

# Table des matières

Résumé	i
Abstract	iii
Remerciements	v
Table des matières	vii
Table des figures	ix
Liste des tableaux	xi
Notations	xiii
Abréviations	xv
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2 Démixage des images hyperspectrales</b>	<b>5</b>
2.1 Image Hyperspectrale . . . . .	5
2.1.1 Acquisition des images hyperspectrales . . . . .	6
2.1.2 Modélisation tensorielle des images hyperspectrales . . . . .	8
2.2 Problématique du démixage en imagerie hyperspectrale . . . . .	9
2.2.1 Modèle de mélange linéaire . . . . .	10
2.2.2 État de l'art sur le démixage des HSI . . . . .	12
2.3 Importance de l'estimation du sous-espace signal . . . . .	14
2.4 Performances de différentes méthodes de démixage dans le cas de l'estimation de pigments de végétaux . . . . .	15
2.5 Conclusion . . . . .	19
<b>3 Détection des objets de petite taille</b>	<b>21</b>
3.1 Détection en imagerie hyperspectrale . . . . .	21
3.1.1 Filtre adaptatif : AMF . . . . .	22
3.1.2 Détecteur angulaire : ACE . . . . .	23
3.1.3 Détecteur d'anomalie : RX . . . . .	23
3.2 Détection des pixels rares par seuillage de l'erreur quadratique de reconstruction . . . . .	24

## TABLE DES MATIÈRES

---

3.2.1	Erreur de reconstruction à partir des endmembers dominants	24
3.2.2	Critère de seuillage pour détecter les pixels rares . . . . .	25
3.3	Détection des pixels rares à partir d'ondelettes . . . . .	27
3.3.1	Introduction aux ondelettes . . . . .	27
3.3.1.1	La transformée en ondelettes continue . . . . .	27
3.3.1.2	La transformée en ondelette discrète . . . . .	28
3.3.1.3	Ondelettes pour les signaux multidimensionnels .	31
3.3.2	Détection d'anomalies à partir d'ondelettes . . . . .	32
3.3.2.1	Expérimentation sur des données simulées . . . .	34
3.3.2.2	Expérimentations sur des données réelle HYDICE	36
3.4	Conclusion . . . . .	39
<b>4</b>	<b>Démixage en présence de pixels rares</b>	<b>41</b>
4.1	Le démixage hyperspectral, un problème d'optimisation . . . . .	41
4.1.1	Contrainte de somme à l'unité relaxée . . . . .	42
4.1.2	Démixage par la NMF . . . . .	43
4.1.2.1	Problème des moindres carrés . . . . .	44
4.1.2.2	Problème des moindres carrés contraint . . . . .	46
4.1.2.3	Contraintes supplémentaires pour la NMF . . . .	48
4.2	Démixage en présence de pixels rares . . . . .	49
4.2.1	NMF avec des endmembers connus a priori . . . . .	50
4.2.2	Résultats expérimentaux . . . . .	50
4.3	Conclusion . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Méthode rééchantillonnage Bootstrap</b>	<b>55</b>
5.1	Histoire du bootstrap . . . . .	55
5.2	Application du bootstrap au démixage hyperspectral . . . . .	56
5.3	Étude de la méthode bootstrap . . . . .	58
5.3.1	Influence de l'algorithme bootstrap sur le bruit blanc gaussien	58
5.3.2	Effet du bootstrap sur le démixage . . . . .	60
5.3.3	Influence de la présence des pixels originaux dans une image "bootstrapée" . . . . .	62
5.4	Étude en présence de pixels rares . . . . .	64
5.4.1	Enrichissement de l'image originale par Bootstrap . . . . .	64
5.4.2	NMF-BDR . . . . .	65
5.4.3	NMF-BR . . . . .	67
5.4.4	Résultats comparatifs . . . . .	68
5.5	Application sur des données réelles . . . . .	70
5.6	Conclusion . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Conclusion générale et perspectives</b>	<b>75</b>
<b>A</b>	<b>Image HYDICE</b>	<b>79</b>
<b>B</b>	<b>Problème d'affectation</b>	<b>81</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>83</b>

# Table des figures

2.1	Structure d’une image hyperspectrale . . . . .	5
2.2	Le balayage spectral capture successivement chaque image spectrale monochromatique . . . . .	6
2.3	Acquisition hyperspectrale avec un capteur de type “whiskbroom” (à gauche) et un capteur de type “pushbroom” (à droite) . . . . .	7
2.4	Illustration d’un capteur avec mosaïque de filtres . . . . .	8
2.5	Illustration de la représentation tensorielle d’une image hyperspectrale	8
2.6	La matrice dépliant dans le mode spectral correspond à la matrice colonne de l’ensemble des pixels spectraux d’une image hyperspectrale	9
2.7	Différentes origines des mélanges spectraux. (a) Mélange linéaire. (b) Mélange non-linéaire. (Illustration de Keshava et Mustard [1]) . . . . .	11
2.8	Image de végétaux . . . . .	15
2.9	Spectres de réflexion de la chlorophylle (vert), de l’anthocyanine (jaune) et du bêta-carotène (rouge) . . . . .	16
2.10	Spectres de pigments estimés par différentes méthodes. . . . .	17
2.11	Carte d’abondances estimées par différentes méthodes. . . . .	18
3.1	Fonctions $\phi$ (à gauche) et $\psi$ (à droite) pour plusieurs familles d’ondelettes	30
3.2	Schéma de décomposition en ondelettes à l’aide d’un banc de filtres .	31
3.3	Banc de filtres pour analyse bidimensionnelle . . . . .	32
3.4	Décomposition en ondelettes bidimensionnelles . . . . .	32
3.5	Probabilité de détection en fonction de l’abondance du spectre rare dans le pixel cible pour différents SNR . . . . .	35
3.6	Taux de fausse alarme en fonction de l’abondance du spectre rare dans le pixel cible pour différents SNR . . . . .	35
3.7	Probabilité de détection en fonction de l’abondance du spectre rare dans le pixel cible pour différents SNR avec les ondelettes db2 . . . . .	36
3.8	Décomposition en ondelettes d’une image HYDICE . . . . .	37
3.9	Score de variation pour les pixels de l’image HYDICE . . . . .	37
3.10	Pixels détectés comme anormaux dans l’image HYDICE . . . . .	38
4.1	Endmembers utilisés pour générer les pixels observés . . . . .	51
4.2	Endmembers estimés par la méthode proposée . . . . .	52
5.1	Illustration du ré-échantillonnage bootstrap (Illustration issue [2]) . .	56

5.2	SNR de $\mathbf{Y}^*$ en fonction du nombre de pixels $q$ utilisés pour le bootstrap	60
5.3	Qualité de l'estimation des endmembers en fonction du nombre de pixels $q$ utilisés pour le bootstrap pour un SNR initial de 15dB en utilisant la NMF-PG et la NMF-BPP pour démixer $\mathbf{Y}^*$	61
5.4	Qualité de l'estimation des endmembers en fonction du nombre de pixels $q$ utilisés pour le bootstrap pour un SNR initial de 30dB en utilisant la NMF-PG et la NMF-BPP pour démixer $\mathbf{Y}^*$	61
5.5	Qualité de l'estimation des endmembers en fonction de nombre de pixels $q$ utilisés pour le bootstrap pour un SNR initial de 15dB pour différentes façons d'utiliser le bootstrap	63
5.6	Qualité de l'estimation des endmembers en fonction de nombre de pixels $q$ utilisés pour le bootstrap pour un SNR initial de 30dB pour différentes façons d'utiliser le bootstrap	63
5.7	Qualité de l'estimation des <i>endmembers</i> démixés par NMF-BPP en fonction du nombre de pixels bootstraps ajoutés à l'image d'origine	65
5.8	Qualité de l'estimation de l' <i>endmember</i> rare démixé par NMF-BPP en fonction du nombre de pixels bootstraps ajoutés à l'image d'origine	66
5.9	Spectres de réflexion des <i>endmembers</i> utilisés pour réaliser l'image simulé (a) et cartes d'abondance des spectres rares (b)	69
5.10	Endmembers et abondances estimés avec la méthode NMF-BR	70
5.12	Endmembers présent dans l'image	71
5.13	Carte des abondances après démixage	72
A.1	Image HYDICE HSI02	80

# Liste des tableaux

4.1	Comparison entre la NMF et la méthode proposée . . . . .	52
5.1	MSAD pour la NMF et les méthodes proposées avec bootstrap des rares et dominants NMF-BDR ou des rares uniquement NMF-BR . .	69
5.2	NMSE pour les méthodes NMF, NMF-BDR et NMF-BR. . . . .	70
5.3	Comparaison des méthodes NMF-BPP, NMF-BDR et NMF-BR selon le critère MSAD . . . . .	72



# Notations mathématiques

$x \in \mathbb{R}$	Scalaire.
$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{I_1}$	Vecteur de dimension $I_1$ .
$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{I_1 \times I_2}$	Matrice de dimension $I_1 \times I_2$ .
$\mathbf{1}_I$	Vecteur de taille $I$ contenant uniquement des 1. $\mathbf{1}_I = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^I$
$\mathbf{I}_L$	Matrice identité de dimension $L$
$\text{tr}(\mathbf{X})$	Trace de la matrice $\mathbf{X}$ .
$\cdot^T$	Transposition matricielle.
$[\mathbf{X}]_+$	Annule tous les coefficients négatifs de $\mathbf{X}$





# Abréviations

ACE	Adaptive Cosine/Coherence Estimator
AIC	Critère d'information d'Akaike
ALS	Moindres carrés alternés (Alternating Least Squares)
AMF	Adaptive Matched Filter
BPP	Block Principal Pivoting
HSI	Image HyperSpectrale
HYDICE	HYperspectral Digital Imagery Collection Experiment
MDL	Minium Description Lenght
NMF	Factorisation en Matrices Non-négatives
PCA	Analyse en Composantes principales
PG	Gradient projeté (Projected Gradient)
SAD	Spectral Angle Distance
SNR	Rapport signal à bruit en dB. (Signal to Noise Ratio)
SVD	Décomposition en Valeurs Singulières.



# Chapitre 1

## Introduction

### Contexte de l'étude

De nos jours, la télédétection fait référence à l'ensemble des techniques qui permettent l'acquisition à distance d'informations sur des objets. Cela fait généralement référence à l'acquisition aéroportée ou aérospatiale d'images classiques mais aussi plus récemment à l'acquisition d'images dites *hyperspectrales* capables de contenir un très grand nombre de données à la fois spectrales et spatiales concernant la scène observée. Cette technique d'imagerie consiste à acquérir simultanément un grand nombre de bandes spectrales étroites et contiguës, allant du proche infrarouge aux ultraviolets, et ainsi obtenir les spectres de réflectivité de chacun des matériaux présents dans les pixels de la scène. Ce fort potentiel a favorisé l'émergence de nouvelles applications de télédétection dans de nombreux domaines [3, 4, 5, 6, 7], tels que :

- l'environnement et l'écologie terrestre : l'aménagement et le suivi des zones urbaines et rurales, la gestion des ressources naturelles...
- la géologie, l'étude des sols et la cartographie du globe terrestre : l'exploration minière, la minéralogie, la volcanologie...
- l'agriculture et la sylviculture : la prévision des récoltes, la détection de pathologies, l'aide à l'observation de l'évolution et à la gestion des ressources...
- le domaine militaire et le renseignement : la reconnaissance, la détection de cibles...
- le biomédical : la détection de cellules pathogènes, la caractérisation de régions du cerveau, des méthodes non-invasives de diagnostic et de la chirurgie assistée par ordinateur...
- l'exploration spatiale : la détection et l'analyse des corps célestes...

La richesse de l'information spatiale et spectrale des images hyperspectrales augmente inévitablement la complexité des traitements, et a nécessité l'utilisation de concepts mathématiques adaptés.

Numériquement, un jeu de données dépendant de  $N$  paramètres peut être modélisé comme un tableau à  $N$  entrées. Chacune des  $N$  entrées correspondant

---

à un paramètre. Ces tableaux multidimensionnels à  $N$  entrées sont appelés des tenseurs d'ordre  $N$ . La notion de tenseur généralise ainsi le concept de matrices à  $N$  dimensions, les matrices étant des tenseurs d'ordre 2. De même les outils d'algèbre multilinéaire permettent le traitement algébrique de ces données tensorielles. Dans le cas d'une image hyperspectrale, le jeu de données dépend de trois paramètres : les deux premiers sont les coordonnées spatiales des pixels, le troisième paramètre correspondant à l'information spectrale. Un image hyperspectrale peut alors être vue comme un tableau à trois entrées (tenseur d'ordre 3).

Plusieurs méthodes de traitement et d'analyse d'images hyperspectrales basées sur de l'algèbre linéaire sont proposées dans la littérature. Les applications les plus classiques sont :

- La **classification** qui consiste à construire une carte thématique des données hyperspectrales qui permet la caractérisation et le regroupement d'objets selon un critère. Chaque pixel de l'image est affecté à une classe en fonction de ces caractéristiques [8, 9, 10, 11, 12].
- La **détection** de cible qui permet d'identifier la présence d'objets spécifiques dans la scène. Une carte de détection est produite par les algorithmes de détection et permet d'indiquer la présence des objets recherchés et les endroits où ils se trouvent [13, 14, 15, 16, 17].
- Le **démixage** qui consiste à séparer les spectres constituant les pixels. Les méthodes de démixage cherchent à estimer les signatures spectrales, appelées *endmembers*, des différents matériaux présents dans la scène ainsi que leurs cartes d'abondances. Ces cartes d'abondances indiquent la proportions occupée par chaque signature spectrale pour chacun des pixels de l'image [1, 18, 19, 20].

Malgré l'évolution des méthodes d'analyse en imagerie hyperspectrale, les méthodes de détection, de classification et de démixage sont mises en difficulté en présence de pixels rares. Ces pixels rares, que nous définissons comme les pixels appartenant à des objets de petites tailles sont sous-représentés face aux pixels de fonds ou aux pixels appartenant à des objets de grandes dimensions. Les méthodes usuelles d'analyse ont en effet tendance à favoriser les pixels présents en abondance au détriment de ces pixels rares.

Cependant, l'information portée par les pixels rares peut être cruciale pour certaines applications, comme la détection d'anomalies ou le démixage en présence de cibles de faibles dimensions. Par exemple, en agriculture de précision il est crucial de détecter les anomalies dues à des maladies ou parasites lorsqu'ils ne sont présents que dans quelques pixels parmi des milliers de pixels sains, dans le domaine médical pour détecter des cellules cancéreuses ou encore dans le domaine militaire pour détecter une structure ou un véhicule dans un vaste environnement.

## Problématique et contributions de la thèse

Dans le cadre de l'analyse d'images hyperspectrales, nous avons particulière-

ment focalisé notre étude sur de détection et de démixage. Nous nous sommes en particulier concentrés sur la détection et le démixage d’objets de petite taille, pour proposer des méthodes adaptées à la présence de ces pixels rares. Nos travaux nous ont conduits à proposer deux méthodes de détection des pixels rares, l’une basée sur un critère de seuil d’erreur de reconstruction, l’autre sur la transformée en ondelettes. Nous avons également proposé une méthode de démixage adaptée au cas où une partie des *endmembers* sont connus et montré que cette méthode utilisée conjointe avec celle de détection permettait le démixage des *endmembers* des pixels rare. Enfin nous nous sommes intéressés à la méthode de rééchantillonnage dites “bootstrap” et à son adaptation pour le démixage d’images hyperspectrales en présence de pixels rares, de manière à “amplifier” leur importance dans l’image.

## Organisation du manuscrit

**Le chapitre 2** permet d’introduire l’analyse d’images hyperspectrales. Ce chapitre présente l’imagerie hyperspectrale, de l’acquisition jusqu’au traitement. Il aborde le contexte lié à la problématique de démixage d’images hyperspectrales qui est au cœur de cette thèse. Il permet de présenter le modèle de mélange linéaire que nous utilisons tout au long de la thèse et propose de traiter l’application de la détection de pigments dans les végétaux pour illustrer les notions abordées.

**Le chapitre 3** se focalise sur la problématique des objets rares (ou anomalies) et propose deux méthodes de détection de ces pixels basées respectivement sur un seuillage de l’erreur quadratique de reconstruction à partir des *endmembers* dominants, et sur les coefficients de détails obtenus par la décomposition en ondelettes dont le principe est rappelé dans un premier temps.

**Dans le chapitre 4** la problématique du démixage est posée sous la forme d’un problème d’optimisation et une méthode de résolution, la méthode de factorisation en matrice non-négative (NMF), est présentée. Nous proposons de l’adapter au cas où une partie des *endmembers* sont connus *a priori*. Nous proposons enfin sur cette base une première méthode d’estimation des *endmembers* des pixels rares.

**Le chapitre 5** s’intéresse à la méthode de rééchantillonnage par bootstrap. Après une présentation générale de la méthode et de son application à l’imagerie hyperspectrale, nous proposons d’adapter la méthode à la problématique du démixage. Nous proposons une méthode de démixage qui s’inspire de celle présentée dans le chapitre 4 dans laquelle la méthode bootstrap est utilisée pour rééchantillonner et augmenter artificiellement l’importance des objets de petite taille pour améliorer l’estimation des *endmembers* correspondant.

**Le dernier chapitre** est la conclusion générale des travaux réalisés au cours de la thèse et ouvre quelques perspectives pour de futurs travaux.



# Chapitre 2

## Démixage des images hyperspectrales

Dans ce chapitre nous présentons de façon détaillée le concept d'image hyperspectrale, ses particularités et la problématique de son démixage. Dans un premier temps nous rappelons ce qu'est une image hyperspectrale et la façon dont elle est acquise. Puis nous abordons la problématique du démixage liée à ces images et introduisons le modèle mathématique que nous utiliserons. Nous présentons ensuite une méthode adaptée à cette problématique. Enfin nous illustrons l'ensemble de ces notions au travers de l'exemple de l'identification (démixage) de pigments dans les végétaux.

### 2.1 Image Hyperspectrale

L'imagerie hyperspectrale consiste à acquérir une scène dans plus d'une centaine de bandes spectrales. Cette acquisition aboutit à la formation d'un cube hyperspectral tel qu'illustré par la figure 2.1.

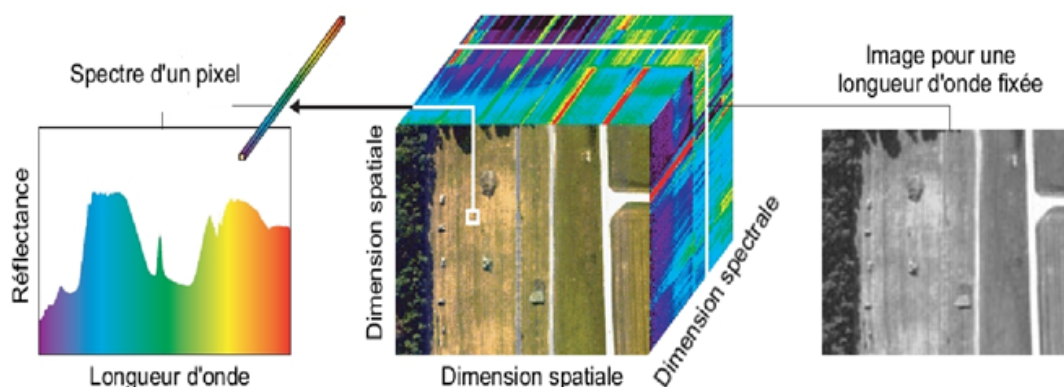


FIGURE 2.1 – Structure d'une image hyperspectrale

Ce cube hyperspectral contient les données acquises en trois dimensions : deux dimensions spatiales et une dimension spectrale.

L'imagerie hyperspectrale est un cas particulier de l'imagerie dite "multi-spectrale" en ce que les bandes spectrales acquises sont étroites et contiguës. La résolution spectrale, de l'ordre du nanomètre, est alors suffisamment fine pour qu'on puisse assimiler l'information spectrale d'un pixel au spectre de réflexion continu de ce pixel.

De même, chaque image spectrale est une image monochromatique dont l'information diffère en fonction de la longueur d'onde.

Le principe de l'imagerie hyperspectrale est basé sur le fait que chaque matériau reflète des ondes électromagnétiques à des longueurs d'onde spécifiques liées à sa composition moléculaire. Deux matériaux différents ayant des couleurs similaires en imagerie classique sont différenciables en imagerie hyperspectrale grâce à leurs spectres respectifs. Par conséquent le spectre de réflexion d'un pixel du cube hyperspectral est différent en fonction des matériaux présents dans ce pixel.

### 2.1.1 Acquisition des images hyperspectrales

Il existe de très nombreux capteurs hyperspectraux dont les caractéristiques varient en fonction des applications visées. Les principales caractéristiques de ces instruments sont le type de scanner (pushbroom ou whiskbroom), la couverture et la résolution spectrale, l'angle de vue et la résolution spatiale.

Les techniques d'acquisitions se classent en trois catégories :

Les méthodes à balayage spectral qui consistent à acquérir successivement chaque image spectrale monochromatique, comme illustré par la figure 2.2. Chaque acquisition permet de capturer l'ensemble de la scène 2D à une longueur d'onde sélectionnée par un filtre optique passe-bande, le filtre optique est alors changé pour capturer l'image spectrale suivante et ainsi de suite jusqu'à l'acquisition complète du cube hyperspectral. Cette méthode nécessite d'avoir des filtres optiques très sélectifs qui permettent de filtrer précisément la longueur d'onde désirée. Elle nécessite cependant que la scène (et le capteur) restent immobiles pendant toute la durée de l'acquisition.

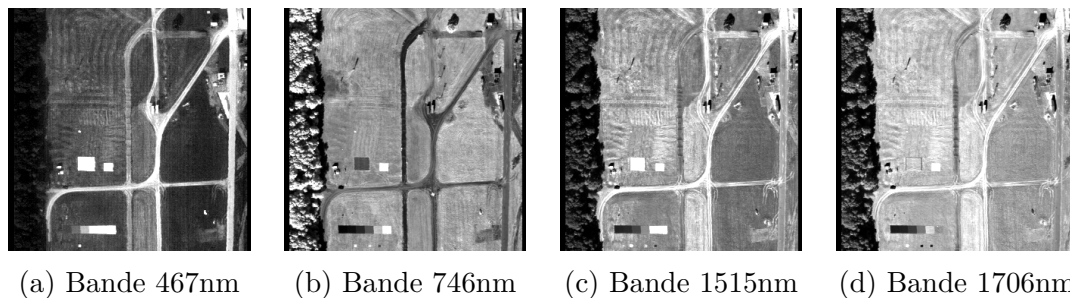


FIGURE 2.2 – Le balayage spectral capture successivement chaque image spectrale monochromatique



La seconde catégorie est celles des méthodes à balayage spatial. Elles consistent à acquérir en une seule fois toute l'information spectrale d'un ou plusieurs pixels. L'acquisition se fait ligne par ligne selon deux techniques différentes : *pushbroom* et *whiskbroom*. Un capteur *whiskbroom* possède un miroir qui balaie chaque pixel de la ligne, la lumière reçue est alors projetée à travers un élément dispersif sur une barrette CCD dont chaque cellule correspond à une longueur d'onde. Un capteur *pushbroom* possède une matrice CCD dont une dimension est la longueur d'onde et l'autre correspond aux pixels de la ligne. La figure 2.3 présente les deux techniques d'acquisition. Après avoir collecté l'information spectrale d'une ligne (mono dimensionnelle) le capteur se déplace pour acquérir la ligne suivante. Cette technique d'acquisition est particulièrement adaptée pour les acquisitions spatiales ou aériennes puisque le capteur se déplace naturellement, elle nécessite des corrections géométriques pour compenser les mouvements du capteur [21].

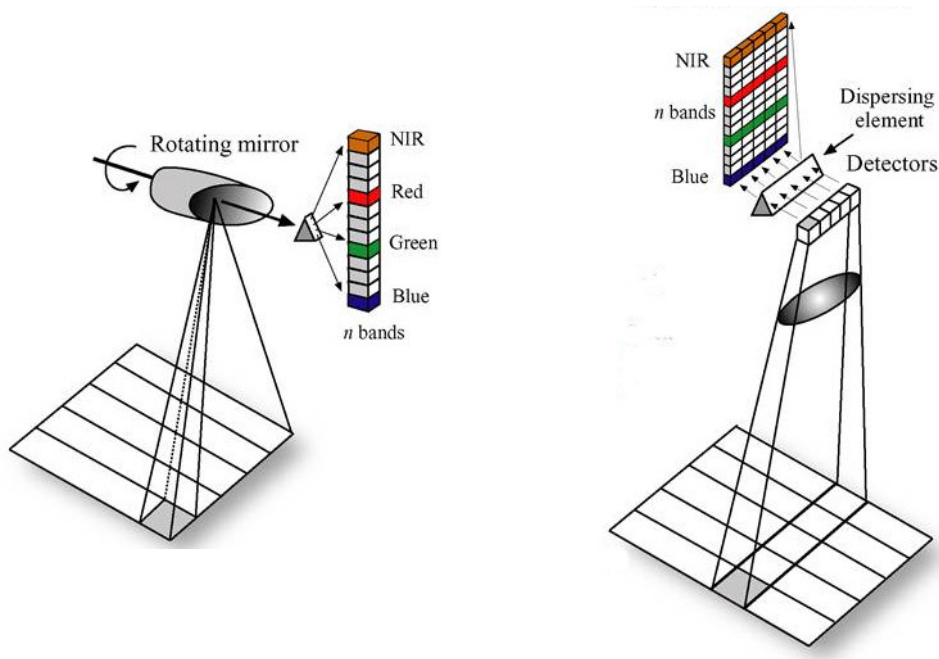


FIGURE 2.3 – Acquisition hyperspectrale avec un capteur de type “whiskbroom” (à gauche) et un capteur de type “pushbroom” (à droite)

La troisième technique est l'imagerie hyperspectrale instantanée (*snapshot imaging*), sans balayage elle permet l'acquisition simultanée de l'information spatiale et spectrale. Plusieurs approches sont utilisées, l'une d'entre elles consiste à “découper” l'image en bandes et à réorganiser ces bandes en une seule ligne à l'aide d'un système optique complexe [22]. Une autre méthode utilise une mosaïque de filtre de façon similaire aux capteurs couleurs classique, comme l'illustre la figure 2.4. Ces techniques sont souvent beaucoup plus complexes à utiliser que les méthodes à balayages pour des résolutions moindres ce qui restreint leur utilisation actuelle au domaine de l'astronomie [23, 24].

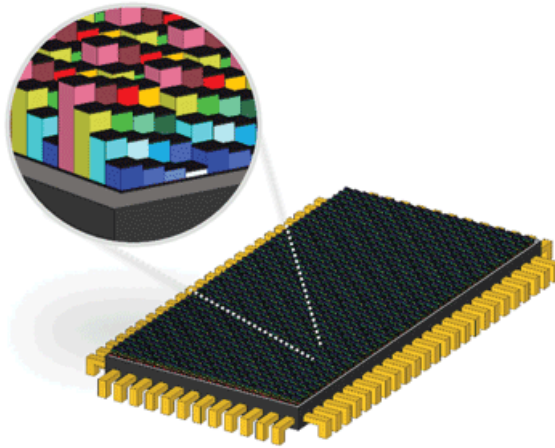


FIGURE 2.4 – Illustration d'un capteur avec mosaïque de filtres

### 2.1.2 Modélisation tensorielle des images hyperspectrales

De par la nature de la forme d'acquisition des données hyperspectrales, dans lesquelles chacun des pixels est un vecteur information, les données sont généralement représentées par un cube hyperspectral. En raison de cette représentation cubique, il est tout naturel d'envisager l'utilisation des tenseurs d'ordre 3 comme modèle mathématique pour représenter des images hyperspectrales. Classiquement, les dimensions spatiales sont associées respectivement au 1-mode et 2-mode du tenseur et la dimension spectrale est associée au 3-mode du tenseur, voir figure 2.5.

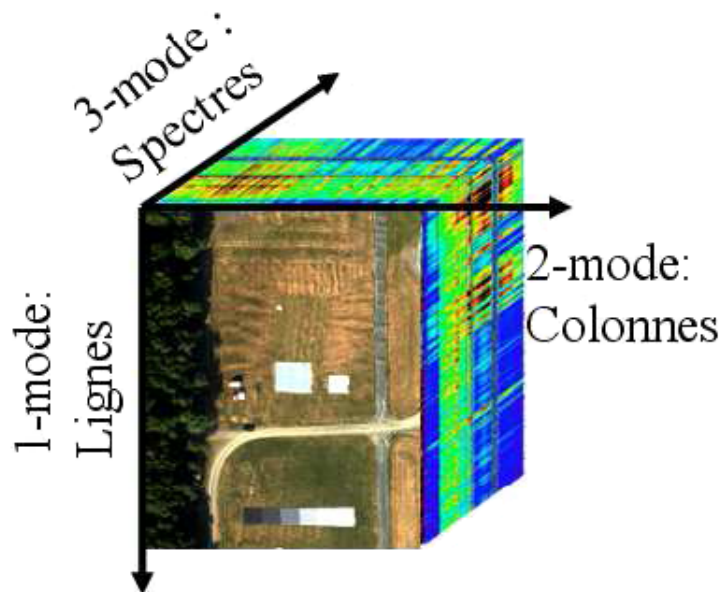


FIGURE 2.5 – Illustration de la représentation tensorielle d'une image hyperspectrale

Le déploiement d'un tenseur est une réorganisation sous forme matricielle de ses données selon un mode privilégié. En particulier la matrice dépliant dans le mode spectral (3-mode) où chaque colonne de la matrice dépliant représente le spectre d'un pixel permet une représentation physique concrète des données spectrales de l'image, voir figure 2.6. Les matrices dépliant dans les modes spatiaux (1-mode et 2-mode) sont plus difficiles à interpréter.

Dans la suite du document nous assimilerons les images hyperspectrales à leurs matrices dépliantes dans le mode spectral.

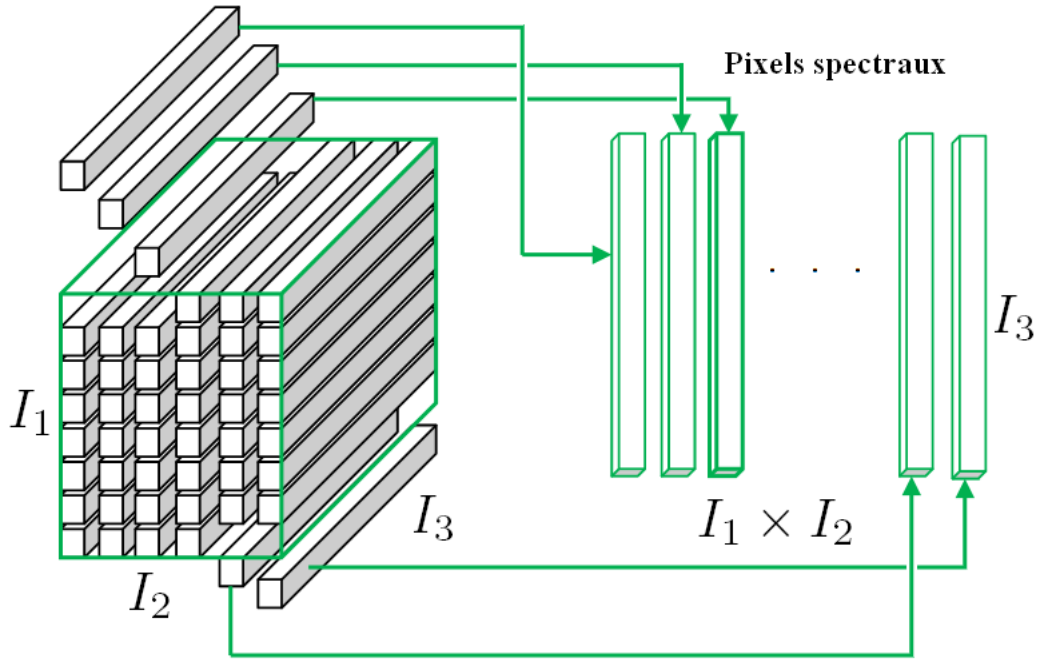


FIGURE 2.6 – La matrice dépliant dans le mode spectral correspond à la matrice colonne de l'ensemble des pixels spectraux d'une image hyperspectrale

## 2.2 Problématique du démixage en imagerie hyperspectrale

Les scènes observées sont constituées de différents matériaux qui ont chacun un spectre de réflectance spécifique. Chaque pixel de l'image hyperspectrale contient une information spectrale qui dépend des matériaux contenus dans le pixel. Il arrive souvent qu'un seul pixel contienne plusieurs matériaux, dans ce cas l'information spectrale observée est un mélange des spectres spécifiques des matériaux.

Une image hyperspectrale peut être interprétée comme d'une part un ensemble de spectres échantillonnés correspondant aux signatures spectrales spécifiques, appelés *endmembers*, de chaque matériau de la scène observée et d'autre part une carte de localisation qui indique la position dans l'image de chacun de

ces *endmembers*. On appelle cette carte : carte d'abondance ; lorsque les pixels contiennent plusieurs matériaux cette carte indique la proportion de chaque *endmembers* dans chacun des pixels.

La problématique de démixage, parfois dite problématique de démelange, est similaire aux problèmes de séparation de sources, qui consistent à estimer simultanément l'ensemble des *endmembers* présents dans l'image et leur carte d'abondance. Pour résoudre ce problème on utilise un modèle de mélange qui décrit la manière dont sont combinés les *endmembers* dans l'image.

### 2.2.1 Modèle de mélange linéaire

L'observation de plusieurs matériaux au sein d'un même pixel peut avoir deux origines :

La première est due à la résolution spatiale des capteurs, les matériaux sont séparés spatialement mais occupent une surface de la scène inférieure à celle couverte par un pixel. Dans ce cas, chaque rayon lumineux provenant de la scène n'interagit qu'avec un seul matériau de la surface observée. Le spectre mesuré est alors un mélange linéaire des spectres spécifiques des matériaux de surface, et les coefficients de mélange représentent les proportions surfaciques de chaque constituant.

Dans l'autre cas, la surface observée peut être composée d'une seule entité qui est un mélange intime de plusieurs matériaux, comme par exemple un sable dont les grains ont diverses compositions chimiques. Les rayons lumineux peuvent alors être réfléchis plusieurs fois par des matériaux différents avant d'être renvoyés vers l'instrument de mesure. Ces réflexions multiples conduisent à l'observation d'un spectre qui est un mélange non linéaire des spectres purs des constituants en présence.

Les deux situations sont illustrées par la figure 2.7.

Dans la suite de cette thèse, nous considérerons uniquement le modèle de mélange linéaire qui correspond bien au cas macroscopique. Ce modèle décrit le cas de matériaux spatialement séparés, ce qui peut être vu comme une approximation au premier ordre du modèle de mélange non-linéaire [1]. Les lecteurs intéressés par la modélisation non-linéaire peuvent se reporter aux références [25, 26, 27, 28].

Dans le modèle de mélange linéaire, l'information spectrale acquise par un pixel est une combinaison linéaire des *endmembers*, pondérés par des coefficients de mélange, appelés abondances, correspondant aux proportions de chaque *endmember* recherché. L'information spectrale  $\mathbf{y}_p$  correspondant à un pixel  $p$  de

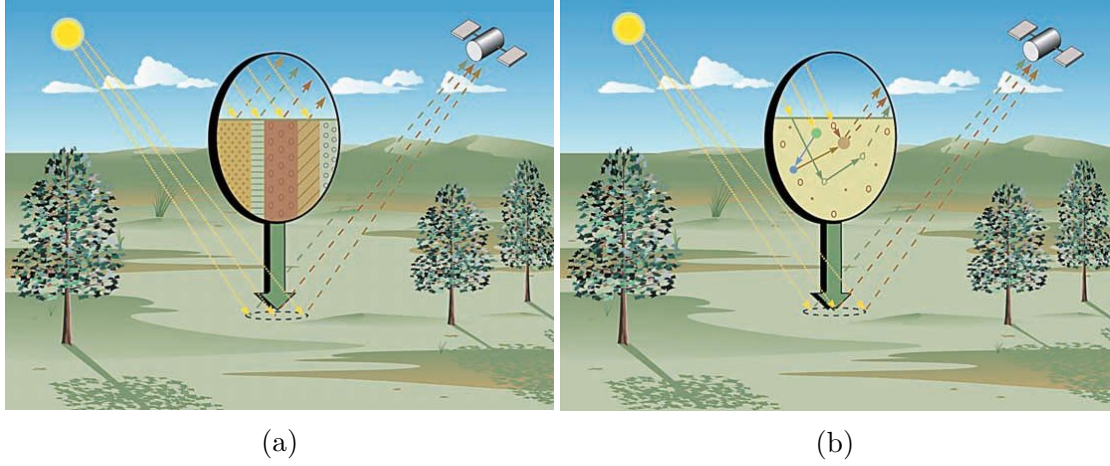


FIGURE 2.7 – Différentes origines des mélanges spectraux.  
 (a) Mélange linéaire. (b) Mélange non-linéaire. (Illustration de Keshava et Mustard [1])

l'image hyperspectrale est décrite par l'équation linéaire ci-dessous :

$$\mathbf{y}_p = \sum_{k=1}^K \alpha_{p,k} \mathbf{s}_k + \mathbf{n}_p \quad (2.1)$$

Où  $\mathbf{y}_p \in \mathbb{R}^L$  avec  $L$  le nombre de bandes spectrales acquises,  $K$  est le nombre d'*endmembers* dans l'image,  $\mathbf{s}_k \in \mathbb{R}^L$  est le  $k^e$  *endmember*,  $\alpha_{p,k}$  est la proportion du  $k^e$  *endmember* dans le pixel  $p$  et  $\mathbf{n}_p \in \mathbb{R}^L$  est un vecteur de bruit dans le pixel lié à la mesure qui suit une loi gaussienne telle que :

$$\mathbf{n}_p \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_L) \quad (2.2)$$

Si l'on pose  $\boldsymbol{\alpha}_p = [\alpha_{p,1}, \dots, \alpha_{p,K}]$  le vecteur ligne des abondances du pixel  $p$  et  $\mathbf{S} = [\mathbf{s}_1^T, \dots, \mathbf{s}_K^T]^T$  la matrices des *endmembers*, l'équation (2.1) se réécrit :

$$\mathbf{y}_p = \boldsymbol{\alpha}_p \mathbf{S} + \mathbf{n}_p \quad (2.3)$$

Le modèle s'applique à tous les pixels de l'image hyperspectrale. Ils partagent la même collection de spectres spécifique  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{K \times L}$  mais ont des abondances qui leur sont propres. En concaténant tous les  $P$  pixels  $\mathbf{y}_p$  de l'image dans une matrice  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{P \times L}$ , l'équation précédente (2.1) conduit à :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \mathbf{S} + \mathbf{N} \quad (2.4)$$

Où  $\mathbf{A}$  est la matrice d'abondances obtenue en concaténant les vecteurs d'abon-

dances  $\alpha_p$  et  $\mathbf{N}$  est la matrice de bruit qui correspond à la concaténation des vecteurs de bruits  $\mathbf{n}_p$ .

Pour avoir un sens physique le modèle de mélange doit respecter certaines contraintes. En effet la matrice  $\mathbf{S}$  des *endmembers* contient les spectres de réflexion spécifiques des matériaux de la scène imagée, ses coefficients ne peuvent donc pas être négatifs. D'autre part, la matrice d'abondances  $\mathbf{A}$  contient les proportions des *endmembers* dans chaque pixel, ses coefficients sont donc eux aussi non-négatifs. De plus, pour chaque pixel, la somme des abondances le constituant doit être égale à 1 [29, 30]. Le modèle de mélange contraint s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\mathbf{Y} &= \mathbf{AS} + \mathbf{N} \\ \mathbf{S} &\geq 0, \mathbf{A} \geq 0, \mathbf{A}\mathbf{1}_K = \mathbf{1}_P\end{aligned}\tag{2.5}$$

Le démixage d'images hyperspectrale consiste alors à inverser le modèle de mélange linéaire. À partir des pixels observés  $\mathbf{Y}$ , il faut estimer les *endmembers*  $\mathbf{S}$  et leurs abondances  $\mathbf{A}$  en sachant qu'ils sont soumis aux contraintes de positivité et de somme à 1 comme indiqué dans l'équation (2.5).

### 2.2.2 État de l'art sur le démixage des HSI

Plusieurs méthodes de démixage ont été proposées dans la littérature pour retrouver les spectres sources (*endmembers*) ainsi que la matrice d'abondances à partir de l'image hyperspectrale observée [31].

Certaines proposaient d'estimer les spectres sources  $\mathbf{S}$  dans un premier temps à l'aide d'un algorithme dit d'extraction d'*endmembers* et d'estimer les abondances dans un second temps. C'est le cas des méthodes ayant fait l'hypothèse des "Pixels Purs" qui suppose que chacun des matériaux de l'image doit être présent seul dans au moins un des pixels de l'image. C'est à dire que pour chaque matériau de la scène, il existe au moins un pixel "pur" dont l'information spectrale est identique au spectre spécifique de ce matériau. Parmi les algorithmes utilisant cette hypothèse on peut citer la méthode Pixel Purity Index (PPI) [32] qui consiste à projeter les pixels sur un ensemble de vecteurs aléatoires et d'utiliser ces projections pour donner un score à chaque pixel. Les pixels avec les scores les plus élevés sont définis comme les pixels les plus purs et sont utilisés comme *endmembers*. La méthode N-FINDER [33] quand à elle, considère que le simplexe dont les sommets sont les pixels purs à un volume supérieur à un simplexe dont les sommets seraient n'importe quels autres pixels. La méthode consiste alors à construire un simplexe à partir de pixels choisis aléatoirement puis à modifier itérativement ses sommets de sorte à maximiser son volume. La VCA (Vertex Component Analysis) [18] est une méthode qui estime les *endmembers* de façon itérative. Les pixels sont projetés dans une direction orthogonale au sous-espace engendré par les *endmembers* déjà estimés. La valeur extrême de cette projection

est alors le nouvel *endmember*. La méthode est itérée jusqu'à atteindre le nombre d'*endmembers* voulu.

En pratique, cette hypothèse de pixels purs n'est pas totalement vérifiée, plusieurs erreurs d'estimation sont alors commises [34, 35].

D'autres méthodes géométriques, basées sur la minimisation du volume d'un simplexe mais n'utilisant pas l'hypothèse des pixels purs ont été proposées. Les pixels étant décrits par le modèle de mélange comme une combinaison linéaire des *endmembers* dont les coefficients sont soumis à la contrainte de somme à l'unité, ces pixels se trouvent à l'intérieur d'un simplexe dont les sommets sont les *endmembers*. Dans certain cas, cette contrainte qui impose que les pixels soient à l'intérieur du simplexe peut-être relaxée, ce qui permet, entre autre, de prendre en compte le bruit. L'une de ces méthodes est MVSA (Minimum Volume Simplex Analysis) [36] qui permet une estimation des *endmembers* robuste au bruit en relaxant la contrainte de positivité. La méthode MVSE (Minimum Volume Enclosing Simplex) [37, 38] estime les *endmembers* comme étant les sommets du simplexe de volume minimum contenant l'ensemble des pixels observés.

D'autres approches ont également été proposées en utilisant des méthodes statistiques comme la Décomposition en Valeurs Singulières (SVD) [39] et l'Analyse en Composantes Principales (PCA) [3]. Ces méthodes permettent d'obtenir les directions principales d'un ensemble des pixels, cependant, ces méthodes n'interdisent pas l'obtention de valeurs négatives des coefficients des matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{S}$ , et par conséquent les résultats obtenus sont peu représentatifs de la réalité des données physiques étudiées. L'Analyse en Composantes Indépendantes (ICA) est une méthode utilisée en séparation aveugle de sources qui a été proposée pour le démixage d'images hyperspectrales [40]. Elle repose sur les hypothèses que les pixels sont des combinaisons linéaires des *endmembers* pondérés par leurs abondances, et que ces abondances sont indépendantes. Dans le cas des images hyperspectrales, la première hypothèse correspond au modèle de mélange linéaire, mais la contrainte de somme à 1 sur les abondances empêche de satisfaire le critère d'indépendances des abondances [41]. Pour résoudre les problèmes rencontrés par ces méthodes un algorithme d'Analyse en Composantes DEpendantes (DECA) [35] a été proposé. Il repose sur une décomposition du signal en prenant en compte les contraintes de positivité des *endmembers* et abondances, et celle de somme à l'unité des abondances.

Plus récemment, la notion de la Factorisation en Matrices Non-négatives (NMF) [42, 43], issue des mathématiques appliquées, a connu une attention considérable pour le démixage des images hyperspectrales [44, 34, 45]. En effet, étant donnée une matrice non-négative (ici la matrice signal  $\mathbf{Y}$ ), l'objectif de la NMF est de trouver deux matrices non-négatives ( $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{S}$ ) dont le produit est la meilleure approximation possible de la matrice des données. Plusieurs algorithmes NMF permettant d'ajouter des contraintes comme la somme à un des abondances ou pour contraindre la matrice des abondances  $\mathbf{A}$  à être creuse ont été proposées ces

dernières années [46, 19, 47]. Cette méthode sera détaillée dans le chapitre 4

## 2.3 Importance de l'estimation du sous-espace signal

Les images hyperspectrales sont composées de centaines de bandes spectrales mais le nombre d'*endmembers* est souvent très inférieur au nombre de bandes. Les méthodes de réduction de dimensions ou d'estimation du sous-espace signal cherchent à estimer le sous-espace signal afin de travailler sur cet espace réduit et de dimensions plus faibles que l'espace d'origine des données pour limiter les phénomènes liés aux grandes dimensions. Le démixage hyperspectral est un cas particulier de réduction de dimensions dans lequel les *endmembers* sont la base vectorielle du sous-espace signal.

Cependant l'estimation du sous-espace signal ne vise pas forcément à trouver les *endmembers* et abondances. La réduction de dimensions peut-être utilisée par exemple pour réduire le bruit ou améliorer la classification. En fonction de l'objectif recherché, les vecteurs de base qui engendrent le sous-espace signal ne sont pas soumis aux mêmes contraintes et ne permettent pas forcément d'obtenir des bases vectorielles ayant un sens physique. Le démixage hyperspectral effectue une réduction de dimensions dont les contraintes, comme la positivité et la somme à 1 des abondances, visent à obtenir des *endmembers* proches des spectres de réflexion des matériaux de la scène.

L'estimation de la dimension du sous-espace signal ou du nombre d'*endmembers* présents dans une image est une problématique importante dans le traitement de données hyperspectrale [48, 1]. Différentes méthodes peuvent être utilisées pour cette estimation, comme les critères d'estimation d'Akaike (AIC) [49] et Bayésien (BIC) [50], longueur de description minimale (MDL) [51], la méthode d'estimation non-biaisée du risque de Stein (SURE) [52, 53, 54] ou encore l'analyse en composante principale (PCA) [55, 56]. De nombreuses méthodes découlent de la décomposition en valeur singulière (SVD) [57] qui utilise les vecteurs singuliers associés aux valeurs propres dominantes pour l'estimation du sous-espace signal. La méthode HySime [58] qui utilise l'importante corrélation entre les différentes bandes spectrales. Ou encore des méthodes tensorielles comme l'approximation par tenseur de rang inférieur (Lower Rank Tensor Approximation) [59].

Plus récemment, des travaux [55, 60, 61] se sont intéressés à l'estimation du sous-espace signal pour des images hyperspectrales contenant des objets de faibles dimensions spatiales, il y est fait mention des difficultés de ces méthodes à conserver les données correspondant à ces objets représentés par seulement quelques pixels lors de l'estimation du sous-espace signal rendant alors inefficaces les pré-traitements pour la classification et la détection dans les images hyperspectrales contenant des objets de faibles dimensions spatiales.



## 2.4 Performances de différentes méthodes de démixage dans le cas de l'estimation de pigments de végétaux

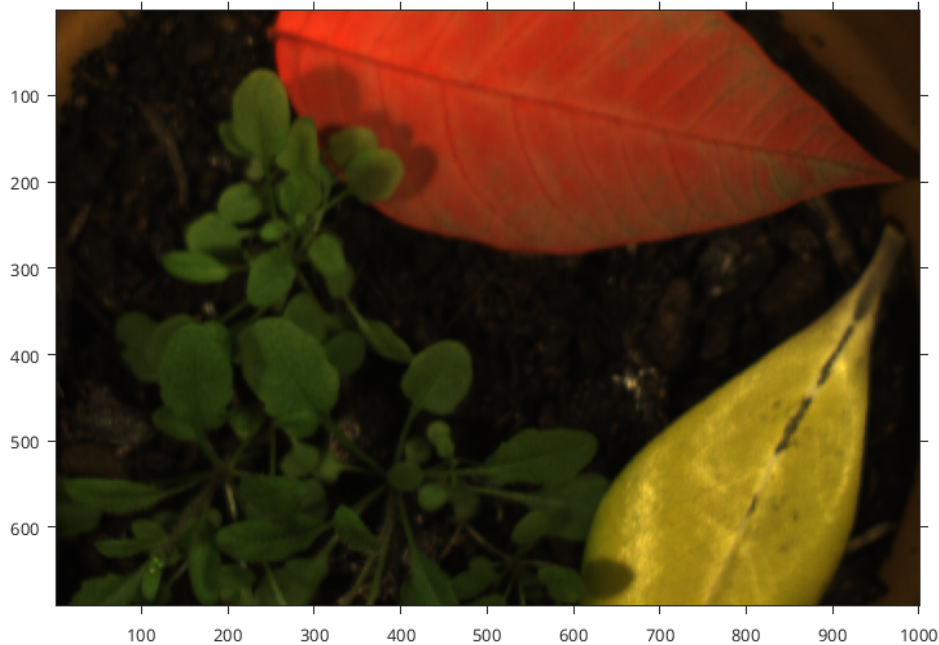


FIGURE 2.8 – Image de végétaux

Dans cette partie, nous comparons les résultats de différentes méthodes de démixage appliquées à la détection de pigments de végétaux. Nous souhaitons démixer une image de taille 700 par 1000 pixels, contenant 155 bandes spectrales. Cette image est présentée dans la figure 2.8, elle contient plusieurs feuilles dont les pigments principaux sont la chlorophylle, l'anthocyanine et le beta-carotene. Les spectres de réflexion de ces pigments sont présentés dans la figure 2.9

Nous avons utilisé la méthode VCA [18], la méthode de factorisation nonnégative additive NMF-PG [62], une méthode de NMF multiplicative [63] et une dernière méthode NMF-BPP [64] sur lesquelles nous reviendrons au chapitre 4. La figure 2.10 présente les spectres estimés pour ces trois pigments. La figure 2.11 présente les cartes d'abondances obtenues par ces différentes méthodes.

Nous constatons que les cartes d'abondances obtenues par les différentes méthodes de démixage permettent de situer les pigments aux bons endroits.

Nous constatons cependant que les *endmembers* estimés varient fortement d'une méthode à l'autre. Les spectres de réflexions obtenus par la méthode NMF-PG sont les plus proches de ceux attendus. La NMF semble donc être une méthode

## 2.4 PERFORMANCES DE DIFFÉRENTES MÉTHODES DE DÉMIXAGE DANS LE CAS DE L'ESTIMATION DE PIGMENTS DE VÉGÉTAUX

---

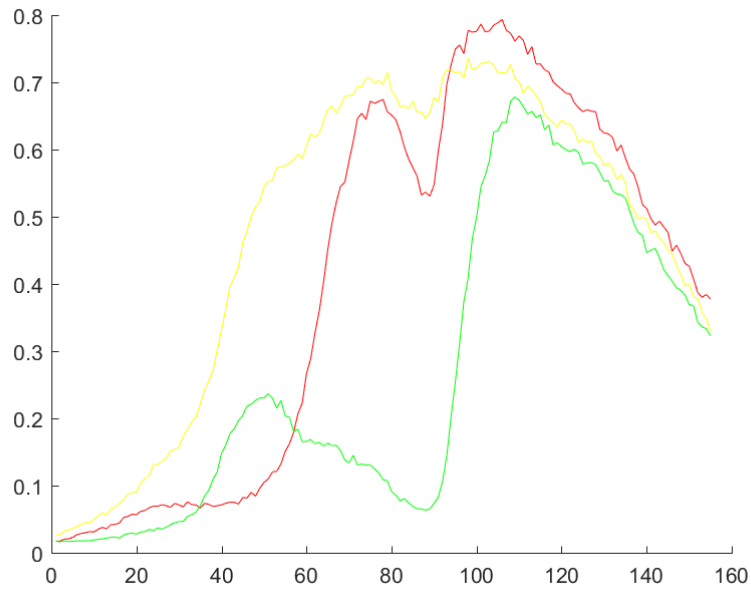
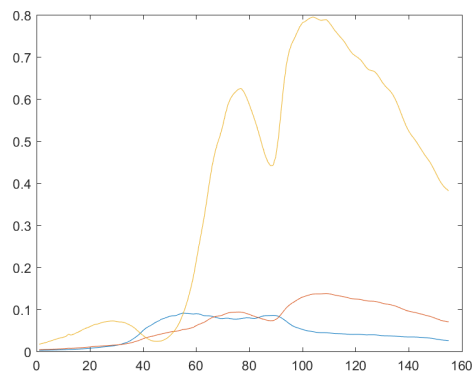
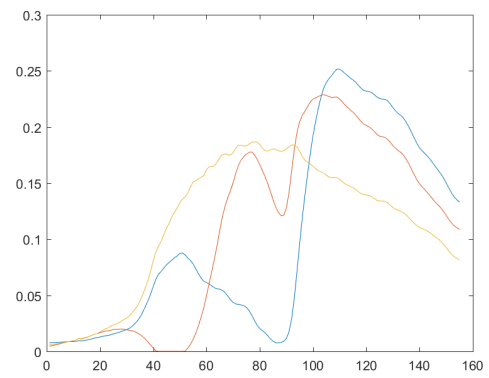


FIGURE 2.9 – Spectres de réflexion de la chlorophylle (vert), de l'anthocyanine (jaune) et du bêta-carotène (rouge)

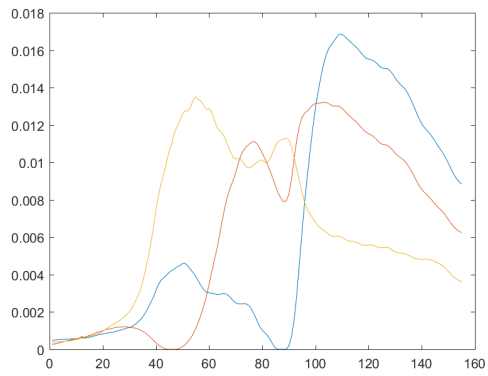
adapté dans ce cas de figure, bien plus que VCA, en particulier sous sa forme additive NMF-PG, et retrouve bien les spectres des différents objets (types de feuilles) présents en abondance dans la scène.



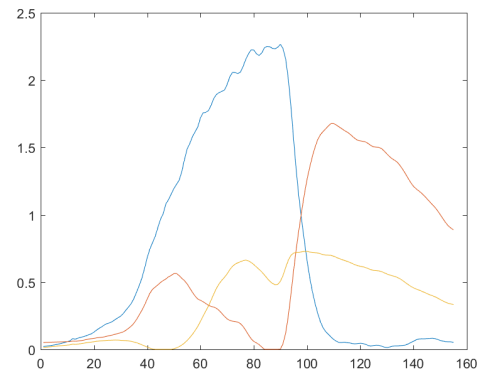
(a) VCA



(b) NMF-PG



(c) NMF-multiplicatif



(d) NMF-BPP

FIGURE 2.10 – Spectres de pigments estimés par différentes méthodes.

## 2.4 PERFORMANCES DE DIFFÉRENTES MÉTHODES DE DÉMIXAGE DANS LE CAS DE L'ESTIMATION DE PIGMENTS DE VÉGÉTAUX

---

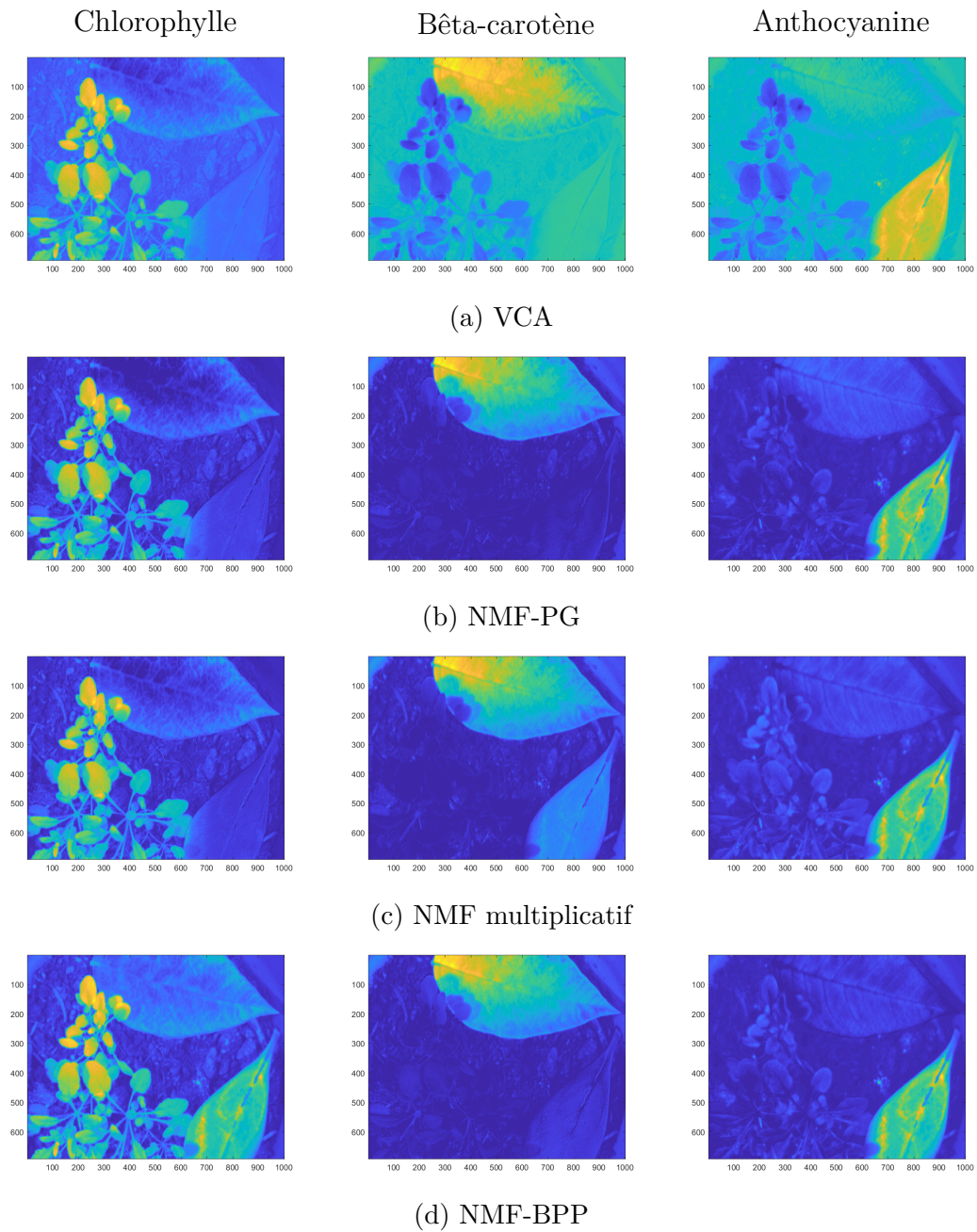


FIGURE 2.11 – Carte d'abondances estimées par différentes méthodes.

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté l'imagerie hyperspectrale et la problématique de démixage ainsi que le modèle de mélange linéaire qui décrit les pixels d'une image hyperspectrale comme une combinaison des spectres de réflexions caractéristiques des matériaux présent dans le pixel.

La problématique de démixage des images hyperspectrales consiste à inverser ce modèle de mélange, c'est à dire, retrouver, à partir des pixels observés, les spectres caractéristiques des matériaux présent dans l'image et leur abondance dans chaque pixel. Nous avons dressé un état de l'art des différentes méthodes couramment utilisées pour résoudre cette problématique.

Enfin, pour illustrer l'ensemble des notions présentées dans ce chapitre, nous avons traité l'application de la détection de pigments dans des végétaux. Les résultats de cette application ont mis en évidence l'aptitude de la NMF en particulier sous sa forme additive NMF-PG à être utilisée pour le démixage d'images hyperspectrales de végétaux. Cependant, il est à noter que dans l'image utilisée, les pigments que nous cherchons à démixer sont présents en abondance. Il est donc naturel de s'interroger sur les performances de la NMF lorsque certains pigments sont présent dans de très faibles portions de la scène. Dans la suite de cette thèse nous nous intéresserons donc à la problématique du démixage en présence d'objets de petite taille.



## Chapitre 3

# Détection des objets de petite taille

Dans ce chapitre nous nous intéressons au cas du démixage d'images hyperspectrales lorsque certains *endmembers* sont dits "rares". Un *endmember* sera considéré comme rare lorsqu'il n'est présent que dans un très faible nombre de pixels observés, ce phénomène se produit lorsque certains objets de petites tailles sont présents dans l'image. Nous appelons pixels rares les pixels contenant ces *endmembers*. La détection de ces pixels peut être vue comme de la détection d'anomalies et elle est nécessaire pour pouvoir ensuite procéder à leur démixage (identification des *endmembers* qu'ils contiennent).

Bien qu'il existe plusieurs travaux qui s'intéressent à la détection d'anomalies [65, 66], la problématique consistant à estimer simultanément les *endmembers* rares et dominants est assez peu présente dans la littérature. La détection des pixels rares peut être capitale pour de nombreuses applications. En effet, un *endmember* rare indique la présence d'un composant dans seulement quelques points de la scène imagée. Mais la présence de ce composant peut-être indicatrice d'un phénomène dont la détection est primordiale dans l'étude effectuée.

Ce chapitre sera consacré à la problématique de détection de ces pixels rares et proposera deux méthodes permettant de les détecter pour être à même par la suite d'en extraire les *endmembers* associés.

### 3.1 Détection en imagerie hyperspectrale

En télédétection, la détection d'objets spécifiques de petite taille, appelés "cibles", est d'une importance cruciale dans certains domaines comme la surveillance de l'environnement et la défense. Il peut par exemple s'agir de la détection de structures ou de véhicules dans un environnement naturel, ou encore la détection de traces de pollution.

En imagerie hyperspectrale, la détection consiste à identifier la présence et localiser une cible à partir de son spectre. Les algorithmes génèrent alors une carte de détection en niveaux de gris à partir d'une fonction de score basée sur un critère probabiliste ou géométrique. Le score associé à chaque pixel indique la probabilité qu'il appartienne à une cible. L'utilisation d'un critère de seuil permet d'obtenir une image binaire indiquant la présence ou l'absence de la cible pour chaque pixel.

Lorsque l'on connaît le spectre de réflexion des cibles il est possible d'utiliser cette connaissance *a priori* pour définir la fonction de score. La méthode de détection est alors dite supervisée. Les détecteurs AMF (Adaptive Matched Filter) [67, 68] et ACE (Adaptive Cosine/Coherence Estimator) [67] sont deux détecteurs supervisés qui ont été le plus souvent appliqués à l'imagerie hyperspectrale [69]. Chaque pixel  $\mathbf{x}$  est considéré comme un vecteur aléatoire avec une fonction de densité spécifique suivant une loi multivariée normale, le problème de détection revient à définir deux hypothèses :

$$\mathbf{H}_0 : \mathbf{x} \sim N(\mu_f, \Gamma_f) \text{ La cible est absente} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{H}_1 : \mathbf{x} \sim N(\mu_c, \Gamma_c) \text{ La cible est présente} \quad (3.2)$$

où  $\mu_c$  et  $\Gamma_c$  correspondent respectivement à la moyenne et à la matrice de covariance de la loi normale associée à la cible et  $\mu_f$  et  $\Gamma_f$  correspondent respectivement à la moyenne et à la matrice de covariance de la loi normale associée au fond. Le rapport de vraisemblance permet de définir la fonction de score :

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}|\mathbf{H}_1)}{p(\mathbf{x}|\mathbf{H}_0)} \quad (3.3)$$

$p(\mathbf{x}|\mathbf{H}_0)$  et  $p(\mathbf{x}|\mathbf{H}_1)$  sont les probabilités conditionnelles du pixel  $\mathbf{x}$  selon les hypothèses  $\mathbf{H}_0$  et  $\mathbf{H}_1$ . Si  $\delta(\mathbf{x})$  est supérieur à un certain seuil, l'hypothèse  $\mathbf{H}_1$  est vérifiée. Ce seuil permet de fixer la probabilité de fausse alarme acceptée.

Plusieurs algorithmes de détection de cibles à taux de fausse alarme constant ont été proposés dans la littérature et peuvent être retrouvés dans les travaux de Mannolakis [70].

Nous rappelons ici les expressions des détecteurs les plus courants. Soit  $\mathbf{s}$  le vecteur contenant le spectre de réflexion de la cible à identifier,  $\mathbf{x}$  le pixel à tester et  $\mathbf{X}$  la matrice des pixels de l'image, on a :

#### 3.1.1 Filtre adaptatif : AMF

Ce détecteur est basé sur le rapport de la vraisemblance normalisé, sa sortie maximale quand le signal de la cible est présent dans le pixel étudié. Il estime la



moyenne et la matrice de covariance du fond à partir de l'ensemble des pixels et conduit l'expression :

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{s}^T \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{x})}{(\mathbf{s}^T \mathbf{\Gamma}^{-1} \mathbf{s})} \quad (3.4)$$

où,  $\mathbf{\Gamma}$  est la matrice de covariance de la matrice des pixels  $\mathbf{X}$ .

### 3.1.2 Détecteur angulaire : ACE

Ce détecteur est efficace pour repérer une cible subpixelaire (une cible qui ne recouvre pas l'ensemble du pixel). Il suppose que le fond et la cible ont une matrice de covariance de même structure mais de variance différente. Le rapport de vraisemblance conduit alors au détecteur :

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{(\mathbf{s}^T \mathbf{\Gamma}_f^{-1} \mathbf{x})^2}{(\mathbf{s}^T \mathbf{\Gamma}_f^{-1} \mathbf{s}) (\mathbf{x}^T \mathbf{\Gamma}_f^{-1} \mathbf{x})} \quad (3.5)$$

où  $\mathbf{\Gamma}_f$  est la matrice de covariance du fond. Cette matrice n'est en pratique pas connue et est estimée à partir de la matrice de covariance de l'ensemble des pixels  $\mathbf{X}$ , telle que  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_f = \mathbf{\Gamma}$ . Cette hypothèse est réaliste lorsque le nombre des pixels des cibles est faible comparé au nombre des pixels du fond.

### 3.1.3 Détecteur d'anomalie : RX

Il arrive dans de nombreuses applications que les spectres de réflexions des petits objets présents dans la scène ne soient pas connus. Sans connaissance *a priori* des spectres cibles  $\mathbf{s}$  il est nécessaire de recourir à des détecteurs non supervisés. Ces détecteurs consistent à détecter les pixels qui semblent anormaux par rapport aux pixels de fonds [71], on les appelle détecteurs d'anomalies. Le détecteur RX, nommé d'après ses inventeur Reed-Xialoi [72], fait partie de cette catégorie, il se présente sous la forme suivante :

$$\delta(\mathbf{x}) \propto (\mathbf{x}^T \mathbf{\Gamma}_f^{-1} \mathbf{x}) \quad (3.6)$$

où,  $\mathbf{\Gamma}_f$  correspond à la matrice de covariance des pixels du fond uniquement. Comme pour le détecteur ACE on estimera  $\hat{\mathbf{\Gamma}}_f$  à partir de  $\mathbf{\Gamma}$ .

Dans la partie suivante, nous proposerons une méthode de détection d'anomalies, sans connaissance *a priori* sur les cibles, utilisant la capacité de la NMF à estimer les *endmembers* dominants correspondant aux pixels de fonds et définissant l'erreur quadratique de reconstruction de la NMF comme fonction du score.

## 3.2 Détection des pixels rares par seuillage de l'erreur quadratique de reconstruction

On rappelle ci-dessous l'équation de mélange linéaire (2.5) :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{N} \quad (3.7)$$

Cette équation décrit l'ensemble des pixels de l'image  $\mathbf{Y}$  comme une combinaison linéaire des *endmembers*  $\mathbf{S}$ . On peut réécrire cette équation sous la forme suivante :

$$\mathbf{Y} = \sum_{k=1}^K \mathbf{A}_{(k)} \mathbf{s}_k + \mathbf{N} \quad (3.8)$$

Où  $\mathbf{A}_{(k)}$  désigne le  $k^e$  vecteur colonne de la matrice d'abondances  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{s}_k$  le  $k^e$  vecteur ligne de  $\mathbf{S}$ .  $\mathbf{s}_k$  est donc l'un des  $k$  *endmembers* présents dans l'image et  $\mathbf{A}_{(k)}$  correspond à l'abondance de ce *endmember* dans chacun des pixels.

Le produit  $\mathbf{A}_{(k)} \mathbf{s}_k$  désigne alors la contribution du  $k^e$  *endmember* dans l'image hyperspectrale. Si l'image hyperspectrale contient  $K_d < K$  *endmembers* dominants et  $K_r = K - K_d$  *endmembers* rares, il est possible de déduire de l'équation (3.8) la contribution  $\mathbf{Y}_d$  des *endmembers* dominants et  $\mathbf{Y}_r$  celle des *endmembers* rares, quitte à re-numéroter les *endmembers* :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_d + \mathbf{Y}_r + \mathbf{N} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{Y}_d = \sum_{k=1}^{K_d} \mathbf{A}_{(k)} \mathbf{s}_k = \mathbf{A}_d \mathbf{S}_d \quad (3.10)$$

$$\mathbf{Y}_r = \sum_{k=K_d+1}^K \mathbf{A}_{(k)} \mathbf{s}_k = \mathbf{A}_r \mathbf{S}_r \quad (3.11)$$

### 3.2.1 Erreur de reconstruction à partir des *endmembers* dominants

En calculant l'erreur quadratique de reconstruction pixel par pixel entre l'image hyperspectrale observée  $\mathbf{Y}$  et le cube hyperspectral reconstruit  $\mathbf{Y}_d$ , il est possible d'évaluer la qualité de la reconstruction de chaque pixel. Soit  $r_p$  l'erreur quadratique de reconstruction pour le pixel  $p$  :

$$r_p = \|\mathbf{y}_p - \mathbf{y}_{d_p}\|^2 \quad (3.12)$$

En remplaçant le vecteur pixel dans l'équation (3.12) par son expression se-

lon le modèle de mélange linéaire (2.3), l'erreur quadratique de reconstruction devient :

$$r_p = \|\mathbf{n}_p + \boldsymbol{\alpha}_p \mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}_{d_p} \mathbf{S}_d\|^2 \quad (3.13)$$

Si l'on note  $\mathbf{e}_p = \boldsymbol{\alpha}_p \mathbf{S} - \boldsymbol{\alpha}_{d_p} \mathbf{S}_d$  l'erreur d'estimation, alors l'erreur de reconstruction  $r_p$  devient :

$$r_p = \|\mathbf{e}_p + \mathbf{n}_p\|^2 \quad (3.14)$$

Lorsque le pixel  $p$  contient seulement des *endmembers* dominants, l'erreur d'estimation est nulle,  $\mathbf{e}_p = \mathbf{0}$ , et l'erreur de reconstruction est due au bruit seulement,  $r_p = \|\mathbf{n}_p\|^2$ .

Cependant, lorsque les pixels contiennent des *endmembers* rares, la contribution des *endmembers* dominants ne permet pas de reconstruire entièrement le pixel, l'erreur de reconstruction  $r_p$  est en général plus grande que la seule contribution du bruit,  $r_p \gg \|\mathbf{n}_p\|^2$ .

Les pixels qui contiennent des *endmembers* rares auront donc une erreur de reconstruction bien plus grande que les pixels qui contiennent uniquement des *endmembers* dominants pour lesquels l'erreur de reconstruction est principalement due au bruit. En conséquent il doit être possible d'utiliser  $r_p$  comme fonction de score et de séparer les pixels rares des pixels dominants par un seuillage sur l'erreur de reconstruction.

### 3.2.2 Critère de seuillage pour détecter les pixels rares

Supposons que le vecteur de bruit  $\mathbf{n}_p \in \mathbb{R}^L$  suit une loi gaussienne centrée :

$$\mathbf{n}_p \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I}_L) \quad (3.15)$$

Où  $\mathbf{I}_L$  est la matrice identité de taille  $L$ .

La norme quadratique du vecteur bruit suit alors la loi de  $\chi^2$  à  $L$  degré de liberté :

$$\|\mathbf{n}_p\|^2 \sim \sigma^2 \chi_{L-1}^2 \quad (3.16)$$

Où  $L$  est le nombre de bandes spectrales. En imagerie hyperspectrale le nombre de bandes est suffisamment grand pour approximer la loi de  $\chi^2$  avec

une loi normale :

$$\|\mathbf{n}_p\|^2 \sim \mathcal{N}(\sigma^2, \frac{2\sigma^4}{L}) \quad (3.17)$$

La norme de vecteur bruit est donc une variable aléatoire dont la loi de distribution dépend uniquement du nombre de bandes spectrales de l'image et de la variance du bruit  $\sigma^2$ .

Une des propriétés de la loi normale, souvent appelée règle des trois sigmas, indique que l'écart entre une réalisation et son espérance a moins de 0.3% de chance d'être supérieur à trois fois son écart-type. Autrement dit, si  $\tau$  est défini comme suit :

$$\tau = \sigma^2 + 3\sqrt{\frac{2\sigma^4}{L}} \quad (3.18)$$

Alors, 99.7% des vecteurs de bruit auront une norme inférieure à  $\tau$ .

Dans le cas d'images hyperspectrales on peut obtenir une estimation de la variance du bruit  $\sigma^2$  à partir de la valeur estimée du rapport signal-à-bruit (SNR). Il existe plusieurs méthodes permettant d'estimer le SNR [58, 73] dont la formule, peut s'écrire, dans le cas d'images hyperspectrales, sous la forme :

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \frac{\|\mathbf{AS}\|^2}{\|\mathbf{N}\|^2} \quad (3.19)$$

$$= 10 \log_{10} \frac{\|\mathbf{AS}\|^2}{LP\sigma^2} \quad (3.20)$$

Avec  $L$  le nombre de bandes spectrales et  $P$  le nombre de pixels dans l'image. L'estimation de la variance du bruit  $\sigma^2$  se déduit de l'estimation du SNR selon l'expression suivante :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{LP} \|\mathbf{AS}\|^2 10^{-\frac{SNR}{10}} \quad (3.21)$$

En choisissant un critère de seuil tel que défini par l'équation (3.18) nous obtenons une méthode de détection des pixels rares. Les pixels dont l'erreur de reconstruction  $r_p$  est supérieure au critère de seuil  $\tau$  sont alors considérés comme rares. Les *endmembers* dominant  $\mathbf{S}_d$  ne permettent pas de reconstruire ces pixels.

### 3.3 Détection des pixels rares à partir d'ondelettes

La transformée en ondelettes est un outil permettant d'effectuer des analyses multirésolution de signaux mono-dimensionnels ou multidimensionnels. Dernièrement, les ondelettes ont été utilisées dans le cadre de la détection d'anomalies dans plusieurs domaines comme la géologie [74, 75] ou la climatologie [76]. Ce chapitre est consacré à la détection d'anomalies par décomposition en ondelettes dans des images hyperspectrales. L'utilisation de la transformée en ondelettes permet une approche spatiale de la problématique de détection, le spectre de chaque pixel n'est plus comparé à l'ensemble de pixels de l'image mais uniquement aux pixels de son voisinage.

#### 3.3.1 Introduction aux ondelettes

Au cours des dernières années les ondelettes ont rencontré un vif succès dans le domaine de l'analyse numérique. La transformée en ondelettes permet de décomposer les signaux en coefficients souvent plus simples à analyser. Cette transformée d'abord définie pour des signaux mono-dimensionnels peut se généraliser pour des signaux multidimensionnels, le plus souvent sous forme de produits tensoriels des ondelettes 1D. Sa mise en œuvre est particulièrement simple puisqu'elle consiste à utiliser une paire de filtres numériques (banc de filtres dyadique). En utilisant en cascade plusieurs de ces bancs de filtres, on peut mener une analyse multirésolution qui permet d'examiner le signal à différentes échelles. Ceci conduit à des méthodes qui sont actuellement parmi les plus performantes, pour différents traitements tels que le débruitage, la restauration ou la compression [77, 78, 79, 80]. Cette partie donne un bref aperçu de la transformée en ondelettes, le lecteur intéressé plus avant par celle-ci pourra se référer aux ouvrages suivants [81, 82, 83, 84] pour une description plus précise.

##### 3.3.1.1 La transformée en ondelettes continue

Une ondelette  $\psi$  est une fonction de carrée intégrable dans  $L^2(\mathbb{R})$  qui oscille localement et de moyenne nulle :

$$\int_{-\inf}^{+\inf} \psi(t) dt = 0 \quad (3.22)$$

On définit une famille d'ondelette  $\psi_{s,\tau}$  par contraction/dilatation et translation de l'ondelette mère  $\psi$  par un facteur d'échelle  $s \in \mathbb{R}_+^*$  et un paramètre de localisation  $\tau \in \mathbb{R}$  :

$$\psi_{s,\tau}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t - \tau}{s}\right) \quad (3.23)$$

### 3.3 DÉTECTION DES PIXELS RARES À PARTIR D'ONDELETTES

---

La transformée en ondelettes continue du signal  $f$  est donnée par le produit scalaire de  $f$  et des ondelettes de la famille :

$$g(s, \tau) = \int_{-\inf}^{+\inf} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left( \frac{t - \tau}{s} \right) dt = \langle f, \psi_{s, \tau} \rangle \quad (3.24)$$

Le signal  $f$  peut-être reconstruit à partir de  $g(s, \tau)$  en employant la relation de transformation inverse suivante :

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^{+\inf} \int_{-\inf}^{+\inf} g(s, \tau) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left( \frac{t - \tau}{s} \right) d\tau \frac{ds}{s^2} \quad (3.25)$$

Où

$$C_\psi = \int_0^{+\inf} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega \quad (3.26)$$

Avec  $\hat{\psi}$  la transformée de Fourier de  $\psi$ . Cette constante  $C_\psi$  est appelée “condition d’admissibilité”. Une ondelette est dite admissible lorsque la constante  $C_\psi$  est finie. Cette condition implique que l’ondelette soit de moyenne nulle.

L’équation de reconstruction (3.25) qui permet de reconstruire  $f$  fait intervenir des ondelettes pour tous les facteurs d’échelle et tous les paramètres de localisation.

#### 3.3.1.2 La transformée en ondelette discrète

Il est numériquement impossible d’utiliser toutes les ondelettes pour analyser un signal, il est préférable de choisir un sous-ensemble dénombrable d’ondelettes. Un moyen d’obtenir un tel sous-ensemble consiste à faire le facteur d’échelle de façon dyadique, en choisissant  $s = 2^m$  et  $\tau = n2^m$  pour  $n$  et  $m$  dans  $\mathbb{Z}$ . On obtient alors un ensemble discret d’ondelette :

$$\phi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \phi \left( \frac{t}{2^m} - n \right) \quad (3.27)$$

La famille  $\{\phi_{m,n}, n \in \mathbb{Z}\}$  est une base orthonormale d’un sous-espace vectoriel de  $L^2(\mathbb{R})$ , noté  $V_m$ . De plus on note que  $V_{m+1} \subset V_m$ .

Il est possible d’effectuer l’analyse multirésolution d’un signal  $f$  en projetant orthogonalement le signal sur les sous-espaces  $V_m$  successivement, ce qui conduit à des approximations de plus en plus grossières de  $f$  au fur et à mesure que  $m$  croît. La différence entre deux approximations consécutives représente l’information de “détail” qui est perdue au passage d’une échelle à l’autre. Cette information est

contenue dans le sous-espace  $W_m$  orthogonal à  $V_m$  tel que :

$$V_{m-1} = V_m \oplus W_m \quad (3.28)$$

On montre alors qu'il existe une ondelette  $\psi \in L^2(\mathbb{R})$  telle que  $\{\psi_{m,n}, n \in \mathbb{Z}\}$  est une base orthonormale de  $W_m$ . La figure 3.1 présente les fonctions d'ondelettes  $\phi$  et  $\psi$  pour plusieurs familles d'ondelettes.

**Remarque :** En traitement du signal numérique, et notamment en traitement d'image, il est souvent préférable d'utiliser des ondelettes à support compact possédant des propriétés de symétrie. Il est alors nécessaire de relâcher, la condition d'orthogonalité et d'utiliser des ondelettes dites biorthogonales [85].

Il est alors possible de réaliser la transformée en ondelette [83] en définissant pour un niveau de décomposition  $m$  donné les coefficients d'approximations  $a_{m,n}$  et de détails  $d_{m,n}$  tel que :

$$a_{m,n} = \langle f, \phi_{m,n} \rangle \quad (3.29)$$

$$d_{m,n} = \langle f, \psi_{m,n} \rangle \quad (3.30)$$

Par construction  $\phi_{m,n}$  est une fonction de  $V_m$  et  $\psi_{m,n}$  une fonction de  $W_m$ . Du fait de l'équation (3.28) il est possible de décomposer  $\phi_{m,n}$  et  $\psi_{m,n}$  sur la base de  $V_{m-1}$ . Si l'on note  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  (respectivement  $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ) la suite numérique correspondant aux coefficients de  $\phi_{m,n}$  (respectivement  $\psi_{m,n}$ ) dans la base de  $V_{m-1}$  on obtient la décomposition suivante :

$$\phi_{m,n} = \sum_k h_k \phi_{m-1,k+2n} \quad (3.31)$$

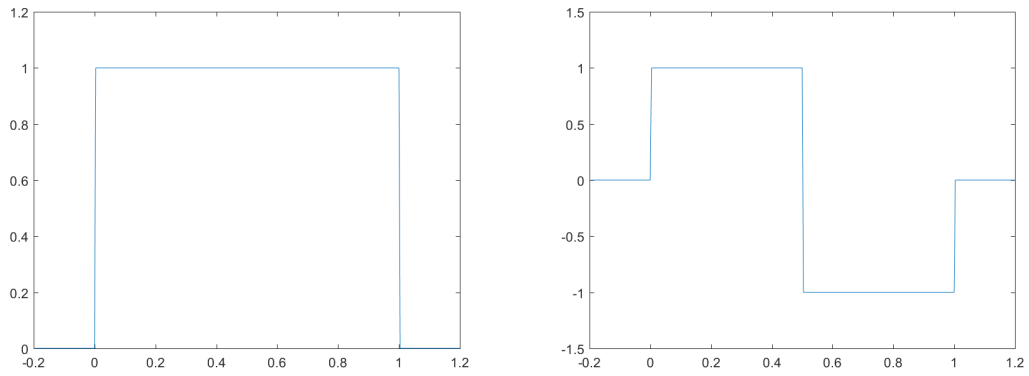
$$\psi_{m,n} = \sum_k g_k \phi_{m-1,k+2n} \quad (3.32)$$

Il est important de noter que les suites numériques  $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  et  $(g_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  sont identiques pour tous les niveaux de décomposition  $m$ . Ces suites peuvent-être considérées comme étant des réponses impulsionnelles de filtres numériques.

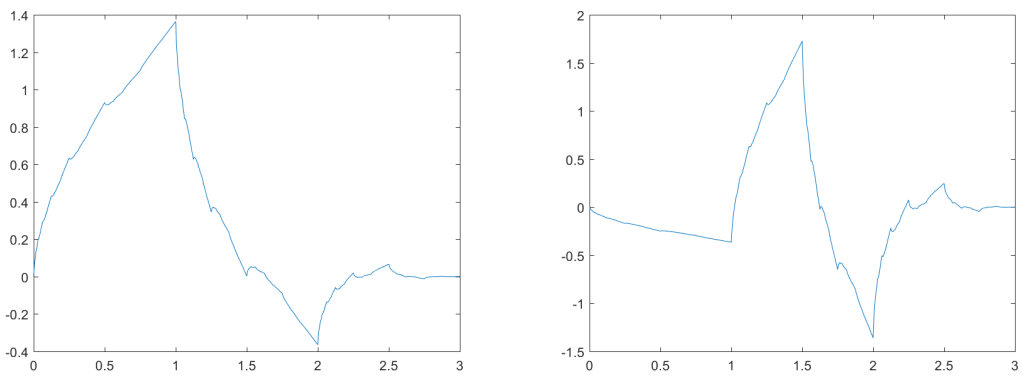
Il est alors possible de décrire les coefficients d'approximation d'un niveau de décomposition  $m$  à partir du niveau de décomposition précédent  $m-1$ . Si l'on re-

### 3.3 DÉTECTION DES PIXELS RARES À PARTIR D'ONDELETTES

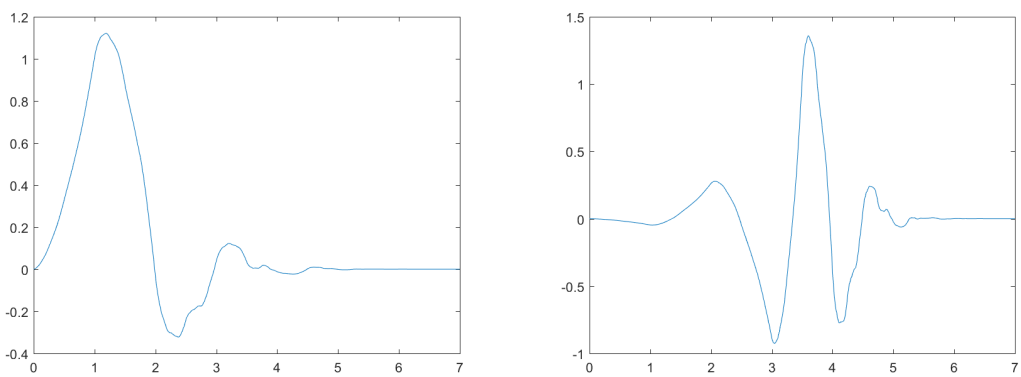
---



(a) Ondelettes de Haar



(b) Ondelettes de Daubechies 2



(c) Ondelettes de Daubechies 4

FIGURE 3.1 – Fonctions  $\phi$  (à gauche) et  $\psi$  (à droite) pour plusieurs familles d'ondelettes



prend la définition des coefficients d'approximation donnée par l'équation (3.30) :

$$a_{m,n} = \langle f, \phi_{m,n} \rangle \quad (3.33)$$

$$a_{m,n} = \sum_k h_k \langle f, \phi_{m-1,k+2n} \rangle \quad (3.34)$$

$$a_{m,n} = \sum_l h_{l-2n} \langle f, \phi_{m-1,l} \rangle \quad (l = k + 2n) \quad (3.35)$$

$$a_{m,n} = \sum_l h_{l-2n} a_{m-1,l} \quad (3.36)$$

Cette dernière équation (3.36) permet de décrire les coefficients d'approximation  $a_{m,n}$  comme le filtrage des coefficients d'approximation au niveau  $m - 1$  par le filtre  $h$  suivi d'un sous-échantillonnage de rapport 2.

De même les coefficients de détail peuvent être déduits des coefficients d'approximation du niveau  $m - 1$  par le filtre  $g$  suivi d'un sous-échantillonnage de rapport 2.

$$d_{m,n} = \sum_l g_{l-2n} a_{m-1,l} \quad (3.37)$$

Il est alors possible de procéder à l'analyse multirésolution en décomposant successivement les coefficients d'approximation à l'aide d'un banc de filtres tel que présenté dans la Figure 3.2.

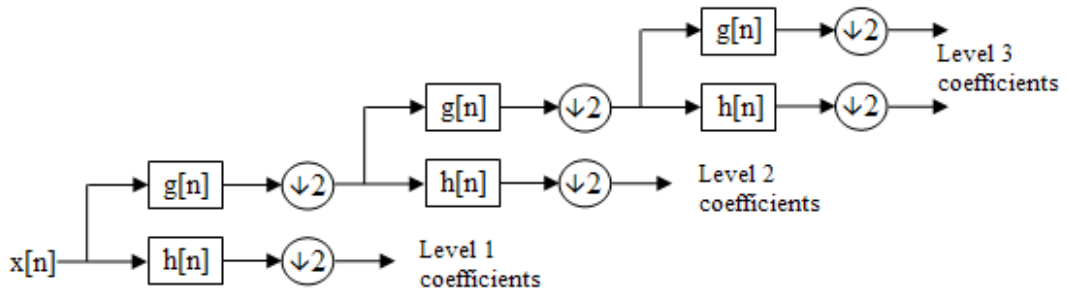


FIGURE 3.2 – Schéma de décomposition en ondelettes à l'aide d'un banc de filtres

### 3.3.1.3 Ondelettes pour les signaux multidimensionnels

Dans la partie précédente nous avons présenté les ondelettes dans le cas de signaux monodimensionnels, nous voulons généraliser la transformée en ondelettes dans le cas de signaux multidimensionnels.

### 3.3 DÉTECTION DES PIXELS RARES À PARTIR D'ONDELETTES

Nous allons maintenant considérer des transformées s'appliquant à des images, c'est à dire, des signaux 2D. Dans le cas de la transformée en ondelettes 2D usuelle, les ondelettes sont séparables, ce qui permet une généralisation directe du cas monodimensionnel. En effet, l'image est traitée en deux temps, comme présenté dans la figure 3.3. Dans un premier temps, les lignes sont analysées comme des signaux monodimensionnels, on procède ensuite à l'analyse des colonnes.

Le résultat de l'analyse est présenté par la figure 3.4. On obtient une image de même taille que celle d'origine découpée en quatre cadrans, le cadran LL en haut à gauche correspond aux coefficients d'approximations, les cadrans HL et LH correspondent aux coefficients de détail verticaux et horizontaux et le cadran HH aux coefficients de détail diagonaux.

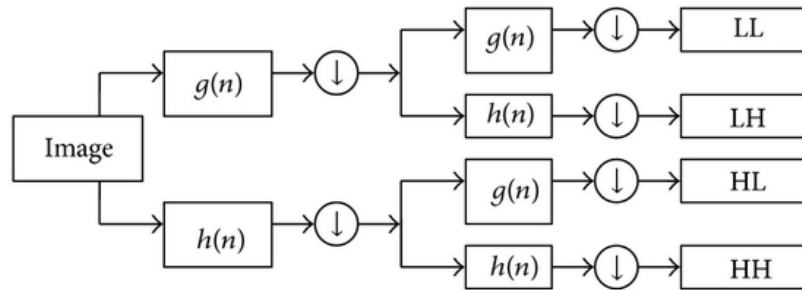


FIGURE 3.3 – Banc de filtres pour analyse bidimensionnelle

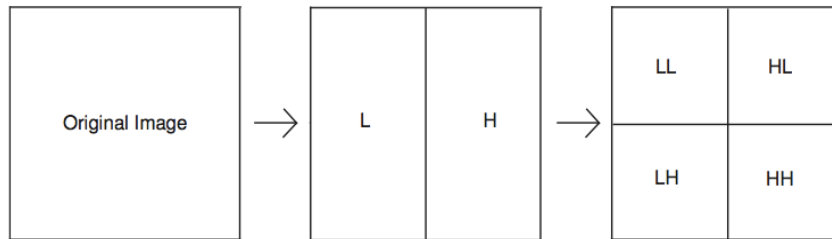


FIGURE 3.4 – Décomposition en ondelettes bidimensionnelles

Il est possible de généraliser ce procédé quelle que soit la dimension du signal à analyser. Dans le cas des images hyperspectrales, on s'arrête souvent à une décomposition 2D ce qui permet une analyse spatiale de l'image.

#### 3.3.2 Détection d'anomalies à partir d'ondelettes

Une anomalie dans une image hyperspectrale est un pixel, ou un petit groupe de pixels qui se distingue des autres pixels de l'image. Dans le chapitre précédent, nous avons proposé une approche spectrale pour détecter ces pixels. En effet, la méthode proposée estimait les *endmembers* présents dans l'image et détectait

comme anormaux les pixels dont les spectres ne pouvaient pas être reconstruits à partir de ces *endmembers*.

Nous proposons ici une approche spatiale pour détecter les anomalies. Un pixel sera considéré comme anormal lorsque qu'il aura un spectre différent de celui de ses voisins. Une analyse par ondelettes permet de réaliser cette détection spatiale. En effet, un pixel dont le spectre diffère de celui de ses voisins va produire des coefficients de détail élevés. Contrairement aux méthodes de détection de contours par ondelettes qui cherchent les pixels qui produisent des coefficients de détail élevés dans au moins une direction, nous proposons ici de chercher les pixels qui produisent des coefficients de détails dans toute les directions. En effet, un coefficient de détail élevé indique une variation importante dans sa direction, un pixel anormal étant différent des pixels de son voisinage, il doit donc produire des coefficients élevés dans toutes les directions.

Pour chacune des imagerie de détails LH, HL et HH (voir figure 3.4), sont calculées l'importance des variations verticales, horizontales et diagonales en sommant le carré des coefficients de détails pour chaque pixel :

$$V_{ij} = \sum_{\lambda} (LH)_{ij\lambda}^2 \quad (3.38)$$

$$H_{ij} = \sum_{\lambda} (HL)_{ij\lambda}^2 \quad (3.39)$$

$$D_{ij} = \sum_{\lambda} (HH)_{ij\lambda}^2 \quad (3.40)$$

Un score est attribué à chaque pixel en combinant ces informations de variations. Étant donné que l'on recherche à détecter les pixels ayant des variations importantes dans toutes les directions, c'est le niveau de variation minimal qui est utilisé comme score :

$$S_{ij} = \min(V_{ij}, H_{ij}, D_{ij}) \quad (3.41)$$

Un pixel avec un score important est donc un pixel avec des variations importantes dans toutes les directions, il remplit donc la définition adoptée pour un pixel anormal.

Pour détecter un pixel comme anormal nous proposons d'utiliser un critère de seuil sur le score. Un pixel sera alors détecté comme anormal lorsque son score

est supérieur au score moyen de plus de trois fois l'écart-type :

$$\tau = \mu_S + 3\sigma_S \quad (3.42)$$

$$\mu_S = \frac{1}{IJ} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J S_{ij} \quad \sigma_S = \sqrt{\frac{1}{IJ} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (S_{ij} - \mu_S)^2}$$

Les pixels dont le score est supérieur au seuil  $\tau$  sont alors considérés comme anormaux. Dans les paragraphes suivants, la méthode proposée sera appliquée dans un premier temps sur des données simulées, puis sur des données réelles.

#### 3.3.2.1 Expérimentation sur des données simulées

Pour étudier l'efficacité de la méthode proposée ci-dessus sur des données simulées, nous avons généré des images hyperspectrales de taille 32 par 32 pixels et 166 bandes spectrales. Les pixels de fond sont constitués d'un mélange de deux spectres issus de la base de spectres USGS [86], l'un des deux spectres ayant une abondance aléatoire entre 65 et 70%, le second ayant une abondance complémentaire. Une cible constituée d'un troisième spectre issu de la même base USGS est insérée dans l'image avec une abondance variable entre 1% et 100%. Un bruit blanc gaussien est ensuite ajouté pour atteindre une valeur de SNR entre 15 et 30db.

Nous appliquons la méthode de détection proposée en utilisant les ondelettes de Haar. Nous calculons le taux de détection comme le nombre de fois où le pixel cible est correctement détecté divisé par le nombre de réalisations. Le taux de faux positifs est calculé comme le nombre de faux positifs divisé par le nombre de pixels détectés. Les figures 3.5 et 3.6 montrent respectivement le taux de détection et le taux de faux positifs en fonction de l'abondance du spectre rare.

Nous constatons que plus l'abondance du spectre rare est élevée, meilleur est le taux de détection et de même un SNR plus élevé permet un meilleur taux de détection. Ce résultat correspond à ce que l'on attend : une cible large dans une image peu bruitée est plus facile à détecter qu'une petite cible dans une image fortement bruitée. Notamment, si l'on s'intéresse à une cible subpixelique de cote 1/2 pixels, ce qui correspond à une abondance de 25%, on observe un taux de détection supérieur à 80% lorsque l'image a un SNR de 25db, et près de 95% de détection pour un SNR de 30db.

Le taux de faux positifs est faible, presque toujours en dessous de 5%, à l'exception des cas avec de petites cibles et un SNR faible. Dans le cas de SNR faible, un pré-traitement visant à réduire le bruit avant d'effectuer la détection permettrait sans doute d'améliorer les résultats.

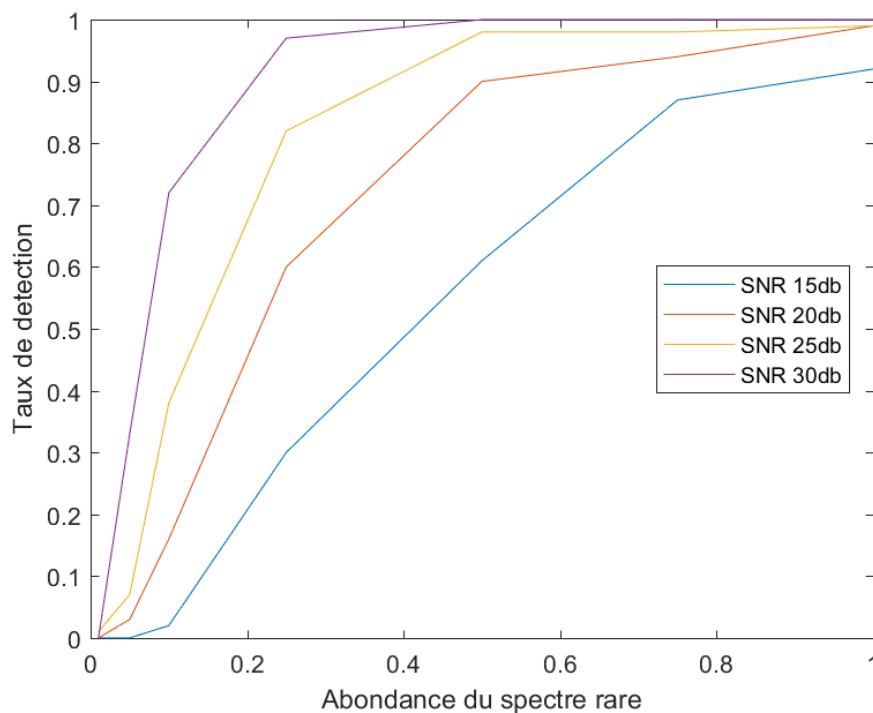


FIGURE 3.5 – Probabilité de détection en fonction de l'abondance du spectre rare dans le pixel cible pour différents SNR

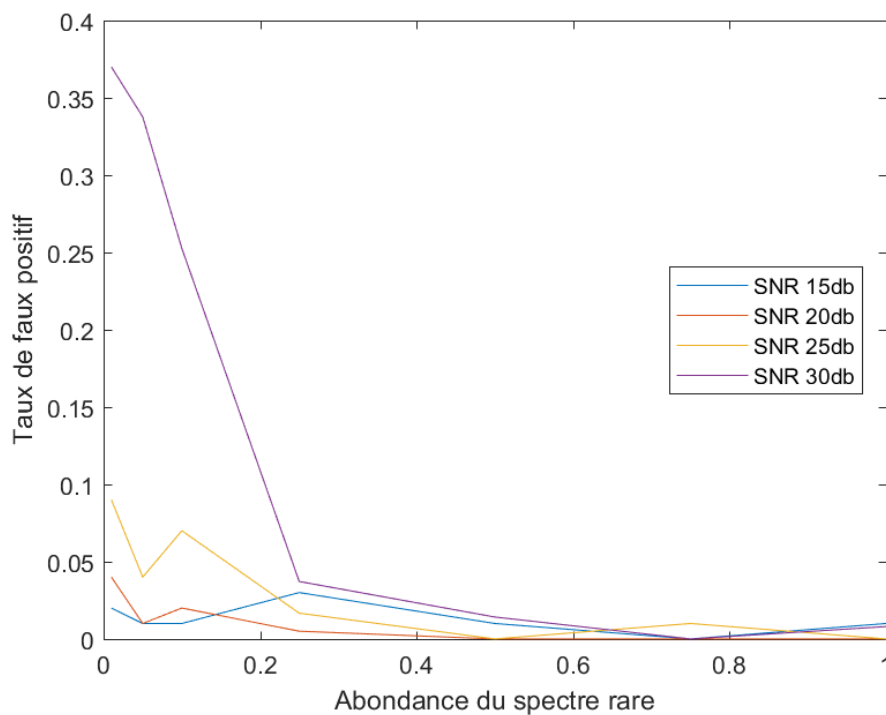


FIGURE 3.6 – Taux de fausse alarme en fonction de l'abondance du spectre rare dans le pixel cible pour différents SNR

**Remarque :** les mêmes tests ont été effectués avec d'autres familles d'ondelettes, en particulier les ondelettes de Daubechies [87] db2 et db4. La figure 3.7 montre le taux de détection pour la famille db2. Les résultats obtenus pour ces familles étaient moins satisfaisants que ceux obtenus avec les ondelettes de Haar. Il conviendra donc d'utiliser ces dernières pour les tests sur données réelles.

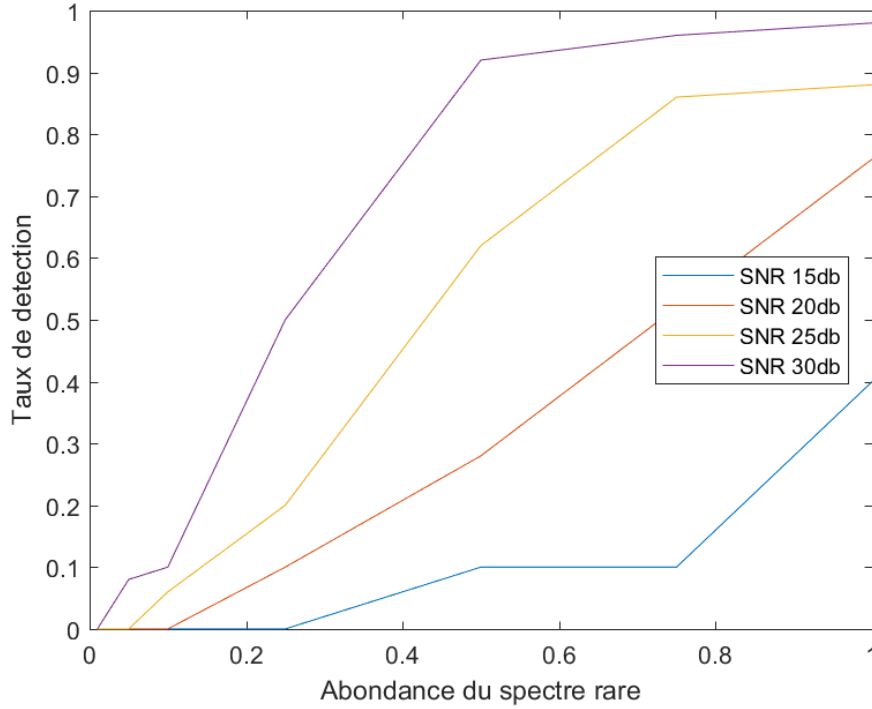


FIGURE 3.7 – Probabilité de détection en fonction de l'abondance du spectre rare dans le pixel cible pour différents SNR avec les ondelettes db2

#### 3.3.2.2 Expérimentations sur des données réelle HYDICE

Nous utilisons une image de taille 256 pixels par 256 pixels et 169 bandes spectrales extraite d'une image HYDICE (voir annexe A). Cette image contient 7 rangées de 3 panneaux de petites tailles qui peuvent être vus comme des anomalies. Les panneaux ont des dimensions de l'ordre de 3x3 pixels pour la colonne de gauche, 2x2 pixels pour la colonne centrale et 1x1 pixels pour la colonne de droite. Ces panneaux ne sont pas alignés sur les pixels de l'image, c'est à dire qu'un panneau 1x1 n'est présent non pas dans 1 seul pixel mais dans 4 pixels à un niveau subpixelique.

La figure 3.8 présente la décomposition en ondelettes de l'image utilisée avec les ondelettes de Haar. Nous utilisons cette décomposition pour calculer le score de chaque pixel tel que défini par l'équation (3.41). La figure 3.9 montre les scores pour les pixels de l'image HYDICE étudiée.

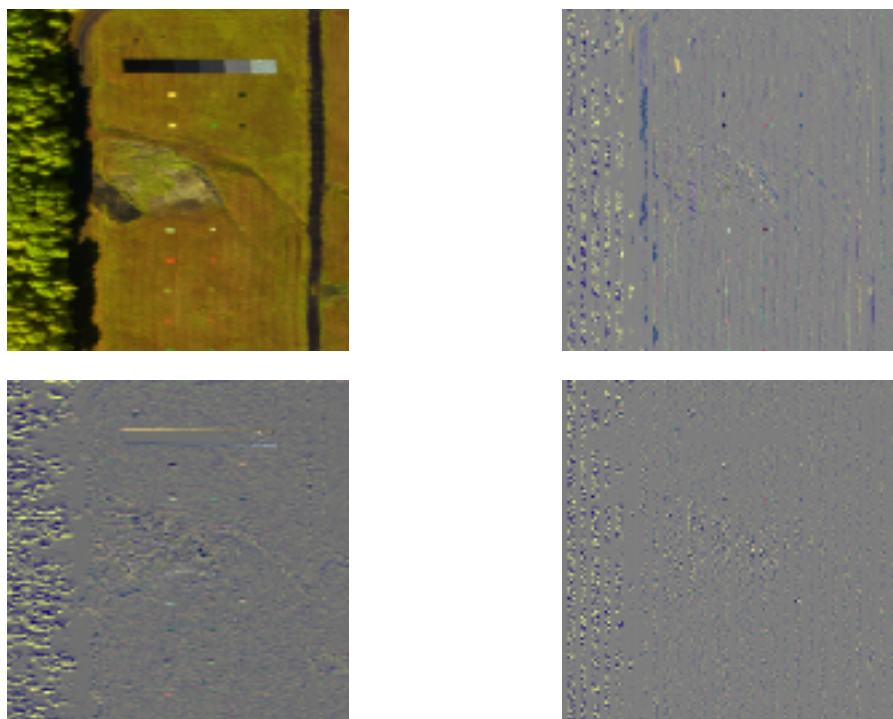


FIGURE 3.8 – Décomposition en ondelettes d’une image HYDICE

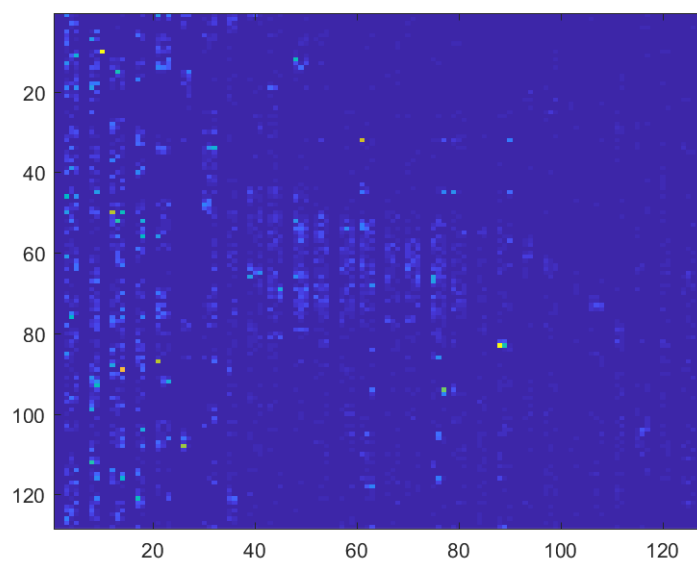


FIGURE 3.9 – Score de variation pour les pixels de l’image HYDICE

### 3.3 DÉTECTION DES PIXELS RARES À PARTIR D'ONDELETTES

---

Le résultat après seuillage est présenté dans la figure 3.10. Quatorze des 21 panneaux sont détectés comme des pixels anormaux. De nombreux pixels sont marqués comme anormaux sur la gauche de l'image, dans la zone arborée, ainsi qu'au centre de l'image, dans la zone rocheuse. Ces zones présentent des changements rapides de couleurs qui expliquent qu'elles puissent être détectées comme "anormales".

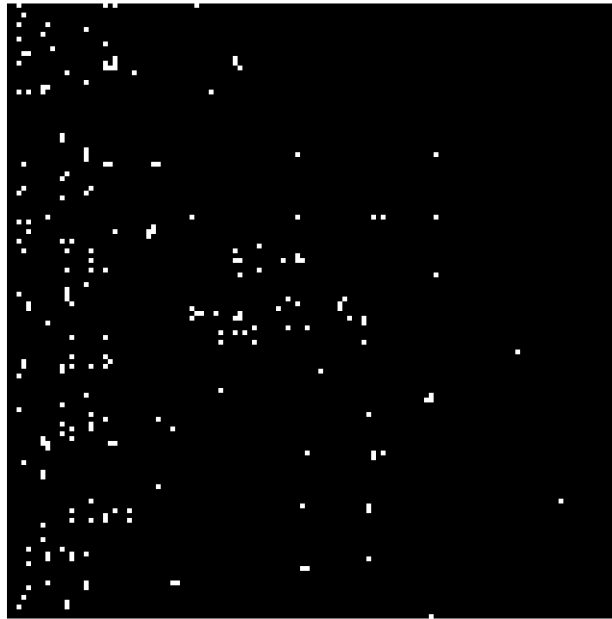


FIGURE 3.10 – Pixels détectés comme anormaux dans l'image HYDICE



### 3.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté le principe de la détection en imagerie hyperspectrale, et proposé deux méthodes de détection d'anomalies. La première méthode est basée sur le seuillage de l'erreur quadratique de reconstruction. Elle requiert la connaissance *a priori* d'une estimation des *endmembers* dominants.

Nous avons proposé d'utiliser la décomposition en ondelettes pour détecter la présence d'anomalies dans des images hyperspectrales. Les résultats obtenus montrent que la méthode proposée permet de détecter des anomalies et la présence de cibles à un niveau subpixélique. Nos expérimentations ont porté sur trois familles d'ondelettes (haar, db2 et db4) et ont montrées que db2 et db4 n'étaient pas adaptées à notre méthode. Un très grand nombre de familles d'ondelettes existe, il serait intéressant de tester d'autres familles, avec des propriétés différentes pour déterminer si elles permettent d'obtenir de meilleurs résultats.



# Chapitre 4

## Démixage en présence de pixels rares

Ce chapitre abordera le problème du démixage des images hyperspectrales sous la forme d'un problème d'optimisation. Le méthode NMF sera présentée et nous proposerons de l'adapter au cas où une partie des *endmembers* sont connus *a priori*. Cette NMF adaptée sera utilisée conjointement à la méthode de détection présenté dans le chapitre précédent pour proposer une méthode d'estimation des *endmembers* des pixels rares.

### 4.1 Le démixage hyperspectral, un problème d'optimisation

Dans le cadre du démixage d'images hyperspectrales on cherche à estimer deux matrices  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{P \times k}$  et  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{k \times L}$  telles que :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{AS} + \mathbf{N} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{S} \geq 0, \mathbf{A} \geq 0, \mathbf{A}\mathbf{1}_K = \mathbf{1}_P$$

Ce problème d'estimation peut-être réécrit sous la forme d'un problème d'optimisation dont l'objectif est de minimiser une fonction de coût.

Une fonction de coût souvent utilisée est la norme de Frobenius, ou encore l'erreur quadratique de reconstruction (EQR) entre l'observation  $\mathbf{Y}$  et sa factorisation  $\mathbf{AS}$ .

$$J(\mathbf{A}, \mathbf{S}) = EQR(\mathbf{A}, \mathbf{S}) = \|\mathbf{Y} - \mathbf{AS}\|^2 \quad (4.2)$$

Lorsque l'on se place dans l'hypothèse qui est la notre d'un bruit gaussien, minimiser l'erreur quadratique de reconstruction entre  $\mathbf{Y}$  et  $\mathbf{AS}$  est optimal [88].

Nous cherchons alors à minimiser la fonction de coût (4.2) en fonction de  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{S}$ , sous contrainte de positivité et de somme à l'unité. Le problème d'optimisation contraint devient donc :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser}_{\mathbf{A}, \mathbf{S}} \quad J(\mathbf{A}, \mathbf{S}) \\ & \text{sous les contraintes} \quad \mathbf{S} \geq 0, \quad \mathbf{A} \geq 0, \quad \mathbf{A}\mathbf{1}_K = \mathbf{1}_P \end{aligned} \quad (4.3)$$

Cependant la minimisation de  $J(\mathbf{A}, \mathbf{S})$  sous les seules contraintes de non-négativité des matrices  $\mathbf{A}$ , et  $\mathbf{S}$  et de somme à l'unité n'a pas de solution unique [44]. En effet, il existe des solutions dégénérées à ce problème. Par exemple si le couple  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_+^{P \times k}$  et  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}_+^{k \times L}$  est solution de l'équation (4.3), alors toute matrice carrée inversible  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}_+^{k \times k}$  telle que  $\mathbf{A}\mathbf{P}$  respecte la contrainte de somme à l'unité, permet d'obtenir une infinité de couples solution tels que :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{N} = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{P}}_{\mathbf{A}'} \underbrace{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{S}}_{\mathbf{S}'} + \mathbf{N} \quad (4.4)$$

### 4.1.1 Contrainte de somme à l'unité relaxée

D'un point de vue théorique la somme à l'unité est une contrainte élégante et naturelle, puisqu'elle revient à dire que les abondances correspondent aux proportions de chaque matériau présent dans le pixel, et qu'en conséquent la somme de ces proportions doit être égale à 1.

Cependant, en pratique un matériau avec une réflexivité qui varie en fonction de l'angle d'incidence aura un unique *endmember* dont l'intensité dépendra de son orientation. De même, la mesure du spectre d'un matériau situé dans une zone ombragée différera du spectre mesuré pour le même matériau illuminé directement. Ce phénomène appelé variabilité d'*endmember* [28, 89] fait que l'hypothèse de somme à l'unité n'est pas toujours exacte. De ce fait on préférera appliquer cette contrainte de manière moins stricte en favorisant plutôt les solutions dont le résultat est proche de cette contrainte à l'aide d'un terme de régularisation :

$$J_2(\mathbf{A}, \mathbf{S}) = \|\mathbf{Y} - \mathbf{A}\mathbf{S}\|^2 + \alpha^2 \|\mathbf{A}\mathbf{1}_K - \mathbf{1}_P\|^2 \quad (4.5)$$

Le paramètre  $\alpha$  permet d'imposer de façon plus ou moins stricte la contrainte. Une valeur de  $\alpha$  élevée indique une contrainte imposée strictement alors qu'une valeur nulle indique que la contrainte n'est pas imposée. L'équation (4.5) se dé-

veloppe alors comme suit :

$$\begin{aligned}
 J_2(\mathbf{A}, \mathbf{S}) &= \|\mathbf{Y} - \mathbf{AS}\|^2 + \alpha^2 \|\mathbf{A}\mathbf{1}_K - \mathbf{1}_P\|^2 \\
 &= \text{tr} \left( \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - 2\mathbf{S}^T \mathbf{A}^T \mathbf{Y} + \mathbf{S}^T \mathbf{A}^T \mathbf{AS} \right) + \alpha^2 \text{tr} \left( \mathbf{1}_P^T \mathbf{1}_P - 2\mathbf{1}_K^T \mathbf{A}^T \mathbf{1}_P + \mathbf{1}_K^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{1}_K \right) \\
 &= \text{tr} \left( (\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} + \mathbf{1}_P^T \mathbf{1}_P) - 2(\mathbf{YS}^T + \alpha^2 \mathbf{1}_P \mathbf{1}_K^T) \mathbf{A}^T + (\mathbf{SS}^T + \alpha^2 \mathbf{1}_K \mathbf{1}_K^T) \mathbf{A}^T \mathbf{A} \right) \\
 &= \text{tr} \left( [\mathbf{Y} | \alpha \mathbf{1}_P]^T [\mathbf{Y} | \alpha \mathbf{1}_P] - 2[\mathbf{Y} | \alpha \mathbf{1}_P]^T [\mathbf{S} | \alpha \mathbf{1}_K] \mathbf{A}^T + [\mathbf{S} | \alpha \mathbf{1}_K]^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} [\mathbf{S} | \alpha \mathbf{1}_K] \right) \\
 &= \text{tr} \left( \mathbf{Y}_c^T \mathbf{Y}_c - 2\mathbf{S}_c^T \mathbf{A}^T \mathbf{Y}_c + \mathbf{S}_c^T \mathbf{A}^T \mathbf{AS}_c \right) \\
 &= \|\mathbf{Y}_c - \mathbf{AS}_c\|^2
 \end{aligned}$$

où  $\text{tr}(\cdot)$  est l'opérateur trace et :

$$\mathbf{Y}_c = [\mathbf{Y} | \alpha \mathbf{1}_P] \quad \text{et} \quad \mathbf{S}_c = [\mathbf{S} | \alpha \mathbf{1}_K] \quad (4.6)$$

sont les matrices  $\mathbf{Y}$  et  $\mathbf{S}$  auxquelles ont été ajoutées une colonne de valeur constante  $\alpha$ .

On remarque que la fonction de coût  $J_2$  donnée par l'équation (4.5) est identique à la fonction de coût  $J$  de l'équation (4.2) dans laquelle on aurait remplacé les matrices  $\mathbf{Y}$  et  $\mathbf{S}$  par  $\mathbf{Y}_c$  et  $\mathbf{S}_c$ . En conséquence, les méthodes qui permettent de résoudre le problème d'optimisation donné en (4.3) sans contrainte de somme à l'unité, permettent également de résoudre le problème avec une contrainte de somme à l'unité relaxée.

#### 4.1.2 Démixage par la NMF

La factorisation en matrices non-négatives (NMF) est une méthode de démixage qui consiste à factoriser une matrice non-négative  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}_+^{P \times L}$  en deux matrices facteurs  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{P \times k}$  et  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{k \times L}$  tels que  $\mathbf{AS} \approx \mathbf{Y}$  pour un rang de factorisation  $k$  donné, sous contrainte que tous les coefficients de  $\mathbf{A}$  et de  $\mathbf{S}$  soient positifs ou nuls.

La NMF vise à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{aligned}
 &\underset{\mathbf{A}, \mathbf{S}}{\text{minimiser}} \quad \|\mathbf{Y} - \mathbf{AS}\|^2 \\
 &\text{sous les contraintes} \quad \mathbf{S} \geq 0, \mathbf{A} \geq 0
 \end{aligned} \quad (4.7)$$

#### 4.1 LE DÉMIXAGE HYPERSPECTRAL, UN PROBLÈME D'OPTIMISATION

---

Ce problème d'optimisation est identique à celui du démixage évoqué dans l'équation (4.3) lorsque la contrainte de somme à l'unité n'est pas appliquée strictement.

Le problème ainsi posé est non-convexe, ce qui rend la recherche d'un minimum global difficile. Cependant si l'une des deux matrices facteur  $\mathbf{A}$  ou  $\mathbf{S}$  est connue, alors le problème devient convexe. Une méthode de résolution consiste alors à séparer le problème en deux sous-problèmes convexes. L'un consistant à estimer  $\mathbf{A}$  en supposant  $\mathbf{S}$  fixée et l'autre à estimer  $\mathbf{S}$  en supposant  $\mathbf{A}$  fixée. Ces deux sous problèmes s'expriment sous la forme :

$$\min_{\mathbf{S} \geq 0} \|\mathbf{Y} - \mathbf{AS}\|^2 \quad (4.8)$$

$$\min_{\mathbf{A} \geq 0} \|\mathbf{Y} - \mathbf{AS}\|^2 \quad (4.9)$$

Il s'agit là de deux problèmes des moindres carrés. De nombreux algorithmes ont été proposés pour les résoudre. Leur adaptation à la NMF est basée sur la méthode des moindres carrés alternés (ALS) qui consiste à résoudre itérativement chacun des deux sous-problèmes. Elle est donnée dans l'algorithme 1.

---

**Algorithme 1** NMF - ALS

---

```
/* Initialisation */  
l ← 1  
A(1) ≥ 0  
S(1) ≥ 0  
/* Jusqu'à convergence */  
tant que EQR(A(l), S(l)) n'a pas convergé répéter  
    A(l+1) ← minA ≥ 0 EQR(A, S(l))  
    S(l+1) ← minS ≥ 0 EQR(A(l+1), S)  
    l ← l + 1  
fin tant que  
Sortie : A(l), S(l)
```

---

##### 4.1.2.1 Problème des moindres carrés

Le problème des moindres carrés consiste à résoudre le problème d'optimisation suivant :

$$\text{minimiser}_{\mathbf{X}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{AX}\|^2 \quad (4.10)$$

Où  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{k \times L}$ . La méthode NMF nécessite cependant que les matrices soient positives. Une façon de garantir ce critère est de projeter dans  $\mathbb{R}_+^{k \times L}$  le résultat

obtenu par la méthode des moindres carrés en annulant les coefficients négatifs avec l'opérateur  $[\cdot]_+$ .

Plusieurs méthodes utilisent cette approche :

**Algorithme multiplicatif :**

Lee et Seung furent parmi les premiers à populariser la méthode NMF [43]. Ils proposent un algorithme de NMF basé sur un schéma d'algorithme des moindres carrés alternés qui utilise des règles multiplicatives pour mettre à jour les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{S}$  à chaque itération [63].

$$\mathbf{A} \leftarrow [\mathbf{Y}\mathbf{S}^T(\mathbf{S}\mathbf{S}^T)^{-1}]_+ \quad (4.11)$$

$$\mathbf{S} \leftarrow [(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T\mathbf{Y}]_+ \quad (4.12)$$

La démonstration permettant d'aboutir aux équations (4.11) et (4.12) est détaillée dans [90]. La convergence de cet algorithme n'est cependant pas garantie [91, 92].

**Algorithme du gradient projeté :**

L'algorithme du gradient projeté, PG (pour Projected Gradient) [62], utilise un processus de mise à jour additif des matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{S}$ . À partir de la fonction de régularisation  $\text{EQR}(\mathbf{A}, \mathbf{S}) = \|\mathbf{Y} - \mathbf{A}\mathbf{S}\|^2$ , chaque itération de l'algorithme du gradient projeté peut être résumée ainsi :

$$\mathbf{A} \leftarrow \left[ \mathbf{A} - \mu_{\mathbf{A}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \text{EQR}(\mathbf{A}, \mathbf{S}) \right]_+ \quad (4.13)$$

$$\mathbf{S} \leftarrow \left[ \mathbf{S} - \mu_{\mathbf{S}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{S}} \text{EQR}(\mathbf{A}, \mathbf{S}) \right]_+ \quad (4.14)$$

La démonstration permettant d'aboutir aux équations (4.13) et (4.14) est présentée dans [90].  $\mu_{\mathbf{A}}$  et  $\mu_{\mathbf{S}}$  sont les *pas* du gradient. Ces pas peuvent être fixes ou variables en fonction des algorithmes dérivant du gradient projeté et auront une influence sur la précision ou la rapidité de convergence de l'algorithme. Enfin les gradients de la fonction de régularisation  $\text{EQR}(\mathbf{A}, \mathbf{S})$  par rapport à  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{S}$  sont donnés dans [90] :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{A}} \text{EQR}(\mathbf{A}, \mathbf{S}) = 2(\mathbf{A}\mathbf{S} - \mathbf{Y})\mathbf{S}^T \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{S}} \text{EQR}(\mathbf{A}, \mathbf{S}) = 2\mathbf{A}^T(\mathbf{AS} - \mathbf{Y}) \quad (4.16)$$

D'autres méthodes de résolution du problème des moindres carrés ont également été proposées, en utilisant par exemple une approche quasi-newtonienne [93, 94]. Pour garantir les contraintes de positivité de la NMF, certaines méthodes utilisent le problème de moindres carrés contraints.

#### 4.1.2.2 Problème des moindres carrés contraint

Le problème des moindres carrés contraint vise à minimiser la même fonction de coût que la version non-contrainte (4.10), en ajoutant une contrainte de positivité :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser}_{\mathbf{X}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{AX}\|^2 \\ & \text{sous la contrainte } \mathbf{X} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

L'utilisation d'une méthode de résolution des moindres carrés contraint pour résoudre les équations (4.8) et (4.9) permet d'obtenir à chaque itération la solution optimale.

Plusieurs méthodes ont été développées pour résoudre ce problème [95, 96, 97]. Dans cette thèse nous avons principalement utilisé la méthode BPP (Block Principal Pivoting) [98].

**Remarque :** L'équation (4.17) peut être décomposée colonne par colonne :

$$\min_{\mathbf{X} \geq 0} \|\mathbf{Y} - \mathbf{AX}\|_F^2 = \sum_j \min_{\mathbf{x}_{\cdot j} \geq 0} \|\mathbf{y}_{\cdot j} - \mathbf{Ax}_{\cdot j}\|_F^2 \quad (4.18)$$

où  $\mathbf{y}_{\cdot j}$  et  $\mathbf{x}_{\cdot j}$  sont respectivement la  $j^{\text{e}}$  colonne de  $\mathbf{Y}$  et  $\mathbf{X}$ . Le problème des moindres carrés contraint revient donc à résoudre l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & \text{minimiser}_{\mathbf{x}} \|\mathbf{y} - \mathbf{Ax}\|^2 \\ & \text{sous la contrainte } \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned} \quad (4.19)$$

#### Algorithme Bloc Principal Pivoting :

Résoudre le problème de moindre carrés contraint vecteur par vecteur n'est pas efficace d'un point de vu calculatoire, la résolution directe sous forme matricielle (4.17) est plus efficace. Cependant nous nous contenterons de présenter la méthode BPP pour résoudre le cas restreint de l'équation (4.19). Le lecteur



intéressé par les améliorations que permet la résolution sous forme matricielle peut se référer à [64].

Les conditions d'optimalités de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) pour l'équation (4.19) sont les suivantes :

$$\mathbf{z} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{A}^T \mathbf{y} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{z} \geq 0 \quad (4.21)$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \quad (4.22)$$

$$x_i z_i = 0 \quad i = 1, \dots, k \quad (4.23)$$

Les conditions KKT sont des conditions nécessaires d'optimalité. Elles sont suffisantes lorsque la matrice  $\mathbf{A}$  est de rang plein, ce qui est le cas pour la NMF. Toute solution qui satisfait les conditions KKT est donc une solution optimale de l'équation (4.19).

La méthode BBP s'inspire des méthodes dites Active-Set [94], les variables sont divisées en deux groupes  $F$  et  $G$  complémentaires avec  $F \cup G = \{1, \dots, k\}$  et  $F \cap G = \emptyset$ . On note  $\mathbf{x}_F, \mathbf{z}_F$  et  $\mathbf{x}_G, \mathbf{z}_G$  les sous vecteurs correspondant aux indices dans  $F$  et  $G$  respectivement (c'est à dire,  $\mathbf{x}_F = \{x_i | i \in F\}$ ). De même on note  $\mathbf{A}_F$  et  $\mathbf{A}_G$  les sous matrices de  $\mathbf{A}$  dont seules les colonnes d'indice dans  $F$  (respectivement dans  $G$ ) ont été conservées.

Les vecteur  $\mathbf{x}_F$  et  $\mathbf{z}_G$  sont initialisés par un vecteur nul et seront mis à jour successivement par les formules :

$$\mathbf{x}_F = \min_{\mathbf{x}_F} \|\mathbf{A}_F \mathbf{x}_F - \mathbf{y}\|^2 \quad (4.24)$$

$$\mathbf{z}_G = \mathbf{A}_G (\mathbf{A}_F \mathbf{x}_F - \mathbf{y}) \quad (4.25)$$

Si  $\mathbf{x}_F \geq 0$  et  $\mathbf{z}_G \geq 0$  alors le vecteur  $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_F, 0)$  est une solution optimale de l'équation (4.19). Dans le cas contraire, les groupes  $F$  et  $G$  vont être mis à jour pour échanger les variables qui ne respectent pas les conditions KKT (4.21) et (4.22). Les règles de mises à jour sont les suivantes :

$$F = (F - H_1) \cup H_2 \quad (4.26)$$

$$G = (G - H_2) \cup H_1 \quad (4.27)$$

$$\text{avec } H_1 = \{i \in F | x_i < 0\} \text{ et } H_2 = \{i \in G | z_i < 0\}$$

Les vecteur  $\mathbf{x}_F$  et  $\mathbf{z}_G$  sont alors mis à jour avec les nouveaux groupes et le

processus est répété jusqu'à ce que le critère d'arrêt  $\mathbf{x}_F \geq 0$  et  $\mathbf{z}_G \geq 0$  soit rempli.

### 4.1.2.3 Contraintes supplémentaires pour la NMF

Afin de limiter le nombre de solutions de la NMF pour les images hyperspectrales, plusieurs autres termes de régularisation associés à  $EQR(\mathbf{A}, \mathbf{S})$  ont été proposés dans la littérature [44, 99, 29, 100] sous la forme d'une nouvelle fonction de coût :

$$C(\mathbf{A}, \mathbf{S}) = EQR(\mathbf{A}, \mathbf{S}) + \lambda_1 R_1(\mathbf{A}) + \lambda_2 R_2(\mathbf{S}) + \lambda_3(\mathbf{A}, \mathbf{S}) \dots \quad (4.28)$$

où les  $\lambda_i R_i$  définissent des termes de régularisation pondérés. La fonction de coût que la NMF doit minimiser devient alors la fonction  $C(\mathbf{A}, \mathbf{S})$ , et non plus seulement  $EQR(\mathbf{A}, \mathbf{S})$ .

Le choix des termes de régularisation requiert une connaissance *a priori* sur la forme des solutions. Par exemple Kim et Park [101] proposent un terme de régularisation pour favoriser la "sparsité" (rareté) des lignes de  $\mathbf{A}$  (c'est à dire favoriser l'apparition de valeur nulle) :

$$R(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^I \|\mathbf{a}_i\|_1^2 \quad (4.29)$$

Où  $\mathbf{a}_i$  est le  $i^e$  vecteur ligne de  $\mathbf{A}$  et  $\|\cdot\|_1$  est la norme  $L_1$ . Ou encore une contrainte qui encourage les solutions dont la somme des coefficients des lignes de  $\mathbf{A}$  est proche de 1 [102] :

$$R(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\mathbf{1}_K - \mathbf{1}_I\|^2 \quad (4.30)$$

Où  $\mathbf{1}_I = [1, \dots, 1]^T \in \mathbb{R}^I$  est un vecteur de taille  $I$  contenant uniquement des 1.

L'ajout de termes de régularisation à la NMF permet de rendre compte d'une certaine réalité physique, en effet certains matériaux ne sont présents que dans certaines portions de la scène, une contrainte de sparsité permet de rendre compte de la dispersion des *endmembers*.

**Remarque :** Si l'ajout de termes de régularisation permet de réduire le risque d'obtenir des solutions dégénérées, les estimations des matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{S}$  sont données à une permutation près. En effet pour une matrice de permutation  $\mathbf{P}$  on a :  $\mathbf{AS} = \mathbf{AP}^T \mathbf{PS}$ . En pratique, les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{S}$  sont inconnues, ce n'est pas le cas lorsque l'on travaille avec des données simulées, retrouver cette permutation est alors nécessaire pour pouvoir comparer les matrices  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{S}$  à leurs estimées. Dans cette situation la matrice de permutation  $\mathbf{P}$  peut être retrouvée

en cherchant la meilleure correspondance au sens de la distance angulaire entre les spectres de  $\mathbf{S}$  et ceux de la matrice estimée  $\hat{\mathbf{S}}$ . Cette opération consiste à résoudre un problème d'affectation (voir annexe B) qui ne sera pas détaillé ici. Dans la suite de cette thèse, nous considérerons que les matrices estimées ont été corrigées pour annuler cette permutation lorsque c'était nécessaire sans en faire mention.

## 4.2 Démixage en présence de pixels rares

La méthode NMF permet le démixage des *endmembers* dominants mais échoue à démixer les pixels rares [44]. Les critères de détection présentés dans le chapitre précédent permettent de séparer les pixels rares des autres pixels. Nous pouvons tirer profit de cette séparation pour améliorer les performances du démixage en procédant par deux étapes différentes pour les dominants et les rares. En effet, en utilisant la méthode par seuillage proposé en 3.2, nous disposons d'une part des pixels dominants qui sont correctement démixés, et d'autre part des pixels rares dont le démixage est incorrect.

La méthode que nous proposons procède donc en plusieurs étapes :

- Premièrement, la méthode NMF est utilisée pour estimer les *endmembers* dominants  $\hat{\mathbf{S}}_d$  et leurs abondances  $\hat{\mathbf{A}}_d$ . Nous obtenons ainsi une estimation de la matrice  $\mathbf{Y}_d = \hat{\mathbf{A}}_d \hat{\mathbf{S}}_d$ .
- À partir de  $\mathbf{Y}_d$  et de l'image d'origine  $\mathbf{Y}$ , nous calculons l'erreur de reconstruction pixel par pixel. Avec le critère de seuil défini par l'équation (3.18) il est alors possible de séparer les pixels en deux groupes : le groupe  $P_d$  des pixels dominants qui ont été correctement démixés par  $\hat{\mathbf{A}}_d$  et  $\hat{\mathbf{S}}_d$ , et le groupe des pixels rares  $P_r$  qui restent à démixer.
- La dernière étape consiste à démixer séparément les pixels rares  $P_r$ . Cette séparation s'apparente à une sélection de pixels d'intérêt. La majorité des pixels dominants ayant été retirés, au sein du groupe  $P_r$  la majorité des pixels sont des pixels rares, ils ne sont plus sous-représentés, ce qui permet de les démixer.

Une question subsiste : comment démixer les pixels du groupe  $P_r$  ? Ces pixels contiennent des *endmembers* rares, mais rien ne permet de garantir qu'ils sont composés uniquement d'*endmembers* rares. En effet, un pixel rare peut-être un mélange d'*endmembers* rares et dominants. Nous proposons donc dans la partie ci-dessous une méthode NMF modifiée pour démixer les pixels rares lorsque l'on dispose à priori d'une partie des *endmembers*.

### 4.2.1 NMF avec des endmembers connus a priori

Dans cette partie nous supposons que l'on dispose d'un ensemble de pixels  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{P \times L}$  qui respectent le modèle de mélange linéaire :

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{S} + \mathbf{N} \quad (4.31)$$

Avec  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{P \times k}$  la matrice de mélange et  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{k \times L}$  la matrice des *endmembers*.

Nous supposons aussi que l'on connaît  $\mathbf{S}_d \in \mathbb{R}^{k_d \times L}$ ,  $k_d < k$ , une partie des endmembers (les dominants). Le modèle de mélange linéaire se réécrit alors :

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{A}_d | \mathbf{A}_r] \begin{bmatrix} \mathbf{S}_d \\ \mathbf{S}_r \end{bmatrix} + \mathbf{N} = \mathbf{A}_d \mathbf{S}_d + \mathbf{A}_r \mathbf{S}_r + \mathbf{N} \quad (4.32)$$

Avec  $\mathbf{S}_r \in \mathbb{R}^{k_r \times L}$ ,  $k_r = k - k_d$ , la matrices des *endmembers* non connus.

La méthode proposée s'inspire de la méthode ALS présentée dans l'algorithme 1. Dans un premier temps on suppose  $\mathbf{S}$  connue et l'on cherche à estimer  $\mathbf{A}$  en minimisant l'erreur quadratique de reconstruction :

$$\min_{\mathbf{A} \geq 0} \|\mathbf{Y} - \mathbf{A}\mathbf{S}\|^2 \quad (4.33)$$

Ensuite on calcule le résidu entre les pixels observés  $\mathbf{Y}$  et la contribution due aux *endmembers* connus  $\mathbf{A}_d \mathbf{S}_d$  en forçant la positivité du résidu.

$$\mathbf{Y}_{res} = \max(\mathbf{Y} - \mathbf{A}_d \mathbf{S}_d, 0) \quad (4.34)$$

On estime alors la contribution en minimisant l'erreur quadratique entre le résidu, et la contribution due aux *endmembers* à estimer.

$$\min_{\mathbf{S}_d \geq 0} \|\mathbf{Y}_{res} - \mathbf{A}_r \mathbf{S}_r\|^2 \quad (4.35)$$

On itère ensuite ces trois étapes jusqu'à convergence. La méthode est résumée par l'algorithme 2.

### 4.2.2 Résultats expérimentaux

Nous générons 10 000 pixels, composés de 8 *endmembers* sur 581 bandes spectrales. Parmi ces *endmembers* 2 sont considérés comme rares et sont présents dans 1% et 0.5% des pixels générés. Un bruit blanc gaussien est ajouté aux pixels pour obtenir un SNR de 25db. Les *endmembers* sélectionnés sont présentés dans

---

**Algorithme 2** NMF - a priori
 

---

```

/* Initialisation */
 $l \leftarrow 1$ 
 $\mathbf{A}^{(l)} = [\mathbf{A}_d^{(l)} | \mathbf{A}_r^{(l)}]$ 
 $\mathbf{S}^{(l)} = [\mathbf{s}_d^{(l)}]$ 
/* Jusqu'à convergence */
tant que  $EQR(\mathbf{A}^{(l)}, \mathbf{S}^{(l)})$  n'a pas convergé répéter
     $\mathbf{A}^{(l+1)} \leftarrow \min_{\mathbf{A} \geq 0} \|\mathbf{Y} - \mathbf{A}\mathbf{S}^{(l)}\|^2$ 
     $\mathbf{Y}_{res} = \max(\mathbf{Y} - \mathbf{A}_d^{(l+1)}\mathbf{s}_d^{(l)}, 0)$ 
     $\mathbf{S}_r^{(l+1)} \leftarrow \min_{\mathbf{S}_r \geq 0} \|\mathbf{Y}_{res} - \mathbf{A}_r^{(l)}\mathbf{S}_r\|^2$ 
     $\mathbf{S}^{(l+1)} = [\mathbf{s}_d^{(l+1)}]$ 
     $l \leftarrow l + 1$ 
fin tant que
Sortie :  $\mathbf{A}^{(l)}, \mathbf{S}^{(l)}$ 
    
```

---

la figure 4.1.

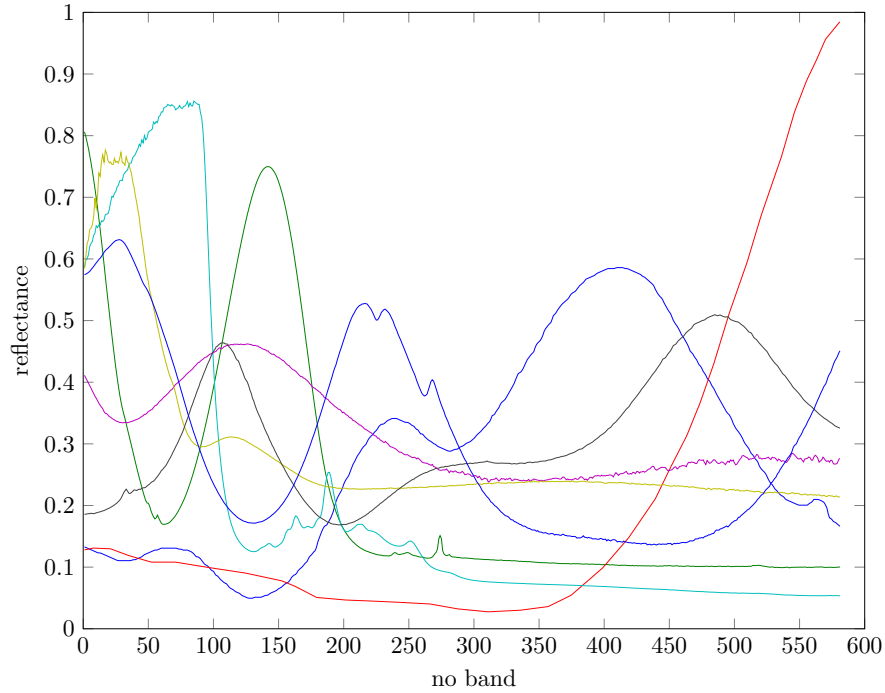


FIGURE 4.1 – Endmembers utilisés pour générer les pixels observés

Nous comparons les *endmembers* estimés par la méthode NMF à ceux obtenus par la méthode proposée. La figure 4.2 présente les *endmembers* estimés par la méthode proposée. On constate que les *endmembers* rares sont plus bruités que les dominants. Leur estimation étant effectuée à partir d'un faible nombre de pixels (les pixels rares), elle est plus sensible au bruit.

Le SAD (Spectral Angle Distance) permet de comparer deux spectres en me-

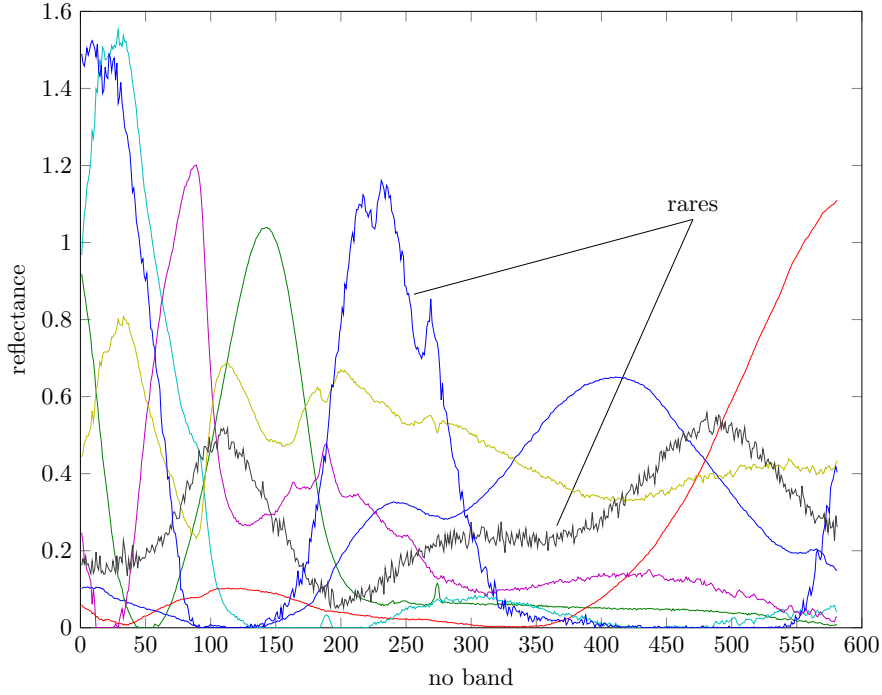


FIGURE 4.2 – Endmembers estimés par la méthode proposée

surant leur distance angulaire. Le MSAD (Mean SAD) permet de comparer les *endmembers* estimés aux valeurs attendues en calculant la moyenne des SAD pour chaque spectre. Ils sont définis comme suit :

$$SAD(\mathbf{s}, \hat{\mathbf{s}}) = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{s}^T \hat{\mathbf{s}}}{\|\mathbf{s}\| \|\hat{\mathbf{s}}\|}\right) \quad (4.36)$$

$$MSAD(\mathbf{S}, \hat{\mathbf{S}}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{s}_k^T \hat{\mathbf{s}}_k}{\|\mathbf{s}_k\| \|\hat{\mathbf{s}}_k\|}\right) \quad (4.37)$$

Le tableau 4.1 présente les résultats moyens obtenus après 1000 répétitions. La figure 4.2 permet d'observer les *endmembers* obtenus par la méthode proposée. Les matrices d'abondance, des *endmembers* et la matrice reconstruite à partir des estimations de la méthode proposée sont plus proches des résultats attendus que pour la NMF.

	MSAD	$\ \mathbf{S} - \hat{\mathbf{S}}\ _F$	$\ \mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}\ _F$	$\ \mathbf{Y} - \hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{S}}\ _F$
NMF	$0.425 \pm 0.015$	$18.38 \pm 1.42$	$30.43 \pm 1.43$	$30.52 \pm 6.37$
Méthode proposé	$0.335 \pm 0.01$	$13.77 \pm 0.73$	$27.40 \pm 0.67$	$9.45 \pm 0.83$

TABLE 4.1 – Comparison entre la NMF et la méthode proposée

Si les résultats expérimentaux montrent de meilleures performances pour la

méthode proposée que pour la NMF simple, ils mettent aussi en évidence les lacunes de la méthode proposée. En effet, l'estimation des *endmembers* rares reposant sur la détection de pixels rares la méthode est très sensible au résultat de cette détection. Lorsque qu'un très faible nombre de pixels sont détectés comme rares, il arrive que la méthode échoue à estimer les *endmembers* rares à cause de la trop faible quantité de pixels. De même, quand le nombre de faux positifs est trop élevé, les *endmembers* estimés s'éloignent des résultats attendus.

## 4.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la problématique du démixage en imagerie hyperspectrale lorsque la scène contient des objets de faibles dimensions.

Partant du principe que nous disposons d'une méthode permettant de connaître ou estimer d'une part les pixels rares qui contiennent les *endmembers* rares, et d'autre part d'une estimation des *endmembers* dominants, nous avons proposé un algorithme pour démixer ces pixels rares en utilisant ces connaissances *a priori*.

Les résultats de la méthode retenue sont encourageants, cependant les expérimentations ont mis en évidence les limites de l'algorithme lorsque le nombre de pixels rares est très faible ou au contraire, le nombre de faux positifs est trop élevé. Dans le chapitre suivant, nous proposerons l'utilisation d'une méthode de rééchantillonnage pour contourner ces difficultés.





# Chapitre 5

## Méthode rééchantillonnage Bootstrap

La méthode Bootstrap [103] est une méthode de rééchantillonnage qui permet la création de nouveaux échantillons à partir des échantillons observés. Dans ce chapitre nous présentons la méthode bootstrap et son application en imagerie hyperspectrale. Nous proposons une étude sur l'utilisation de la méthode bootstrap pour résoudre la problématique de démixage. Nous proposons deux nouvelles méthodes de démixage d'image hyperspectrale en présence d'*endmembers* rares qui tirent profit du rééchantillonnage Bootstrap [104].

### 5.1 Histoire du bootstrap

La technique dite du bootstrap [105, 2] est une méthode d'inférence statistique introduite par Bradley Efron en 1979 [103] qui a été utilisée initialement pour l'estimation de paramètres statistiques tels que la variance, la moyenne ou l'écart type d'un échantillon de population. Le nom de la méthode provient de l'expression anglaise “to pull oneself up by one's bootstraps” qui se traduit littéralement par “se hisser en tirant sur les languettes de ses propres bottes” en référence au baron von Münchhausen qui se serait sorti du marécage dans lequel il était embourbé en se tirant par les bottes. En effet, par bootstrap, on se réfère généralement à la technique de ré-échantillonnage [106], qui consiste à créer de nouveaux échantillons à partir des observations initiales.

Le ré-échantillonnage bootstrap est utilisé principalement pour accroître artificiellement les échantillons limités en données. À partir d'un échantillon initial issu d'une population dont on veut estimer certaines informations, on tire au sort, avec remise,  $n$  observations pour obtenir un nouvel échantillon. On répète l'opération plusieurs fois pour obtenir un grand nombre de nouveaux échantillons. Les nouvelles observations ainsi obtenues sont alors utilisées afin d'affiner l'estimation des paramètres faite sur les observations initiales. La figure 5.1 illustre la

création de nouveaux échantillons bootstrap par tirage avec remise à partir d'un échantillon initial.

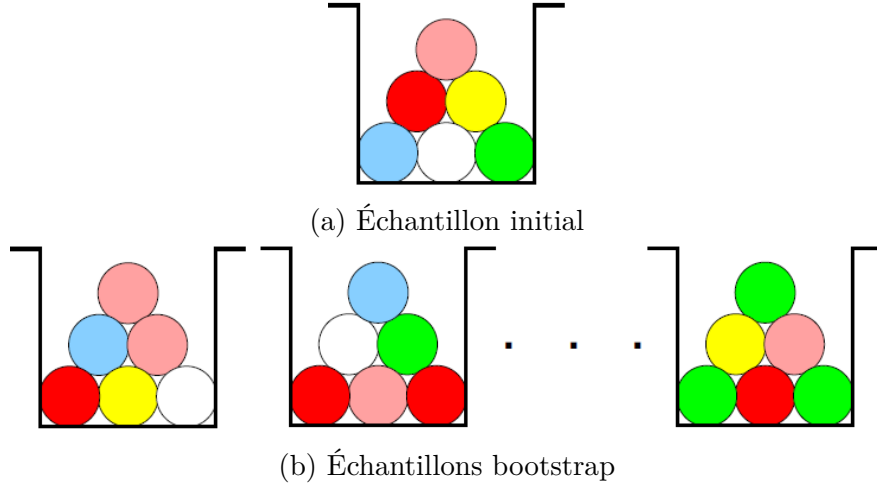


FIGURE 5.1 – Illustration du ré-échantillonnage bootstrap (Illustration issue [2])

Les méthodes de ré-échantillonnage bootstrap ont ensuite été utilisées en traitement du signal et de l'image [107, 108, 109]. Plus récemment l'utilisation de méthodes bootstrap a fait son apparition dans le traitement d'images hyperspectrales, tout d'abord pour traiter des problématiques de classifications [10, 12] et enfin dans des méthodes de démixage [110, 111].

En classification la méthode bootstrap est utilisée pour résoudre le problème de déséquilibre de classe [12]. Les problématiques de déséquilibre de classe apparaissent lorsqu'une classe est sous-représentée dans le jeu de données d'apprentissage. Le rééchantillonnage bootstrap permet de résoudre ce problème en générant de nouveaux ensembles d'apprentissage à partir de l'ensemble de données d'origine. Dans ce cas le bootstrap consiste à échantillonner chaque classe de façon uniforme, avec remise, pour obtenir un nouvel ensemble de données dans lequel les classes sont équilibrées. Dans la suite nous présentons une méthode de rééchantillonnage, inspirée de bootstrap, adaptée au démixage hyperspectral.

## 5.2 Application du bootstrap au démixage hyperspectral

Dans le cas d'un démixage des images hyperspectrales le paramètre que nous cherchons principalement à affiner est l'estimation des *endmembers* de la matrice  $\mathbf{S}$  et la matrice de mélange  $\mathbf{A}$  associée.

Le ré-échantillonnage bootstrap consiste à générer de "nouvelles" observations artificielles à partir d'un échantillon initial. Pour adapter la méthode bootstrap au démixage d'images hyperspectrales dans le cas d'un modèle de mélange linéaire

nous proposons de générer de nouveaux pixels  $\mathbf{y}_j^*$  à partir de la matrice des pixels observés  $\mathbf{Y}$ . Pour cela,  $q$  pixels sont choisis aléatoirement dans  $\mathbf{Y}$  et  $q$  coefficients  $b_{1,j} \dots b_{q,j}$  sont tirés uniformément dans  $[0, 1]$  puis normalisés de sorte que  $b_{i,j} \geq 0$  et  $\sum_i b_{i,j} = 1$ . Le nouveau pixel est alors décrit par l'équation suivante :

$$\mathbf{y}_j^* = \sum_{i=1}^q b_{i,j} \mathbf{y}_{p_{i,j}} \quad (5.1)$$

$$\sum_{i=1}^q b_{i,j} = 1 \text{ et } b_{i,j} \geq 0$$

Où les  $p_{i,j}$  sont les indices pixels choisis aléatoirement dans  $\mathbf{Y}$ . Si l'on remplace les pixels  $\mathbf{y}_{p_{i,j}}$  dans l'équation (5.1) par leur expression selon le modèle de mélange linéaire présenté par l'équation (2.1), nous obtenons l'expressions suivante :

$$\mathbf{y}_j^* = \sum_{i=1}^q b_{i,j} \left( \sum_{k=1}^K \alpha_{p_{i,j},k} \mathbf{s}_k + \mathbf{n}_{p_{i,j}} \right) \quad (5.2)$$

$$= \sum_{k=1}^K \left( \sum_{i=1}^q b_{i,j} \alpha_{p_{i,j},k} \right) \mathbf{s}_k + \sum_{i=1}^q b_{i,j} \mathbf{n}_{p_{i,j}} \quad (5.3)$$

En posant  $a_{j,k}^* = \sum_{i=1}^q b_{i,j} \alpha_{p_{i,j},k}$  et  $\mathbf{n}_j^* = \sum_{i=1}^q b_{i,j} \mathbf{n}_{p_{i,j}}$ , l'équation (5.3) devient :

$$\mathbf{y}_j^* = \sum_{k=1}^K a_{j,k}^* \mathbf{s}_k + \mathbf{n}_j^* \quad (5.4)$$

Comme d'une part, l'équation (2.5) du modèle de mélange linéaire impose que la somme sur  $k$  des  $\alpha_{p_{i,j},k}$  soit unitaire, et d'autre part, la somme sur  $i$  des  $b_{i,j}$  est elle aussi égale à 1 par construction (voir équation (5.1)), nous pouvons en déduire que la somme sur  $k$  des  $a_{j,k}^*$  est elle aussi unitaire :

$$\sum_{k=1}^K a_{j,k}^* = 1 \quad (5.5)$$

De plus le terme  $\mathbf{n}_j^*$  est une somme pondérée des vecteurs de bruit gaussiens centrés  $\mathbf{n}_{\mathbf{p}}$ . Par conséquent  $\mathbf{n}_j^*$  suit lui aussi une loi gaussienne centrée.

Nous pouvons en déduire que les pixels générés par bootstrap respectent le modèle de mélange linéaire et ses contraintes, avec les même *endmembers*  $\mathbf{S}$  que les pixels observés. En générant  $P_b$  pixels par bootstrap nous pouvons produire

un nouvel échantillon  $\mathbf{Y}^*$  qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\mathbf{Y}^* = \mathbf{A}^* \mathbf{S} + \mathbf{N}^* \quad (5.6)$$

Avec  $\mathbf{Y}^*$  dont les lignes correspondent aux pixels bootstraps  $\mathbf{y}_j^*$ , la nouvelle matrice de bruit  $\mathbf{N}^*$  dont les lignes sont les vecteurs  $\mathbf{n}_j^*$ , la matrice  $\mathbf{A}^*$  correspond aux abondances  $a_{j,k}^*$  des pixels bootstraps et  $\mathbf{S}$  est la matrice des *endmembers* initiale.

## 5.3 Étude de la méthode bootstrap

Dans cette partie, après avoir mis en évidence l'influence de l'utilisation du bootstrap sur le bruit d'un jeu de données, nous étudierons dans quelles mesures la méthode bootstrap permet d'améliorer le démixage dans un cas général. Le cas particulier des pixels rares sera traité dans la partie suivante.

### 5.3.1 Influence de l'algorithme bootstrap sur le bruit blanc gaussien

De manière générale, les méthodes de démixage sont sensibles au bruit, plus le SNR est élevé, meilleure est l'estimation des *endmembers*. La méthode bootstrap telle que présentée dans la partie précédente consiste à effectuer des combinaisons linéaires de pixels observés. Nous étudions ici l'impact qu'elle peut avoir sur les vecteurs de bruits contenus dans ces pixels.

D'après l'équation de mélange linéaire (2.3) le pixel  $y_p$  s'écrit :

$$\mathbf{y}_p = \boldsymbol{\alpha}_p \mathbf{S} + \mathbf{n}_p \quad (5.7)$$

Avec  $\mathbf{n}_p$  le vecteur de bruit gaussien, identiquement, indépendamment distribué. Le vecteur bruit suit une loi normale multidimensionnelle  $\mathbf{n}_p \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I})$ , où  $\sigma$  influence directement le SNR.

Si l'on choisi aléatoirement, avec une probabilité uniforme,  $q$  pixels de l'image notés  $(\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_q)$  et  $b_1, b_2, \dots, b_q$  les coefficients de bootstrap correspondants,

le pixel bootstrap  $\mathbf{y}^*$  s'écrit d'après les équation (5.3) et (5.4) :

$$\mathbf{y}^* = \boldsymbol{\alpha}^* \mathbf{S} + \mathbf{n}^* \quad (5.8)$$

$$\boldsymbol{\alpha}^* = \sum_{i=1}^q b_i \boldsymbol{\alpha}_i \quad (5.9)$$

$$\mathbf{n}^* = \sum_{i=1}^q b_i \mathbf{n}_i \quad (5.10)$$

D'après les hypothèses du modèle de mélange linéaire, les vecteurs bruits  $\mathbf{n}_i$  sont indépendants. On en déduit la loi de probabilité d'un vecteur de bruit pour un pixel obtenu par bootstrap (ou "pixel bootstrap") :

$$\mathbf{n}^* \sim \mathcal{N}(0, \sum_{i=1}^q b_i^2 \sigma^2 I) \quad (5.11)$$

Par définition (5.1) les coefficients bootstrap sont positifs  $b_i \geq 0$  et leur somme est unitaire  $\sum_{i=1}^q b_i = 1$ . On en déduit immédiatement que la somme des coefficients au carré est inférieure à 1 :  $\sum_{i=1}^q b_i^2 \leq 1$ . Le cas d'égalité est un cas dégénéré atteint uniquement lorsque l'un des coefficient  $b_i$  vaut 1, les autres étant tous nul. La loi de probabilité de  $\mathbf{n}^*$ , équation (5.11), peut se réécrire :

$$\mathbf{n}^* \sim \mathcal{N}(0, \sigma^{*2} I) \quad (5.12)$$

$$\sigma^* < \sigma$$

La variance des pixels bootstraps étant inférieure à celle des pixels d'origines et le vecteur d'abondance  $\boldsymbol{\alpha}^*$  ayant des propriétés similaires au vecteurs d'abondance d'origine  $\boldsymbol{\alpha}_p$ , le SNR d'une image  $\mathbf{Y}^*$  constituée de pixels bootstraps doit être supérieur à celui de l'image  $\mathbf{Y}$  d'origine.

Cette propriété peut se vérifier expérimentalement, en générant une image  $\mathbf{Y}$  contenant 100 pixels avec un SNR fixé entre 10 et 30db, puis 100 pixels bootstraps  $\mathbf{Y}^*$  obtenus en mélangeant  $q$  pixels de  $\mathbf{Y}$ , pour  $q$  allant de 2 jusqu'à 25. L'opération est répétée pour plusieurs générations de  $\mathbf{Y}$  et différentes réalisations du bruit. Nous observons à chaque fois une augmentation du SNR de  $\mathbf{Y}^*$  par rapport à celui de  $\mathbf{Y}$ , cette augmentation dépend de façon logarithmique du nombre de pixels  $q$  utilisés. La figure 5.2 montre le résultat obtenu dans le cas d'un SNR initial de 20db.

Les résultats confirment notre approche théorique. L'utilisation du bootstrap permet d'augmenter le SNR. Nous nous attendons donc à de possibles améliorations de performances de la NMF en utilisant le bootstrap, notamment en cas de

bruit important.

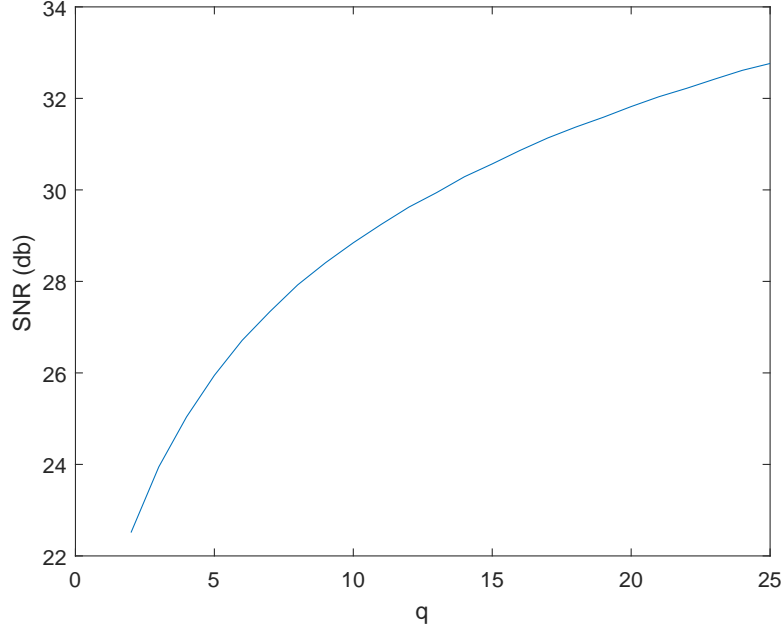


FIGURE 5.2 – SNR de  $\mathbf{Y}^*$  en fonction du nombre de pixels  $q$  utilisés pour le bootstrap

#### 5.3.2 Effet du bootstrap sur le démixage

Étudions à présent l'effet d'un rééchantillonnage par bootstrap sur les méthodes de démixage basées sur la NMF.

Pour les tests effectués des images  $\mathbf{Y}$  de 100 pixels ont été créés avec 6 endmembers de 166 bandes spectrales. Pour chaque image une image bootstrap  $\mathbf{Y}^*$  contenant 100 pixels bootstraps est générée à partir de  $q$  pixels de l'image d'origine. Les *endmembers* sont estimés en appliquant une méthode NMF aux pixels bootstraps  $\mathbf{Y}^*$ .

La qualité de l'estimation des *endmembers* est évaluée en mesurant le MSAD (voir équation (4.37)) après démixage sur l'image  $\mathbf{Y}^*$ .

La figure 5.3 présente les résultats obtenus en fonction du nombre  $q$  de pixels d'origine utilisés pour créer les pixels bootstraps de l'image  $\mathbf{Y}^*$  pour un SNR de 15db dans l'image d'origine. Le cas  $q = 1$  correspond à l'estimation obtenue en l'absence de bootstrap.

De même, la figure 5.4 présente les résultats obtenus lorsque le SNR de l'image d'origine est de 30db.

On observe des résultats différents en fonction de la méthode NMF utilisée :

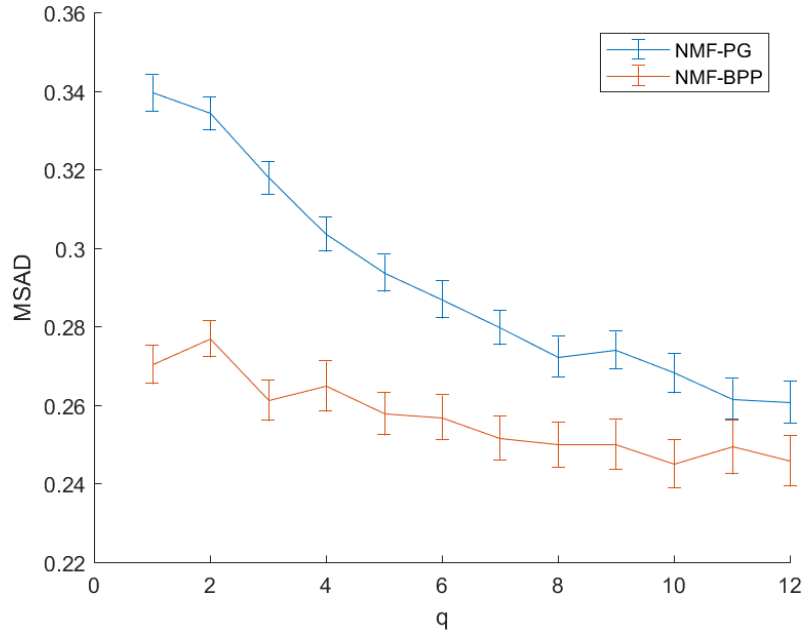


FIGURE 5.3 – Qualité de l'estimation des endmembers en fonction du nombre de pixels  $q$  utilisés pour le bootstrap pour un SNR initial de 15dB en utilisant la NMF-PG et la NMF-BPP pour démixer  $\mathbf{Y}^*$

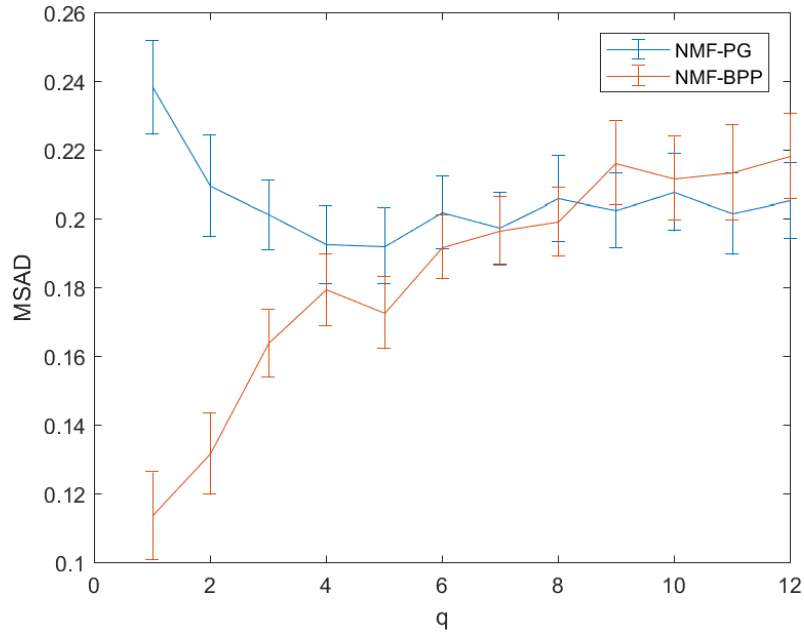


FIGURE 5.4 – Qualité de l'estimation des endmembers en fonction du nombre de pixels  $q$  utilisés pour le bootstrap pour un SNR initial de 30dB en utilisant la NMF-PG et la NMF-BPP pour démixer  $\mathbf{Y}^*$

Dans le cas de la NMF-PG, le pré-traitement par bootstrap permet d'améliorer l'estimation des *endmembers*. Dans les cas où le SNR est faible, plus le nombre  $q$  de pixels utilisés pour réaliser le bootstrap est élevé, meilleure est l'estimation. Dans le cas d'un SNR plus élevé, le bootstrap permet une meilleure estimation, même si les performances stagnent lorsque le nombre  $q$  de pixels utilisés est identique ou supérieur au nombre d'endmembers présents dans l'image d'origine.

Dans le cas de la NMF-BPP, le bootstrap permet d'améliorer l'estimation des *endmembers* lorsque le SNR est faible, mais il a un effet contre productif dans le cas d'un SNR élevé. Dans la partie précédente nous avons vu que la méthode bootstrap permettait de réduire la variance de bruit des pixels bootstraps par rapport à celle des pixels d'origine, et donc d'augmenter le SNR. Les pixels doivent subir un phénomène similaire en "diluant" les *endmembers*. Cette dilution pourrait réduire les performances de la NMF-BPP dans le cas d'un SNR élevé. À SNR faible, le gain de SNR qu'apporte la méthode bootstrap permettrait de contrebalancer ce phénomène.

Les estimations obtenues par la méthode NMF-BPP sont presque toujours meilleures que celles obtenues par la NMF-PG. Dans la suite de ce manuscrit, nous continuerons nos expérimentations en conservant uniquement la NMF-BPP.

#### 5.3.3 Influence de la présence des pixels originaux dans une image "bootstrappée"

Il peut y avoir deux façons différentes d'utiliser le bootstrap :

- Soit en générant une image composée uniquement de pixels bootstraps (comme au paragraphe précédent).
- Soit en générant des pixels bootstraps pour enrichir l'image d'origine.

Nous utiliserons ici des images  $\mathbf{Y}$  de 100 pixels créées à partir de 6 endmembers de 166 bandes spectrales.

Dans le premier cas, nous générons une image bootstrap  $\mathbf{Y}^*$  contenant 200 pixels bootstraps à partir de  $q$  pixels de l'image d'origine. Les méthodes de démixage basées sur la NMF sont ensuite appliquées à  $\mathbf{Y}^*$ .

Dans le second cas, nous générons une image bootstrap  $\mathbf{Y}^*$  contenant 100 pixels bootstraps à partir de  $q$  pixels de l'image d'origine. Les pixels bootstraps sont ensuite ajoutés à ceux de l'image d'origine, et les méthodes de démixage par NMF sont utilisées sur cette image augmentée  $\begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{Y}^* \end{bmatrix}$ .

À SNR faible, on peut observer l'apport du bootstrap en terme de débruitage. La figure 5.5 montre que les performances de la NMF-BPP sont meilleures pour image composée uniquement de pixels bootstraps que pour l'image augmentée. En effet, la présence des pixels originaux, dont le bruit n'a pas été réduit, dans



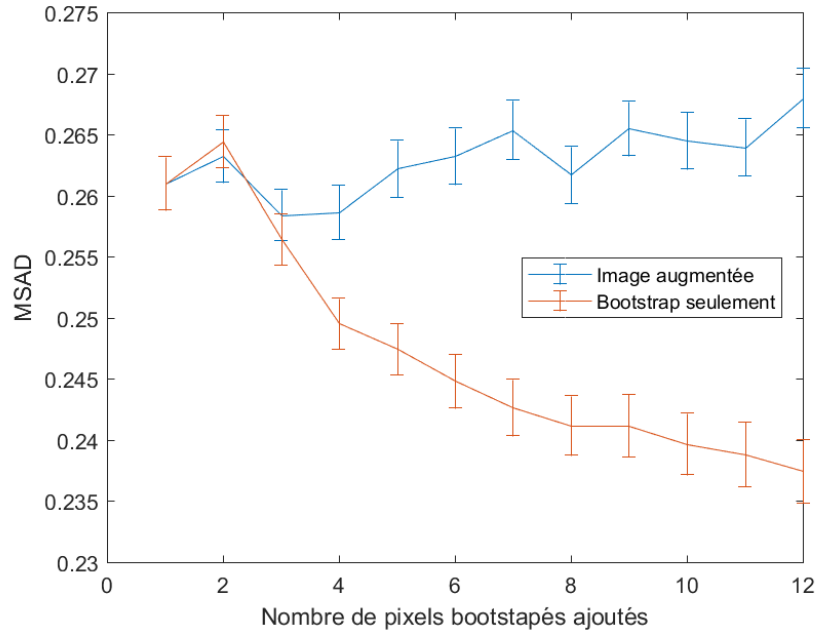


FIGURE 5.5 – Qualité de l'estimation des endmembers en fonction de nombre de pixels  $q$  utilisés pour le bootstrap pour un SNR initial de 15dB pour différentes façons d'utiliser le bootstrap

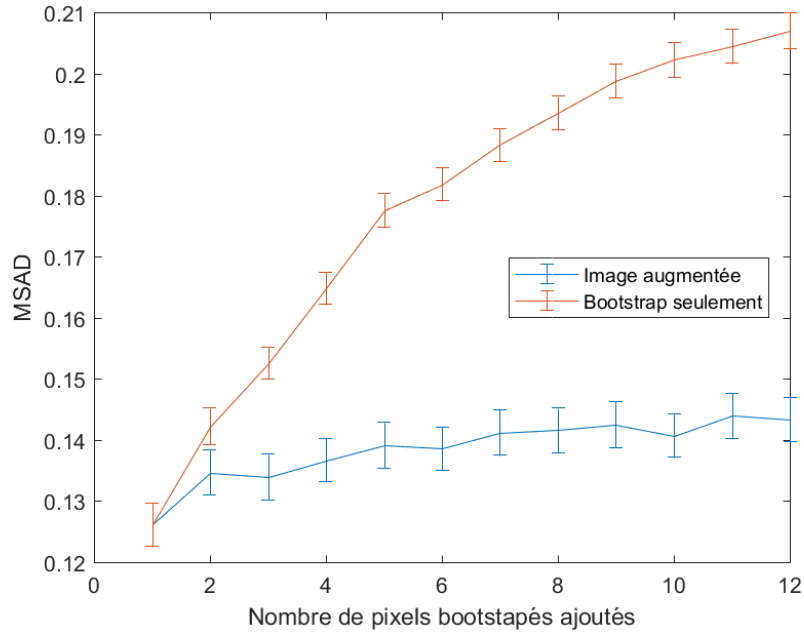


FIGURE 5.6 – Qualité de l'estimation des endmembers en fonction de nombre de pixels  $q$  utilisés pour le bootstrap pour un SNR initial de 30dB pour différentes façons d'utiliser le bootstrap

l'image augmentée ne facilite pas le démixage par la NMF.

À SNR élevé les résultats sont de meilleure qualité dans le cas de l'image augmentée comme on peut l'observer sur la figure 5.6. Dans la section précédente nous avons émis l'hypothèse que le gain de SNR apporté par bootstrap était négligeable face au phénomène de dilution des *endmembers* qui réduisait les performances de la NMF. En effet, le fait de conserver les pixels originaux réduit ici l'impact de ce phénomène de dilution.

Les résultats expérimentaux dans le cas général ont permis d'étudier le comportement des méthodes de démixage basées sur la NMF. Nous avons montré que ces résultats variaient en fonction de la méthode NMF utilisée, de la façon dont était utilisé le bootstrap et du SNR de l'image d'origine sans toutefois pouvoir mettre en évidence un avantage significatif à l'utilisation du bootstrap dans un cas général.

## 5.4 Étude en présence de pixels rares

Dans la partie précédente, nous avons étudié l'utilisation du bootstrap dans un cas général. Ici, nous l'étudierons sur le démixage en présence de pixel rare, pour déterminer s'il est possible d'améliorer les résultats de démixage à l'aide de la méthode bootstrap.

### 5.4.1 Enrichissement de l'image originale par Bootstrap

En supposant que l'on ait pu déterminer la ou les régions contenant les *endmembers* rares, par exemple en utilisant une des méthodes de détection présentée dans le chapitre 3, nous disposons de deux sous-matrices  $\mathbf{Y}_d$  et  $\mathbf{Y}_r$  contenant les pixels dominants pour l'une et les pixels rares pour l'autre. L'idée ici est d'utiliser l'algorithme de bootstrap sur  $\mathbf{Y}_r$  pour augmenter le nombre de pixels contenant les *endmembers* rares, puis les ajouter à l'image originale.

L'algorithme se décompose de la façon suivantes :

- Entrées : image hyperspectrale  $\mathbf{Y}$ , nombre  $k$  d'*endmembers*
- Repérage des zones d'intérêt contenant les pixels rares. Ces zones d'intérêt sont regroupées en une imagerie  $\mathbf{Y}_r$ .
- Utilisation du bootstrap sur l'imagerie  $\mathbf{Y}_r$  pour augmenter le nombre de pixels d'intérêt. On stocke ces pixels dans  $\mathbf{Y}_r^* = (\mathbf{Y}_r, \mathbf{Y}^*)$ .
- Concaténation de l'image de départ avec les pixels bootstraps :  $\mathbf{Y}_{augmented} = (\mathbf{Y}, \mathbf{Y}_r^*)^T$
- Démixage de tous les *endmembers* par NMF-BPP sur  $\mathbf{Y}_{augmented}$  :  $\mathbf{Y}_{augmented} = \mathbf{A}_{augmented} \tilde{\mathbf{S}}$
- On réutilise  $\tilde{\mathbf{S}}$  pour réaliser la factorisation de l'image  $\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{S}}$

Pour tester la méthode nous générons des images des 1600 pixels, et 166 bandes, comportant 5 *endmembers* dominants, et 1 *endmember* rare localisé sur une cible de 4 pixels. L'abondance de cet *endmember* est entre 0.66 et 0.8 sur la cible. Le SNR est fixé à 30dB. La région d'intérêt (contenant les pixels rares) a été détectée au préalable, elle est constituée de 16 pixels (couronne de largeur 1 pixels autour de la cible). Nous avons fait varier le nombre de pixels ajoutés par bootstrap dans l'image de départ.

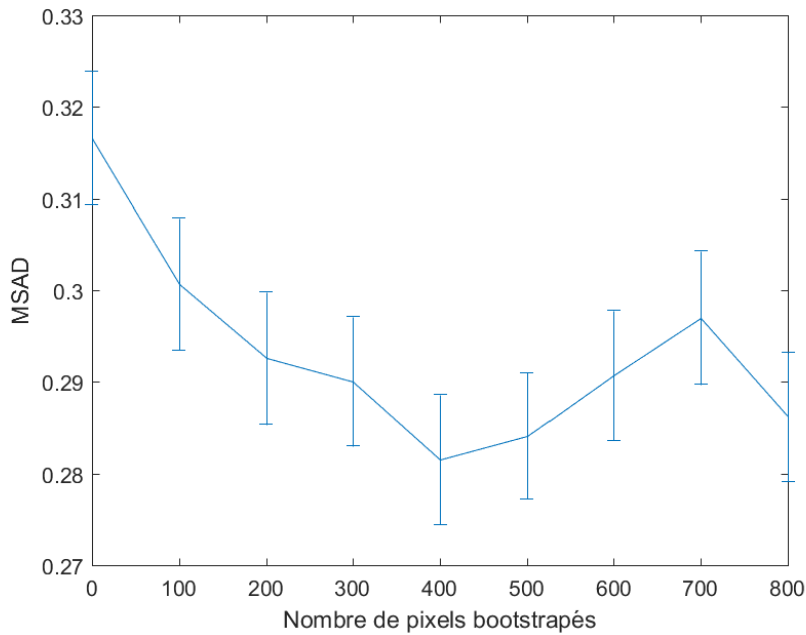


FIGURE 5.7 – Qualité de l'estimation des *endmembers* démixés par NMF-BPP en fonction du nombre de pixels bootstraps ajoutés à l'image d'origine

La figure 5.7 montre l'évolution de l'estimation de l'ensemble des *endmembers* en fonction du nombre de pixels bootstrap ajoutés. La figure 5.8 montre quand à elle l'évolution de l'estimation de l'*endmember* rare seul. Lorsque le nombre de pixels ajoutés est nul, les résultats obtenus sont ceux de la NMF sans bootstrap.

Les résultats montrent qu'augmenter artificiellement le nombre de pixels permet d'améliorer l'estimation des *endmembers* rares en conservant la bonne estimation des dominants. En revanche, il semble qu'il n'est pas nécessaire d'ajouter beaucoup de pixels et qu'au contraire, un ajout de pixels trop important pourrait être contre productif.

### 5.4.2 NMF-BDR

La méthode que NMF-BDR que nous proposons [104] dans cette partie consiste à Bootstraper les pixels Dominant et les pixels Rare ensemble, d'où son nom BDR.

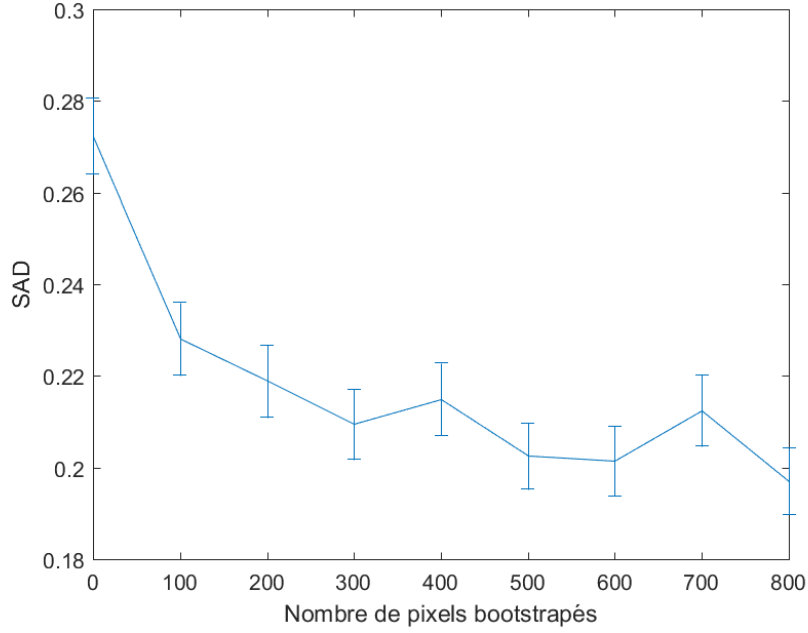


FIGURE 5.8 – Qualité de l'estimation de l'*endmember* rare démixé par NMF-BPP en fonction du nombre de pixels bootstraps ajoutés à l'image d'origine

La méthode NMF-BDR s'inspire des méthodes bootstrap utilisées pour la classification en imagerie hyperspectrale. Les deux sous-matrices  $\mathbf{Y}_d$  et  $\mathbf{Y}_r$  peuvent être vues comme une classification des pixels observés en deux classes : les pixels dominants et les pixels rares. Par définition, la plupart des pixels de l'image sont des pixels dominants et très peu d'entre eux sont des pixels rares. L'idée clé est de faire en sorte que les pixels rares perdent leur caractéristique "rare" en utilisant le rééchantillonnage bootstrap.

Nous générons une nouvelle image de  $P$  pixels bootstrap. Les pixels bootstrap sont générés en combinant deux pixels observés. Pour s'assurer que les *endmembers* rares ne le soient plus dans la nouvelle image, nous choisissons aléatoirement un pixel dans chaque classe, de sorte que :

$$y_j^* = \alpha_j y_{d,j} + \beta_j y_{r,j} \quad (5.13)$$

Avec  $y_{d,j}$  un pixel choisi aléatoirement dans  $\mathbf{Y}_d$  et  $y_{r,j}$  pris aléatoirement dans  $\mathbf{Y}_r$ .  $\alpha_j$  et  $\beta_j$  sont positifs et de somme unitaire  $\alpha_j + \beta_j = 1$ .

Le nombre de pixels dans  $\mathbf{Y}_r$  est très inférieur au nombre de pixels  $P$  présents dans l'image, en conséquent chaque pixel rare est présent dans plusieurs pixels de  $\mathbf{Y}^*$ . De plus comme les *endmembers* dominants sont présents dans de nombreux pixels, en sélectionnant un pixel de  $\mathbf{Y}_d$  pour chaque pixel bootstrap, on s'assure

qu'ils sont présents dans plusieurs pixels de  $\mathbf{Y}^*$ . Par conséquent les *endmembers* rares et dominants sont présents dans un grand nombre de pixels de  $\mathbf{Y}^*$  et il est donc possible des les estimer avec une méthode NMF en minimisant la fonction de cout suivante :

$$C(\mathbf{A}^*, \mathbf{S}) = \|\mathbf{Y}^* - \mathbf{A}^* \mathbf{S}\|^2 \quad (5.14)$$

La méthode NMF nous permet d'estimer la matrice des endmembers  $\mathbf{S}$  et la matrice des abondances bootstraps  $\mathbf{A}^*$ .

La matrice des abondances bootstraps  $\mathbf{A}^*$  n'est pas pertinente, nous devons estimer la matrice d'abondance  $\mathbf{A}$  correspondant à l'image d'origine  $Y$ . Pour cela nous proposons d'utiliser une méthode d'estimation des moindre carré non-négative pour résoudre l'équation suivante :

$$\mathbf{A} = \min_{\mathbf{A}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{A} \mathbf{S}\|^2 \quad (5.15)$$

Nous obtenons alors une estimation  $\mathbf{S}$  de tous les *endmembers* dominants et rares ainsi que leur matrice d'abondances  $\mathbf{A}$ .

### 5.4.3 NMF-BR

Dans cette section, nous supposons avoir une estimation des *endmembers* dominants  $\mathbf{S}_d$  qui nous a permis d'obtenir  $\mathbf{Y}_d$  et  $\mathbf{Y}_r$ . Nous nous intéressons uniquement aux pixels observés présents dans  $\mathbf{Y}_r$ . Cette matrice contient peu de pixels, la plupart sont des pixels rares, ou des pixels avec une réalisation du bruit anormale. Le nombre de pixels présents dans  $\mathbf{Y}_r$  peut être trop faible pour obtenir une estimation fiable des *endmembers* rares avec la méthode NMF [12]. Pour résoudre ce problème, nous utilisons la méthode de rééchantillonnage bootstrap pour augmenter le nombre de pixels utilisables.

Notons  $\mathbf{Y}^*$  la matrice contenant  $P_b$  pixels bootstraps, rééchantillonnés à partir de  $\mathbf{Y}_r$  :

$$\mathbf{Y}^* = \mathbf{B} \mathbf{Y}_r \quad (5.16)$$

Avec  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{P_b \times P_r}$  la matrice des coefficients bootstrap de l'équation (5.1). La matrice  $\mathbf{Y}^*$  peut, de façon similaire à l'équation (4.32), s'exprimer sous la forme :

$$\mathbf{Y}^* = \mathbf{A}_d^* \mathbf{S}_d + \mathbf{A}_r^* \mathbf{S}_r + \mathbf{N}_r \quad (5.17)$$

Où  $\mathbf{A}^*$  est la matrice d'abondance artificielle correspondant aux pixels boots-

traps, et  $\mathbf{S}$  la matrice des *endmembers* initiaux.

Nous utilisons la méthode NMF *a priori*, présentée dans la partie 4.2.1 pour démixer l'image  $\mathbf{Y}^*$  avec les *endmembers* dominants  $\mathbf{S}_d$  connus, pour minimiser la fonction de coût :

$$C(\mathbf{A}^*, \mathbf{S}_r) = \|\mathbf{Y}^* - \mathbf{A}^* \mathbf{S}_r\|^2 \quad (5.18)$$

$$s.t. \ S_r \geq 0, \mathbf{A}^* \geq 0, \mathbf{A}^* \mathbf{1}_{P_r} = \mathbf{1}_{P_r} \quad (5.19)$$

Nous obtenons une estimation des *endmembers* rares  $\mathbf{S}_r$  et les abondances bootstraps  $\mathbf{A}^*$ . Nous disposons donc d'une estimation de tous les *endmembers*  $\mathbf{S}$ , cependant nous devons encore estimer les abondances. L'estimation des abondances se fait avec un méthode des moindres carrés non-négatifs telle que :

$$\mathbf{A} = \min_{\mathbf{A}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{A} \mathbf{S}\|^2 \quad (5.20)$$

La méthode complète est présentée par l'algorithme 3.

---

**Algorithme 3** NMF-BR
 

---

**Entrée :**  $\mathbf{Y}$

```

/* Estimation des endmembers dominants */
 $\hat{\mathbf{A}}_d, \hat{\mathbf{S}}_d \leftarrow \text{NMF}(\mathbf{Y})$ 
/* Detection des pixels rares */
 $\hat{\sigma}^2 \leftarrow \text{estimationVarianceDuBruit}(\mathbf{Y})$ 
 $\tau \leftarrow \hat{\sigma}^2 + 3\sqrt{\frac{2\hat{\sigma}^4}{L}}$  /* Estimation de la valeur du seuil */
 $r_p \leftarrow \|\mathbf{y}_p - \hat{\mathbf{a}}_{pd} \hat{\mathbf{S}}_d\|^2$ 
 $\mathbf{Y}_r \leftarrow \{\mathbf{y}_p \mid r_p \geq \tau\}$ 
/* Estimation des endmembers rares */
 $\mathbf{Y}^* \leftarrow \text{bootstrap}(\mathbf{Y}_r)$ 
 $\hat{\mathbf{A}}^*, \hat{\mathbf{S}}_r \leftarrow \text{NMF}_{\text{apriori}}(\mathbf{Y}^* | \hat{\mathbf{S}}_d)$ 
 $\hat{\mathbf{A}} \leftarrow \min_{\mathbf{A}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{A} \hat{\mathbf{S}}\|$ 
Sortie :  $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{S}}$ 
    
```

---

#### 5.4.4 Résultats comparatifs

Nous générons 1000 images de 1600 pixels, 166 bandes, avec 5 *endmembers* dominants répartis sur l'image et 2 rares : un sur quatre cibles de 4 pixels, et un sur une cible de 9 pixels. Les abondances choisies sont entre 0.2 et 0.33 : pour une cible de 4 pixels, cela correspondrait à 1 pixel pur détecté à cheval sur 4 pixels. La figure 5.9 présente les *endmembers* utilisés et les cartes d'abondances pour chacun des deux *endmembers* rares pour une des réalisations.

Nous avons comparé les performances de démixage pour la NMF sur l'image

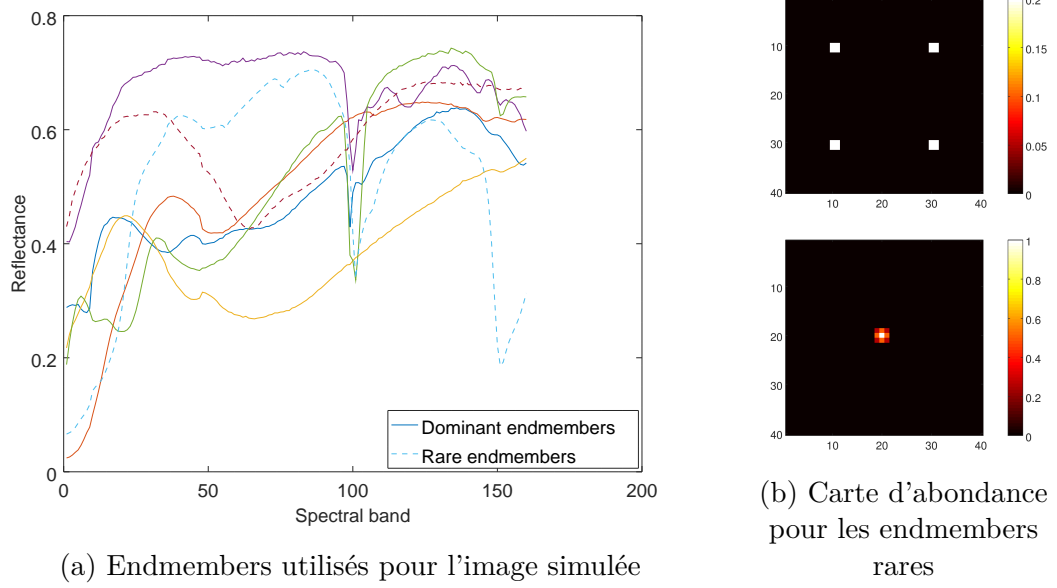


FIGURE 5.9 – Spectres de réflexion des *endmembers* utilisés pour réaliser l'image simulée (a) et cartes d'abondance des spectres rares (b)

de départ, les méthodes proposées NMF-BR et NMF-BDR pour des SNR variant entre 24 et 30dB.

La qualité d'estimation est évaluée à l'aide du MSAD pour mesurer la distance entre les valeurs estimées et les valeurs réelles. Les résultats numériques sont présentés dans le tableau 5.1.

SNR (db)	24	26	28	30
NMF	0.2656	0.2365	0.2239	0.2033
NMF-BDR	0.2082	0.1961	0.1859	0.1805
NMF-BR	0.1958	0.1808	0.1762	0.1645

TABLE 5.1 – MSAD pour la NMF et les méthodes proposées avec bootstrap des rares et dominants NMF-BDR ou des rares uniquement NMF-BR

L'estimation des abondance est évaluée en utilisant l'erreur quadratique moyenne normalisée (NMSE) entre les abondances estimées et la vérité terrain :

$$NMSE = \frac{\|\mathbf{A} - \hat{\mathbf{A}}\|^2}{\|\mathbf{A}\|^2} \quad (5.21)$$

Les résultats numériques sont présentés dans le tableau 5.2.

SNR (db)	24	26	28	30
NMF	0.0194	0.0195	0.0195	0.0193
NMF-BDR	0.0183	0.0186	0.0184	0.0181
NMF-BR	0.0178	0.0178	0.0177	0.0178

TABLE 5.2 – NMSE pour les méthodes NMF, NMF-BDR et NMF-BR.

On observe que les deux méthodes proposées permettent d'améliorer l'estimation des endmembers par rapport à une NMF simple sur l'image de départ. La NMF-BR permet d'obtenir de meilleurs résultats que la NMF-BDR en termes d'estimation des *endmembers* et des abondances.

La figure 5.10 permet d'observer les estimations obtenus par la méthode NMF-BR.

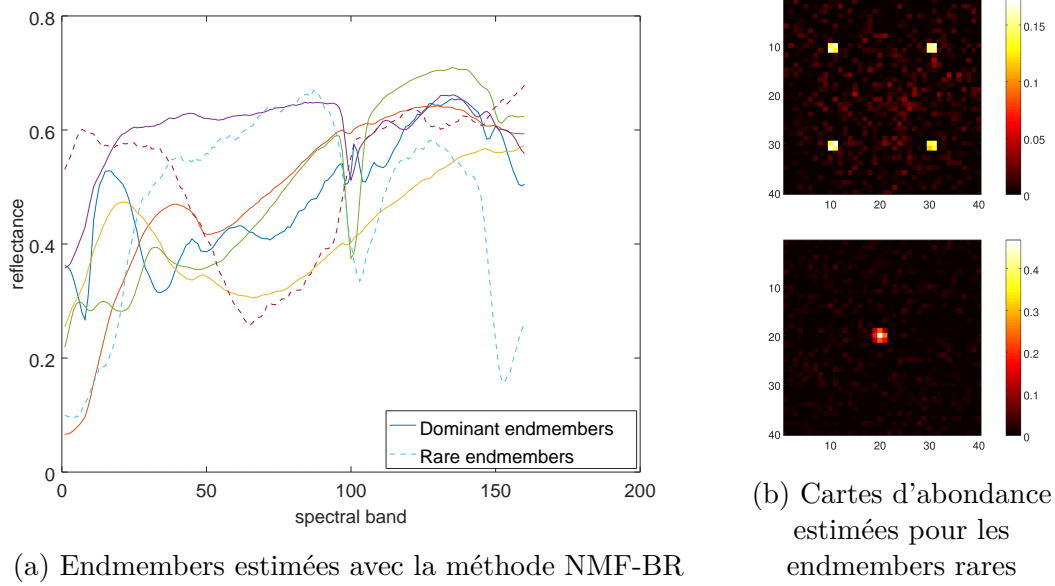


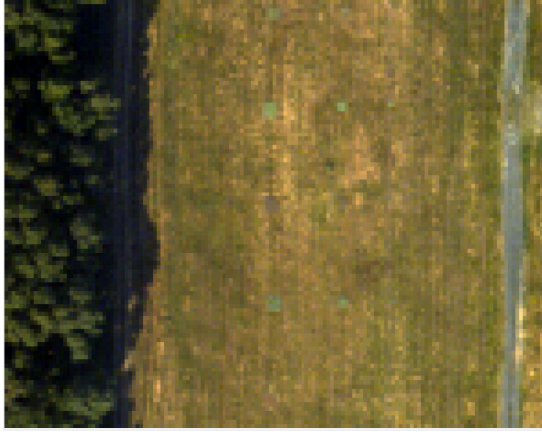
FIGURE 5.10 – Endmembers et abondances estimés avec la méthode NMF-BR

## 5.5 Application sur des données réelles

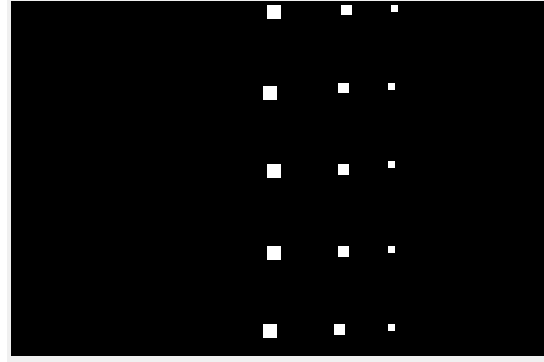
Nous avons appliqué la méthode proposée à une image issue du capteur HYDICE (voir annexe A). L'image utilisée est de taille 100x150 pixels et contient 169 bandes spectrales, elle est présentée dans la figure 5.11a. La scène représente un champ d'herbes, bordé par une route à droite et une forêt à gauche. Quinze panneaux sont disposés dans le champ et organisés en cinq lignes et trois colonnes. Les panneaux sont rangés par taille de 3x3m dans la colonne de gauche puis 2x2m et 1x1m pour les colonnes centrale et droite. Les panneaux sur une même ligne sont faits dans le même matériau. La figure 5.11b montre la position des panneaux. Ces panneaux sont considérés comme des cibles de petites tailles dont



nous désirons estimer les *endmembers*. La figure 5.12 présente les *endmembers* contenus dans l'image.



(a) Image HYDICE



(b) Position des panneaux

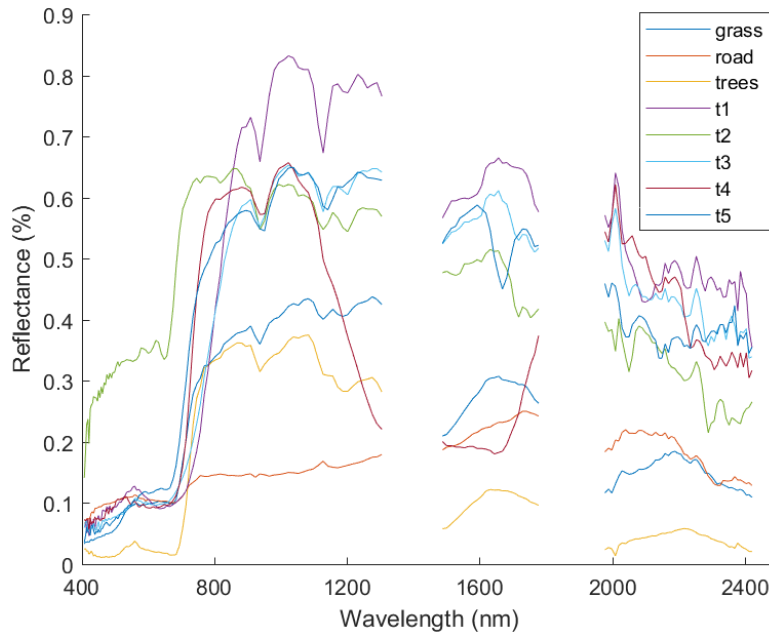


FIGURE 5.12 – Endmembers présent dans l'image

Nous utilisons les méthodes proposées NMF-BDR et NMF-BR pour démixer l'image et comparons les *endmembers* estimés à la vérité terrain. Les résultats numériques sont présentés dans le tableau 5.3.

Les méthodes proposées NMF-BDR et NMF-BR permettent toutes les deux d'améliorer l'estimation des *endmembers* pour l'image HYDICE par rapport à la NMF-BPP. Les performances de la NMF-BR sont nettement meilleures que celles de la NMF-BDR. Après démixage par la méthode NMF-BR, chaque pixel a été affecté à la classe correspondant à son abondance majoritaire. Le résultat

	NMF-BPP	NMF-BFR	NMF-BR
MSAD	0.5179	0.4184	0.2715

TABLE 5.3 – Comparaison des méthodes NMF-BPP, NMF-BDR et NMF-BR selon le critère MSAD

est présenté par la figure 5.13. Les labels 1, 2, et 3 sont associés respectivement au champ, à la route et à la zone boisée. Les classes 4 à 8 correspondent à chaque matériau présent dans les cibles. Nous observons que le démixage a permis de retrouver toutes les cibles. Certains pixels sont classés incorrectement, notamment en bordure de route ou dans la forêt. Ces imperfections sont dues à des erreurs d'estimation d'abondances qui peuvent s'expliquer par la forte variabilité des *endmembers* dans ces régions.



FIGURE 5.13 – Carte des abondances après démixage

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié la méthode de rééchantillonnage Bootstrap. Nous avons montré qu'elle permettait de rééchantillonner les pixels observés en conservant les propriétés de mélange linéaire. La création de pixels bootstrap permet de créer de nouveau pixels moins bruités que les pixels observés, dans le cas de SNR faible, ce débruitage permet d'améliorer les résultats d'un démixage. Nous avons montré qu'utiliser une méthode de démixage sur des pixels bootstrap pouvait améliorer la qualité des estimation, c'est le cas notamment pour la méthode NMF-PG, cependant cela peut également conduire à une dégradation des performances comme pour la méthode NMF-BPP.

Nous avons ensuite étudié plusieurs façons d'utiliser la méthode de rééchantillonnage en présence d'*endmembers* rares. Les méthodes proposées ont pour pré requis qu'il est possible de classer les pixels suivant qu'ils contiennent ou non un *endmember* rare. Nous avons montré que les méthodes proposées NMF-BDR et NMF-BR permettaient toutes les deux d'améliorer les résultats de démixage en présence de pixels rares, la méthode NMF-BR étant la mieux adaptée à la problématique. L'utilisation de la méthode du bootstrap permet donc d'améliorer le démixage en présence d'objets de petites tailles.



# Chapitre 6

## Conclusion générale et perspectives

Cette thèse a été consacrée à l'étude du démixage d'images hyperspectrales. Nous nous sommes intéressés en particulier aux cas des images hyperspectrales contenant des cibles ou anomalies de petite taille. Les méthodes classiques de démixage d'images hyperspectrales rencontrent des difficultés à estimer les *endmembers* présents dans ces objets de faibles dimensions. Nous avons proposé des méthodes pour détecter les pixels correspondant à ces cibles et améliorer leur démixage. Nous avons également étudié une méthode rééchantillonnage pour contrebalancer les problèmes liés à la taille et la rareté des cibles et ainsi améliorer les résultats de démixage. Enfin nous nous sommes intéressés à l'utilisation des ondelettes pour détecter les anomalies dans les images hyperspectrales.

Dans le chapitre 2 nous avons introduit le modèle de mélange linéaire utilisé pour représenter les images hyperspectrales ainsi que la problématique de démixage en imagerie hyperspectrale. Nous avons ensuite dressé un état de l'art des différentes méthodes de démixage et nous avons enfin comparé différentes méthodes de démixage pour l'estimation de pigments dans des végétaux. Les résultats expérimentaux montrent que les estimations obtenues par un algorithme démixage sont dépendantes de la méthode utilisée. Nous avons montré que dans le cas général la méthode NMF-PG semble particulièrement adaptée au démixage d'images hyperspectrales de végétaux.

Le chapitre 3 a été consacré à la détection des pixels rares en imagerie hyperspectrale. Pour cela nous avons proposé deux méthodes de détections. La première est basée sur le seuillage de l'erreur quadratique entre l'image observée et l'image reconstruite à partir de l'estimation des seuls *endmembers* dominants. Cette méthode utilise une approche spectrale et permet la détection des pixels dont le spectre observé ne peut pas être reconstruit à partir des *endmembers* dominants. La seconde méthode est basée sur la décomposition en ondelettes. Cette décomposition est souvent utilisée en imagerie pour la compression de données ou le

---

débruitage. Elle décompose l'image en coefficients d'approximations et de détails. Les coefficients de détails permettent d'analyser les variations locales dans une image dans trois directions, verticale, horizontale et diagonale. Un pixel rare ou une anomalie se différencie des pixels de son voisinage par une importante variation dans toutes les directions nous avons proposé une méthode de détection d'anomalies en imagerie hyperspectrale utilisant les coefficients de détails de la décomposition en ondelettes. Les résultats expérimentaux montrent que la méthode proposée permet effectivement la détection de pixels rares. De futurs travaux pour comparer les résultats de cette méthode de détection spatiale aux méthodes de détection spectrales sont envisagés.

Nous avons ensuite, dans le chapitre 4, présenté le problème du démixage d'image hyperspectrale sous forme d'un problème d'optimisation. Nous avons introduit la méthode de factorisation NMF qui est une méthode de résolution de ce problème, pour ensuite proposer d'adapter la NMF pour effectuer un démixage lorsqu'une partie des *endmembers* sont connus *a priori*. En combinant cette méthode NMF à la méthode de détection par seuillage présentée dans le chapitre 3 nous avons proposé une première méthode de démixage en présence de pixels rares. Cette méthode consiste à estimer dans un premier temps les *endmembers* dominants, cette estimation est ensuite utilisée dans le méthode de seuillage pour détecter les pixels rares, enfin les pixels rares sont traités séparément pour estimer les *endmembers* rares. Nous avons montré que la méthode proposée permet d'estimer les *endmembers* rares et d'améliorer les performance du démixage en présence d'objets de petite taille. Cette méthode repose entièrement sur la qualité de détection des pixels rares, un nombre de faux positifs trop élevé entraînant une dégradation des performances. Une autre cause de détérioration des performances est un trop faible nombre de pixels détectés comme rares.

Pour pallier ces problèmes nous nous sommes intéressés, dans le chapitre 5, à la méthode de rééchantillonnage bootstrap et à son application au démixage d'images hyperspectrales. La méthode bootstrap permet d'augmenter artificiellement le nombre de pixels rares. La méthode bootstrap tient compte du modèle de mélange linéaire des images hyperspectrales afin de préserver l'ensemble des *endmembers*. Pour la première fois, nous avons proposé une étude des effets de la méthode du bootstrap pour le démixage d'image hyperspectrale avec des méthodes basées sur la NMF. Nous avons mis en évidence que la méthode de rééchantillonnage avait un effet atténuateur sur le bruit, permettant de générer des pixels bootstrapés avec un SNR plus élevé que celui des pixels de l'échantillon d'origine. Nous avons montré que l'utilisation du bootstrap permettait d'améliorer les performances de NMF-PG pas celles de la NMF-BPP. Nous avons ensuite étudié la possibilité d'adapter la méthode du bootstrap dans le cas du démixage en présence d'objets de petite taille. Nous avons proposé d'utiliser cette méthode de rééchantillonnage conjointement avec les méthodes de détection et de démixage présentées dans le chapitre 3 pour proposer un algorithme de démixage adapté à la présence d'objets de petite taille. Nous avons proposé deux méthodes, la

NMF-BDR et la NMF-BR qui diffèrent dans la façon dont est utilisée le bootstrap. Les résultats expérimentaux montrent que cette utilisation du bootstrap conjointement à la NMF permet d'améliorer les performances de démixage des pixels rares. La méthode NMF-BR, qui consiste à augmenter artificiellement le nombre des pixels rares par la méthode du bootstrap pour en effectuer ensuite le démixage par une méthode NMF en utilisant l'estimation *a priori* des *endmembers* dominants, est celle qui a montré le meilleur gain de performance.

Cette thèse a permis d'apporter plusieurs contributions dans le domaine du traitement d'images hyperspectrales contenant des objets de petite taille, en particulier la détection et le démixage des ces objets. Plusieurs perspectives peuvent être envisagées, en premier lieu une étude plus poussée de critère de détection par seuillage. En effet ce critère fait l'hypothèse d'un bruit blanc gaussien non-corrélé avec la même variance quelque soit la longueur d'onde, une généralisation du critère pour prendre en compte la variation des propriétés du bruit en fonction de la longueur d'onde, les possibles corrélations entre les bandes proches ou encore d'autres natures de bruit serait particulièrement intéressante. Enfin les résultats obtenus dans le chapitre 3 avec la décomposition en ondelettes sont encourageants, une étude plus poussée des critères de détection d'anomalies à partir des coefficients de détails devrait être envisagée.

Les méthodes proposées utilisent toute la NMF avec la norme de Frobenius comme critère de minimisation et seulement une contrainte de somme à 1 comme terme de régularisation. Il serait intéressant d'introduire d'autres termes de régularisation, notamment des contraintes de "sparcité" [99, 112, 47], ou encore des critères d'optimisation utilisant des normes différentes [113, 114]. Une extension des travaux réalisés dans cette thèse pour étudier l'effet de la méthode bootstrap sur le démixage par des méthodes autres que la NMF serait une perspective intéressante.





# Annexe A

## Image HYDICE

Dans ce manuscrit, nous utilisons principalement des données issues du capteur aéroporté HYDICE (HYperspectral Digital Imagery Collection Experiment) [115]. Cette annexe présente l'image Hydice "HSI02", très largement utilisée par la communauté scientifique, dans un contexte de détection. C'est l'image que nous avons la plus exploitée dans nos travaux, elle est présentée dans la figure A.1.

Cette image a été acquise pendant la campagne FOREST RADIANCE I [116] qui est la troisième d'une série de collections et d'exploitations expérimentales. Le programme FOREST RADIANCE I est la première campagne d'acquisition de données ayant pour but d'examiner les effets non-linéaires causés par les ombres et la canopée. Cette collecte a été conduite du 18 au 31 Août 1995, sur le terrain militaire Aberdeen Proving Ground dans le Maryland aux Etats-Unies. Plus particulièrement sur le site H-Field qui se situe approximativement à 20 miles au nord-est de Baltimore, MD.

Le site H-Field propose trois environnements distincts :

- un grand champs ouvert où sont déployé 77 véhicules exposés et panneaux cibles,
- une route longeant le champs et la forêt,
- une forêt boisée.

Ce site a été sélectionné car c'est un environnement réaliste qui fournit des informations utilisables pour quatre types d'utilisations (la caractérisation de spectre, l'identification de matériel, la détection, le temps de quantification). En effet, le site H-Field permet le déploiement de véhicules et de panneaux cibles totalement exposé dans une première phase, puis déplacer dans la zone d'ombre en lisière forêt pour une second phase et enfin placer sous la canopée pour une obstruction partielle dans une troisième phase. L'image HSI02 a été acquise lors de la première phase.

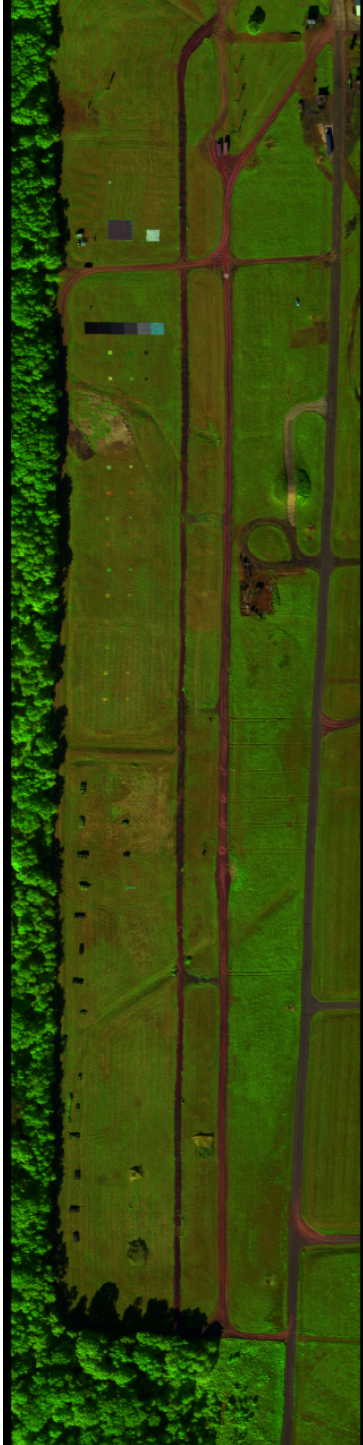


FIGURE A.1 – Image  
HYDICE HSI02

Le capteur HYDICE est un capteur aéroporté qui a été embarqué à bord de l'avion Convair (CV-580) de l'institut de recherche environnementale du Michigan (ERIM) pour la campagne d'acquisition. Le capteur utilise un spectromètre à 210 canaux allant de la lumière visible à  $0.4\mu\text{m}$  jusqu'au domaine de l'infrarouge à longueur d'onde courte à  $2.5\mu\text{m}$ . Le spectre est échantillonné de façon continue avec une résolution spectrale fine de 10 nm en utilisant un système pushbroom. La résolution spatiale est de l'ordre du mètre.

Les données acquises par le capteur HYDICE sont calibrées et subissent des corrections géométriques pour compenser les mouvements du capteur et les effets atmosphériques. L'image acquise contient 210 bandes mais les bandes 1-3, 101-112, 137-153 et 202-210 qui correspondent aux bandes d'absorption de la vapeur d'eau sont retirées car l'énergie du signal y est quasi-nulle [117].

# Annexe B

## Problème d'affectation

Le problème d'affectation est un problème de recherche opérationnelle qui pour deux ensembles finis donnés  $A$  et  $B$  ( $\text{Card}A \leq \text{Card}B$ ) et une fonction de coût d'affectation  $c(a, b) : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  cherche la fonction d'affectation  $f : A \rightarrow B$  injective telle que la somme des coûts soit minimale ( $\min_f \sum_{a \in A} c(a, f(b))$ ).

Dans le cas qui nous intéresse, nous disposons de deux matrices :  $\mathbf{M}$  et  $\tilde{\mathbf{M}}$  où  $\tilde{\mathbf{M}}$  est une estimation de la matrice  $\mathbf{M}$  à une permutation près. Nous souhaitons évaluer la qualité de l'estimation effectuée en mesurant la distance entre la matrice et son estimée. Du fait de la permutation, nous devons d'abord réordonner les colonnes de  $\tilde{\mathbf{M}}$  avant de pouvoir mesurer la distance qui les sépare.

Nous choisissons comme fonction de coût entre la colonne  $i$  de la matrice  $\mathbf{M}$  et la colonne  $j$  de la matrice  $\tilde{\mathbf{M}}$  l'angle qui sépare les deux vecteurs colonnes :

$$c(i, j) = \arg \cos \frac{\mathbf{m}_{:i}^T \tilde{\mathbf{m}}_{:f(i)}}{\|\mathbf{m}_{:i}\| \|\tilde{\mathbf{m}}_{:j}\|} \quad (\text{B.1})$$

Le problème d'affectation consiste à trouver la fonction d'affectation  $f$  qui à chaque colonne de  $\mathbf{M}$  associe une colonne de  $\tilde{\mathbf{M}}$  de sorte que la somme des coûts soit minimale.

$$f = \arg \min_f \sum_i c(i, f(i)) = \arg \min_f \sum_i \arg \cos \frac{\mathbf{m}_{:i}^T \tilde{\mathbf{m}}_{:f(i)}}{\|\mathbf{m}_{:i}\| \|\tilde{\mathbf{m}}_{:f(i)}\|} \quad (\text{B.2})$$

L'algorithme de Jonker-Volgenant [118] permet de résoudre le problème d'affectation. Dans notre travail nous avons utilisé l'implémentation MATLAB faite par Yi Cao [119] de cet algorithme pour résoudre le problème d'affectation lorsque c'était nécessaire.



# Bibliographie

- [1] N. Keshava and J. F. Mustard, "Spectral unmixing," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 19, no. 1, pp. 44–57, 2002.
- [2] A. M. Zoubir and D. R. Iskandler, "Bootstrap methods and applications," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 24, pp. 10–19, July 2007.
- [3] X. Jiang, Y. Jiang, F. Wu, and F. Wu, "Quantitative interpretation of mineral hyperspectral images based on principal component analysis and independent component analysis methods," *Applied Spectroscopy*, vol. 68, pp. 502–509, Apr. 2014.
- [4] M. L. Whiting, S. L. Ustin, P. Zarco-Tejada, A. Palacios-Orueta, and V. C. Vanderbilt, "Hyperspectral mapping of crop and soils for precision agriculture," pp. 62980B–62980B–15, Aug. 2006.
- [5] B. Ding and J. P. Kerekes, "Extended hyperspectral imaging system modeling and implementation for subpixel target detection," vol. 8870, pp. 88700P–88700P–7, 2013.
- [6] G. Lu and B. Fei, "Medical hyperspectral imaging : a review," *Journal of Biomedical Optics*, vol. 19, no. 1, pp. 010901–010901, 2014.
- [7] Q. Zhang, H. Wang, R. J. Plemmons, and V. P. Pauca, "Tensor methods for hyperspectral data analysis : a space object material identification study," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 25, p. 3001, Dec. 2008.
- [8] C.-I. Chang, *Hyperspectral Imaging : Techniques for Spectral Detection and Classification*. Springer Science & Business Media, July 2003. Google-Books-ID : JhBbXwFaA6sC.
- [9] J. Benediktsson, J. Palmason, and J. Sveinsson, "Classification of hyperspectral data from urban areas based on extended morphological profiles," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 43, pp. 480–491, Mar. 2005.
- [10] S. Kawaguchi and R. Nishii, "Hyperspectral Image Classification by Bootstrap AdaBoost With Random Decision Stumps," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 45, pp. 3845–3851, Nov. 2007.
- [11] S. Bourennane, C. Fossati, and A. Cailly, "Improvement of Classification for Hyperspectral Images Based on Tensor Modeling," *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, vol. 7, pp. 801–805, Oct. 2010.

- [12] S. Sukhanov, A. Merentitis, C. Debes, J. Hahn, and A. M. Zoubir, "Bootstrap-based SVM aggregation for class imbalance problems," in *2015 23rd European Signal Processing Conference (EUSIPCO)*, pp. 165–169, Aug. 2015.
- [13] D. Manolakis, C. Siracusa, and G. Shaw, "Hyperspectral subpixel target detection using the linear mixing model," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 39, pp. 1392–1409, July 2001.
- [14] D. Manolakis and G. Shaw, "Detection algorithms for hyperspectral imaging applications," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 19, pp. 29–43, Jan. 2002.
- [15] D. Manolakis, D. Marden, and G. A. Shaw, "Hyperspectral image processing for automatic target detection applications," *Lincoln laboratory journal*, vol. 14, no. 1, pp. 79–116, 2003.
- [16] M. L. Pieper, D. Manolakis, R. Lockwood, T. Cooley, P. Armstrong, and J. Jacobson, "Hyperspectral detection and discrimination using the ACE algorithm," tech. rep., MASSACHUSETTS INST OF TECH LEXINGTON LINCOLN LAB, 2011.
- [17] S. Bourennane, C. Fossati, and A. Cailly, "Improvement of Target-Detection Algorithms Based on Adaptive Three-Dimensional Filtering," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 49, pp. 1383–1395, Apr. 2011.
- [18] J. Nascimento and J. Dias, "Vertex component analysis : a fast algorithm to unmix hyperspectral data," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 43, pp. 898–910, Apr. 2005.
- [19] J. Li, J. M. Bioucas-Dias, A. Plaza, and L. Liu, "Robust Collaborative Non-negative Matrix Factorization for Hyperspectral Unmixing," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 54, pp. 6076–6090, Oct. 2016.
- [20] S. Ravel, S. Bourennane, and C. Fossati, "Hyperspectral images unmixing with rare signals," in *2016 6th European Workshop on Visual Information Processing (EUVIP)*, pp. 1–5, Oct. 2016.
- [21] L. Gómez-Chova, L. Alonso, L. Guanter, G. Camps-Valls, J. Calpe, and J. Moreno, "Correction of systematic spatial noise in push-broom hyperspectral sensors : application to chris/proba images," *Appl. Opt.*, vol. 47, pp. F46–F60, Oct 2008.
- [22] L. Weitzel, A. Krabbe, H. Kroker, N. Thatte, L. E. Tacconi-Garman, M. Cameron, and R. Genzel, "3d : The next generation near-infrared imaging spectrometer," *Astronomy and Astrophysics Supplement Series*, vol. 119, no. 3, pp. 531–546, 1996.

- 
- [23] A. Bodkin, A. Sheinis, A. Norton, J. Daly, S. Beaven, and J. Weinheimer, "Snapshot hyperspectral imaging : the hyperpixel array camera," p. 73340H, May 2009.
  - [24] N. A. Hagen, L. S. Gao, T. S. Tkaczyk, and R. T. Kester, "Snapshot advantage : a review of the light collection improvement for parallel high-dimensional measurement systems," *Optical Engineering*, vol. 51, p. 111702, June 2012.
  - [25] C. C. Borel and S. A. W. Gerstl, "Nonlinear spectral mixing models for vegetative and soil surfaces," *Remote Sensing of Environment*, vol. 47, pp. 403–416, Mar. 1994.
  - [26] R. Heylen, M. Parente, and P. Gader, "A Review of Nonlinear Hyperspectral Unmixing Methods," *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, vol. 7, pp. 1844–1868, June 2014.
  - [27] N. Dobigeon, J.-Y. Tournieret, C. Richard, J. C. M. Bermudez, S. McLaughlin, and A. O. Hero, "Nonlinear unmixing of hyperspectral images : models and algorithms," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 31, pp. 82–94, Jan. 2014. arXiv : 1304.1875.
  - [28] A. Halimi, P. Honeine, and J. M. Bioucas-Dias, "Hyperspectral Unmixing in Presence of Endmember Variability, Nonlinearity, or Mismodeling Effects," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 25, pp. 4565–4579, Oct. 2016.
  - [29] A. Huck, M. Guillaume, and J. Blanc-Talon, "Minimum Dispersion Constrained Nonnegative Matrix Factorization to Unmix Hyperspectral Data," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 48, pp. 2590–2602, June 2010.
  - [30] D. C. Heinz and Chein-I-Chang, "Fully constrained least squares linear spectral mixture analysis method for material quantification in hyperspectral imagery," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 39, pp. 529–545, Mar. 2001.
  - [31] J. M. Bioucas-Dias, A. Plaza, N. Dobigeon, M. Parente, Q. Du, P. Gader, and J. Chanussot, "Hyperspectral unmixing overview : Geometrical, statistical, and sparse regression-based approaches," *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing*, vol. 5, pp. 354–379, April 2012.
  - [32] J. W. Boardman, "Automating spectral unmixing of AVIRIS data using convex geometry concepts," Oct. 1993.
  - [33] M. E. Winter, "N-FINDR : an algorithm for fast autonomous spectral end-member determination in hyperspectral data," vol. 3753, pp. 266–275, 1999.
  - [34] L. Miao and H. Qi, "Endmember extraction from highly mixed data using minimum volume constrained nonnegative matrix factorization," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 45, no. 3, pp. 765–777, 2007.

- [35] J. M. Nascimento and J. M. Bioucas-Dias, "Hyperspectral signal subspace estimation," in *Geoscience and Remote Sensing Symposium, 2007. IGARSS 2007. IEEE International*, pp. 3225–3228, IEEE, 2007.
- [36] J. Li and J. M. Bioucas-Dias, "Minimum volume simplex analysis : A fast algorithm to unmix hyperspectral data," in *IGARSS 2008-2008 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, vol. 3, pp. III–250, IEEE, 2008.
- [37] Tsung-Han Chan, Chong-Yung Chi, Yu-Min Huang, and Wing-Kin Ma, "A Convex Analysis-Based Minimum-Volume Enclosing Simplex Algorithm for Hyperspectral Unmixing," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 57, pp. 4418–4432, Nov. 2009.
- [38] A. Ambikapathi, T.-H. Chan, W.-K. Ma, and C.-Y. Chi, "Chance-Constrained Robust Minimum-Volume Enclosing Simplex Algorithm for Hyperspectral Unmixing," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 49, pp. 4194–4209, Nov. 2011.
- [39] J. E. Ball, S. Kari, and N. H. Younan, "Hyperspectral pixel unmixing using singular value decomposition," in *IGARSS 2004. 2004 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium*, vol. 5, pp. 3253–3256 vol.5, Sept 2004.
- [40] J. Wang and C.-I. Chang, "Applications of independent component analysis in endmember extraction and abundance quantification for hyperspectral imagery," *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, vol. 44, no. 9, pp. 2601–2616, 2006.
- [41] J. Nascimento and J. Dias, "Does independent component analysis play a role in unmixing hyperspectral data?," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 43, pp. 175–187, Jan. 2005.
- [42] P. Paatero and U. Tapper, "Positive matrix factorization : A non-negative factor model with optimal utilization of error estimates of data values," *Environmetrics*, vol. 5, no. 2, pp. 111–126, 1994.
- [43] D. D. Lee and H. S. Seung, "Learning the parts of objects by non-negative matrix factorization," *Nature*, vol. 401, pp. 788–791, Oct. 1999.
- [44] A. Cichocki, *Nonnegative matrix and tensor factorizations applications to exploratory multi-way data analysis and blind source separation*. Chichester, U.K. : John Wiley, 2009.
- [45] V. P. Pauca, J. Piper, and R. J. Plemmons, "Nonnegative matrix factorization for spectral data analysis," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 416, no. 1, pp. 29 – 47, 2006. Special Issue devoted to the Haifa 2005 conference on matrix theory.
- [46] J. Kim, Y. He, and H. Park, "Algorithms for nonnegative matrix and tensor factorizations : a unified view based on block coordinate descent framework," *Journal of Global Optimization*, vol. 58, pp. 285–319, Feb. 2014.



- 
- [47] Wei Tang, Zhenwei Shi, Ying Wu, and Changshui Zhang, "Sparse Unmixing of Hyperspectral Data Using Spectral *A Priori* Information," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 53, pp. 770–783, Feb. 2015.
  - [48] C.-I. Chang and Q. Du, "Estimation of number of spectrally distinct signal sources in hyperspectral imagery," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 42, pp. 608–619, Mar. 2004.
  - [49] H. Akaike, "A new look at the statistical model identification," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 19, pp. 716–723, Dec. 1974.
  - [50] G. Schwarz, "Estimating the Dimension of a Model," *The Annals of Statistics*, vol. 6, no. 2, pp. 461–464, 1978.
  - [51] M. Wax and T. Kailath, "Detection of signals by information theoretic criteria," *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 33, pp. 387–392, Apr. 1985.
  - [52] C. M. Stein, "Estimation of the Mean of a Multivariate Normal Distribution," *The Annals of Statistics*, vol. 9, no. 6, pp. 1135–1151, 1981.
  - [53] V. Solo, "A sure-fired way to choose smoothing parameters in ill-conditioned inverse problems," in *Proceedings of 3rd IEEE International Conference on Image Processing*, vol. 3, pp. 89–92 vol.3, Sept. 1996.
  - [54] M. O. Ulfarsson and V. Solo, "Dimension Estimation in Noisy PCA With SURE and Random Matrix Theory," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 56, pp. 5804–5816, Dec. 2008.
  - [55] I. K. Fodor, "A survey of dimension reduction techniques," tech. rep., Lawrence Livermore National Lab., CA (US), 2002.
  - [56] I. T. Jolliffe, *Principal component analysis*. 2002. OCLC : 70737343.
  - [57] G. H. Golub and C. Reinsch, "Singular value decomposition and least squares solutions," *Numerische Mathematik*, vol. 14, pp. 403–420, Apr. 1970.
  - [58] J. Bioucas-Dias and J. Nascimento, "Hyperspectral subspace identification," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 46, pp. 2435–2445, Aug. 2008.
  - [59] D. Muti and S. Bourennane, "Multidimensional filtering based on a tensor approach," *Signal Processing*, vol. 85, pp. 2338–2353, Dec. 2005.
  - [60] O. Kuybeda, D. Malah, and M. Barzohar, "Rank estimation and redundancy reduction of high-dimensional noisy signals with preservation of rare vectors," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 55, pp. 5579–5592, Dec. 2007.

- [61] N. Acito, M. Diani, and G. Corsini, "A new algorithm for robust estimation of the signal subspace in hyperspectral images in the presence of rare signal components," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 47, pp. 3844–3856, Nov. 2009.
- [62] C.-J. Lin, "Projected Gradient Methods for Nonnegative Matrix Factorization," *Neural Computation*, vol. 19, pp. 2756–2779, Aug. 2007.
- [63] D. D. Lee and H. S. Seung, "Algorithms for non-negative matrix factorization," in *Advances in Neural Information Processing Systems 13* (T. K. Leen, T. G. Dietterich, and V. Tresp, eds.), pp. 556–562, MIT Press, 2001.
- [64] J. Kim and H. Park, "Toward Faster Nonnegative Matrix Factorization : A New Algorithm and Comparisons," in *2008 Eighth IEEE International Conference on Data Mining*, pp. 353–362, Dec. 2008.
- [65] S. Khazai, S. Homayouni, A. Safari, and B. Mojaradi, "Anomaly Detection in Hyperspectral Images Based on an Adaptive Support Vector Method," *IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters*, vol. 8, pp. 646–650, July 2011.
- [66] Y. Gu and L. Zhang, "Rare signal component extraction based on kernel methods for anomaly detection in hyperspectral imagery," *Neurocomputing*, vol. 108, pp. 103–110, May 2013.
- [67] E. Kelly, "An adaptive detection algorithm," *IEEE Trans. Aerospace Electron. Systems*, vol. 22, pp. 115–127, 1986.
- [68] F. Robey, D. Fuhrmann, E. Kelly, and R. Nitzberg, "A cfar adaptive matched filter detector," *Aerospace and Electronic Systems, IEEE Transactions on*, vol. 28, pp. 208–216, 1992.
- [69] D. Manolakis, D. Marden, and G. Shaw, "Hyperspectral image processing for automatic target detection applications," *Lincoln Laboratory Journal*, vol. 14, pp. 79–116, 2003.
- [70] D. Manolakis, C. Siracusa, and G. Shaw, "Hyperspectral subpixel target detection using the linear mixing model : Analysis of hyperspectral image data," *Geoscience and Remote Sensing, IEEE Transactions on*, vol. 39, no. 7, pp. 1392–1409, 2001.
- [71] S. Schweizer and J. Moura, "Hyperspectral imagery : clutter adaptation in anomaly detection," *Information Theory, IEEE Transactions on*, vol. 46, pp. 1855–1871, 2000.
- [72] I. Reed and X. Yu, "Adaptive multiple-band cfar detection of an optical pattern with unknown spectral distribution," *Acoustics, Speech, and Signal Processing, IEEE Transactions on*, vol. 38, no. 10, pp. 1760–1768, 1990.
- [73] J. Juan, C. Fossati, and S. Bourennane, "Efficient Noise Reduction Method Based on Multilinear Tools for Hyperspectral Imagery," *Journal of Remote Sensing Technology*, vol. 3, no. 2, p. 22, 2015.

- 
- [74] P. Goyal and V. Tiwari, "Application of the continuous wavelet transform of gravity and magnetic data to estimate sub-basalt sediment thickness," *Geophysical Prospecting*, vol. 62, pp. 148–157, Jan. 2014.
- [75] X. Tan, T. Y. Gan, and D. Shao, "Wavelet analysis of precipitation extremes over Canadian ecoregions and teleconnections to large-scale climate anomalies," *Journal of Geophysical Research : Atmospheres*, vol. 121, p. 2016JD025533, Dec. 2016.
- [76] F. Febriani, P. Han, C. Yoshino, K. Hattori, B. Nurdyanto, N. Effendi, I. Maulana, and E. Gaffar, "Ultra low frequency (ULF) electromagnetic anomalies associated with large earthquakes in Java Island, Indonesia by using wavelet transform and detrended fluctuation analysis," *Natural Hazards and Earth System Science*, vol. 14, pp. 789–798, Apr. 2014.
- [77] A. Zidi, J. Marot, S. Bourennane, and K. Spinnler, "Bio-Inspired Optimization Algorithms for Automatic Estimation of Multiple Subspace Dimensions in a Tensor-Wavelet Denoising Algorithm," *Journal of Remote Sensing Technology*, vol. 4, pp. 90–114, Dec. 2016.
- [78] H. Othman and S.-E. Qian, "Noise reduction of hyperspectral imagery using hybrid spatial-spectral derivative-domain wavelet shrinkage," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 44, pp. 397–408, Feb. 2006.
- [79] P. Scheunders and S. De Backer, "Wavelet denoising of multicomponent images using gaussian scale mixture models and a noise-free image as priors," *IEEE Transactions on Image Processing*, vol. 16, pp. 1865–1872, July 2007.
- [80] B. Rasti, J. R. Sveinsson, M. O. Ulfarsson, and J. A. Benediktsson, "Hyperspectral image denoising using first order spectral roughness penalty in wavelet domain," *IEEE Journal of Selected Topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing* 7, pp. 2458–67, june 2014.
- [81] I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets*. No. 61 in CBMS-NSF regional conference series in applied mathematics, Philadelphia, Pa : Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
- [82] M. Holschneider and M. A. Kon, "Wavelets : An Analysis Tool," *Physics Today*, vol. 49, p. 65, 1996.
- [83] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*. Academic Press, Sept. 1999. Google-Books-ID : hbVOFWQNtB8C.
- [84] Y. Meyer, "Ondelettes et algorithmes concurrents," in *14e Colloque sur le traitement du signal et des images, FRA, 1993*, GRETSI, Groupe d'Etudes du Traitement du Signal et des Images, 1993.
- [85] A. Cohen, I. Daubechies, and J.-C. Feauveau, "Biorthogonal bases of compactly supported wavelets," *Communications on Pure and Applied Mathematics*, vol. 45, pp. 485–560, June 1992.

- [86] R. N. Clark, G. A. Swayze, R. Wise, K. E. Livo, T. Hoefen, R. F. Kokaly, and S. J. Sutley, “USGS digital spectral library splib06a,” *US Geological Survey, Digital Data Series*, vol. 231, 2007.
- [87] I. Daubechies, “The wavelet transform, time-frequency localization and signal analysis,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 36, pp. 961–1005, Sept. 1990.
- [88] A. Cichocki, R. Zdunek, and S. Amari, “New Algorithms for Non-Negative Matrix Factorization in Applications to Blind Source Separation,” vol. 5, pp. V–621–V–624, IEEE, 2006.
- [89] P.-A. Thouvenin, N. Dobigeon, and J.-Y. Tournet, “Hyperspectral un-mixing with spectral variability using a perturbed linear mixing model,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 64, no. 2, pp. 525–538, 2016.
- [90] A. Cichicki, R. Zdunek, A. Phan, and S. Amari, *Nonnegative matrix and tensor factorizations*. Wiley, 2009.
- [91] L. Grippo and M. Sciandrone, “On the convergence of the block nonlinear Gauss–Seidel method under convex constraints,” *Operations Research Letters*, vol. 26, pp. 127–136, Apr. 2000.
- [92] M. W. Berry, M. Browne, A. N. Langville, V. P. Pauca, and R. J. Plemmons, “Algorithms and applications for approximate nonnegative matrix factorization,” *Computational Statistics & Data Analysis*, vol. 52, pp. 155–173, Sept. 2007.
- [93] R. Zdunek and A. Cichocki, “Non-negative matrix factorization with quasi-newton optimization,” in *Artificial Intelligence and Soft Computing–ICAISC 2006*, pp. 870–879, Springer, 2006.
- [94] J. Kim and H. Park, “Fast nonnegative matrix factorization : An active-set-like method and comparisons,” *SIAM Journal on Scientific Computing*, vol. 33, no. 6, pp. 3261–3281, 2011.
- [95] C. Lawson and R. Hanson, *Solving Least Squares Problems*. Classics in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [96] R. Bro and S. De Jong, *A Fast Non-negativity-constrained Least Squares Algorithm*, vol. 11. Sept. 1997. DOI : 10.1002/(SICI)1099-128X(199709/10)11 :53.0.CO ;2-L.
- [97] M. H. Van Benthem and M. R. Keenan, “Fast algorithm for the solution of large-scale non-negativity-constrained least squares problems,” *Journal of Chemometrics*, vol. 18, pp. 441–450, Oct. 2004.
- [98] L. F. Portugal, J. J. Júdice, and L. N. Vicente, “A comparison of block pivoting and interior-point algorithms for linear least squares problems with nonnegative variables,” *Mathematics of Computation*, vol. 63, no. 208, pp. 625–643, 1994.

- 
- [99] M.-D. Iordache, J. M. Bioucas-Dias, and A. Plaza, "Sparse Unmixing of Hyperspectral Data," *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 49, pp. 2014–2039, June 2011.
  - [100] A. Huck and M. Guillaume, "Robust hyperspectral data unmixing with spatial and spectral regularized NMF," in *2010 2nd Workshop on Hyperspectral Image and Signal Processing : Evolution in Remote Sensing*, pp. 1–4, June 2010.
  - [101] H. Kim and H. Park, "Nonnegative Matrix Factorization Based on Alternating Nonnegativity Constrained Least Squares and Active Set Method," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 30, pp. 713–730, Jan. 2008.
  - [102] W. Chen and M. Guillaume, "HALS-based NMF with flexible constraints for hyperspectral unmixing," *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, vol. 2012, Dec. 2012.
  - [103] B. Efron, "Bootstrap methods : Another look at the jackknife," *Ann. Statist.*, vol. 7, pp. 1–26, 01 1979.
  - [104] S. Ravel, S. Bourennane, and C. Fossati, "Spectral unmixing of hyperspectral images in the presence of small targets," *Journal of Remote Sensing Technology*, to appear.
  - [105] B. Efron and R. J. Tibshirani, *An Introduction to the Bootstrap*. New York : Chapman and Hall/CRC, 1 edition ed., May 1994.
  - [106] B. Efron, *The Jackknife, the Bootstrap, and Other Resampling Plans (CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics)*. Society for Industrial Mathematics, Jan. 1987.
  - [107] C. Banga and F. Ghorbel, "Optimal bootstrap sampling for fast image segmentation : application to retina image," in *1993 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 5, pp. 638–641 vol.5, Apr. 1993.
  - [108] T. Zheng, W. Xian-Bin, and L. Wei, "Multiscale segmentation of SAR imagery with bootstrap sampling," in *2004 7th International Conference on Signal Processing, 2004. Proceedings. ICSP '04*, vol. 1, pp. 713–716 vol.1, Aug. 2004.
  - [109] J. H. Phan, R. A. Moffitt, A. B. Barrett, and M. D. Wang, "Improving Microarray Sample Size Using Bootstrap Data Combination," *Conference proceedings : ... Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. IEEE Engineering in Medicine and Biology Society. Annual Conference*, vol. 2008, pp. 5660–5663, 2008.
  - [110] S. Cailly, Alexis ; Bourennane, *Traitement du signal multidimensionnel pour les images hyperspectrales en présence d'objets de faibles dimensions spatiales*. PhD thesis, 2012. Thèse de doctorat Optique Ecole centrale de Marseille 2012.

- [111] C. Fossati, S. Bourennane, and A. Cailly, “Unmixing improvement based on bootstrap for hyperspectral imagery,” in *2016 6th European Workshop on Visual Information Processing (EUVIP)*, pp. 1–5, Oct. 2016.
- [112] J. Liu, J. Liu, P. Wonka, and J. Ye, “Sparse non-negative tensor factorization using columnwise coordinate descent,” *Pattern Recognition*, vol. 45, no. 1, pp. 649–656, 2012.
- [113] Q. Ke and T. Kanade, “Robust  $l_1$  norm factorization in the presence of outliers and missing data by alternative convex programming,” in *Computer Vision and Pattern Recognition, 2005. CVPR 2005. IEEE Computer Society Conference on*, vol. 1, pp. 739–746, IEEE, 2005.
- [114] J. Sigurdsson, M. O. Ulfarsson, and J. R. Sveinsson, “Hyperspectral Unmixing With  $l_q$  Regularization,” *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, vol. 52, pp. 6793–6806, Nov. 2014.
- [115] R. W. Basedow, D. C. Carmer, and M. E. Anderson, “HYDICE system : implementation and performance,” vol. 2480, pp. 258–268, International Society for Optics and Photonics, June 1995.
- [116] R. C. Olsen, S. Bergman, and R. G. Resmini, “Target detection in a forest environment using spectral imagery,” in *Imaging Spectrometry III*, vol. 3118, pp. 46–57, International Society for Optics and Photonics, 1997.
- [117] C.-I. Chang, S.-S. Chiang, J. A. Smith, and I. W. Ginsberg, “Linear spectral random mixture analysis for hyperspectral imagery,” *IEEE transactions on geoscience and remote sensing*, vol. 40, no. 2, pp. 375–392, 2002.
- [118] R. Jonker and A. Volgenant, “A shortest augmenting path algorithm for dense and sparse linear assignment problems,” *Computing*, vol. 38, pp. 325–340, Dec. 1987.
- [119] Y. Cao, “LAPJV - jonker-volgenant algorithm for linear assignment problem v3.0 - file exchange - MATLAB central.”