparaît comme une boule de caoutchouc (aspect solide) ou s'étale comme un fluide visqueux (aspect liquide).

Le caractère viscoélastique est un comportement non-newtonien très important et très fréquent dans les solutions de polymères et dans les polymères fondus. Par contre, la présence de très faibles quantités de hauts polymères en solution peut réduire de manière très significative le gradient de pression nécessaire pour obtenir un écoulement, ce qu'on appelle effet Toms [5]. Les solutions de polyéthylène, la pâte à pain, le sable mouillé et les fibres textiles artificielles sont des fluides viscoélastiques.

Dans ce présent travail, l'écoulement bidimensionnel incompressible d'une solution de polymère dont le solvant est l'eau, assimilable à un fluide viscoélastique va être considéré.

#### I.2 Lois constitutives ou modèles de fluides viscoélastiques :

L'écoulement des fluides viscoélastiques se traduit par une variation d'énergie interne. Il en résulte une superposition de contraintes visqueuses proportionnelles aux vitesses de déformations et de contraintes élastiques proportionnelles aux déformations. Il nécessite donc un très grand nombre de paramètres pour décrire leurs comportements. Cependant, il n'existe pas une loi constitutive générale satisfaite par ces dernières. Les physico-chimistes ont élaboré plusieurs modèles rhéologiques permettant de bien représenter le comportement des fluides viscoélastiques.

### I.2.1 Le modèle de Maxwell

La notion de fluide de Maxwell peut être considérée comme une généralisation du modèle unidimensionnel de viscoélasticité linéaire de Maxwell [8]. Pour le cas d'une solution de polymère assimilable à une fluide viscoélastique, le tenseur des extra-contraintes  $\bar{\tau}$  qui lui est associé (c'est-à-dire la partie tangentielle du tenseur des contraintes totales de Cauchy) peut être décomposé en deux parties :

- une partie newtonienne qui correspond au solvant  $\bar{\tau}_s$  et
- une partie polymérique ou partie purement élastique de la contrainte qui correspond au soluté  $\bar{\tau}_p$ .

Il s'exprime alors selon la relation suivante :

$$\bar{\tau} = 2\mu_1 \bar{\dot{\gamma}} + \bar{\tau}_p \quad (1.1)$$

Le tenseur total des contraintes  $\bar{\sigma}$  s'écrit donc sous la forme :

$$\bar{\sigma} = -p \bar{I} + \bar{\tau} = -p \bar{I} + 2\mu_1 \bar{\dot{\gamma}} + \bar{\tau}_p \quad (1.2)$$

avec :  $\mu_1$  : la viscosité dynamique du solvant ;  $\mu_2$  : la viscosité dynamique du polymère ;  $\bar{\dot{\gamma}}$  et  $\bar{I}$  : représentent respectivement le tenseur taux de déformation et le tenseur identité.

Si cette solution obéit au modèle de Maxwell son comportement est alors décrit par la relation constitutive suivante :

$$\bar{\tau} + \lambda_1 \frac{D_a}{Dt} \bar{\tau} = 2\mu \bar{\dot{\gamma}} \quad (1.3)$$

avec :

$\lambda_1$  : une constante positive appelée temps de relaxation du tenseur : une valeur de  $\lambda_1$  proche de zéro indique une transition du fluide de Maxwell vers un fluide newtonien ;

$\mu$  : la viscosité dynamique de la solution : somme des viscosités dynamiques du solvant  $\mu_1$  et du soluté  $\mu_2$  ;

$\frac{D_a \bar{\tau}}{Dt}$  : est la dérivée objective aussi nommée dérivée d'Oldroyd : elle permet de respecter le principe d'invariance par changement de repère. Cette dérivée objective est donnée sous la forme suivante :

$$\frac{D_a \bar{\tau}}{Dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \bar{\tau} + \bar{\tau} \cdot \bar{\bar{W}} - \bar{\bar{W}} \cdot \bar{\tau} - a(\bar{\tau} \cdot \bar{\dot{\gamma}} + \bar{\dot{\gamma}} \cdot \bar{\tau}) \quad (1.4)$$

où  $a$  représente un paramètre réel défini dans à l'intervalle  $[-1; +1]$  et  $\bar{\bar{W}}$  est le tenseur taux de rotation. Dans la suite de la présente étude, nous allons adopter le cas où  $a = 1$ , soit :

$$\frac{D_a \bar{\tau}}{Dt} = \left( \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \right) \bar{\tau} - (\bar{\bar{\nabla}} \vec{u}) \bar{\tau} - \bar{\tau} (\bar{\bar{\nabla}} \vec{u})^T \quad (1.5)$$

### I.2.2 Le modèle d'Oldroyd-B

James Gardner Oldroyd a introduit plusieurs modèles, notamment le modèle à huit constantes, le modèle à six constantes et le modèle d'Oldroyd-B en 1950 [9]. Ce dernier est l'un des modèles non linéaires utilisés pour décrire le comportement d'un fluide viscoélastique. Il fournit une représentation juste d'une solution de polymère diluée. L'équation constitutive est donnée par :

$$\left( 1 + \lambda_1 \frac{D_a}{Dt} \right) \bar{\tau} = 2\mu \left( 1 + \lambda_2 \frac{D_a}{Dt} \right) \bar{\dot{\gamma}} \quad (1.6)$$

avec :

$\lambda_2$  : un paramètre positif appelé temps de retard du tenseur : il est compris entre 0 et  $\lambda_1$  et il permet de distinguer la partie élastique de la partie visqueuse du fluide :

- une valeur de  $\lambda_2$  proche de 0, est synonyme d'un fluide très élastique,
- à l'opposé une valeur de  $\lambda_2$  proche de  $\lambda_1$  indique que le fluide est newtonien,
- le cas  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$  correspond à un fluide purement visqueux (équation de **Navier-Stokes**),
- alors que le cas  $\lambda_2 = 0, \lambda_1 > 0$  correspond à un fluide purement élastique (modèle de **Maxwell**).

On constate que la loi de comportement de type d'Oldroyd-B (1.6) peut être réécrite uniquement en fonction du tenseur polymérique  $\bar{\tau}_p$ , en remplaçant  $\bar{\tau}$  par son expression, puis en considérant la relation  $\mu_1 \lambda_1 = \mu \lambda_2$ . Soit :

$$\bar{\tau}_p + \lambda_1 \frac{D_a}{Dt} \bar{\tau}_p = 2\mu_2 \bar{\dot{\gamma}} \quad (1.7)$$

C'est cette relation de comportement qui va être utilisée dans la modélisation mathématique de l'écoulement de Poiseuille de la solution de polymère qui obéit au modèle de fluide viscoélastique d'Oldroyd-B du chapitre suivant.

### I.2.3 1.2.3 Les modèles de Phan-Thien-Tanner (PTT)

Le comportement des fluides viscoélastiques peut être décrit par les modèles de Phan-Thien-Tanner (PTT) qui sont des choix populaires [4]. La formule non linéaire de l'équation constitutive de Phan-Thien-Tanner (PTT) est donnée :

$$[\exp(\frac{\lambda_1 \varepsilon}{\mu_2} \operatorname{tr}(\bar{\tau}))] \bar{\tau}_p + \lambda_1 \frac{D_a}{Dt} \bar{\tau}_p = 2\mu_2 \bar{\dot{\gamma}} \quad (1.8)$$

Un développement limité d'ordre 1 permet alors d'obtenir la formulation linéaire de cette équation donnée par la relation :

$$[1 + \frac{\lambda_1 \varepsilon}{\mu_2} \operatorname{tr}(\bar{\tau})] \bar{\tau}_p + \lambda_1 \frac{D_a}{Dt} \bar{\tau}_p = 2\mu_2 \bar{\dot{\gamma}} \quad (1.9)$$

$\varepsilon$  : un paramètre caractérisant le comportement élongationnel du fluide.

Dans le cas où  $\varepsilon$  est nul, le modèle PTT se réduit au modèle d'Oldroyd-B. On résume la transition entre ces différents modèles de fluides viscoélastiques par le schéma ci-dessous :

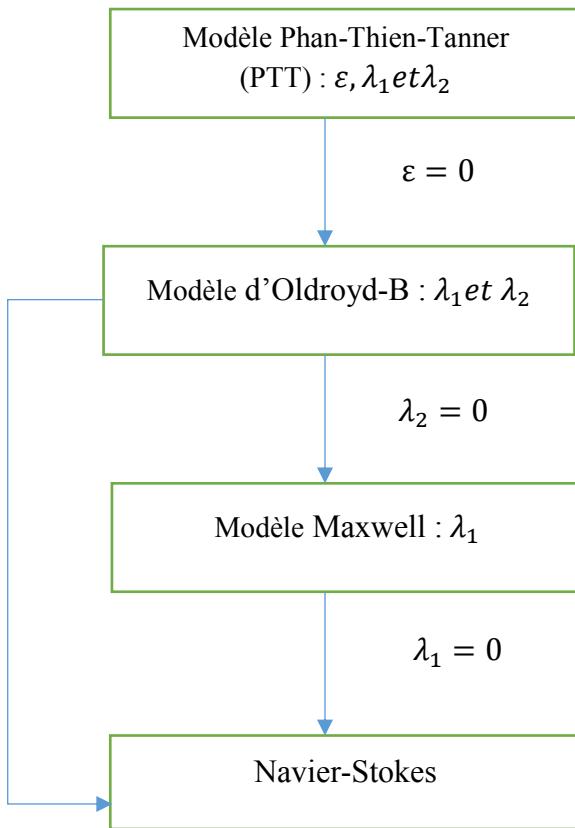


Figure 1 : hiérarchie de modèles de fluides viscoélastiques

#### I.2.4 1.2.4 Le modèle de White Metzner

La loi de comportement de White Metzner contrairement aux modèles présentés précédemment suppose que la viscosité dynamique et le temps de relaxation du fluide dépendent du tenseur des vitesses de déformation suivant une loi de Carreau-Yasuda [19]. C'est une généralisation de la loi de Maxwell pour tenir compte de la dépendance de ces paramètres par rapport  $\dot{\bar{\gamma}}$ . Elle s'écrit sous la forme :

$$\bar{\tau}(\dot{\bar{\gamma}}) + \lambda_1 \frac{D_a}{Dt} \bar{\tau} = 2\mu(\dot{\bar{\gamma}}) \dot{\bar{\gamma}} \quad (1.10)$$

avec :

$$\mu(\dot{\bar{\gamma}}) = \mu_0 [1 + (k\dot{\bar{\gamma}})^a]^{\frac{m-1}{a}} \quad \text{et}$$

$$\lambda_1(\dot{\bar{\gamma}}) = \lambda_0 [1 + (k\dot{\bar{\gamma}})^a]^{\frac{n-1}{b}}$$

Les paramètres  $a, b, k, l, m, n, \lambda_0$  et  $\mu_0$  sont relatifs au fluide viscoélastique pour un température donnée. Les paramètres  $n$  est compris entre 0 et 1.

## CHAPITRE II

### Modélisation mathématique

#### **II.1 Introduction :**

L'étude des instabilités des écoulements est très importante pour la compréhension de la mécanique des fluides. La recherche de la solution d'un problème physique nécessite très souvent l'utilisation de grandeurs mathématiques. Ces dernières servent d'outils d'analyse, de calcul, et de mesure permettant de bien cerner le problème.

L'objectif de ce chapitre consiste en la modélisation mathématique d'un écoulement de fluide viscoélastique dans une conduite délimitée par deux plaques planes d'axe horizontal. En mécanique des fluides, en supposant que le fluide est un milieu continu, on peut utiliser les lois classiques de conservations de la masse et de la quantité de mouvement qu'il faut adjoindre la loi de comportement du fluide considéré pour trouver la nature du problème posé.

#### **II.2 Description et position du problème :**

Dans le système de coordonnées  $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ , considérons l'écoulement Poiseuille d'un fluide viscoélastique situé entre deux plaques planes parallèles d'extension infinie d'équations  $y = h$  pour la plaque supérieure et  $y = -h$  pour la plaque inférieure. Les deux plaques sont séparées par une distance égale à  $2h$  conformément à la figure 2 ci-dessous.

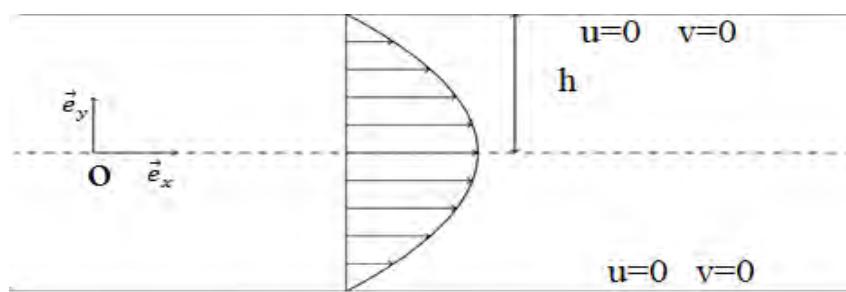


Figure 2 : Représentation de la géométrie de l'écoulement de Poiseuille.

L'origine O du système de coordonnées est prise à un point situé à mi-chemin entre les plaques, l'axe ( $Ox$ ) est suivant la direction de l'écoulement et parallèle aux plaques, l'axe ( $Oy$ ) est perpendiculaire aux plaques et l'axe ( $Oz$ ) perpendiculaire aux autres axes complète le trièdre direct. L'écoulement considéré ici est non stationnaire et incompressible. Le fluide viscoélastique utilisé est une solution de polymère obtenue par ajout d'un polymère à longue chaîne moléculaire dans un solvant newtonien (eau) et obéit au modèle d'Oldroyd-B.

L'écoulement est déclenché par la présence d'un gradient de pression horizontal imposé au système.

### II.2.1 Équation de continuité :

C'est l'équation qui exprime la loi de conservation de la masse pour un volume de contrôle matériel. Compte tenu de l'incompressibilité de l'écoulement, elle s'exprime mathématiquement sous la forme :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.1)$$

où  $\vec{u}$  est le champ de vitesse ; ces composantes sont  $u$  et  $v$  dans la direction ( $Ox$ ) et ( $Oy$ ) respectivement.

### II.2.2 Équation du mouvement

Elle indique que le taux de variation de la quantité de mouvement contenue dans le volume de contrôle est égal à la somme de toutes les forces extérieures qui lui sont appliquées. En négligeant les forces de gravité, l'équation du mouvement s'écrit sous la forme :

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right] = -\vec{\nabla} P + \mu_1 \vec{\nabla} \cdot (\bar{\bar{\tau}} \vec{u}) + \vec{\nabla} \cdot \bar{\bar{\tau}}_p \quad (2.2)$$

où  $\rho$  : représente la masse volumique du fluide ;  $P$  : la pression ;  $\bar{\bar{\tau}}_p$  : le tenseur polymérique et  $\mu_1$  : la viscosité dynamique du solvant.

### II.2.3 La loi de comportement de la solution de polymère

Les équations de conservation précédentes sont valables pour des fluides de nature très différentes, on doit ajouter une ou des relations précisant la constitution particulière du fluide. Pour ce cas d'étude, la solution de polymère obéit au modèle non linéaire d'Oldroyd-B décrit au chapitre I précédent par la relation (1.7).

$$\bar{\bar{\tau}}_p + \lambda_1 \frac{D_a}{Dt} \bar{\bar{\tau}}_p = 2\mu_2 \bar{\dot{\gamma}} \quad (2.3)$$

où  $\bar{\dot{\gamma}}$  est le tenseur polymérique.

### II.3 Équations du système physique

Les équations du système sont respectivement l'équation de continuité, l'équation de Navier-Stokes et la loi de comportement du fluide. Elles régissent l'évolution spatio-temporelle de l'écoulement de la solution de polymère.

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ \rho \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right] = -\vec{\nabla} P + \mu_1 \vec{\nabla} \cdot (\bar{\vec{\nabla}} \vec{u}) + \vec{\nabla} \cdot \bar{\tau} \\ \bar{\tau} + \lambda_1 \frac{D_a}{Dt} \bar{\tau} = 2\mu_2 \dot{\bar{\gamma}} \end{cases} \quad (2.4)$$

**Remarque :** le système physique est non linéaire non seulement du fait de la dérivée matérielle  $(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \bar{\tau}$  mais aussi des termes supplémentaires  $(\bar{\vec{\nabla}} \vec{u}) \bar{\tau}$ ,  $\bar{\tau}(\bar{\vec{\nabla}} \vec{u})$  de la dérivée d'Oldroyd. Ces non-linéaires n'apparaissent pas en une dimension et rendent difficile l'étude et la discréétisation de ce type de modèle.

### II.4 Conditions initiales et aux limites :

#### II.4.1 Conditions initiales :

Le fluide est supposé initialement au repos, puis on impose sur lui un gradient de pression horizontal. Ce dernier provoquera l'écoulement du fluide dans la conduite. La condition initiale est exprimée par :

$$u(y, t = 0) = 0 \quad (2.5)$$

#### II.4.2 Conditions aux limites :

Du fait de la viscosité du fluide, les particules fluides qui se trouvent au contact avec les plaques s'adhèrent à ces dernières et restent immobiles. Les conditions aux limites ou d'adhérence sur les plaques sont ainsi données par :

$$u(y = -h, t) = u(y = h, t) = 0 \quad (2.6)$$

### II.5 Écoulement de base :

À l'état d'équilibre (état de base), nous nous limitons à un écoulement de Poiseuille plan stationnaire, incompressible et unidirectionnel suivant la direction ( $Ox$ ). Donc on cherche la solution sous la forme  $u_b = (u_b(y); 0)$ . Dans la suite, l'indice b désignera les composantes de l'écoulement de base.

D'abord, en effectuant quelques opérations sur la loi de l'écoulement de base, les composantes de la contrainte  $\tau_{ijb}$  du polymère se mettent :

$$\tau_{ijb} = \begin{pmatrix} 2\lambda_1\mu_2 \left(\frac{\partial u_b}{\partial y}\right)^2 & \mu_2 \frac{\partial u_b}{\partial y} \\ \mu_2 \frac{\partial u_b}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

Ensuite, en intégrant deux fois l'équation de la quantité de mouvement, compte tenu des conditions aux limite  $u_b = (y = \pm h) = 0$ , le profil parabolique de la vitesse s'écrit :

$$u_b(y) = -\frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial P_b}{\partial x}\right) h^2 \left[1 - \frac{y^2}{h^2}\right] \quad (2.8)$$

avec :

$\frac{\partial P_b}{\partial x}$  : le gradient de pression horizontal imposé au fluide.

Ainsi, en tenant compte du fait que la vitesse est maximale au centre de la conduite on peut réécrire cette solution non-triviale sous la forme :

$$u_b(y) = U \left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) \quad (2.9)$$

où  $U$  est la vitesse maximale au centre de la conduite.

Finalement, en intégrant une fois l'équation de la quantité de mouvement et en annulant la constante d'intégration, la pression de l'écoulement de base s'écrit :

$$P_b = -\frac{2U\mu}{h^2} x \quad (2.10)$$

La pression est linéaire en  $x$ .

Quand on remplace  $\frac{\partial u_b}{\partial y}$  par sa valeur dans l'équation (2.7), le tenseur des contraintes du polymère à l'état de base devient :

$$\tau_{ijb} = \begin{pmatrix} 8\lambda_1\mu_2 U^2 \frac{y^2}{h^4} & -2\mu_2 U \frac{y}{h^2} \\ -2\mu_2 U \frac{y}{h^2} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

Les composantes  $\tau_{xyb}$  et  $\tau_{yxb}$  du tenseur des contraintes sont égales et varient linéairement dans la direction verticale. On note également une variation quadratique de la composante normale  $\tau_{xxb}$  dans cette même direction. L'écoulement de base permet de faire le choix des grandeurs de références.

## II.6 Adimensionnalisation des solutions de l'écoulement à l'état de base et des équations du système :

La solution de l'écoulement de base fait naturellement apparaître la demi-épaisseur de la conduite  $h$  comme longueur caractéristique, de même que la vitesse maximale au centre de la conduite  $U$  comme une vitesse caractéristique. La viscosité et la pression seront adimensionnées respectivement par la viscosité totale  $\mu$  et par le rapport  $\frac{\mu U}{h}$ . On pose :

$$\tilde{x} = \frac{x}{h}; \quad \tilde{y} = \frac{y}{h}; \quad \tilde{u} = \frac{u}{U}; \quad \tilde{t} = \frac{tU}{h}; \quad \tilde{p} = \frac{ph}{\mu U}; \quad \tilde{\tau} = \frac{\tau h}{\mu U}; \quad \tilde{\gamma} = \frac{\dot{\gamma}h}{U}$$

En omettant les tildes sur chaque variable afin d'accroître la lisibilité des équations, le tenseur de contraintes, le profil des vitesses et la pression de l'écoulement de base en variables adimensionnelles s'écrivent comme suite :

$$u_b(y) = 1 - y^2 \tag{2.12}$$

$$P_b = -2x \tag{2.13}$$

$$\tau_{xyb} = \tau_{yxb} = -2(1 - \mu_r)y \tag{2.14a}$$

$$\tau_{xxb} = 8(1 - \mu_r)\frac{\lambda_1 U}{h}y^2 \tag{2.14b}$$

$$\tau_{yyb} = 0 \tag{2.14c}$$

Ainsi, par ces mêmes grandeurs de références, on écrit les équations du système physique en variables adimensionnelles soit le système suivant :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ \frac{\rho U^2}{h} \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right] = \frac{\mu U}{h^2} [-\vec{\nabla} P + \frac{\mu_1}{\mu} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \vec{u}) + \vec{\nabla} \cdot \vec{\tau}] \\ \bar{\tau} + \left( \frac{\lambda_1 U}{h} \right) \frac{D_a}{Dt} \bar{\tau} = 2 \left( 1 - \frac{\mu_1}{\mu} \right) \ddot{\gamma} \end{cases} \tag{2.15}$$

L'écriture de ces équations adimensionnées fait apparaître les nombres sans dimension suivant :

- le nombre de Reynolds qui permet d'évaluer les effets visqueux de la solution de polymère :  $Re = \frac{\rho h U}{\mu}$
- le nombre de Weissenberg, qui est calculé ici à partir du temps de relaxation de la solution (il permet d'évaluer les effets élastiques du polymère) :  $We = \frac{\lambda_1 U}{h}$  et
- $\mu_r = \frac{\mu_1}{\mu}$  : le rapport de la viscosité dynamique du solvant par la viscosité dynamique totale.

Ces nombres sans dimension sont l'expression de l'influence des phénomènes physiques ou de leurs rapports et peuvent être utiles pour définir une base de similitude du problème équivalent. Les transitions entre écoulement stable et instable sont alors déterminées dans l'espace des paramètres de contrôle que constituent l'ensemble des nombres réduits (ou adimensionnels) spécifiques au problème. Finalement, les équations du système adimensionnées s'écrivent :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \\ Re \left[ \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} \right] = -\vec{\nabla} p + \mu_r \vec{\nabla} \cdot (\bar{\vec{\nabla}} \vec{u}) + \vec{\nabla} \cdot \bar{\vec{\tau}} \\ We \frac{D_a}{Dt} \bar{\vec{\tau}} + \bar{\vec{\tau}} = 2(1 - \mu_r) \bar{\vec{\gamma}} \end{cases} \quad (2.16)$$

Les conditions d'adhérence adimensionnées sont données par :

$$u(y = \pm 1) = 0 \quad (2.17)$$

## II.7 Analyse de stabilité linéaire :

### II.7.1 Établissement des équations de perturbation :

Pour étudier la stabilité linéaire des écoulements parallèles, des champs de petites perturbations sont superposés à l'écoulement de base et la réponse de l'écoulement global par rapport à cette excitation permet alors de caractériser sa stabilité [13]. La notion de stabilité se définit comme la capacité de l'écoulement perturbé à revenir vers l'état initial (ou état non perturbé). Le cas contraire dit écoulement instable nous intéresse dans cette étude.

Superposons maintenant à l'écoulement de base défini précédemment une perturbation infinitésimale bidimensionnelle, alors le système perturbé s'écrit :

$$(u, v, P, \tau_{ij}) = (u_b + u', 0 + v', P_b + p', \tau_{ijb} + \tau_{ij}') \quad (2.18)$$

avec :

$(u', v', p', \tau_{ij}')$  : représente les perturbations ;  $(u_b, 0, P_b, \tau_{ijb})$  : le champ de l'écoulement de base et  $(u, v, P, \tau_{ij})$  : le champ perturbé.

Ce champ perturbé doit satisfaire les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement ainsi que la loi de comportement du fluide considéré. Compte tenu du fait que les perturbations sont infinitésimales, les équations de l'écoulement perturbé sont linéarisées. Il s'en suit la déduction des équations régissant l'évolution de la perturbation. En supprimant les primes sur chaque variable afin d'accroître la lisibilité, ces dernières s'écrivent sous la forme suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.19)$$

$$R_e \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + U_b \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial U_b}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} \right] = \mu_r \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \quad (2.20)$$

$$R_e \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + U_b \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \right] = \mu_r \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) \quad (2.21)$$

$$W_e \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_b \frac{\partial}{\partial x} \right) \tau_{xx} + v \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xxb} - 2 \frac{\partial U_b}{\partial y} \tau_{xy} - 2 \tau_{xxb} \frac{\partial u}{\partial x} - 2 \tau_{xyb} \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \tau_{xx} = 2(1 - \mu_r) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.22)$$

$$W_e \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_b \frac{\partial}{\partial x} \right) \tau_{xy} + v \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xyb} - \frac{\partial U_b}{\partial y} \tau_{yy} - \tau_{xyb} \frac{\partial u}{\partial x} - \tau_{xxb} \frac{\partial v}{\partial x} - \tau_{xyb} \frac{\partial v}{\partial y} \right] + \tau_{xy} = 2(1 - \mu_r) \left[ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad (2.23)$$

$$W_e \left[ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U_b \frac{\partial}{\partial x} \right) \tau_{yy} - 2 \tau_{xyb} \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \tau_{yy} = 2(1 - \mu_r) \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.24)$$

Les conditions aux limites associées à ces équations correspondent à l'atténuation des perturbations sur les plaques. Ces équations écrites pour les perturbations représentent les équations de base pour l'étude de la stabilité linéaire.

### II.7.2 Décomposition en modes normaux :

Les équations précédentes écrites pour les perturbations sont invariantes par translation suivant  $x$  et  $t$  (mais pas suivant  $y$ ). Donc on peut chercher les solutions sous forme de modes normaux en  $\exp[i\alpha(x - ct)]$ . La décomposition en modes normaux est une technique fondamentale en analyse de stabilité linéaire [2]. Écrivons d'abord les perturbations sous la forme :

$$[u; v; p; \tau_{ij}] = [\hat{u}; \hat{v}; \hat{p}; \hat{\tau}_{ij}](y) \exp[i\alpha(x - ct)] \quad (2.25)$$

avec :  $i^2 = -1$ ,  $\alpha$  : le nombre d'onde de la perturbation dans la direction de l'écoulement et  $c$  : la vitesse de propagation.

Les grandeurs  $\hat{u}(y)$ ,  $\hat{v}(y)$ ,  $\hat{p}(y)$  et  $\hat{\tau}_{ij}(y)$  représentent respectivement les amplitudes complexes longitudinale et transversale de la vitesse, l'amplitude complexe de la pression et de la contrainte,

Ensuite, si nous introduisons la relation (2.25), dans les équations de petites perturbations il vient alors :

$$i\alpha u + \frac{dv}{dy} = 0 \quad (2.26)$$

$$W_e(-i\alpha cu + i\alpha U_b u + v \frac{dU_b}{dy} + i\alpha p) = \mu_r(-\alpha^2 + \frac{d^2}{dy^2})u + i\alpha \tau_{xx} + \frac{d}{dy} \tau_{xy} \quad (2.27)$$

$$R_e(-i\alpha cv + i\alpha U_b v + \frac{dp}{dy}) = \mu_r(-\alpha^2 + \frac{d^2}{dy^2})v + i\alpha \tau_{yx} + \frac{d}{dy} \tau_{yy} \quad (2.28)$$

$$[-i\alpha c \tau_{xx} + i\alpha U_b \tau_{xx} + v \frac{d\tau_{xx}}{dy} - 2i\alpha \tau_{xxb} u - 2 \frac{dU_b}{dy} \tau_{xy} - 2 \tau_{xyb} \frac{du}{dy}]W_e + \tau_{xx} = 2i\alpha(1 - \mu_r) \quad (2.29)$$

$$[-i\alpha c \tau_{xy} + i\alpha U_b \tau_{xy} + v \frac{d\tau_{xy}}{dy} - \frac{dU_b}{dy} \tau_{yy} - i\alpha \tau_{xyb} u - i\alpha \tau_{xxb} v - \tau_{xyb} \frac{dv}{dy}]W_e + \tau_{xy} = (1 - \mu_r)(i\alpha v + \frac{du}{dy}) \quad (2.30)$$

$$[-i\alpha c \tau_{yy} + i\alpha U_b \tau_{yy} - 2i\alpha \tau_{xyb} v]W_e + \tau_{yy} = 2(1 - \mu_r) \frac{dv}{dy} \quad (2.31)$$

On pose :  $\frac{dn}{dy^n} = D^n$ ,  $\frac{dU_b}{dy} = U'_b$ ,  $\frac{d^2U_b}{dy^2} = U''_b$  et  $\frac{d\tau_{ij}}{dy} = \tau'_{ijb}$

Puis, en éliminant la pression par différenciation croisée des équations (2.27) et (2.28), et en exprimant  $u$  en fonction de  $v$  compte tenu de l'équation (2.26), nous obtenons une équation différentielle du quatrième appelant équation d'Orr-Sommerfeld. Elle est exprimée en fonction de l'amplitude de la vitesse transversale comme suit :

$$[\mu_r(D^2 - \alpha^2)^2 - i \operatorname{Re}(\alpha U_b - \alpha c)(D^2 - \alpha^2) + i \operatorname{Re} \alpha U_b''] \hat{v} = -\alpha^2 D(\hat{\tau}_{xx} - \hat{\tau}_{yy}) + i \alpha(D^2 + \alpha^2) \hat{\tau}_{xy} \quad (2.31)$$

### II.7.3 Fonction de courant

La fonction de courant a pour but de simplifier le problème en ramenant l'étude du champ de vitesse (vecteur) en champ scalaire. Introduisons maintenant la fonction de courant  $\psi(x, y; t)$  (telle que  $\frac{\partial \psi}{\partial y} = u$  et  $\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v$ ) qui est associée la vitesse de la perturbation. Elle peut être exprimée de la manière suivante :

$$\psi(x, y; t) = \hat{\varphi}(y) \exp[i\alpha(x - ct)] \quad (2.32)$$

où  $\hat{\varphi}(y)$  représente l'amplitude fonction de courant. Enfin, on remplace l'amplitude de la vitesse transversale  $\hat{v}$  de l'équation (2.33) précédente par  $(-i\alpha\varphi)$ , on obtient alors l'équation d'Orr-Sommerfeld écrite en fonction de l'amplitude de la fonction de courant.

$$[\mu_r(D^2 - \alpha^2)^2 - i \operatorname{Re}(\alpha U_b - \alpha c)(D^2 - \alpha^2) + i \operatorname{Re} \alpha U_b''] \hat{\varphi} = -\alpha^2 D(\hat{\tau}_{xx} - \hat{\tau}_{yy}) + i \alpha(D^2 + \alpha^2) \hat{\tau}_{xy} \quad (2.34)$$

C'est cette équation qui régit l'évolution de la perturbation.

## II.8 Conclusion

Dans ce présent chapitre, nous avons pu établir pour le problème physique un système d'équations mathématiques, complétées par les conditions aux limites. Tout d'abord, nous avons considéré un écoulement de base dont on a déterminé sa solution. Cette solution de base nous permet de faire le choix des grandeurs de références. Ensuite, nous avons utilisé ces grandeurs de références pour rendre adimensionnel notre système d'étude et pour trouver ces paramètres de contrôles. Enfin, l'application de la théorie des perturbations linéaires nous a permis de trouver le système d'équation gouvernant l'étude de la stabilité linéaire, puis d'Orr-Sommerfeld dont sa résolution numérique est l'objet du chapitre suivant.

## CHAPITRE III

### Modélisation Numérique

#### III.1 Introduction :

L'équation d'Orr-Sommerfeld déterminée dans chapitre précédent (soit écrite en fonction de l'amplitude de la vitesse transversale (2.32) ou soit en fonction de l'amplitude de la fonction de courant (2.34)), est une équation différentielle du quatrième ordre, fortement couplé donc difficile à résoudre analytiquement. L'utilisation des méthodes numériques s'avère indispensable. La modélisation numérique consiste en la recherche de solution à des problèmes analytiquement insolubles par des méthodes numériques.

Dans ce présent travail, nous allons utiliser, la méthode de collocation (méthode dite « pseudo-spectrale ») dans le cas où les fonctions de bases sont des polynômes de Chebyshev pour approcher l'équation d'Orr-Sommerfeld par une équation équivalente sous forme matricielle.

#### III.1 L'équation d'Orr-Sommerfeld

En substituant les équations linéarisées des amplitudes de contraintes issues de la loi de comportement équations (2.29) (2.30) et (2.31), dans l'équation d'Orr-Sommerfeld (2.34), il vient alors une équation beaucoup plus simple à analyser qui dépend uniquement de l'amplitude de la fonction de courant en plus des paramètres de contrôles ( $\alpha, c, R_e, W_e, \mu_r$ ), soit :

$$\begin{aligned}
 & \mu_r(D^4 - 2\alpha^2 D^2 + \alpha^4)\varphi + \frac{(1 - \mu_r)}{S} \sum_{k=0}^4 f_k D^k \varphi \\
 & = i\alpha \operatorname{Re}[ (u_b - c)(D^2 - \alpha^2) - U_b'' ] \varphi
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

avec :  $S = 1 + i\alpha W_e (u_b - c)$  ;  $u_b(y) = 1 - y^2$  ;

$$f_4 = 1 \quad ; \quad f_3 = 2DS(1 - \frac{1}{S}) \quad ; \quad f_2 = -2\alpha^2 + 3D^2S(1 - \frac{1}{S}) + 2(DS)^2(1 - \frac{1}{S})^2 ;$$

$$f_1 = -2\alpha^2 DS(1 - \frac{1}{S}) + 4(DS)(D^2 S)(1 - \frac{1}{S})^2 - 4(\frac{1}{S} - \frac{1}{S^2})(DS)^3$$

$$f_0 = \alpha^4 - \alpha^2 D^2 S(1 - \frac{1}{S}) - 2\alpha^2 (DS)^2(1 + \frac{1}{S^2}) - 3 \frac{(D^2 S)^2}{S} - 4 \frac{(DS)^4}{S^2} - 6(DS)^2(D^2 S)(\frac{1}{S} - \frac{1}{S^2})$$

Cette équation d'Orr-Sommerfeld prend en compte les effets de la vitesse d'écoulement transversal. C'est une équation différentielle du quatrième ordre à coefficients non constants, il faut donc quatre conditions limites pour qu'une solution numérique et /ou analytique puisse être trouvée. L'atténuation des perturbations sur les plaques, c'est-à-dire l'annulation de la vitesse sur les plaques, permet d'obtenir quatre conditions associées à l'amplitude de la fonction de courant.

$$\varphi(\pm 1) = \varphi'(\pm 1) = 0 \quad (3.2)$$

### Remarques :

Le premier terme du membre de gauche de cette équation reflète la viscosité du fluide et s'annule lorsque  $\mu_r = 0$  c'est-à-dire lorsqu'on a un fluide de Maxwell. L'équation d'Orr-Sommerfeld (3.1) devient l'équation trouvée dans [8] :

$$\sum_{k=0}^4 f_k D^k \varphi - i\alpha S \operatorname{Re}[(u_b - c)(D^2 - \alpha^2) - U_b''] \varphi \quad (3.3)$$

Le second terme du membre de gauche est relatif à l'élasticité du fluide et s'annule lorsque  $\mu_r = 1$ , c'est-à-dire lorsqu'on a un fluide newtonien. L'équation (3.1) se réduit alors à l'équation d'Orr-Sommerfeld établie par Orszag (1971) [11] :

$$[D^4 - 2\alpha^2 D^2 + \alpha^4] \varphi - i\alpha \operatorname{Re}[(u_b - c)(D^2 - \alpha^2) - U_b''] \varphi \quad (3.4)$$

Cette même équation est retrouvée si le nombre de Weissenberg  $We = 0$ , c'est-à-dire lorsque les effets élastiques sont absents (voir même très faibles) sur l'écoulement.  $We = 0$ , alors  $S = 1 + i\alpha W_e (u_b - c)$  se réduit à  $S = 1$ . En introduisant ce résultat dans les relations  $f_k$ , il vient que  $f_0 = \alpha^4$ ,  $f_1 = 0$ ,  $f_2 = -2\alpha^2$ ,  $f_3 = 0$ ,  $f_4 = 1$ . Ceci permet d'obtenir l'équation d'Orr-Sommerfeld (3.4).

#### III.1.1 L'équation aux valeurs propres

Le problème qui apparaît dans la modélisation des fluides viscoélastique si situe précisément au niveau du couplage entre le champ de vitesse et le tenseur des extra contraintes. Ceci apparaît dans l'écriture du second terme du membre de gauche de l'équation d'Orr-Sommerfeld (3.1) et fait intervenir dans les relations  $f_k$  des termes en  $S^{-1}$  qui rendent difficile l'étude et la discréétisation de ce type de modèle. Une telle difficulté est surnommée problème à haut nombre de Weissenberg. Lorsqu'on considère la stabilité temporelle, l'équation d'Orr-

Sommerfeld modifiée (3.1) doit être résolue pour la vitesse de phase  $c$ , pour un nombre d'onde  $\alpha$  réel et dans le sens de l'écoulement. Le problème temporel peut être écrit comme un problème de valeurs propres généralisé de la forme :

$$A\varphi = cB\varphi \quad (3.5)$$

où  $A$  et  $B$  sont deux matrices dépendant des paramètres de contrôles du système tels que  $\mu_r$ ;  $\alpha$ ;  $W_e$  et  $R_e$ ) et  $\varphi$  est la fonction propre. Pour la situation d'écoulement pour laquelle  $We \ll 1$  (proche de zéro) les matrices  $A$  et  $B$  associées à l'équation d'Orr-Sommerfeld (3.1) sont données par :

$$A = \{D^4 - 2\alpha^2 D^2 + \alpha^4 I\} - i\{\alpha(1 - \mu_r)We u_b(D^4 - 2\alpha^2 D^2 + \alpha^4 I) + \alpha \operatorname{Re}(u_b(D^2 - \alpha^2 I) - U_b'')\}$$

$$B = -i\alpha[(1 - \mu_r)We(D^4 - 2\alpha^2 D^2 + \alpha^4 I) + \operatorname{Re}(D^2 - \alpha^2 I)]$$

Ce problème aux valeurs propres admet de solution non nulle que si la célérité et le nombre d'onde vérifient une relation de dispersion  $D(\alpha, c, R_e, W_e, \mu_r) = 0$ .

Lorsqu'on considère l'évolution des perturbations dans l'espace, l'équation d'Orr-Sommerfeld modifiée (3.1) est résolue pour un nombre d'onde  $\alpha$  dans le sens du flux, en fixant une valeur réelle pour la fréquence.

L'idée est de ramener l'équation d'Orr-Sommerfeld modifiée (3.1) sous la forme d'une équation aux valeurs propres selon les différentes résolutions. Puisque le champ de vitesse de l'écoulement de base  $u_b(y) = 1 - y^2$ , est une fonction paire et les conditions aux limites sont symétriques dans ce problème, il est donc possible de séparer les modes symétriques et les modes antisymétriques et rechercher parmi ces deux modes ceux qui seront instables. Cependant, l'analyse de la stabilité de l'écoulement de Poiseuille plan des fluides newtoniens effectuée par Orszag (1971) [11] a montré que les modes antisymétriques étaient plus stables que les modes symétriques. C'est pour cela les modes symétriques sont étudiés dans le cas des fluides viscoélastiques [8].

### **III.2 Résolution numérique de l'équation d'Orr-Sommerfeld par la méthode spectrale de collocation**

Les méthodes spectrales sont des méthodes d'approximation des fonctions solutions d'équation différentielles et équation aux dérivées partielles. L'application de ces méthodes

spectrales ou pseudo-spectrales aux simulations numériques est apparue au début des années 1970. Les méthodes de collocation utilisant les polynômes de Chebyshev constituent l'approche standard pour la résolution de l'équation d'Orr-Sommerfeld en raison de sa rapidité, de sa précision et de la simplicité de mise en œuvre comme l'a signalé Orszag [11]. L'utilisation des méthodes de collocation pseudo-spectrale de Chebyshev consiste à projeter l'amplitude de la fonction propre sur la base des polynômes orthogonaux de Chebyshev  $T_n(y)$  et à chercher les coefficients  $a_n$ . Notre problème est d'approximer la fonction de courant  $\varphi$  associée à l'équation différentielle d'Orr-Sommerfeld (3.1) du fluide d'Oldroyd-B par une fonction d'essai, tronquée au rang  $N$  selon l'extension :

$$\varphi_N(y) = \sum_{n=0}^N a_n T_n(Y) \quad (3.6)$$

où  $T_n(y)$  représentent les polynômes de Chebyshev et  $a_n$  les coefficients à chercher.

Les polynômes Chebyshev (de premier espèce) sont définis par  $T_n(y) = \cos(n\theta)$  pour  $\theta$  réel tel que  $\theta = \arccos(y)$  et pour tout entier naturel  $n$ . Cette définition permet de construire les premiers polynômes Chebyshev  $T_0(y) = 1$ ;  $T_1(y) = y$  et  $T_2(y) = 2y^2 - 1$ . Les polynômes de Chebyshev satisfont la relation de récurrence à trois termes suivants :

$$T_{n+1}(y) + T_{n-1}(y) = 2yT_n(y)$$

À partir de cette relation, on peut retrouver les polynômes  $T_n(y)$  pour  $n \geq 2$ . La famille des polynômes de Chebyshev  $T_n$  forme une base dans l'espace de Hilbert. Les polynômes de base vérifient la relation d'orthogonalité suivante :

$$(T_n, T_m) = \int_{-1}^1 T_n(y) T_m(y) w(y) dy = \frac{\pi}{2} c_n \delta_{nm}$$

avec  $\delta_{nm} = \begin{cases} 1; & n = m \\ 0; & n \neq m \end{cases}$ ;  $c_n = \begin{cases} 2; & n = 0 \\ 1; & n \geq 1 \end{cases}$  et  $w(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$  est la fonction poids (elle permet de pondérer l'erreur sur  $[-1,1]$ ).

Les coefficients  $a_n$  de  $\varphi_N(y)$  représentent les projections orthogonales de  $\varphi_N(y)$  sur la base  $T_n(y)$ . Ils peuvent être exprimés sous la forme suivante :

$$a_n = \frac{2}{\pi c_n} \int_{-1}^1 \varphi(y) T_n(y) w(y) dy$$

Les propriétés de dérivation des séries de polynômes de Chebyshev vont aussi être utilisées pour la détermination des coefficients. La dérivée d'ordre  $p$  de  $\varphi_N(y)$  est donnée par :

$$\varphi_N^{(p)}(y) = \sum_{n=0}^{N-p} a_n^{(p)} T_n(y) = \sum_{n=0}^{N-p} a_n T_n^{(p)}(y)$$

$$\text{avec } c_{n-1}a_{n-1}^{(p)} - a_{n+1}^{(p)} = 2na_n^{(p-1)}; n \geq 1$$

### III.2.1 Formulation de l'équation aux valeurs propres d'après les coefficients $a_n$

Après cette partie introductive consacrée à la définition des polynômes de Chebyshev et le rappel de quelques propriétés qui seront utilisées dans ce travail, formulons d'abord l'équation d'Orr-Sommerfeld selon l'extension  $\varphi_N$  de  $\varphi$  sous la forme :

$$\mu_r(D^4 - 2\alpha^2 D^2 + \alpha^4)\varphi_N + \frac{(1-\mu_r)}{S}(f_4 D^4 \varphi_N + f_3 D^3 \varphi_N + f_2 D^2 \varphi_N + f_1 D \varphi_N + f_0 \varphi_N) = i\alpha \operatorname{Re}[(u_b - c)(D^2 - \alpha^2) - U_b'']\varphi_N \quad (3.7)$$

On définit l'opérateur d'Orr-Sommerfeld par :

$$L_{Orr} = \mu_r(D^4 - 2\alpha^2 D^2 + \alpha^4)\varphi_N + \frac{(1-\mu_r)}{S}(f_4 D^4 \varphi_N + f_3 D^3 \varphi_N + f_2 D^2 \varphi_N + f_1 D \varphi_N + f_0 \varphi_N) - i\alpha \operatorname{Re}[(u_b - c)(D^2 - \alpha^2) - U_b'']\varphi_N \quad (3.8)$$

Pour le cas où  $We \ll 1$  :

$$[1 + i\alpha c We(1 - \mu_r) - i\alpha We(1 - \mu_r)U_{bN}][D^4 - 2\alpha^2 D^2 + \alpha^4]\varphi_N - i\alpha \operatorname{Re}[(U_{bN} - c)(D^2 - \alpha^2) - U_{bN}'']\varphi_N \quad (3.9)$$

$L_{OrrS}$  représente l'opérateur d'Orr-Sommerfeld pour le cas simplifié où  $We \ll 1$ . Cette relation peut être développée en faisant apparaître les produits de convolution de la façon suivante :

$$L_{OrrS} = [D^4 - 2\alpha^2 D^2 + \alpha^4] - i\alpha \operatorname{Re}\{[D^2 - \alpha^2] - [y^2 D^2 - \alpha^2 y^2] - i\alpha \operatorname{Re}[D^2 + \alpha^2] + i\alpha(1 - \mu_r)We[D^4 - 2\alpha^2 D^2 + \alpha^4] \quad (3.10)$$

Formulons ensuite, tous les coefficients  $a_n^{(p)}$  d'après les coefficients  $a_n$  (méthode appliquée par Orszag) et pour cela, compte tenu de l'écriture de  $L_{OrrS}$  (3.10), nous allons utiliser les coefficients  $a_n^{(4)}$  et  $a_n^{(2)}$  écrit en fonction des  $a_n$  dont leurs expressions sont déjà déterminées dans, de même que les coefficients des produits de convolutions  $y^2 \varphi_n(y)$  et  $y^2 D^2 \varphi_n(y)$ . Il se résume alors à :

$$L_{Orr}\varphi_N(y) = \sum_{n=0}^N L_{Orr}a_n T_n(Y) \quad \text{et} \quad L_{OrrS}\varphi_N(y) = \sum_{n=0}^N L_{Orr}a_n T_n(Y) \quad (3.11)$$

Les coefficients de  $a_n^{(4)}$  et  $a_n^{(2)}$  en fonction des  $a_n$  sont donnés respectivement par les relations :

$$c_n a_n^{(4)} = \frac{1}{24} \sum_{\substack{p=n+4 \\ p+n:\text{pair}}}^N p [p^2(p^2 - 4)^2 - 3n^2p^4 + 3n^4p^2 - n^2(n^2 - 4)^2] a_p$$

$$\text{avec } a_{N-3}^{(4)} = a_{N-2}^{(4)} = a_{N-1}^{(4)} = a_N^{(4)} = 0$$

$$\text{et } c_n a_n^{(2)} = \sum_{\substack{p=n+2 \\ p+n:\text{pair}}}^N p [p^2 - n^2] a_p$$

$$\text{avec } a_{N-1}^{(2)} = a_N^{(2)} = 0$$

Les coefficients de la convolution  $4y^2\varphi_n(y)$  sont donnés par :

$$b_n = c_{n-2}a_{n-2} + (c_n + c_{n-1})a_n + a_{n+2}$$

Les coefficients de la convolution  $y^2D^4\varphi_n(y)$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} [c_{n-2}a_{n-2}^{(4)} + (c_n + c_{n-1})a_n^{(4)} + a_{n+2}^{(4)}] &= \frac{1}{4 \times 24} \left\{ \sum_{\substack{p=n+4 \\ p+n:\text{pair}}}^N [p^3(p^2 - 4)^2 - 3(n-2)^2p^5 + \right. \\ &\quad 3(n-2)^4p^3 - (n-2)^2 p((n-2)^2 - 4)^2] a_p + \frac{c_n + c_{n-1}}{c_n} \sum_{\substack{p=n+4 \\ p+n:\text{pair}}}^N [p^3(p^2 - 4)^2 - 3n^2p^5 + \right. \\ &\quad 3n^4p^3 - n^2 p(n^2 - 4)^2] a_p + \sum_{\substack{p=n+4 \\ p+n:\text{pair}}}^N [p^3(p^2 - 4)^2 - 3(n+2)^2p^5 + 3(n+2)^4p^3 - (n+ \right. \\ &\quad 2)^2p((n+2)^2 - 4)^2] a_p \} \end{aligned}$$

Les coefficients de la convolution  $y^2D^2\varphi_n$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} [c_{n-2}a_{n-2}^{(2)} + (c_n + c_{n-1})a_n^{(2)} + a_{n+2}^{(2)}] &= \frac{1}{4} [d_{n-2} \sum_{\substack{p=n+2 \\ p+n:\text{pair}}}^N p(p^2 - (n^2 - 2)) a_p + \\ &\quad \sum_{\substack{p=n+2 \\ p+n:\text{pair}}}^N p(p^2 - (n^2 + 2)) a_p + \frac{c_n + c_{n-1}}{c_n} \sum_{\substack{p=n+2 \\ p+n:\text{pair}}}^N p(p^2 - n^2) a_p + 4n(n-1)a_n] \end{aligned}$$

Les détails concernant la détermination de ces coefficients se trouvent dans l'annexe de la référence. Une fois ces coefficients connus, l'opérateur différentiel d'Orr-Sommerfeld appliqué à l'approximation de la fonction de courant  $L_{Orr}\varphi_N(y)$  sera exprimé à en fonction de ces derniers.

### III.2.2 Formulation des conditions aux limites d'après les coefficients $a_n$

Ce système algébrique doit être complété par les conditions aux limites développées dans l'espace spectral. Et pour cela, nous tenons compte des propriétés  $T_n(\pm 1) = (\pm 1)^n$  et  $T'_n(\pm 1) = (\pm 1)^{n-1}n^2$ . Ces conditions écrites en fonction des coefficients  $a_n$  sont données par:

$$\sum_{\substack{n=0 \\ n:\text{pair}}}^N a_n = 0 ; \sum_{\substack{n=0 \\ n:\text{pair}}}^N n^2 a_n = 0 ; \sum_{\substack{n=1 \\ n:\text{impair}}}^N a_n = 0 ; \sum_{\substack{n=1 \\ n:\text{impair}}}^N n^2 a_n = 0 \quad (3.12)$$

Les conditions aux limites sont symétriques et peuvent être séparées en deux groupes sans couplages entre les coefficients  $a_n$  pour des  $n$  pairs et impairs.

### III.2.3 Ecriture des systèmes algébriques par la méthode des résidus pondérés

La résolution approximative de notre système par la méthode des résidus pondérés consiste à annuler les résidus selon une certaine moyenne :

$$(\text{Res}_N, g_j) = 0 \quad (3.13)$$

où  $\text{Res}_N$  est le résidu de rang  $N$ . Il s'écrit sous la forme :

$$\text{Res}_N = \sum_{n=0}^N L_{\text{Orr}} a_n T_n(Y) = \sum_{n=0}^N A_n T_n(Y) \quad (3.14)$$

Dans ce cas présent, annulons le résidu en le multipliant scalairement par un polynôme de Chebyshev de base  $T_m$  pour ( $m \neq n$ ) compte tenu de l'expression du produit scalaire  $(T_n, T_m) = \frac{\pi}{2} c_n \delta_{nm}$ . Après arrangement des termes, puis multiplication par  $c_n$ , on obtient pour le cas où  $We \ll 1$ , un système d'équation linéaire de  $(N+1)$  équations à  $(N+1)$  inconnues qui s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$[(A4A) - 2\alpha^2(A2A) + \alpha^4(AI) - i\alpha\{\text{Re}(AC1) + (1 - \mu_r)We(AC2)\}]X = c'(E)X \quad (3.15)$$

Ce qui peut encore s'écrire sous la forme :

$$\{(A_r) + i(A_i)\}X = c'(E_r)X \quad (3.16)$$

Les inconnues de ce système sont les coefficients ( $a_0, a_1, a_2, \dots, a_N$ ), définissent la matrice (vecteur colonne) associée  $X = [a_n]_{n=0, \dots, N:pair}$ .  $c' = -i\alpha c$ , les valeurs propres du système sont les  $N + 1$  valeurs de  $c'$ .

$$\text{Avec : } (A_r) = [(A4A) - 2\alpha^2(A2A) + \alpha^4(AI)] ; (A_i) = -[\alpha\{\text{Re}(AC1) + (1 - \mu_r)\text{We}(AC2)\}]$$

$$(AC1) = (A2A) - \alpha^2(AI) - (E3) + \alpha^2(E2) - 2(AI)$$

$$(AC2) = (A4A) - 2\alpha^2(A2A) + \alpha^4(AI) - (E4) + 2\alpha^2(E3) - \alpha^4(E2)$$

$$(E) = (E_r) = \text{Re}\{(A2A) + \alpha^2(AI)\} + (1 - \mu_r)\text{We}\{(A4A) - 2\alpha^2(A2A) + \alpha^4(AI)\}$$

$$(A4A) \Rightarrow D^4\varphi, (A2A) \Rightarrow D^2\varphi ; (E4) \Rightarrow y^2D^4\varphi, (E3) \Rightarrow y^2D^2\varphi, (E2) \Rightarrow y^2\varphi.$$

Sur le système (3.15), la célérité  $\mathbf{c}$  intervient de façon linéaire alors que le nombre d'onde  $\boldsymbol{\alpha}$  intervient à la puissance quatre. Pour l'analyse de la stabilité temporelle, il suffit de considérer les modes de nombre d'ondes réel positif et la vitesse de propagation  $\mathbf{c}$  complexe  $c = c_r + ic_i$ . On rappelle que dans ce cas d'analyse de stabilité, la perturbation rend l'écoulement instable si la partie imaginaire  $c_i$  de la vitesse de propagation  $\mathbf{c}$  est positive. Pour une analyse de stabilité spatiale, la fréquence est considérée comme réel et le nombre d'onde complexe et la perturbation de groupe correspond à une vitesse de groupe nulle[16].

### III.3 Conclusion

Dans ce chapitre consacré à la modélisation numérique de l'équation d'Orr-Sommerfeld établie pour le modèle de fluide viscoélastique d'Oldroyd-B, nous avions rappelé d'abord les propriétés de bases des polynômes de Chebyshev, ensuite nous avions développé la fonction de courant dans la base de polynômes Chebyshev de premières espèces enfin, la méthode des résidus pondérés nous a permis de déterminer la matrice complexe ( $A$ ) associée au système.

## Conclusion générale et perspective

### Conclusion générale :

Le travail présenté dans ce mémoire porte essentiellement sur l'établissement des équations gouvernant l'étude la stabilité de l'écoulement de Poiseuille plan des fluides viscoélastiques dans une conduite délimitée par deux plaques planes d'axe horizontal. Le fluide viscoélastique considéré est une solution de polymère qui obéit au modèle d'Oldroyd-B. Dans cette étude, nous avons développé une approche analytique permettant de trouver la solution de base dans le cadre de l'écoulement incompressible et unidirectionnel près de l'équilibre. À cet écoulement de base on a superposé un champ de perturbations infinitésimales. En considérant les hypothèses de la théorie de la stabilité linéaire, nous avons déterminé l'équation d'Orr-Sommerfeld modifiée qui régit l'étude de la stabilité linéaire pour le cas du fluide viscoélastique d'Oldroyd-B. La méthode spectrale de collocation (méthode dite « pseudo-spectrale ») dans le cas où les fonctions de bases sont des polynômes de Chebyshev a été utilisée pour résoudre numériquement cette équation gouvernant l'analyse de la stabilité compte tenu l'hypothèse des faibles nombres de Weissenberg. Nous avions enfin, écrit cette équation sous forme de système algébrique qui est soluble numériquement par une méthode QR.

### Perspectives :

Le travail présenté dans ce mémoire n'est qu'une modélisation mathématique de l'analyse de la stabilité de linéaire l'écoulement de Poiseuille des fluides viscoélastiques. La meilleure façon de le conclure est d'en donner des perspectives non exhaustives. Il serait intéressant :

De poursuivre cette étude, afin de résoudre numériquement le système algébrique établi pour le fluide d'Oldroyd-B et de déterminer les modes instables.

Revisiter cette étude avec d'autres modèles de fluides viscoélastiques dont la viscosité varie avec le taux de déformation.

## Références bibliographiques

- [1] Baranger, J. and Sandri, D. « Finite element approximation of viscoelastic fluid flow: Existence of approximate solutions and error bounds », *Numer. Math.*, vol. 63, n° 1, p. 13–27, 1992.
- [2] Charru, F. *Instabilités hydrodynamiques*, Paris, EDP science, 2007.
- [3] Evans, J. D., Palhares Junior, I. L. and Oishi, C. M. , “Stresses of PTT, Giesekus, and Oldroyd-B fluids in a Newtonian velocity field near the stick-slip singularity,” *Phys. Fluids*, vol. 29, no. 12, 2017, doi: 10.1063/1.4993782.
- [4] Kama, I., Sow, L., Kpode, K., et. M.-M. M. Engineering, and undefined 2018, “Effects of the Reynolds and Weissenberg’s Numbers on the Stability of Linear Pipe Flow of Viscous Fluid,” *scirp.org*, Accessed: Apr. 13, 2021. [Online]. Available: <https://www.scirp.org/journal/paperinformation.aspx?paperid=88903>.
- [5] Herzhaft, B., “Additifs réducteurs de perte de charge en écoulement,” 2000. Accessed: Apr. 17, 2021. [Online]. Available: [https://ogst.ifpenergiesnouvelles.fr/articles/ogst/abs/2000/05/herzhaft\\_v55n5](https://ogst.ifpenergiesnouvelles.fr/articles/ogst/abs/2000/05/herzhaft_v55n5).
- [6] Khorasani, N. and Mirzalou, B. « Numerical analysis of the viscoelastic fluid in plane Poiseuille flow », *Int. J. Adv. Eng. Technol.*, vol. 3, n° 1, p. 572, 2012.
- [7] Lamine, M. et Hifdi, A. « Stabilité hydrodynamique de l’écoulement dans un canal d’un fluide de second ordre en présence d’un écoulement transversal », *A*, vol. 12, n° 21, p. 1.
- [8] Lee, K. C. and Finlayson, B. A. « Stability of plane Poiseuille and Couette flow of a Maxwell fluid », *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 21, n° 1, p. 65–78, 1986.
- [9] Limited, C. “On the formulation of rheological equations of state,” *Proc. R. Soc. London. Ser. A. Math. Phys. Sci.*, vol. 200, no. 1063, pp. 523–541, 1950, doi: 10.1098/rspa.1950.0035.
- [10] Ouazzani, J. K., Platten, Müller, H. W. et Lücke, M. « Etude de la convection mixte entre deux plans horizontaux à températures différentes—III », *Int. J. Heat Mass Transf.*, vol. 38, n° 5, p. 875–886, 1995.
- [11] Orszag, S. A. « Accurate solution of the Orr–Sommerfeld stability equation », *J. Fluid Mech.*, vol. 50, n° 4, p. 689–703, 1971.
- [12] Rafiki, A., Hifdi, A. et Ouazzan T. M. « Stabilité hydrodynamique linéaire des écoulements plans de Poiseuille de fluides viscoélastiques en présence d’un champ magnétique transversal », in *Congrès français de mécanique*, 2013.

- [13] Ray, R. N., Samad, A. et Chaudhury, T. K. « Low Reynolds number stability of MHD plane Poiseuille flow of an Oldroyd fluid », *Int. J. Math. Math. Sci.*, vol. 23, n° 9, p. 617–625, 2000.
- [14] Sadeghy, K., Taghavi, S. M., Khabazi, N., Mirzadeh, M. et Karimfazli, I. « On the use of hydrodynamic instability test as an efficient tool for evaluating viscoelastic fluid models », *Adv Stud. Theor Phys.*, vol. 1, n° 8, p. 367–379, 2007.
- [15] Salloum, Z. « Étude mathématique d'écoulements de fluides viscoélastiques dans des domaines singuliers », PhD Thesis, 2008.
- [16] Shaqfeh, E. S., Larson, R. G. et Fredrickson, G. H. « The stability of gravity driven viscoelastic film-flow at low to moderate Reynolds number », *J. Non-Newton. Fluid Mech.*, vol. 31, n° 1, p. 87–113, 1989.
- [17] Squire, H. B. « On the stability for three-dimensional disturbances of viscous fluid flow between parallel walls », *Proc. R. Soc. Lond. Ser. Contain. Pap. Math. Phys. Character*, vol. 142, n° 847, p. 621–628, 1933.
- [18] Vanderborck, G. et Platten, J. K. « Stabilite de l'écoulement de Poiseuille des liquides viscoélastiques », in *Les instabilités hydrodynamiques en convection libre, forcée et mixte*, Springer, 1978, p. 186–202.
- [19] Valette, R., “fluides viscoélastiques . Application au procédé de  $\text{A}^3$  à  $\text{AEI}$ ,” 2010.

## Résumé

Le présent travail est consacré à l'étude des instabilités de Poiseuille d'un écoulement de Poiseuille plan des fluides viscoélastiques (modèle d'Oldroyd-B) entraîné par un gradient de pression horizontal constant. Nous avions rappelé tout d'abord les lois de comportement d'une solution de polymère qui obéit aux modèles de fluides viscoélastiques d'Oldroyd-B (ou de Maxwell) ainsi que le passage d'un modèle à un autre. Ensuite, nous avions établi les équations gouvernant l'écoulement d'un fluide d'Oldroyd-B dans une conduite délimitée par deux plaques planes d'axe horizontal. Puis, nous avions développé une approche analytique qui nous a permis de trouver la solution de base dans le cadre des écoulements stationnaires, incompressibles et unidirectionnels près de l'équilibre d'un fluide viscoélastique d'Oldroyd-B. À cette solution, nous avions superposé une perturbation bidimensionnelle. L'analyse de stabilité par la théorie des perturbations infinitésimales, nous a permis d'établir l'équation d'Orr-Sommerfeld qui régit l'étude de la stabilité. Enfin, compte tenu l'hypothèse des faibles nombres de Weissenberg, la méthode spectrale de collocation dans le cas où les fonctions de bases sont des polynômes de Chebyshev a été développée pour traduire cette équation d'Orr-Sommerfeld sous la forme d'un système algébrique soluble numériquement.

**Mots-clefs :** instabilités de Poiseuille, fluides viscoélastiques, modèle d'Oldroyd-B, modèle Maxwell, méthode de collocation, polynômes de Chebyshev.

## Abstract

This work is devoted to the study of Poiseuille instabilities of a plane Poiseuille flow of viscoelastic fluids (Oldroyd-B model) driven by a constant horizontal pressure gradient. We first recalled the constitutive laws of a polymer solution that obeys Oldroyd-B (or Maxwell's) viscoelastic fluid models as well as the passage from one model to another. Next, we established the equations governing the flow of an Oldroyd-B fluid in a pipe bounded by two flat plates of horizontal axis. Then, we had developed an analytical approach which allowed us to find the basic solution in the framework of stationary, incompressible and unidirectional flows near the equilibrium of an Oldroyd-B viscoelastic fluid. On this solution, we had superimposed a two-dimensional perturbation. The analysis of stability by the theory of infinitesimal perturbations, allowed us to establish the Orr-Sommerfeld equation which governs the study of stability. Finally, taking into account the hypothesis of low Weissenberg numbers, the spectral collocation method in the case where the base functions are Chebyshev polynomials was developed to translate this Orr-Sommerfeld equation in the form of a system numerically soluble algebraic.

**Keywords:** Poiseuille instabilities, viscoelastic fluids, Oldroyd-B model, Maxwell model, collocation method, Chebyshev polynomials.