

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
1.1	L'art de fragmenter un liquide . . . . .	9
1.2	Présente étude . . . . .	13
<b>2</b>	<b>Instabilité de la dégoulinure</b>	<b>15</b>
2.1	Introduction . . . . .	15
2.2	Description du phénomène . . . . .	16
2.3	Montage expérimental . . . . .	17
2.4	Détermination de la vitesse de chute . . . . .	19
2.4.1	Vitesse de chute d'un milieu infini ou semi-infini . . . . .	19
2.4.2	Détermination expérimentale de la loi de Tanner . . . . .	21
2.4.3	Effet de taille finie . . . . .	23
2.4.4	Influences des perturbations du film de prémouillage . . . . .	27
2.5	Gradient de pression . . . . .	28
2.5.1	Expression du gradient de pression $\Lambda$ . . . . .	28
2.5.2	Expression simplifiée du gradient de pression $\Lambda$ . . . . .	30
2.6	Détermination et étude de la relation de dispersion . . . . .	31
2.6.1	Expression de la relation de dispersion . . . . .	32
2.6.2	Taux de croissance . . . . .	36
2.6.3	Comparaison expérimentale . . . . .	38
2.6.4	Rapport d'amplitudes . . . . .	44
2.7	Evolution des ponts liquides . . . . .	45
2.7.1	Au-delà du régime linéaire . . . . .	45
2.7.2	Courbure et amincissement . . . . .	45
2.7.3	Limite du modèle . . . . .	50
2.7.4	Évolution de l'épaisseur et du rayon de courbure . . . . .	51
2.8	Formation des gouttes . . . . .	53
2.9	Conclusion . . . . .	57
<b>3</b>	<b>Bag-breakup et pluie</b>	<b>59</b>
3.1	Introduction . . . . .	59
3.2	Méthodes d'investigation . . . . .	61
3.3	Impacts gazeux . . . . .	62

3.3.1	Nombre caractéristique . . . . .	62
3.3.2	Chronologie . . . . .	62
3.4	Vitesse en sortie de tube . . . . .	64
3.4.1	Vitesse sans aspiration . . . . .	64
3.4.2	Vitesse en présence d'aspiration . . . . .	65
3.5	Déformation de la goutte et formation du sac . . . . .	67
3.6	Gonflement du sac . . . . .	69
3.6.1	Description du courant gazeux . . . . .	69
3.6.2	Modélisation de la crêpe . . . . .	70
3.6.3	Gonflement du sac . . . . .	78
3.7	Statistique de la brisure . . . . .	80
3.7.1	Relation entre diamètre initial et taille moyenne . . . . .	81
3.7.2	Taille du bourrelet . . . . .	84
3.7.3	Distribution des tailles de gouttes . . . . .	87
3.7.4	Comparaison avec les mesures météorologiques . . . . .	88
3.8	Conclusions . . . . .	92
<b>4</b>	<b>Impact sur un solide</b>	<b>95</b>
4.1	Introduction . . . . .	95
4.2	Méthodes d'investigation . . . . .	96
4.3	Impacts sur une cible de petite taille . . . . .	97
4.3.1	Chronologie . . . . .	97
4.3.2	Influence du nombre de Weber . . . . .	98
4.3.3	Temps d'impact . . . . .	99
4.4	Évolution du bourrelet extérieur . . . . .	101
4.5	Épaisseur de la nappe . . . . .	103
4.6	Modèle masse ressort . . . . .	105
4.7	Vitesse au sein de la nappe . . . . .	107
4.8	Évolution des perturbations du bourrelet . . . . .	118
4.8.1	Mécanismes d'instabilités du bourrelet . . . . .	120
4.8.2	Prise en compte de l'évolution du bord . . . . .	123
4.9	Statistique de la brisure . . . . .	127
4.9.1	Fragmentation composée . . . . .	133
4.10	Conclusion . . . . .	137
<b>5</b>	<b>Les systèmes de mousse</b>	<b>139</b>
5.1	Le mûrissement . . . . .	139
5.1.1	Un milieu à la fois simple et complexe . . . . .	139
5.1.2	Un milieu en perpétuelle évolution . . . . .	140
5.1.3	Mousse 2D . . . . .	141
5.1.4	Système fermé et soufflerie à mousse . . . . .	143
5.2	Montage expérimental . . . . .	144
5.2.1	Réervoir fermé . . . . .	144

5.2.2	Soufflerie à mousse . . . . .	144
5.2.3	Suivi des cellules dans les mousses . . . . .	146
5.3	Système fermé . . . . .	147
5.3.1	Surface moyenne des cellules . . . . .	147
5.3.2	Distribution des surfaces . . . . .	151
5.4	Soufflerie à mousse . . . . .	155
5.4.1	Surface moyenne des cellules . . . . .	155
5.4.2	Distribution des surfaces . . . . .	156
5.4.3	Loi de von Neumann . . . . .	161
5.4.4	Distribution du nombre de côtés . . . . .	170
5.4.5	Loi de Lewis . . . . .	172
5.5	Distribution des surfaces conditionnées au nombre de voisins. . . . .	174
5.6	Conclusions . . . . .	177
<b>6</b>	<b>Conclusion</b>	<b>179</b>
<b>A</b>	<b>Effets de surface</b>	<b>181</b>
A.1	Tension superficielle . . . . .	181
A.2	Ouverture d'une nappe liquide . . . . .	182
A.3	Instabilité de Rayleigh-Taylor . . . . .	183
<b>B</b>	<b>Traitements d'images</b>	<b>187</b>
B.1	Traitements d'images . . . . .	187
B.1.1	Élimination de l'image de fond . . . . .	187
B.1.2	Extraction de contours . . . . .	189
B.1.3	Echantillonnage . . . . .	190
B.2	Analyse . . . . .	191
B.2.1	Détermination des taux de croissance et des longueurs d'onde . . . . .	191
B.2.2	Mesures des surfaces des gouttes . . . . .	192
<b>C</b>	<b>Instabilités induites par la gravité</b>	<b>195</b>
C.1	Contexte et motivations . . . . .	195
C.2	Vitesse de descente d'un fluide seul . . . . .	197
C.2.1	Résultats expérimentaux . . . . .	197
C.2.2	Détermination théorique de la vitesse de chute . . . . .	203
C.3	Instabilité de Saffman-taylor induite par la gravité . . . . .	206
C.3.1	Description quantitative . . . . .	206
C.3.2	Sélection de mode . . . . .	206
C.3.3	Taux de croissance . . . . .	208
C.4	Théorie . . . . .	210
C.4.1	Etat de base . . . . .	210
C.4.2	Vitesse moyenne de l'interface . . . . .	211
C.4.3	Stabilité . . . . .	212

C.4.4	Critère d'instabilité . . . . .	214
C.4.5	Explication physique du phénomène . . . . .	214
C.4.6	Taux de croissance maximal . . . . .	216
C.4.7	Adimensionnement des résultats . . . . .	216
C.5	Universalité de l'instabilité . . . . .	218
<b>D</b>	<b>Tube de Pitot</b>	<b>221</b>
D.1	Ecoulement laminaire . . . . .	222
D.2	Ecoulement turbulent . . . . .	223

### Remerciements...

Avant de commencer ce traditionnel moment que les nombreux remerciement, je tiens à dédier en partie ce présent manuscrit à mes parents. Vous avez tellement affronté d'épreuves en maintenant neuf ans et vous n'en avez jamais laissé transparaître le moindre découragement ou désespoir. Vous avez été un formidable moteur : merci !

Je ne sais pas si tu t'en souviens, ni même si tu vas lire ce qui suit, mais ce qui a été pour moi le véritable déclencheur pour poursuivre en hydrodynamique et avancer vers cette thèse, a été un jour de juin en licence, à l'époque où nous étions encore à Saint-Charles. Tu m'avais encouragé suite à la remise des notes en hydrodynamique et tu m'avais demandé de poursuivre dans cette voie. Et c'est ce que j'ai effectivement fait. S'en est suivi une maîtrise avec ton option et des premières manips complètement foireuses et une première approche en "salle de manip". Ensuite ce fut le DEA, son stage et le début de la thèse. Notre relation a connu des hauts et des bas mais je te suis reconnaissant de m'avoir supporté pendant ces années, d'avoir été patient et d'avoir été juste. J'ai énormément appris en travaillant à tes côtés et j'espère pouvoir continuer à travailler avec toi. Merci Emmanuel.

Cette thèse n'aurait pas pu se faire sans tout un groupe de personnes de l'IRPHE. En espérant n'oublier personne, merci à Lucienne, Claudine, Daniel, Franck, Judith, Jacky, Patrice, Delphine, Jean-Paul, Christian, Matthieu, Catherine, Raymond, et aux personnes dont le nom s'est enfui... Merci pour vos sourires, conversations, résolutions de problèmes informatiques, missions, demandes d'achat, articles et tout un tas de trucs qui m'ont aidé tout au long des mes stages et de ma thèse.

Un merci également aux personnes avec qui j'ai travaillé de près ou de loin et qui m'ont aidé. Merci à Jérôme, Nicolas, Arnaud et Romain.

Bien que n'ayant pas participé de près ou de loin à la thèse, j'ai cotoyé plusieurs personnes au cours de ces quatre années en tant que moniteur, puis ATER pour enseigner. Un très grand merci à Philipe qui m'a fait découvrir IRPHE l'été avant que je commence ma maîtrise et avec qui j'ai appris à enseigner la thermodynamique. Merci également à Marc, Anne-Marie, Laurent, Cédric et Alberto.

Un remerciement tout particulier à la femme que j'aime, une petite cerise nommée Tiphanie, qui m'a permis de changer ma vie et d'être bien plus heureux. Je suis passé d'une vie terne et grise à une vie haute en couleurs. Merci d'avoir été là quand je doutais, de m'avoir accueilli et parfois recueilli, de croire en moi depuis toutes ces années et de m'aider à avancer.

Une pensée particulière aux doctorants avec qui j'ai passé de très bons moments. Dans le désordre et avec ceux qui sont déjà partis et ceux qui commencent : Athéna, Christophe, les Nicolas, les Julien, Sunita, Virginie, Xabier, les François, Martin, Claire, Fabien, Henri, Romain, Wietze, Sébastien...

Je tiens à remercier Asmeldia, Logales et le Vénérable Strucmuche, de très bons amis qui m'ont accompagné, de leur lointaine ville de ce plat pays, tout au long de mon DEA, stage de DEA et thèse. A priori, ils rempilent pour la suite...

Difficile de ne pas se répéter mais je tiens à remercier Aurélia pour tout un tas de raison, surtout pour m'avoir aidée lors de certain moment difficile mais également pour une soirée inoubliable au temps où tu vivais encore dans le centre de Marseille.

Un merci également pour Annabelle et John, ainsi qu'une pensée pour leur petite fille Jade, qui m'ont souvent accueilli, souvent écouté et très souvent aidée.

Une pensée particulière à Aude et Olivier qui furent pendant longtemps mes voisins avant de partir pour des raisons professionnel. un grand merci pour ces soirées, dîners ou repas, ces moments de sport ou de détente dont une fameuse paire de trois restera à jamais gravé dans ma mémoire.

Je remercie également ma famille qui a suivi mes péripéties de près ou de loin et qui ont toujours eu une pensée pour moi.

Je tiens à remercier J.C. Antigny et C. Montout pour leur accueil chaleureux et pour m'avoir permis de passer un mois d'août de rédaction dans une bonne ambiance. Ces vacances dans le Poitou ont été pour moi très reposantes et m'ont permis de rédiger se-reinement une partie de ce manuscrit. (J'avoue que les framboises ont fait beaucoup de choses...)

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 L'art de fragmenter un liquide

Cette thèse s'inscrit dans une thématique de recherche sur la fragmentation liquide. Fragmenter la matière est un problème conceptuel, technologique et industriel qui a traversé toutes les époques, depuis la création des premiers outils préhistoriques, casser des silex pour en obtenir des fragments tranchants, jusqu'à nos jours avec, par exemple, la question du concassage de matériaux pour abrasifs. De tout temps, l'Homme a eu besoin de casser, tailler, extraire de la matière. D'un point de vue conceptuel, les Grecs se sont posés la question de savoir jusqu'où pouvait-on briser la matière. Ainsi est née la notion d'atome, du grec  $\alpha\tauομο\zeta$ , "que l'on ne peut diviser", plus petit état de la matière.

Comme les solides, les liquides aussi peuvent être fragmentés. La notion de fragments liquides nous est familière : la goutte d'eau que l'on retrouve dans la pluie, les éclaboussures, les sprays ou les embruns. Nous en faisons l'expérience dans la vie de tous les jours. Comprendre leur formation, c'est aussi comprendre les mécanismes qui aboutissent à leur création et c'est également comprendre leur devenir.

D'une manière naturelle, on retrouve la formation de gouttes dans de nombreux cas. La formation des embruns provient de la formation et de la brisure de ligaments liquides sur la crête des vagues, sous l'effet du vent. ( Ce mécanisme intervient de manière importante dans les interactions atmosphère-océan). La formation de brouillard au bas des chutes d'eau résulte d'une multitude d'impacts entre l'eau et la paroi, mais également avec l'eau existante au bas de la chute. Enfin, dernier exemple plus familier, la pluie, dont la formation est assez peu connue. Toutefois, l'expérience nous montre que l'intensité de la pluie donne des gouttes différentes, un crachin est constitué de fines gouttelettes liquides ayant presque toutes la même taille, alors qu'un orage d'été produit de plus grosses gouttes avec une large distribution de taille. Cette constatation a été faite par Bentley en 1904 [8]. La figure 1.1 montre un exemple de la diversité des tailles de gouttes au sein d'une même pluie.

Dans le contexte industriel, la formation de gouttes intervient dans de nombreux domaines, par exemple, dans le domaine de la combustion de carburant dans les différents moteurs thermiques. Le rendement d'un moteur, sa consommation et son niveau de pollu-

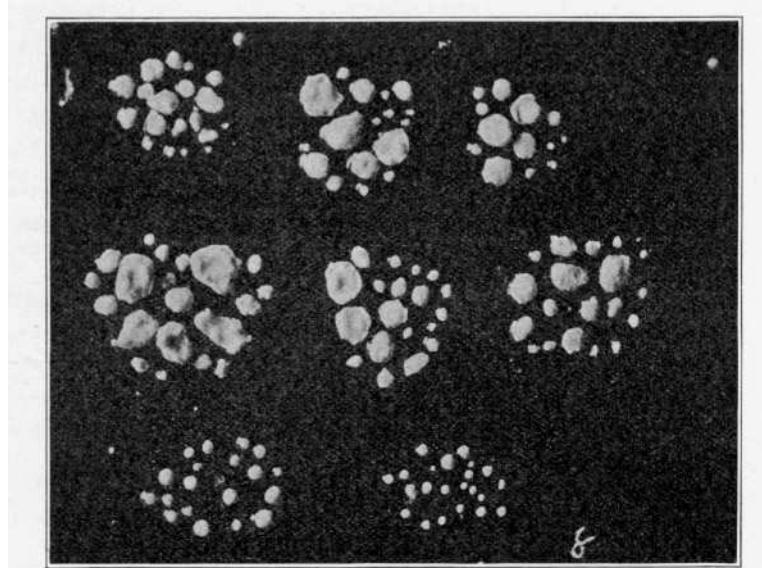


Fig. 6.—Large thundershower raindrops of September 20, 1904. There were dense, low, nimbus clouds throughout this shower. Duration, one hour. One sample taken every seven minutes.

FIG. 1.1 – Tailles des gouttes relevées au cours d'un orage d'été en 1904. L'averse a duré 1h et il y a un intervalle de 7 minutes entre chaque série.

tion sont des problèmes intimement liés avec l'injection liquide du carburant. Une partie de cette thèse est associée au projet INCA (INitiative en Combustion Avancée) qui rassemble le CNRS, l'ONERA et la Snecma dans le but de pouvoir créer un turboréacteur d'une fiabilité à toute épreuve, à un prix compétitif et ayant un impact sur l'environnement le plus faible possible, c'est-à-dire réduction des émissions polluantes (NO<sub>x</sub>, CO<sub>2</sub>, suies, ...), amélioration de la combustion pour tous les régimes d'utilisation et contrôle optimal de l'injection du carburant dans la chambre de combustion. Le lien entre cette thèse et ce projet est la maîtrise des conditions d'injection du carburant dans la chambre de combustion.

Les impacts sont un des mécanismes de création de gouttes. Les problèmes industriels associés sont nombreux, on peut citer, par exemple, l'impression par jet d'encre. Si les mécanismes de création de fines gouttelettes d'encre sont connus et bien maîtrisés, le facteur limitant à l'heure actuel est l'instant où l'encre impacte la feuille de papier. La tache associée va définir la finesse de l'impression. Il se trouve, que lors d'un impact solide, on peut observer la formation de digitations en périphérie de l'impact, et surtout, on assiste à la formation d'une multitude de gouttes satellites.

Tous ces phénomènes impliquent différents mécanismes pour déformer et déstabiliser la masse liquide initiale, pour ensuite la fragmenter. Nous allons principalement nous intéresser à des phénomènes dits en couches minces, c'est-à-dire faisant intervenir une mince épaisseur de fluide et une interaction entre les interfaces. Les dégoulinures en sont le meilleur exemple, nous avons tous déjà vu ces digitations apparaître lorsque l'on applique de la

peinture sur un mur. La photo 1.2 montre un exemple visuel du phénomène.

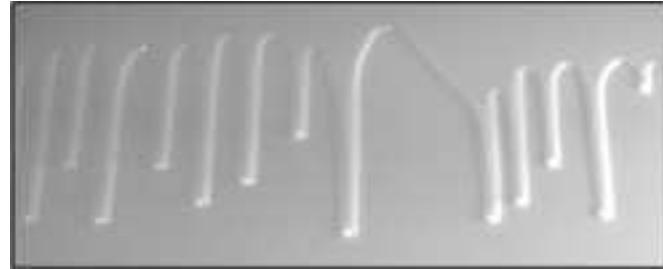


FIG. 1.2 – Exemple de digitation obtenue en laissant couler une mince couche de liquide sur une surface.

Nos travaux se font dans la continuité de ceux commencés par Nicolas Bremond [11] et Philippe Marmotant [41] au cours de leur thèse respective sur la fragmentation et l'atomisation des nappes liquides et des jets liquides. Ils se sont intéressés aux différents mécanismes qui interviennent pour modifier et déformer la masse liquide initiale. Ils ont étudié l'influence des différents paramètres physiques sur la déstabilisation et la fragmentation qui s'ensuivent. Ils ont également très bien détaillé, de manière statistique, l'ensemble des gouttes liquides obtenues.

Nos travaux s'inscrivent dans cette même démarche et prennent leurs origines avec les travaux de Bremond et Villermaux [11, 12] sur l'atomisation des nappes liquides, plus particulièrement sur l'influence de la taille finie de la nappe. Ils se sont rendu compte qu'il existait une interaction entre les interfaces et que cette interaction était cruciale pour le développement de l'instabilité. Pour illustrer ce fait, ils ont réalisé des expériences sur l'instabilité de type Rayleigh-Taylor [49, 67] en couche mince.

Dans une première expérience ils se sont intéressés à la déstabilisation d'un film liquide s'écoulant le long d'une paroi courbe. S'ils ont pu mettre en évidence une déstabilisation du film, due au fait d'une accélération centripète, ils n'ont pu constater les effets de la couche mince. En effet, dans ce type de problème, il n'y a qu'une seule interface gaz-liquide. La présence d'une paroi solide annule les effets de taille finie.

C'est avec une seconde expérience qu'ils ont pu mettre en évidence les effets de l'interaction entre interfaces. Ils se sont intéressés à l'atomisation d'un film de savon accéléré par une onde de choc. Ils ont montré que la nappe de savon subissait une accélération impulsionale initiant ainsi une instabilité de type Rayleigh-Taylor. Une analyse de stabilité linéaire met en évidence l'influence de l'épaisseur  $h$  et de l'intensité du choc, via le nombre d'onde de coupure  $k_c$  sur la relation de dispersion, la sélection de mode et le taux de croissance associé. Dans la limite  $k_c h$  tendant vers zéro, le maximum de la relation de dispersion diminue et la courbe s'aplatit pour former un plateau autour du maximum, dans cette limite il n'y a plus de sélection de mode. La figure 1.3 montre un exemple de relation de dispersion pour quatre épaisseurs  $h$  différentes. Cependant, à cause des tailles et des vitesses en jeu, il leur a été impossible d'observer le couplage des interfaces de manière directe.

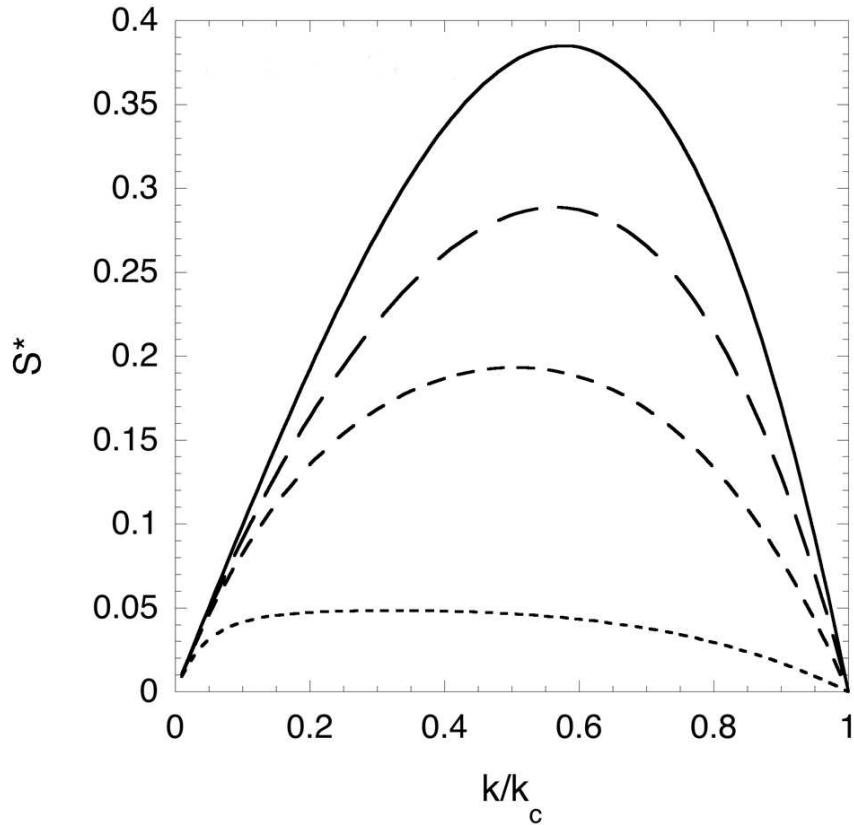


FIG. 1.3 – Relation de dispersion pour différentes épaisseur  $h$ .

C'est ainsi que nous nous sommes intéressés à l'étude du phénomène de la dégoulinure dans un cadre plus contrôlé. Nous avons étudié en détail l'évolution d'une fine épaisseur de liquide pouvant chuter librement dans une cellule de Hele-Shaw ouverte. L'avantage de travailler dans une telle cellule est que les équations du mouvement sont en deux dimensions. Nous avons donc accès aux deux interfaces et nous pouvons suivre leur évolution et leur couplages au cours du temps.

Nous nous sommes par la suite intéressés à d'autres configurations physiques faisant intervenir un couplage d'interfaces. Nous avons étudié le mécanisme du gonflement de sac, ou *bag-breakup* qui intervient lorsqu'une goutte ou une nappe liquide rencontre un courant gazeux. Lorsque l'épaisseur de la nappe ou de la goutte déformée devient suffisamment mince, une poche se crée et se gonfle. Ce sac liquide se rompt ensuite et on observe l'atomisation de la nappe puis celle du bord.

Dans le cas précédent, on assiste à un changement de topologie de la goutte initiale. Lorsqu'elle rencontre le courant gazeux, elle se déforme sous forme de crêpe pour former une nappe liquide. Nous avons alors étudié l'effet de ce changement de topologie en changeant la nature de l'impact. D'un choc gazeux et progressif nous sommes passés à un choc solide sur un impacteur de taille comparable à la goutte initiale. Lorsque la goutte arrive sur la

cible, on observe un changement brutal de topologie avec la formation d'une nappe liquide suivie de l'atomisation.

Les processus d'atomisation que l'on observe au moment de la brisure des nappes fait intervenir des ligaments liquides. La fragmentation de ces ligaments fait intervenir à la fois des mécanismes de brisure et des mécanismes de coalescence. On retrouve ces phénomènes dans le cas des vieillissements des mousses. Bien qu'en apparence cela semble singulièrement différent de ce que l'on vient d'évoquer, en allant étudier dans le détail le mûrissement d'une mousse, on constate un mécanisme de coalescence et un changement de topologie au cours du temps. Les répartitions statistiques des tailles des cellules constitutives de la mousse sont semblables à celles que l'on observe dans les autres cas étudiés. Il y a un parallèle entre la réorganisation d'un ligament liquide et l'évolution d'une mousse.

La figure 1.4 met en parallèle les quatre cas évoqués précédemment. On remarque que si les situations sont différentes, certains mécanismes ainsi que la finalité sont identiques. Nous allons montrer comment le couplage des interfaces lors du changement de topologie en couche mince affecte l'instabilité et contrôle la distribution des tailles lors de l'atomisation.

## 1.2 Présente étude

Nous allons montrer dans cette thèse différents phénomènes donnant lieux à un état final caractérisé par un ensemble de taille. Chaque système est initialement représenté de manière simple. Ces systèmes sont représentés sur la figure 1.4.

Nous traitons dans une première partie le cas d'une mince couche de fluide piégée entre deux plaques de verre et libre de se déplacer. Nous expliquons alors pourquoi et comment la bande liquide va se déformer et casser. Nous montrons également l'influence de l'épaisseur sur la dynamique et la taille des fragments qui s'en suivent. Nous donnons en même temps une analyse de stabilité linéaire qui permet de prédire l'évolution du système.

La seconde partie traite le cas d'une instabilité en couche mince en 3 dimensions, le phénomène de *bag-breakup*, aussi appelé gonflement de sac. Nous étudions la déformation et la brisure d'une goutte au sein d'un écoulement gazeux.

La troisième partie fait écho à la seconde en étudiant la déformation et la brisure d'une goutte au contact d'une surface plane de taille comparable à la goutte elle-même. Nous donnons en fonction des différents paramètres physiques de l'impact, l'évolution de la forme et la distribution des fragments obtenus. Nous développons également un modèle théorique pouvant parfaitement prédire le phénomène.

Une dernière partie est dédiée au phénomène du vieillissement des mousses. Ce système paraît en apparence singulièrement différent des précédents. Pourtant, il présente un changement de topologie au cours du temps et des distributions de tailles semblables. Nous montrons également une nouvelle manière d'aborder l'étude du mûrissement.

Un ensemble d'annexe conclue cette étude. Dans une première annexe nous rappelons les propriétés et certaines conséquences de la tension de surface. Dans une seconde annexe nous montrons les méthodes d'analyse d'images utilisées dans chacune des chapitre de cette thèse. Une troisième annexe présente le travail préparatoire de cette étude réalisé au cours

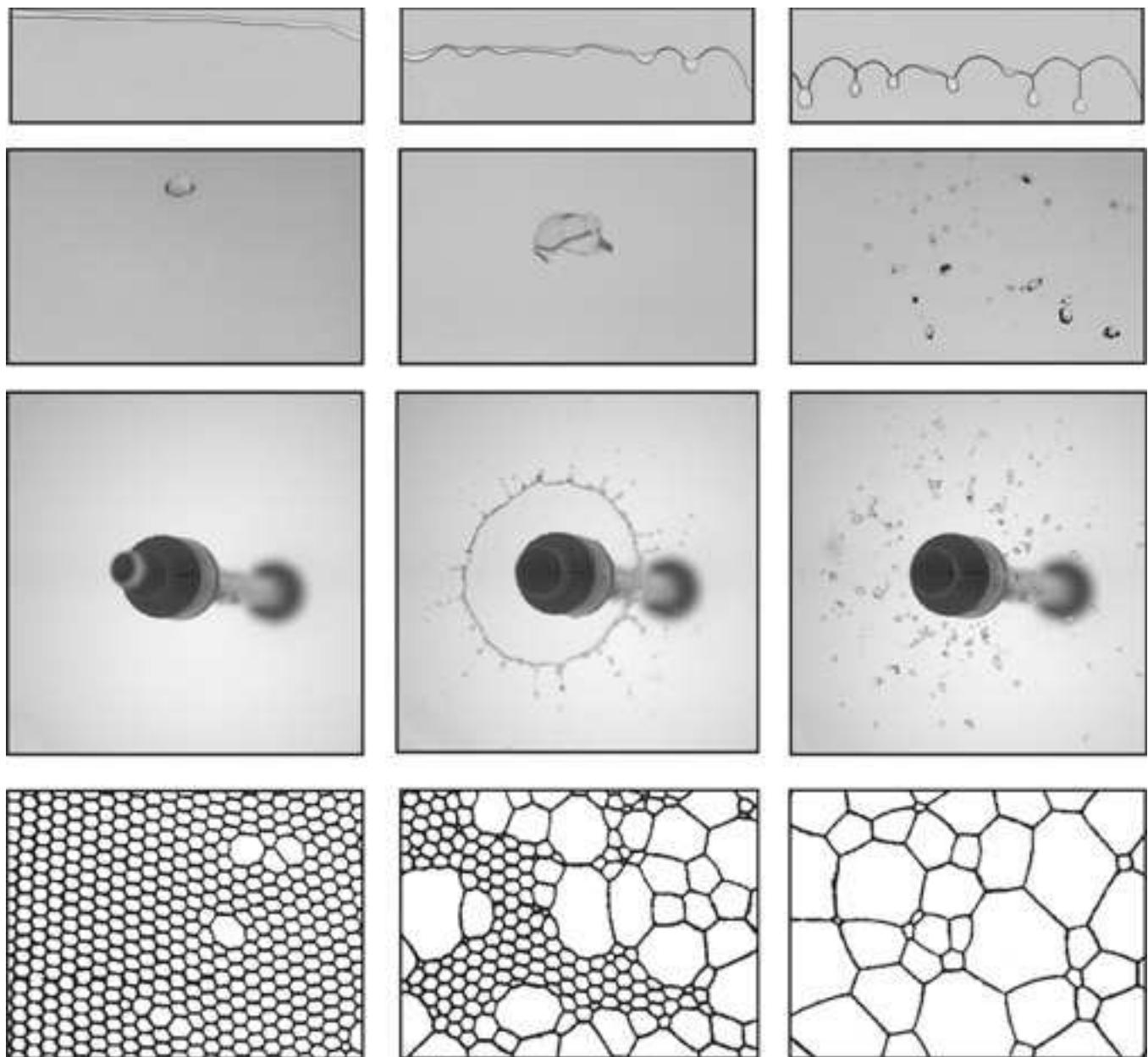


FIG. 1.4 – Fragmentation et coalescence. On représente sur chaque ligne trois images instantanées montrant l'évolution temporelle des situations suivantes : chute d'une fine bandelette dans une cellule de Hele-Shaw ; instabilité du gonflement de sac au sein d'un courant gazeux ; impact d'une goutte liquide sur une cible solide de petite taille ; mûrissement d'une mousse bi-dimensionnelle.

d'un stage de DEA. Une quatrième annexe rappelle brièvement le principe du tube de Pitot.

# Chapitre 2

## Instabilité de la dégoulinure

### 2.1 Introduction

Les dégoulinures apparaissent lorsqu'une mince couche de fluide se déplace sur une surface solide sous l'effet de la gravité. L'interface ne se déplace pas de manière rectiligne au cours du temps, elle est au contraire instable et on observe l'apparition de digitations. La série de photos sur la figure 2.1 montre un exemple concret du phénomène.

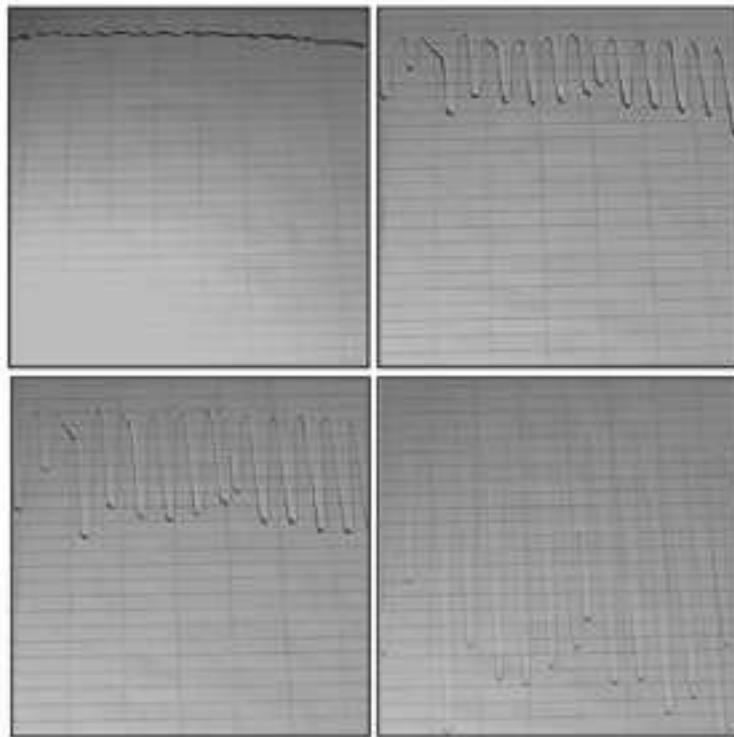


FIG. 2.1 – Évolution du front d'une nappe liquide s'écoulant sur un plan incliné au cours du temps. Photos réalisées par Kondic. [35]

De nombreux travaux ont été réalisés sur ce sujet, Troian, Herbolzheimer, Safran et Joanny [69] en 1989, Spaid et Homsy [57] en 1996, Bertozzi et Brenner en 1997 [9], Hosoi et Mahadevan [30] en 1999, Kondic [35, 36] en 2003 et 2004. Il ressort de ces études l'existence d'un ressaut au niveau du front. Ces études montrent également les effets de la dynamique des angles sur l'instabilité, ainsi que de l'importance du ressaut.

Bien que s'éloignant de ce cadre, notre montage expérimental propose d'observer, d'analyser et de comprendre le rôle et les effets de la ligne de contact mobile, ainsi que l'importance du couplage des interfaces. Nous nous sommes donc intéressés à une nappe en deux dimensions piégée dans une cellule de Hele-Shaw ouverte au milieu ambiant. Cette nappe est libre de chuter et est instable au sens de Rayleigh-Taylor au travers d'un subtil mécanisme que nous allons analyser. En effet, le critère d'instabilité de Rayleigh-Taylor stipule qu'une interface soumise à une accélération dirigée du fluide le plus dense vers le fluide le plus léger est instable. Dans notre cas, l'interface du bas est instable selon ce critère tandis que celle du haut ne l'est pas. Les deux interfaces sont bien résolues en temps et en espace et nous pouvons donc voir comment elles interagissent au cours du mouvement.

## 2.2 Description du phénomène

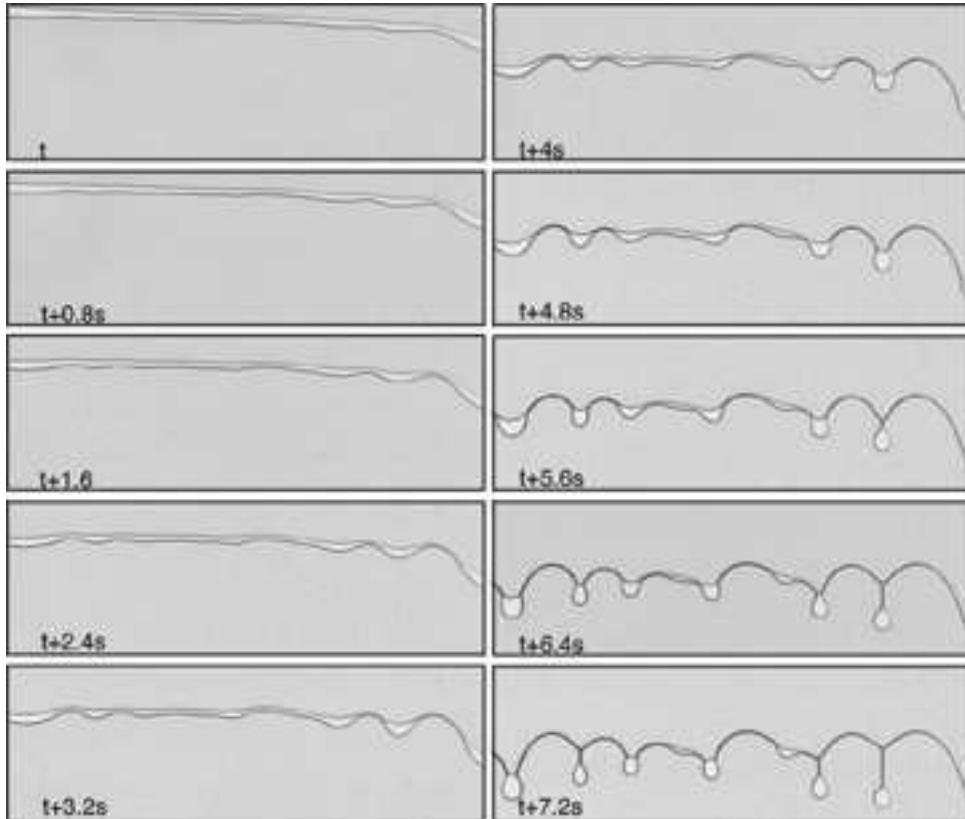


FIG. 2.2 – Evolution de la bandelette au cours du temps.

La figure 2.2 montre une série d'images décrivant l'ensemble de la déstabilisation. L'état initial correspond à une bandelette liquide piégée entre deux plaques de verres et libre de chuter sous l'effet de son propre poids. La première image montre une bandelette de 20 cm de large, sur 5 mm d'épaisseur. Les lignes noires délimitent les interfaces air-fluide.

Au fur et à mesure que la bandelette liquide s'écoule au sein de la cellule, des corrugations apparaissent sur chaque interface. Les endroits où localement la bande fluide est plus épaisse chutent plus vite que les zones plus minces. Cette différence de vitesse de chute induit une formation d'amas liquides, reliés entre eux par des ponts liquides. Ces derniers deviennent de plus en plus minces, tandis que les amas liquides prennent une forme sphérique. Les derniers instants montrent une série de gouttes reliées par de très fins filaments liquides. Lorsque ces filaments deviennent suffisamment minces, ils cassent et la bandelette se désintègre en plusieurs gouttes.

## 2.3 Montage expérimental

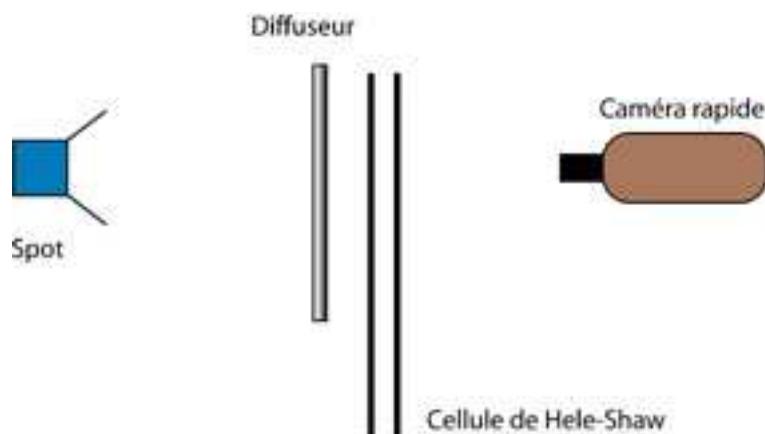


FIG. 2.3 – Schéma de principe du montage expérimental sur l'étude de l'instabilité de la dégoulinure.

La figure 2.3 montre le schéma de principe du dispositif expérimental pour étudier l'instabilité de la *dégoulinure*. Cette instabilité est caractérisée par la chute libre d'une fine couche liquide dans une cellule de Hele-Shaw [54, 53, 55].

Notre cellule est composée de deux plaques de verre indépendantes de 35 cm de hauteur et de 25 cm de largeur. On insère entre les plaques et contre les bords longs différentes épaisseurs de ruban plastique pour obtenir 3 profondeurs différentes : 0.150 mm, 0.375 mm et 0.750 mm. Les deux plaques sont assemblées ensemble à l'aide de pinces permettant ainsi une étanchéité sur les bords, tout en laissant ouvertes les extrémités supérieure et inférieure. La cellule est placée verticalement de sorte à avoir ses extrémités inférieure et supérieure ouvertes à l'air libre. Le support de la cellule permet d'effectuer une rotation selon un axe horizontal.

Le phénomène est filmé grâce à une caméra numérique rapide (Phantom V5) pouvant prendre des images d'une résolution de  $1024 \times 1024$  pixels à une cadence de 1000 images seconde. Les images sont codées sur 8 bits, c'est-à-dire sur 256 niveaux de gris.

La cellule de Hele-Shaw est éclairée de manière directe avec un spot HMI continu de 575 W pour nous permettre d'éviter les problèmes de scintillement. Un écran diffuseur est intercalé entre la cellule et le spot pour avoir un fond lumineux le plus uniforme possible.

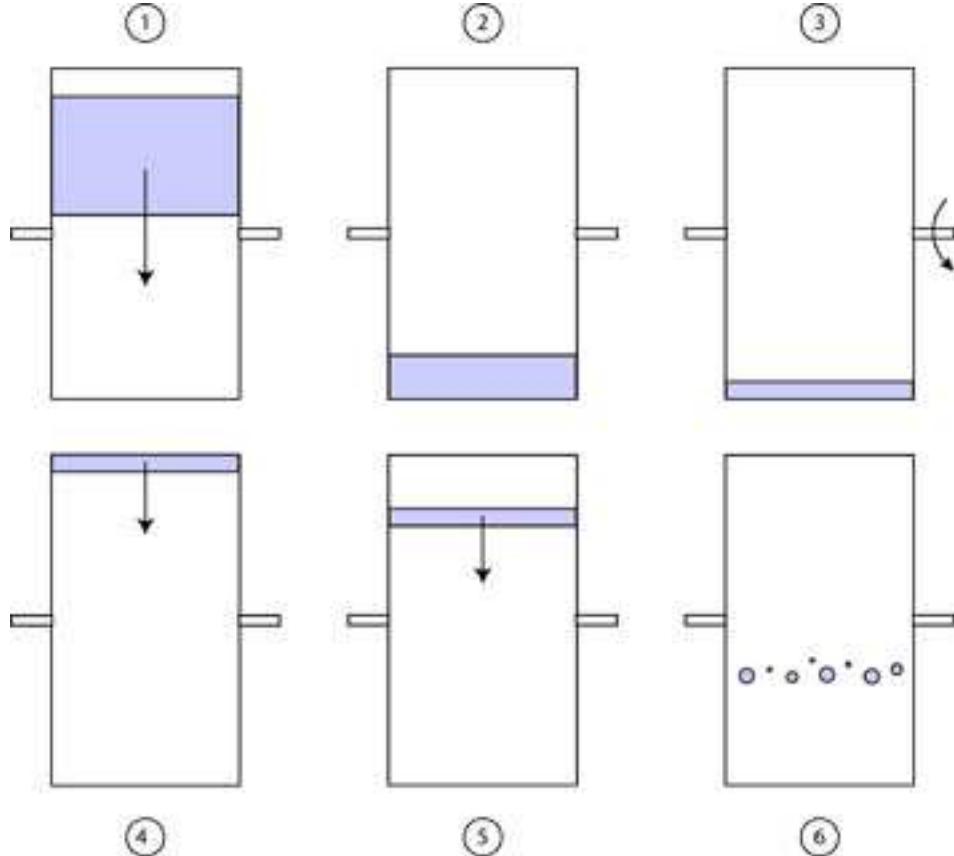


FIG. 2.4 – Protocole expérimental de l'instabilité de la dégoulinure. Le rectangle coloré schématiquement un volume d'huile silicone.

La figure 2.4 représente le protocole expérimental pour l'étude de l'instabilité. Premièrement, on injecte de l'huile silicone pour prémoiller les deux plaques de verres et assurer un mouillage total par la suite. Ensuite (2), une partie de l'huile injectée s'évacue par le bas de la cellule, tandis qu'une plus petite partie reste par capillarité entre les plaques. On utilise ce liquide restant pour créer et modeler la bandelette que l'on souhaite étudier (3). En particulier, on peut fixer une épaisseur moyenne ainsi qu'une rugosité initiale. Une fois la bandelette créée, on retourne la cellule (4), la bandelette va tout d'abord chuter et se déstabiliser (5) puis se fragmenter (6).

Les liquides utilisés sont différentes huiles silicone dont les propriétés physiques sont rappelées dans le tableau 2.1

	47V20	47V50
Densité ( $\text{kg.m}^{-3}$ )	990	990
Viscosité dynamique $\eta$ ( $\times 10^{-3} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$ )	19.8	49.5
Viscosité cinématique $\nu$ ( $\times 10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ )	20	50
Tension de surface $\sigma$ ( $\text{kg.s}^{-2}$ )	0.02	0.02

TAB. 2.1 – Propriété des liquides à 20 °C.

## 2.4 Détermination de la vitesse de chute

On peut estimer la vitesse de chute de la bandelette par une loi de type Poiseuille [46, 47]. En l'adaptant au cas d'une cellule de Hele-Shaw, on trouve comme expression de la vitesse :

$$V_0 = \frac{g e^2}{12 \nu} \quad (2.1)$$

Cependant, du fait de la petite taille de la bandelette, on ne peut pas négliger la dissipation dans les coins. Bico et Quéré [10] ont étudié en détail la chute de petits objets liquides dans des capillaires et ont montré l'importance des angles de contact dans l'évaluation de la vitesse de chute. En effet, la mesure expérimentale de la vitesse diffère de celle prédictive à l'aide d'un modèle de type Poiseuille. Cette différence devient de plus en plus marquée lorsque la taille de l'objet liquide est petite. La prise en compte de l'hystéresis des angles de contact fait ressortir un gradient de pression au sein du fluide s'opposant au mouvement.

### 2.4.1 Vitesse de chute d'un milieu infini ou semi-infini

Tout d'abord, calculons la vitesse d'un fluide infini au sein de la cellule de Hele-Shaw. Soient deux plaques verticales rigides et parallèles séparées d'une distance  $e$ . L'axe vertical  $z$  est dirigé vers le haut et est placé à mi-distance entre les plaques. L'axe horizontal  $x$  est perpendiculaire aux plaques et l'axe horizontal  $y$  est parallèle aux plaques. Dans ces coordonnées, les plaques sont situées dans le plan  $(y, z)$  et situées en  $e/2$  et  $-e/2$ . Soit un fluide de masse volumique  $\rho$ , de viscosité dynamique  $\nu$  soumis au champ de gravité  $\vec{g}$ . Ecrivons les équations de Navier-Stokes :

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{V} + \vec{g} \quad (2.2)$$

avec  $\vec{V}$  la vitesse du fluide. En se plaçant dans un régime stationnaire, la vitesse  $V$  ne dépend plus du temps. Par conséquent, le premier terme de l'équation précédente devient nul. De même, pour des raisons de symétrie, la vitesse ne dépend pas des coordonnées  $y$  et  $z$ . Enfin la vitesse est dirigée uniquement selon l'axe des  $z$ . On peut donc écrire :

$$\vec{V} = V_z(x) \hat{z} \quad (2.3)$$

avec  $\hat{z}$  le vecteur unitaire selon l'axe des  $z$ . On peut à présent simplifier l'équation de Navier-Stokes en utilisant le fait que la pression  $p$  est uniforme au sein du fluide :

$$0 = \nu \frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} - g \quad (2.4)$$

On obtient une simple équation différentielle du second ordre qui donne l'expression de la vitesse :

$$V_z = \frac{g x^2}{2 \nu} + A x + B \quad (2.5)$$

avec  $A$  et  $B$  deux constantes d'intégration. Pour les déterminer, nous devons utiliser les conditions aux limites. Dans le cas présent il s'agit des conditions de non glissement à la paroi, autrement dit, une vitesse tangentielle nulle sur les plaques. Ce qui se traduit par :

$$V_z \left( \pm \frac{e}{2} \right) = 0 \quad (2.6)$$

Pour des raisons de symétrie, la vitesse doit satisfaire la condition suivante :

$$V_z(-x) = V_z(x) \quad (2.7)$$

ce qui donne immédiatement la valeur de la constante  $A$  :  $A = 0$ . La constante  $B$  se calcule par :

$$0 = \frac{g e^2}{8 \nu} + B \quad (2.8)$$

soit :

$$B = -\frac{g e^2}{8 \nu} \quad (2.9)$$

et nous obtenons alors l'expression de la vitesse au sein du fluide :

$$V_z = \frac{g e^2}{8 \nu} \left( \frac{4 x^2}{e^2} - 1 \right) \quad (2.10)$$

Dans le cas d'un milieu semi-infini, la vitesse de l'interface est donnée par la vitesse débitante moyenne [7]. Cette vitesse s'obtient en effectuant le calcul suivant :

$$\bar{V} = \frac{1}{e} \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} V_z(x) dx \quad (2.11)$$

Ce qui donne :

$$\bar{V} = \frac{g e^2}{12 \nu} \quad (2.12)$$

On retrouve la vitesse annoncée précédemment dans l'équation 2.1

### 2.4.2 Détermination expérimentale de la loi de Tanner

Les effets des angles de contact dominent la dynamique de la bandelette. Nous allons donc par la suite utiliser le nombre capillaire  $Ca$  comme valeur caractéristique de cette instabilité. En effet, le nombre capillaire exprime le rapport des forces visqueuses sur les forces dues à la tension de surface. Ce nombre s'exprime comme suit :

$$Ca = \frac{\eta V}{\sigma} \quad (2.13)$$

Ce nombre sans dimension détermine la vitesse de chute de la bandelette et de quelle manière elle se déstabilise. Nous utiliserons donc le nombre capillaire  $Ca$  comme paramètre de contrôle adimensionné de l'instabilité.

Nous allons utiliser par la suite la loi de Tanner [65]. Cette loi donne une relation liant l'angle de mouillage d'une ligne de contact mobile avec la vitesse d'avancée de cette dernière. Nous avons voulu nous assurer expérimentalement de la dépendance du rayon de courbure avec le nombre capillaire  $Ca$ . Nous avons donc mesuré expérimentalement l'angle de contact d'avancée en fonction de la vitesse de déplacement d'un petit objet liquide dans un tube capillaire. Pour cela, nous introduisons une très faible quantité d'huile silicone que nous forçons ensuite à se déplacer. Nous observons l'avancée du liquide grâce à un microscope binoculaire et nous mesurons le rayon de courbure d'avancée en fonction de la vitesse que nous imposons.

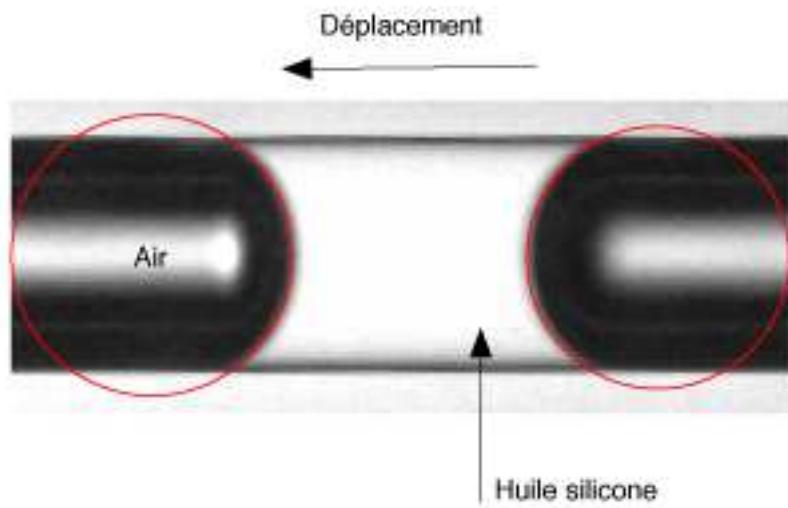


FIG. 2.5 – Vue expérimentale du déplacement d'un objet liquide dans un tube capillaire. Le mouvement se fait de droite à gauche. Les cercles en traits pleins donnent un aperçu des rayons de courbure.

Une vue expérimentale est proposée sur la figure 2.5. L'huile silicone se déplace de la droite vers la gauche dans un capillaire. Les bandes grises en bas et en haut de l'image

représentent le verre du tube. Le noir représente l'air, la lumière ne passant pas à cause de la réfraction de la lumière, d'où des bandes sombres sur l'image. En blanc et au milieu se trouve l'huile silicone. Comme l'huile a sensiblement le même indice optique que le verre, la lumière n'est pas diffractée. Les cercles en traits pleins sont là pour voir les différents rayons de courbure. On observe, par ailleurs, que le rayon d'avancée est plus grand que le rayon de reculée, ce qui signifie que les angles de contact dynamiques sont différents des angles de contact statiques.

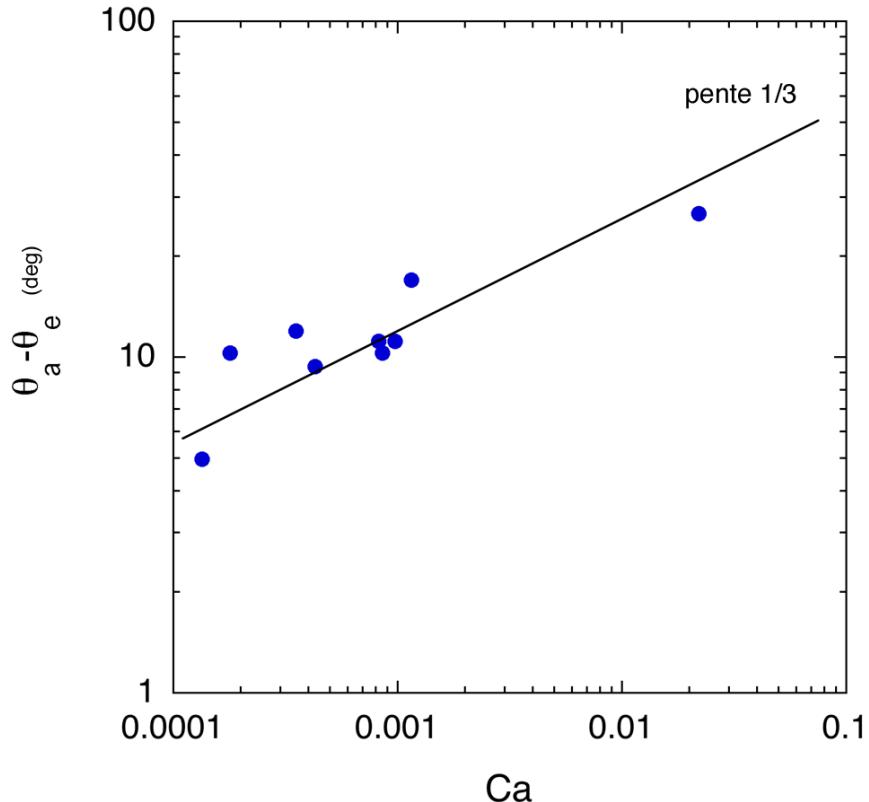


FIG. 2.6 – Vérification expérimentale de la loi de Tanner : dépendance de l'angle de contact dynamique en fonction du nombre capillaire  $Ca$ . Les symboles ● représentent les données expérimentales, la ligne en trait plein représente une loi de puissance d'exposant 1/3.

Nous avons effectué diverses mesures des rayons de courbure pour différentes vitesses d'avancée, et donc ainsi pour plusieurs valeurs du nombre capillaire  $Ca$ . Une construction géométrique nous donne la relation entre le rayon de courbure d'avancé mesuré  $R_a$  et l'angle de contact  $\theta_a$ . Connaissant le diamètre  $D$  du capillaire, nous avons la relation suivante :

$$\cos(\theta_a) = \frac{D}{2R_a} \quad (2.14)$$

Du fait de la déformation sphérique du tube, le rayon mesuré est surestimé par rapport au rayon réel. Nous mesurons également le rayon de courbure de recul  $R_r$ . Ce dernier doit

être égal au diamètre du tube. Or la photo présentée sur la figure 2.5 montre que le rayon de reculé est plus grand que le rayon du tube. Nous corrigons donc nos mesures d'angle d'avancé en fonction de l'angle de recul :

$$\theta = \theta_a - \theta_r \quad (2.15)$$

avec  $\theta_r$  l'angle de recul mesuré. La figure 2.6 représente l'angle de contact d'avancée  $\theta_a$  corrigé par l'angle de recul  $\theta_r$  en fonction du nombre capillaire  $Ca$ . Ces mesures sont représentées dans des coordonnées logarithmique. Une droite en trait plein représente une loi de puissance d'exposant 1/3, donnant la relation exprimée par Tanner entre l'angle d'avancé et la nombre capillaire.

$$\theta = \epsilon Ca^{1/3} \quad (2.16)$$

Nos mesures suivent cette prédition avec toutefois une dispersion. Cet dispersions proviennent essentiellement du fait qu'il est difficile de mesurer avec précision la valeur du rayon de courbure. Par conséquent nos mesures sont une très bonne estimation de la valeur de l'angle sans toutefois nous donner la valeur exact. Il nous est donc impossible de déterminer le préfacteur  $\epsilon$ .

### 2.4.3 Effet de taille finie

En observant en détail les angles de contact au niveau de chaque interface, on constate que l'angle de contact d'avancée, c'est-à-dire l'angle entre l'interface mobile et le substrat est plus grand que l'angle de contact statique, c'est-à-dire lorsque le fluide est au repos. De même, au niveau du front arrière du liquide, on observe que le fluide mouille complètement la paroi, car un film très mince de liquide est déposé sur le substrat. Les rayons de courbure entre les deux interfaces ne sont pas les mêmes. Le régime stationnaire est obtenu en égalisant les différentes forces de pression s'exerçant sur le fluide. Nous avons d'un côté la pression dynamique due au mouvement du fluide, et de l'autre un gradient de pression dû à la différence de courbure en amont et en aval du liquide. On utilise la loi de Bretherton [13] pour avoir une estimation du rayon de courbure de recul et la loi de Tanner [65] pour celle d'avancée. Il est ainsi possible d'obtenir une relation implicite sur la vitesse.

Pour cela, faisons un bilan de force par unité de longueur d'une bande fluide d'épaisseur  $h$  s'écoulant entre deux plaques parallèles séparées d'une distance  $e$ , figure 2.7.

Nous avons tout d'abord la force de pesanteur qui va être le moteur du mouvement :

$$\mathcal{P} = \rho g e h \quad (2.17)$$

Nous avons également la force de frottement visqueux à la paroi qui s'oppose au mouvement :

$$\mathcal{F} = 12 \eta V \left( \frac{h}{e} \right) \quad (2.18)$$

Enfin, nous avons également les forces de pression induites par la courbure des interfaces qui vont elles aussi s'opposer au mouvement :

$$(p_a - p_r) e \quad (2.19)$$

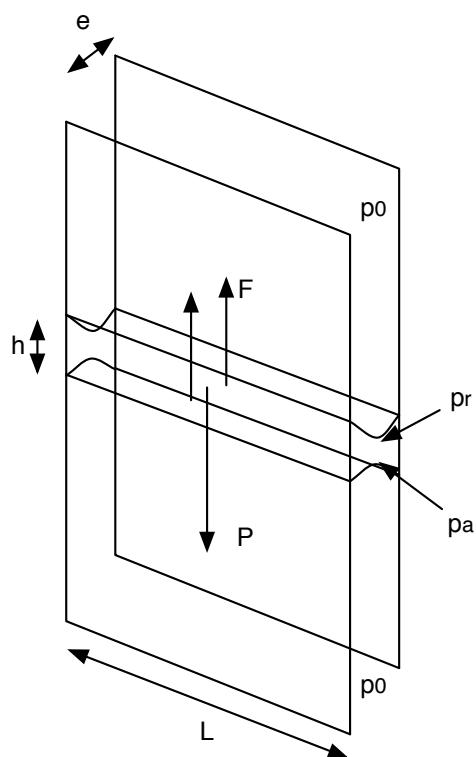


FIG. 2.7 – Schéma montrant l'ensemble des forces s'appliquant sur la bandelette.

avec  $p_a$  la pression au niveau de l'interface avançante et  $p_r$  la pression au niveau de l'interface reculante. On détermine les expressions de ces pressions en fonction des lois de Laplace :

$$p_a = p_0 - \frac{\sigma}{R_a} \quad (2.20)$$

et

$$p_r = p_0 - \frac{\sigma}{R_r} \quad (2.21)$$

Avec  $R_a$  et  $R_r$  les rayons d'avancée et de reculée.

Hoffman [29] a montré l'existence d'une relation entre le nombre capillaire  $Ca$  et l'angle de contact  $\theta$ . Lorsqu'une interface se déplace, l'angle de contact  $\theta$  entre le substrat et le fluide est différent de l'angle statique, c'est-à-dire lorsque le fluide se déplace. Hoffmann a montré que cet angle de contact varie selon la direction de déplacement, c'est-à-dire lorsque l'interface avance ou recule, mais également varie avec la vitesse de déplacement, c'est-à-dire avec le nombre capillaire.

Nous utilisons tout d'abord la loi de Tanner [65] pour avoir une expression du rayon d'avancée :

$$R_a = \frac{e}{2 \cos(\theta)} \quad (2.22)$$

avec

$$\theta = \epsilon Ca^{\frac{1}{3}} \quad (2.23)$$

où  $\epsilon$  est une constante comprise entre 4 et 5. Cette constante empirique dépend de la nature des fluides et de l'état de surface.

La loi de Bretherthon nous donne une expression du rayon de courbure de reculée :

$$R_r = \frac{e}{2} - h_\infty \quad (2.24)$$

avec  $h_\infty$  l'épaisseur de fluide déposée sur la paroi après le passage de la bandelette. L'expression de  $h_\infty$  vaut :

$$\frac{h_\infty}{e} = 0.67 Ca^{2/3} \quad (2.25)$$

Ce rapport est inférieur ou égal à 0.04 dans la gamme de nos paramètres physiques. Pour la suite, nous prendrons comme approximation  $h_\infty = 0$  et donc un rayon de reculée égal à la moitié de l'entrefer  $e$  :

$$R_r = \frac{e}{2} \quad (2.26)$$

En ayant à présent les valeurs des rayons de courbure pour chaque interface, on peut écrire le bilan de force par unité de longueur :

$$\rho g e h = 12 \eta V \frac{h}{e} + 2 \sigma (1 - \cos(\theta)) \quad (2.27)$$

Le terme de gauche représente la force motrice de pesanteur. Cette force est contrebalancée par un premier terme de frottement visqueux à la paroi et par un second terme résultant

des corrections de pression aux interfaces. Au vu des gammes de vitesse et des paramètres physiques de notre système, la valeur de  $\theta$  est petite devant 1 et on peut approximer la fonction cosinus par son développement limité au second ordre. On obtient alors une expression implicite de la vitesse :

$$\rho g e h = 12 \eta V \frac{h}{e} + 2 \sigma \epsilon^2 C a^{\frac{2}{3}} \quad (2.28)$$

Soit en réarrangeant :

$$\frac{g e^2}{12 \nu} = V + 2 \frac{\sigma}{\eta} \epsilon^2 C a^{\frac{2}{3}} \frac{e}{h} \quad (2.29)$$

Cette équation de la vitesse est très proche de celle obtenue par Bico et Quéré [10]. On remarque que le terme de gauche est égal à la vitesse de Poiseuille dans le cas d'un fluide infini. En effet dans la limite  $h \gg e$ , le second terme de droite devient négligeable et la vitesse est égale à l'expression (2.12) donnant  $V_0$ .

On peut continuer à simplifier cette expression :

$$V_0 = V + 2 \epsilon^2 C a^{-\frac{1}{3}} V \frac{e}{h} \quad (2.30)$$

Soit :

$$\frac{V}{V_0} \left( 1 + 2 \epsilon^2 C a^{-\frac{1}{3}} \frac{e}{h} \right) = 1 \quad (2.31)$$

En appelant  $Ca_0$  le nombre capillaire basé sur la vitesse de chute limite :

$$Ca_0 = \frac{\eta V_0}{\sigma} \quad (2.32)$$

on réécrit l'expression précédente de manière à faire ressortir le rapport  $V/V_0$ . En effet  $Ca = Ca_0(V/V_0)$  :

$$\frac{V}{V_0} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{h}{e} 2 \epsilon^2 C a_0^{\frac{1}{3}} \left( \frac{V}{V_0} \right)^{\frac{1}{3}}}} \quad (2.33)$$

On peut distinguer deux comportements limites en fonction de la valeur de  $2 \epsilon^2 C a_0^{1/3} (h/e)$  :

- Premier cas :  $1 / (2 \epsilon^2 C a_0^{1/3} (h/e)) \ll 1$  : Dans ce cas on obtient alors  $V/V_0 \approx 1$ , la vitesse de chute est égale à la vitesse de chute limite donnée par Poiseuille.
- Second cas :  $1 / (2 \epsilon^2 C a_0^{1/3} (h/e)) \gg 1$  : Dans ce cas on obtient la relation suivante pour la vitesse :

$$\frac{V}{V_0} \approx (2 \epsilon^2)^{3/2} C a_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{h}{e} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (2.34)$$

Nous avons représenté sur la figure 2.8 la vitesse mesurée expérimentalement en fonction du paramètre  $h/e$ . La vitesse est adimensionnée par la vitesse maximale  $V_0$  prédicta selon la loi de Poiseuille. On remarque que les points expérimentaux sont dispersés autour d'une

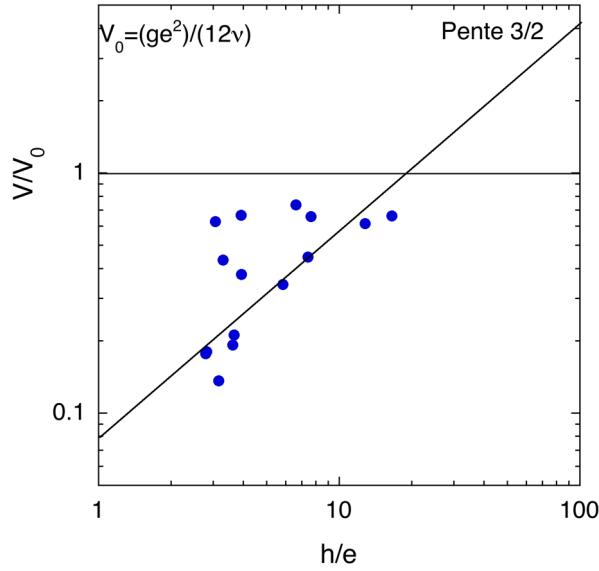


FIG. 2.8 – Vitesse de chute expérimentale d'une bandelette en fonction du paramètre  $h/e$ .

droite de pente 3/2 dans des coordonnées logarithmiques. Autrement dit, la vitesse de chute varie comme la puissance 3/2 de ce rapport.

Bien qu'inférieures à la vitesse limite  $V_0$ , nos vitesses mesurées ne sont pas largement inférieures à celle-ci. Pour nos plus hautes vitesses, nous nous situons au moment de la transition entre le régime en loi de puissance et le régime infini. Toutefois, la grande majorité des vitesses mesurées suivent une loi de puissance d'exposant 3/2. La dispersion des données est due au fait que nous avons fait varier la viscosité, l'épaisseur de la bandelette, l'entrefer de la cellule ainsi que la gravité en plaçant la cellule non pas verticalement mais avec un angle. Or, nous avons vu précédemment que le rapport des vitesses  $V/V_0$  dépendait effectivement du rapport  $h/e$ , mais également de la nature des liquides utilisés. La gravité  $g$  utilisée dans nos mesures et notre modèle est égale à :

$$g = g \sin(\psi) \quad (2.35)$$

avec  $\psi$  l'angle que fait la cellule avec la verticale. L'angle  $\psi$  est sous-entendu dans la suite de notre problématique.

#### 2.4.4 Influences des perturbations du film de prémoillage

Le calcul de la vitesse de chute montré précédemment, suppose que le film de prémoillage est non perturbé. Nous pouvons estimer l'effet d'une brusque variation de l'épaisseur du film de prémoillage sur la vitesse d'avancé.

Pour cela nous supposons que le rayon d'avancée reste constant et nous allons estimer la différence de l'angle d'avancée au moment du passage de la perturbation. L'angle d'avancé

est donné par la relation suivante :

$$\theta = \frac{e}{2 R_a} \quad (2.36)$$

avec  $e$  l'entrefer et  $R_a$  le rayon de courbure d'avancé. Lorsque le front arrive sur une perturbation, la valeur de l'angle est modifiée comme suit :

$$\theta_m = \frac{\frac{e}{2} - \epsilon}{R_a} \quad (2.37)$$

avec  $\epsilon$  l'épaisseur de la perturbation. En prenant une vitesse de chute élevé,  $Ca \sim 0.1$  et une épaisseur de perturbation égale à deux fois l'épaisseur du film de prémouillage calculé à l'aide de l'expression de Bretherthon, la différence entre les angles d'avancés non perturbé et perturbé est d'environ  $30^\circ$ , soit en estimant les vitesses, un facteur 4 entre la vitesse d'avancée non perturbé et la vitesse d'avancé au niveau de la perturbation. Ce facteur est une limite haute de notre estimation, car nous avons pris des vitesses de déplacement plus rapide que nos mesures.

L'épaisseur du film de prémouillage est sujet au développement de fluctuations d'épaisseur lorsque la cellule de Hele-Shaw n'est plus placée verticalement. Dans ce cas, une instabilité de type Rayleigh-Taylor se développe. Limat [39] a montré qu'il existait 5 régimes d'instabilité en fonction de l'épaisseur du fluide et de la viscosité. Dans la gamme d'épaisseur fluide et de viscosité, nous nous trouvons dans le régime couche mince visqueuse. Nous pouvons alors, en utilisant ses résultats, estimer le temps d'instabilité de cette couche de pré-mouillage. En utilisant notre fluide le moins visqueux, une épaisseur de prémouillage la plus épaisse et un entrefer de cellule le plus grand, le temps caractéristique de l'instabilité est supérieur à 4 min.

Cependant, dans ces mêmes conditions, la bandelette parcourt la cellule en moins d'une minute. Par conséquent, les perturbations du film de prémouillage n'ont pas le temps de se développer et donc de perturber la vitesse d'avancé de la bandelette.

## 2.5 Gradient de pression

Si le moteur de la chute de la bandelette n'est autre que la gravité, celui de l'instabilité est le gradient de pression interne qui s'établit dans la bandelette fluide. Ce gradient est dû à la différence de courbure entre l'interface inférieure et l'interface supérieure.

### 2.5.1 Expression du gradient de pression $\Lambda$

La figure 2.9 montre une vue en coupe de la bandelette fluide se déplaçant dans la cellule de Hele-Shaw. Les milieux (1) et (3) sont de l'air à la pression atmosphérique ambiante  $p_0$ , car la cellule est ouverte en haut et en bas. Pour déterminer la pression dans le milieu (2), c'est-à-dire l'huile silicone, on va utiliser les équations simplifiées stationnaires de Navier-Stokes, car on suppose le mouvement stationnaire et la vitesse de chute uniquement dirigée

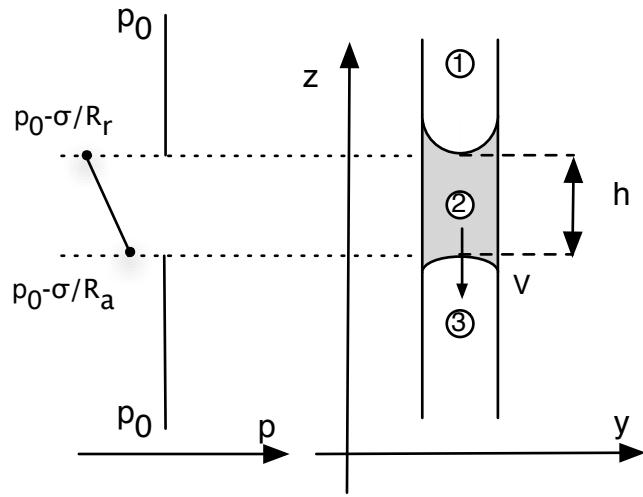


FIG. 2.9 – Vue en coupe de la bandelette.

selon l'axe vertical ne dépendant uniquement que d'une direction :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \quad (2.38)$$

En effet, la vitesse de chute  $V$  ne dépend que de la composante  $y$ , tandis que la pression ne dépend uniquement que de  $z$ . On remarque que le gradient de pression ne dépend pas de  $z$ , et nous utiliserons par la suite la notation suivante :

$$\Lambda = \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.39)$$

Nous avons alors :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g + \nu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \quad (2.40)$$

En intégrant sur l'axe  $z$  :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial p}{\partial z} dz = p\left(\frac{h}{2}\right) - p\left(-\frac{h}{2}\right) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho \left(-g + \nu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) dz = \rho \left(-g + \nu \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) h \quad (2.41)$$

où  $+h/2$  et  $-h/2$  correspondent à la position supérieure et inférieure de la bandelette. Exprimons alors le saut de pression au niveau de chaque interface :

$$p\left(+\frac{h}{2}\right) = p_0 - \frac{\sigma}{R_r} \quad (2.42)$$

pour l'interface supérieure avec le rayon de reculée, et :

$$p \left( -\frac{h}{2} \right) = p_0 - \frac{\sigma}{R_a} \quad (2.43)$$

pour l'interface inférieure avec le rayon d'avancée. Par conséquent :

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{\partial p}{\partial z} dz = -\frac{\sigma}{R_r} + \frac{\sigma}{R_a} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \Lambda dz = \Lambda h \quad (2.44)$$

Et donc :

$$\Lambda = \frac{\sigma}{h} \left( -\frac{1}{R_r} + \frac{1}{R_a} \right) \quad (2.45)$$

Et en utilisant les relations de Tanner et de Bretherton, on obtient alors l'expression du gradient de pression :

$$\Lambda = \frac{2\sigma}{e h} \left( 1 - \frac{1}{\cos(\theta)} \right) \quad (2.46)$$

### 2.5.2 Expression simplifiée du gradient de pression $\Lambda$

Les nombres capillaires mis en jeu sont suffisamment petits pour que l'on puisse utiliser un développement limité sur le terme  $1/\cos(\theta)$  :

$$\cos(\theta) \approx 1 - \frac{\theta^2}{2} \quad \text{avec } \theta \ll 1 \quad (2.47)$$

Le gradient de pression devient donc :

$$\Lambda \approx \frac{2\sigma}{e h} \left( 1 - \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{2}} \right) \quad (2.48)$$

Soit en effectuant un deuxième développement limité :

$$\Lambda \approx -\frac{2\sigma}{e h} \frac{\theta^2}{2} \quad (2.49)$$

On obtient alors l'expression suivante en utilisant la loi de Tanner (équation 2.23) :

$$\Lambda \approx -\frac{\sigma}{e h} (\epsilon Ca)^{\frac{2}{3}} < 0 \quad (2.50)$$

Dans ce cas précis, l'expression de la vitesse est donnée par l'équation 2.34. En remplaçant le nombre capillaire par son expression, on observe alors que le gradient  $\Lambda$  est constant par rapport à  $h$ .

En effet, le nombre capillaire s'exprime comme suit :

$$Ca = Ca_0 \frac{V}{V_0} \quad (2.51)$$

Or nous avons montré que nous étions dans un régime où le rapport des vitesses s'exprime simplement en fonction d'une loi de puissance :

$$\frac{V}{V_0} \sim Ca_0^{\frac{1}{2}} \left( \frac{h}{e} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (2.52)$$

soit en remplaçant cette dernière expression dans le nombre capillaire :

$$Ca \sim Ca_0^{\frac{3}{2}} \left( \frac{h}{e} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (2.53)$$

et en remplaçant dans l'expression simplifiée du gradient de pression :

$$\Lambda \approx -\frac{\sigma}{e h} Ca_0 \left( \frac{h}{e} \right) \sim -\frac{\sigma}{e^2} Ca_0 \quad (2.54)$$

## 2.6 Détermination et étude de la relation de dispersion

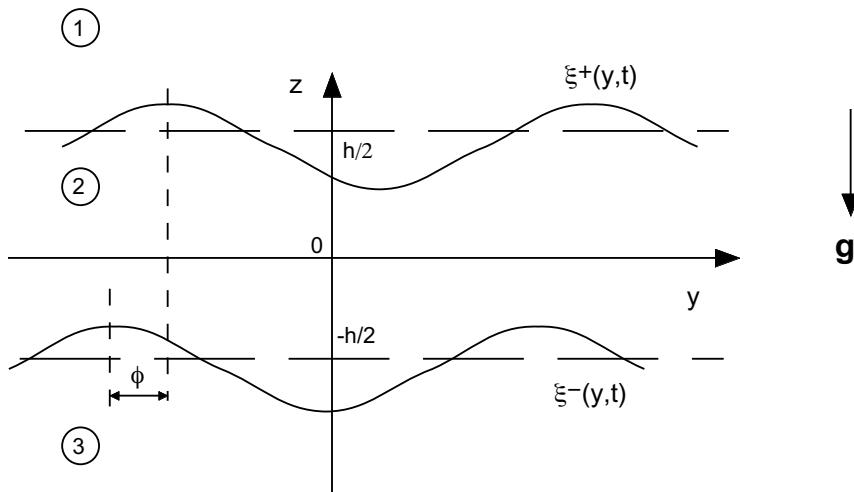


FIG. 2.10 – Vue de face de la bandelette.

Nous avons jusqu'à présent caractérisé l'état de base du fluide. Nous utilisons la méthode des perturbations pour élaborer un modèle théorique simple caractérisant l'instabilité.

Chandrasekhar [15] donne, dans le premier chapitre de son livre, une explication détaillée de l'analyse de stabilité linéaire par la méthode des perturbations. Elle consiste tout d'abord à déterminer l'état de base du système considéré. On applique ensuite de très faibles perturbations sur les paramètres physiques du système (vitesse, pression, ...) et on étudie leurs évolutions temporelles. Si ces perturbations s'estompent, alors le système est stable. Si au contraire elles croissent, le système est instable. L'étude des perturbations est linéaire, c'est-à-dire que l'on ne considère que les termes du premier ordre dans les

équations constitutives du système. Le choix des perturbations n'est pas arbitraire, on les décompose en séries de Fourier. L'avantage de ce choix est que les modes sont orthogonaux entre eux. Par conséquent, la recherche de stabilité d'une perturbation pour un mode quelconque permet de trouver la stabilité pour tous les modes composants la perturbation, et ainsi de déterminer les domaines de stabilité. La relation donnant la vitesse de relaxation ou de croissance d'un mode est appelé relation de dispersion.

### 2.6.1 Expression de la relation de dispersion

La figure 2.10 montre une vue de face de la bandelette. Chaque position de l'interface est caractérisée par  $\xi$ ,  $\xi^+$  pour l'interface du haut et  $\xi^-$  pour l'interface du bas.

$$\xi^+ = \frac{h}{2} + |\xi^+| \Re(e^{ikx+St}) \quad (2.55)$$

$$\xi^- = -\frac{h}{2} + |\xi^-| \Re(e^{ikx+St+i\phi}) \quad (2.56)$$

où  $\phi$  représente la différence de phases entre les deux interfaces. Les perturbations du champ de pression et de la vitesse s'écrivent :

$$p' = p + \delta p, \text{ avec } \delta p = |\delta p| e^{ikx+St} (A e^{kz} + B e^{-kz}) \quad (2.57)$$

$$V' = V_0 + \delta V, \text{ avec } \delta V = \left. \frac{\partial \xi}{\partial t} \right|_{\xi} \quad (2.58)$$

Nous avons à présent besoin de connaître l'état de base de la bandelette. On écrit pour cela les équations de Navier-Stokes. Comme la bandelette chute à vitesse constante, les dérivées temporelles sont nulles :

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + \nu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad (2.59)$$

L'écoulement, dans la cellule de Hele-Shaw, obéit à la loi de Darcy [21]. Cette loi nous donne une relation entre le gradient de pression et la vitesse :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g + \nu \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad (2.60)$$

On suppose que le fluide dans la bandelette se déplace selon un profil de type Poiseuille. En première approximation, on peut prendre comme vitesse celle calculée dans un milieu infini. Nous savons que cette vitesse peut s'exprimer en première approximation comme (équation 2.10) :

$$V_z = \frac{g e^2}{8 \nu} \left( \frac{4 x^2}{e^2} - 1 \right) \quad (2.61)$$

La dérivée seconde de cette vitesse s'écrit :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{g}{\nu} = \frac{12}{e^2} V_0 \quad (2.62)$$

On peut alors écrire ainsi la relation liant le gradient de pression à la vitesse :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = -g - \alpha V_0 \quad (2.63)$$

avec  $\alpha = 12\nu/e^2$ .

On peut naturellement se demander si le fait d'utiliser une vitesse de type Poiseuille est pertinent. En effet, nous avons vu, dans la section précédente, qu'il existait un gradient de pression au sein du fluide et que la vitesse de chute dépendait de la taille de la bandelette. Toutefois nous ne recherchons ici qu'un état de base. Or, la bandelette chute avec une vitesse constante. La seule différence entre l'approximation que nous venons de faire et le cas réel, se trouve dans le préfacteur  $\alpha$  qui diffère. Nous allons prendre en compte les effets de la taille finie, en particulier l'existence de ce gradient de pression à travers les perturbations. Pour cela, nous les introduisons dans l'équation 2.59 et nous ne gardons que les termes linéaires :

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \delta p}{\partial z} = -\rho g - \rho \alpha V_0 - \rho \alpha \delta V \quad (2.64)$$

On obtient alors :

$$\frac{\partial \delta p}{\partial z} = -\rho \alpha \delta V \quad (2.65)$$

Appliquons ensuite cette dernière équation sur chaque interfaces :

– Sur  $\xi^+$  :

$$|\delta p| e^{ikx+St} k \left( A e^{\frac{kh}{2}} - B e^{-\frac{kh}{2}} \right) = -\rho \alpha S |\xi^+| e^{ikx+St} \quad (2.66)$$

– Sur  $\xi^-$  :

$$|\delta p| e^{ikx+St} k \left( A e^{-\frac{kh}{2}} - B e^{\frac{kh}{2}} \right) = -\rho \alpha S |\xi^-| e^{ikx+St+i\phi} \quad (2.67)$$

Nous pouvons simplifier ces expressions :

$$|\delta p| k \left( A e^{\frac{kh}{2}} - B e^{-\frac{kh}{2}} \right) = -\rho \alpha S |\xi^+| \quad (2.68)$$

$$|\delta p| k \left( A e^{-\frac{kh}{2}} - B e^{\frac{kh}{2}} \right) = -\rho \alpha S |\xi^-| e^{i\phi} \quad (2.69)$$

Nous avons besoin d'une autre relation liant la pression  $p$  aux perturbations  $\xi$  pour obtenir ainsi un système d'équation fermé. Nous allons donc utiliser la loi de Laplace qui va nous donner la valeur du saut de pression en fonction de la courbure de l'interface. Détailons précisément les valeurs des sauts de pression sur chaque interface :

– Sur  $\xi^+$  :

$$p_1(\xi^+) - p_2(\xi^+) = \sigma \xi^{+''} + \frac{\sigma}{R_r} \quad (2.70)$$

avec

$$p_1(\xi^+) = p_0 \quad (2.71)$$

et

$$p_2(\xi^+) = p_0 + \frac{\sigma}{2} \left( \frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_r} \right) - \frac{\sigma}{2} \left( \frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_r} \right) + \frac{\sigma}{h} \left( \frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_r} \right) |\xi^+| e^{ikx+St} + \delta p \quad (2.72)$$

On obtient donc :

$$|\delta p| \left( A e^{\frac{kh}{2}} + B e^{-\frac{kh}{2}} \right) = (\sigma k^2 - \Lambda) |\xi^+| \quad (2.73)$$

– Sur  $\xi^-$  :

$$p_2(\xi^-) - p_3(\xi^-) = \sigma \xi^{-''} - \frac{\sigma}{R_a} \quad (2.74)$$

avec

$$p_3(\xi^-) = p_0 \quad (2.75)$$

et

$$p_2(\xi^-) = p_0 - \frac{\sigma}{2} \left( \frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_r} \right) - \frac{\sigma}{2} \left( \frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_r} \right) + \frac{\sigma}{h} \left( \frac{1}{R_a} - \frac{1}{R_r} \right) |\xi^-| e^{ikx+St+i\phi} + \delta p \quad (2.76)$$

On obtient donc

$$|\delta p| \left( A e^{-\frac{kh}{2}} + B e^{\frac{kh}{2}} \right) = -(\sigma k^2 + \Lambda) |\xi^-| e^{i\phi} \quad (2.77)$$

On arrive finalement à ces deux équations :

$$|\delta p| \left( A e^{\frac{kh}{2}} + B e^{-\frac{kh}{2}} \right) = (\sigma k^2 - \Lambda) |\xi^+| \quad (2.78)$$

et

$$|\delta p| \left( A e^{-\frac{kh}{2}} + B e^{\frac{kh}{2}} \right) = -(\sigma k^2 + \Lambda) |\xi^-| e^{i\phi} \quad (2.79)$$

En additionnant les équations 2.68 et 2.78, on peut isoler la constante  $A$  :

$$A = -\frac{1}{2} \left( \frac{\rho \alpha S}{k} - \sigma k^2 + \Lambda \right) \frac{|\xi^+|}{|\delta p|} e^{-\frac{kh}{2}} \quad (2.80)$$

En faisant la même chose avec les équations 2.69 et 2.79 :

$$A = -\frac{1}{2} \left( \frac{\rho \alpha S}{k} + \sigma k^2 + \Lambda \right) \frac{|\xi^-|}{|\delta p|} e^{+\frac{kh}{2}} e^{i\phi} \quad (2.81)$$

en égalisant ces deux dernières relations, on obtient une relation pour le rapport des amplitudes  $|\xi^+|/|\xi^-|$  :

$$\frac{|\xi^+|}{|\xi^-|} = \frac{\left( \frac{\rho \alpha S}{k} + \sigma k^2 + \Lambda \right)}{\left( \frac{\rho \alpha S}{k} - \sigma k^2 + \Lambda \right)} e^{kh} \quad (2.82)$$

Effectuons la même démarche avec la constante  $B$ . En soustrayant les équations 2.68 et 2.78, on arrive à :

$$B = \frac{1}{2} \left( \frac{\rho \alpha S}{k} + \sigma k^2 - \Lambda \right) \frac{|\xi^+|}{|\delta p|} e^{\frac{kh}{2}} \quad (2.83)$$

et en utilisant les équations 2.69 et 2.79 :

$$B = \frac{1}{2} \left( \frac{\rho \alpha S}{k} - \sigma k^2 - \Lambda \right) \frac{|\xi^-|}{|\delta p|} e^{-\frac{kh}{2}} \quad (2.84)$$

Extrayons, ici aussi, le rapport des amplitudes  $|\xi^+|/|\xi^-|$  :

$$\frac{|\xi^+|}{|\xi^-|} = \frac{\left( \frac{\rho \alpha S}{k} - \sigma k^2 - \Lambda \right)}{\left( \frac{\rho \alpha S}{k} + \sigma k^2 - \Lambda \right)} e^{-kh} e^{i\phi} \quad (2.85)$$

En égalisant les équations 2.82 et 2.85, on obtient une relation donnant la valeur du taux de croissance  $S$  en fonction du nombre d'onde  $k$  :

$$\frac{\left( \frac{\rho \alpha S}{k} + \sigma k^2 + \Lambda \right)}{\left( \frac{\rho \alpha S}{k} - \sigma k^2 + \Lambda \right)} e^{kh} = \frac{\left( \frac{\rho \alpha S}{k} - \sigma k^2 - \Lambda \right)}{\left( \frac{\rho \alpha S}{k} + \sigma k^2 - \Lambda \right)} e^{-kh} \quad (2.86)$$

Le terme de phase ne peut être déterminé par cette méthode, car nous utilisons toujours la partie réelle des perturbations. De fait, ce terme se simplifie et ne peut être que constaté. Expérimentalement, on observe uniquement le mode sinueux, c'est-à-dire lorsque les perturbations sont en phase.

En supprimant les rapports et en multipliant par le nombre d'onde  $k$ , on obtient l'expression suivante :

$$(\rho \alpha S + \sigma k^3 + \Lambda k) (\rho \alpha S + \sigma k^3 - \Lambda k) e^{kh} = (\rho \alpha S - \sigma k^3 - \Lambda k) (\rho \alpha S - \sigma k^3 + \Lambda k) e^{-kh} \quad (2.87)$$

en développant en séries de puissance de  $S$  :

$$\begin{aligned} & \left( (\rho \alpha S)^2 + \rho \alpha S \sigma k^3 - \rho \alpha S \Lambda k + \rho \alpha S \sigma k^3 + (\sigma k^3)^2 - \Lambda \sigma k^4 + \rho \alpha S \Lambda k + \Lambda \sigma k^4 - (\Lambda k)^2 \right) e^{-kh} \\ & = \\ & \left( (\rho \alpha S)^2 - \rho \alpha S \sigma k^3 + \rho \alpha S \Lambda k - \rho \alpha S \sigma k^3 + (\sigma k^3)^2 - \Lambda \sigma k^4 - \rho \alpha S \Lambda k + \Lambda \sigma k^4 - (\Lambda k)^2 \right) e^{+kh} \end{aligned}$$

et en regroupant les termes :

$$(\rho \alpha S)^2 (e^{+kh} - e^{-kh}) - 2 \rho \alpha S k^3 (e^{+kh} + e^{-kh}) + (\sigma^2 k^6 - \Lambda^2 k^2) (e^{+kh} - e^{-kh}) = 0 \quad (2.88)$$

ce qui s'écrit aussi :

$$S^2 - 2 \frac{\sigma k^3}{\rho \alpha} \coth(kh) S + \frac{\sigma^2 k^2}{\rho^2 \alpha^2} \left( k^4 - \frac{\Lambda^2}{\sigma^2} \right) = 0 \quad (2.89)$$

En résolvant alors cette équation du second ordre, on aboutit à la relation de dispersion suivante :

$$S = \frac{\sigma k^3}{\rho \alpha} \coth(kh) \left( 1 \pm \sqrt{1 - \left( 1 - \frac{\Lambda^2}{\sigma^2 k^4} \right) \tanh^2(kh)} \right) \quad (2.90)$$

Cette équation est identique à celle trouvée par Bremond & Villermaux [12] dans leurs travaux sur la fragmentation d'une nappe liquide soumise à une accélération impulsionale. La seule différence notable est la dissimilitude des dynamiques. En effet, leur relation de dispersion est fonction du carré du nombre d'onde  $\omega$ , car dans leur cas, le gradient de pression est proportionnel à la dérivée temporelle de la vitesse, il s'agit d'une dynamique inertielle. Dans notre cas, le gradient de pression est proportionnel à la vitesse, car nous sommes dans une dynamique de relaxation visqueuse.

### 2.6.2 Taux de croissance

Nous avons, à présent, un modèle nous prédisant la vitesse d'évolution de chaque mode. Tâchons à présent de comprendre et de comparer cette relation avec les expériences. Pour cela nous allons tout d'abord essayer d'adimensionner la relation de dispersion avec des grandeurs physiques caractéristiques.

On s'aperçoit que pour  $k = \sqrt{|\Lambda|/\sigma}$  la relation de dispersion devient nulle. On appelle ce nombre d'onde particulier, le nombre d'onde de coupure et on le note  $k_c$  :

$$k_c = \sqrt{\frac{|\Lambda|}{\sigma}} \quad (2.91)$$

On introduit alors le nombre d'onde sans dimension  $\tilde{k} = k/k_c$ , et on réécrit la relation de dispersion en fonction de ce nouveau paramètre :

$$S = \frac{\sigma \tilde{k}^3 k_c^3}{\rho \alpha} \coth(\tilde{k} k_c h) \left( 1 - \sqrt{1 - \left( 1 - \frac{1}{\tilde{k}^4} \right) \tanh^2(\tilde{k} k_c h)} \right) \quad (2.92)$$

Une analyse dimensionnelle nous montre que le facteur  $(\sigma k_c^3)/(\rho \alpha)$  a la dimension de l'inverse d'un temps. En divisant le taux de croissance  $S$  par ce facteur, on aboutit à une expression sans dimension de la relation de dispersion :

$$\tilde{S} = \tilde{k}^3 \coth(\tilde{k} k_c h) \left( 1 \pm \sqrt{1 - \left( 1 - \frac{1}{\tilde{k}^4} \right) \tanh^2(\tilde{k} k_c h)} \right) \quad (2.93)$$

Levons à présent la dualité du signe  $\pm$  présent dans l'équation. Notre relation de dispersion admet deux solutions. Une de ces solutions est linéairement stable quelque soit le nombre d'onde  $k$ , tandis que la seconde présente une zone instable. Pour cela, nous traçons qualitativement sur la figure 2.11 la relation de dispersion avec un signe positif et un signe négatif.

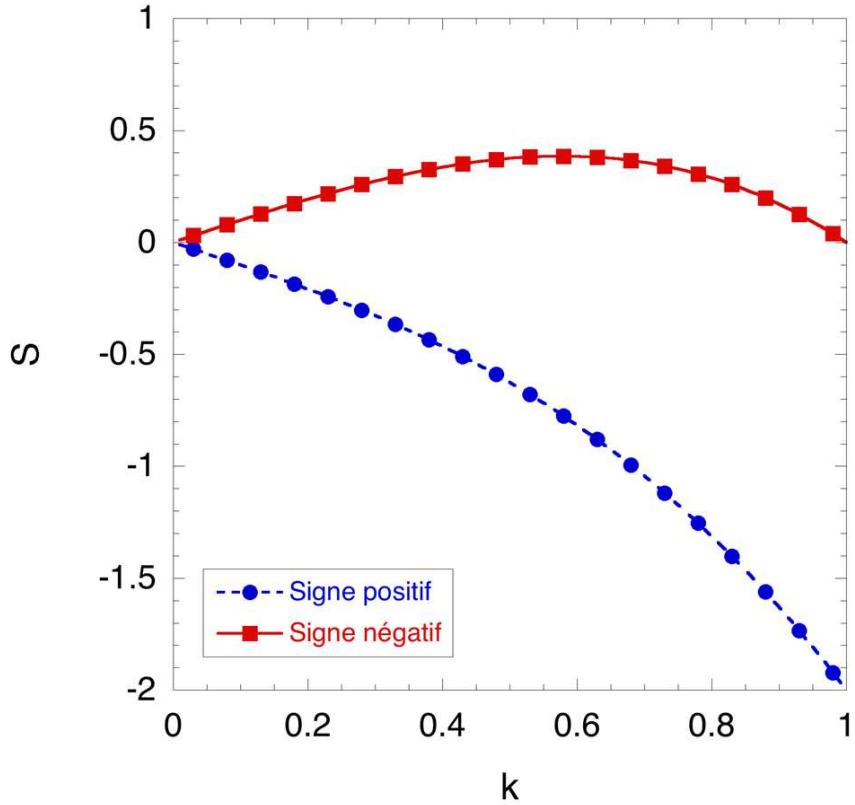


FIG. 2.11 – Recherche des zones de stabilité pour une valeur de  $k_c$  donnée.

On remarque que l'expression avec un signe positif est toujours stable, au contraire de l'expression avec un signe négatif qui présente une bande instable. Nous allons donc nous intéresser à cette dernière expression :

$$\tilde{S} = \tilde{k}^3 \coth(\tilde{k}k_c h) \left( 1 - \sqrt{1 - \left( 1 - \frac{1}{\tilde{k}^4} \right) \tanh^2(\tilde{k}k_c h)} \right) \quad (2.94)$$

Cette équation fait intervenir la hauteur de la bandelette  $h$  de différentes manières, d'une manière explicite et d'une manière implicite dans le terme du nombre d'onde de coupure  $k_c$ . En effet on rappelle que  $k_c$  s'écrit comme suit :

$$k_c = \sqrt{\frac{|\Lambda|}{\sigma}} \quad (2.95)$$

et que le terme de gradient de pression  $\Lambda$  s'écrit lui :

$$|\Lambda| = \frac{2\sigma}{e h} \left( \frac{1}{\cos(\theta)} - 1 \right) \quad (2.96)$$

Sur la figure 2.12, nous avons représenté les relations de dispersion adimensionnées pour quatre paramètres  $k_c h$  différents en fonction du nombre d'onde adimensionné par le nombre

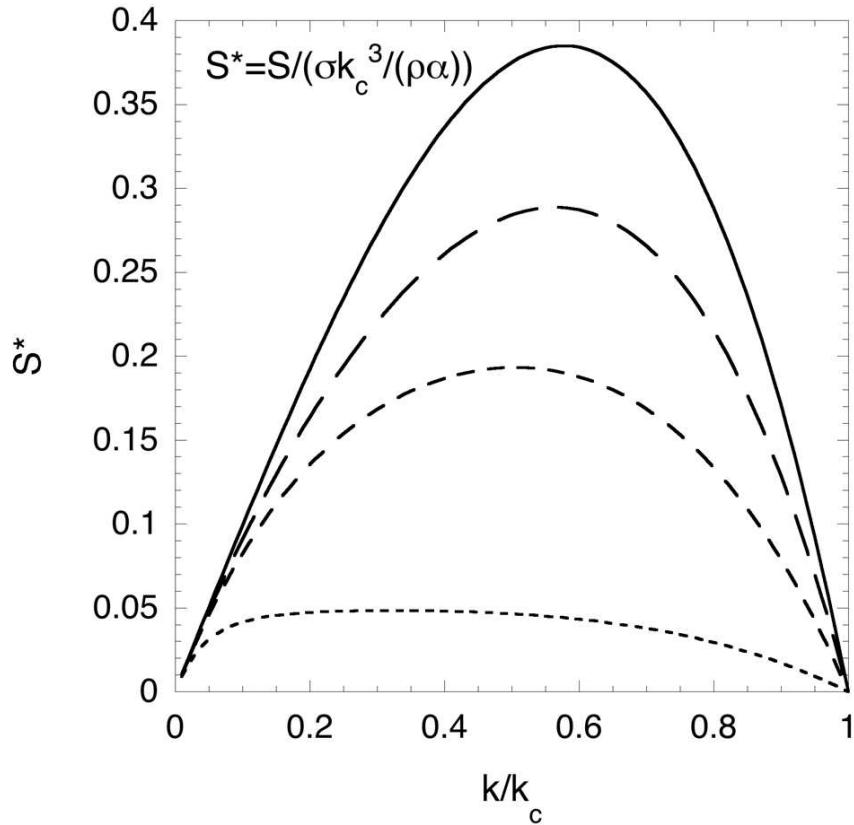


FIG. 2.12 – Influence du paramètre  $k_c h$  sur le taux de croissance. Plus  $k_c h$  est faible, plus la relation de dispersion est écrasée. La courbe en trait plein correspond à la limite  $k_c h \gg 1$  tandis que la courbe en pointillés très resserrés correspond à la limite  $k_c h \ll 1$ .

d'onde de coupure  $k_c$ . En effet, la zone instable de la relation de dispersion est comprise entre 0 et  $k_c$ .

On remarque l'effet du paramètre  $k_c h$  sur la relation de dispersion. Au fur et à mesure que ce paramètre diminue, la relation de dispersion change de forme, passant d'une forme de cloche à une forme présentant un plateau. Dans la limite  $k_c h \ll 1$  le taux de croissance maximal est obtenu pour une large gamme de nombre d'onde  $k$ . Autrement dit  $S \sim Cte$  pour  $0 < k < k_c$ .

### 2.6.3 Comparaison expérimentale

#### Taux de croissance

Essayons d'obtenir une expression pour le maximum du taux de croissance. En effet, il est raisonnable de penser qu'expérimentalement le système va *sélectionner* le ou les modes ayant le taux de croissance le plus fort. Pour cela on va utiliser l'hypothèse déjà utilisée pour la vitesse de chute, à savoir la limite faible hauteur  $h$ . Nous savons que pour cette

limite, le gradient de pression  $\Lambda$  est indépendant de  $h$ . Développons alors les fonctions hyperboliques au premier ordre :  $\coth(X) \approx 1/X$  et  $\tanh(X) \approx X$ . On réécrit alors la relation de dispersion :

$$\tilde{S} \approx \tilde{k}^3 \frac{1}{\tilde{k} k_c h} \left[ 1 - \sqrt{1 - (1 - \frac{1}{\tilde{k}^4}) \tilde{k}^2 k_c^2 h^2} \right] \quad (2.97)$$

Et en utilisant un développement limité pour la racine carrée :

$$\tilde{S} \approx \frac{k_c h}{2} \left( 1 - \tilde{k}^4 \right) \quad (2.98)$$

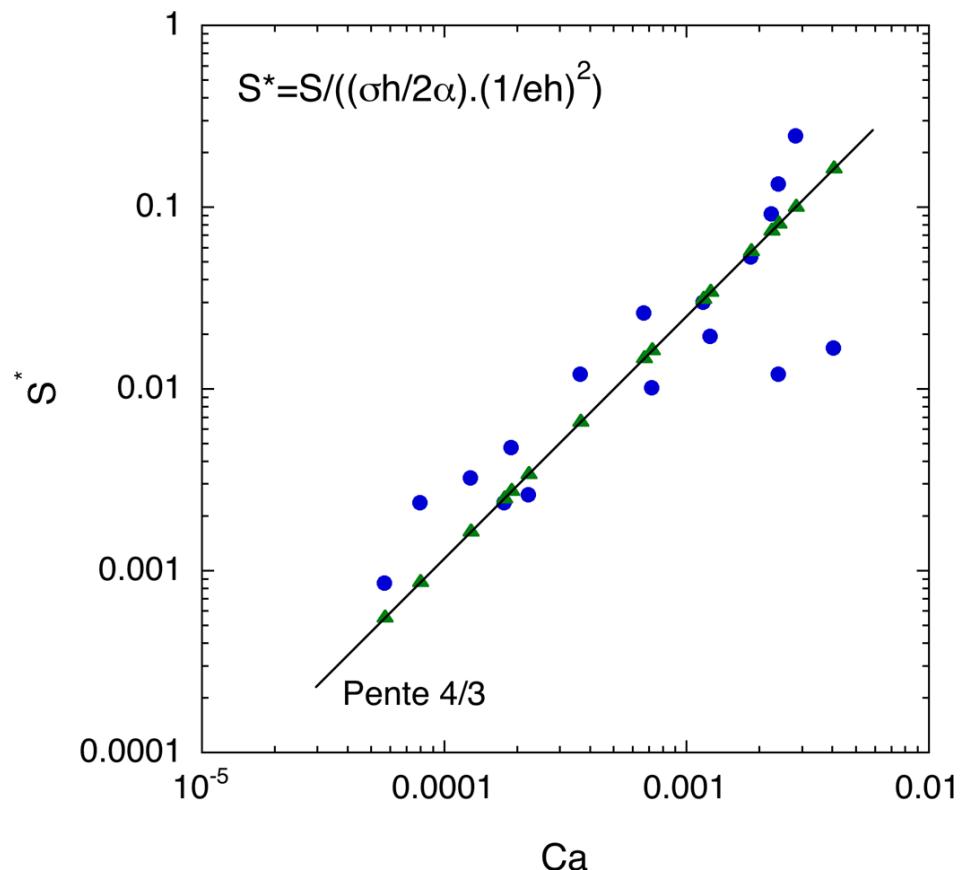


FIG. 2.13 – Comparaison du taux de croissance avec les prédictions théoriques du modèle ; les symboles ● représentent les données expérimentales et les symboles ▲ représentent les valeurs théoriques prévues en fonction des paramètres expérimentaux.

Sur la figure 2.13, nous avons représenté le taux de croissance expérimental adimensionné en fonction du nombre capillaire  $Ca$ . De plus, nous avons aussi représenté pour

chaque point expérimental la prédition théorique. Pour avoir cette prédition, il faut utiliser l'équation 2.98 que l'on remet sous forme dimensionnelle :

$$S = \frac{\sigma}{2\rho\alpha} (k_c^4 h - k^4 h) \quad (2.99)$$

Le maximum se trouve en :

$$S_{max} = \frac{\sigma k_c^4 h}{2\rho\alpha} \quad (2.100)$$

Soit en utilisant la définition du nombre d'onde de coupure  $k_c$  :

$$S_{max} = \frac{\sigma h}{2\rho\alpha} \left( \frac{1}{e h} \right)^2 \left( 4 Ca^{\frac{1}{3}} \right)^4 \quad (2.101)$$

En divisant donc les taux de croissance par le facteur  $\frac{\sigma h}{2\rho\alpha} \left( \frac{1}{e h} \right)^2$ , on obtient une relation simple ne dépendant plus que du nombre capillaire. Sur le graphique, on observe que les points expérimentaux se retrouvent autour d'une courbe maîtresse se comportant en  $Ca^{\frac{4}{3}}$ , représentée par les symboles  $\blacktriangle$ .

### Longueur d'onde

A présent, cherchons les longueurs d'onde associées. La figure 2.14 représente les taux de croissance mesurés en fonction des longueurs d'onde observées. Les taux de croissance sont adimensionnés par le même préfacteur vu précédemment, à savoir :

$$S^* = \frac{12\nu}{\sigma k_c^3 e^2 h} S \quad (2.102)$$

Bremond & Villermaux [12] ont exactement la même relation de dispersion pour les instabilités des nappes liquides soumises à une accélération. Ils ont en particulier dériver le nombre d'onde  $k_m$  associé au taux de croissance maximal :

$$k_m = (6)^{\frac{1}{6}} k_c^{\frac{4}{3}} h^{\frac{1}{3}} \quad , \text{ pour } k_c h \ll 1 \quad (2.103)$$

Nous avons donc adimensionné les longueurs d'onde observées par ce nombre d'onde  $k_m$ . On remarque une très grande dispersion des valeurs expérimentales. Toutefois nos mesures des taux de croissance s'étendent sur deux décades, tandis que les longueurs d'onde sont regroupées sur moins d'une décade. Ceci nous indique que ce nombre d'onde  $k_m$  permet d'avoir une estimation de la longueur d'onde associée.

Cependant, ce nombre d'onde  $k_m$  n'est pas une indication précise pour estimer la longueur d'onde. On remarque sur le graphique que pour un même taux de croissance on peut avoir différentes longueurs d'onde. Cette observation nous prouve indirectement l'existence d'un plateau, c'est-à-dire qu'une gamme de nombres d'onde pour laquelle nous avons le même taux de croissance existe.

La figure 2.15 reprend le graphique précédent en mettant en avant quelques mesures. Nous avons regroupé à l'aide de différents symboles des mesures présentant les mêmes

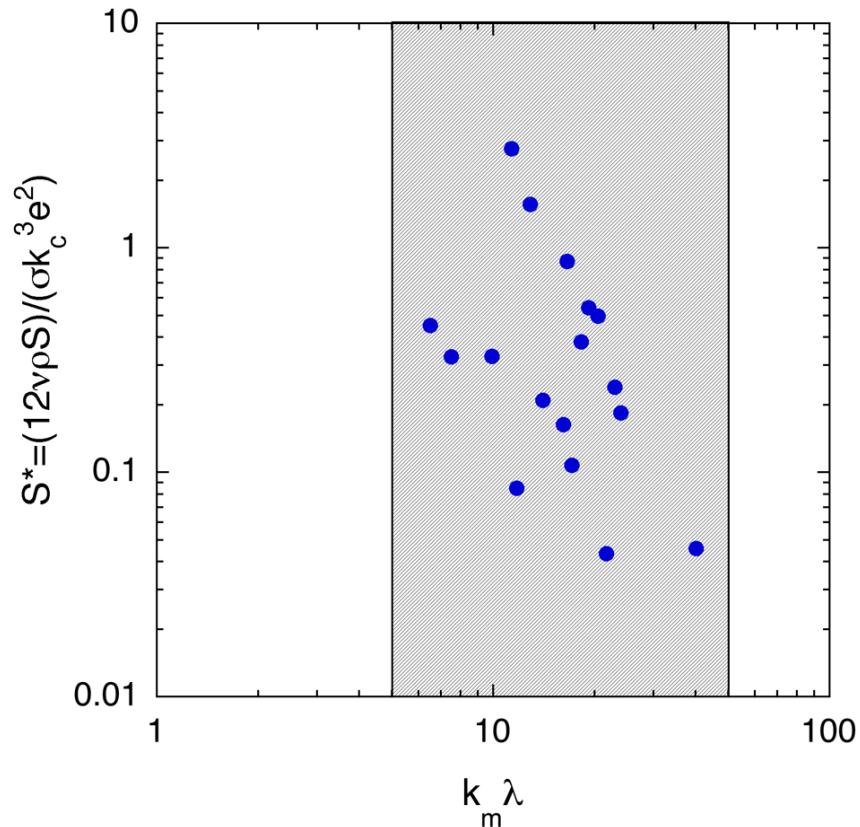


FIG. 2.14 – Taux de croissance mesuré en fonction des longueurs d’onde  $\lambda$ . Les points représentent les mesures expérimentales pour différentes configurations. Les expériences réalisées font varier la hauteur de bandelette, la viscosité, l’entrefer et la gravité effective.

conditions initiales mais ayant des longueurs d’onde associées différentes. Les trois séries de mesures montrées ont toutes des caractéristiques identiques, excepté pour l’épaisseur de la bandelette qui varie très légèrement. Chaque série a un taux de croissance identique tout en ayant des longueurs d’onde associées différentes. Cette constatation est une preuve directe de l’existence du plateau présent dans la relation de dispersion.

La figure 2.16 reprend ces mêmes données en utilisant cette fois comme abscisse le nombre d’onde adimensionné  $k/k_c$ . Pour chaque série de points, nous avons également tracé une relation de dispersion. Pour chaque série, les points expérimentaux sont regroupés autour de la relation de dispersion équivalente.

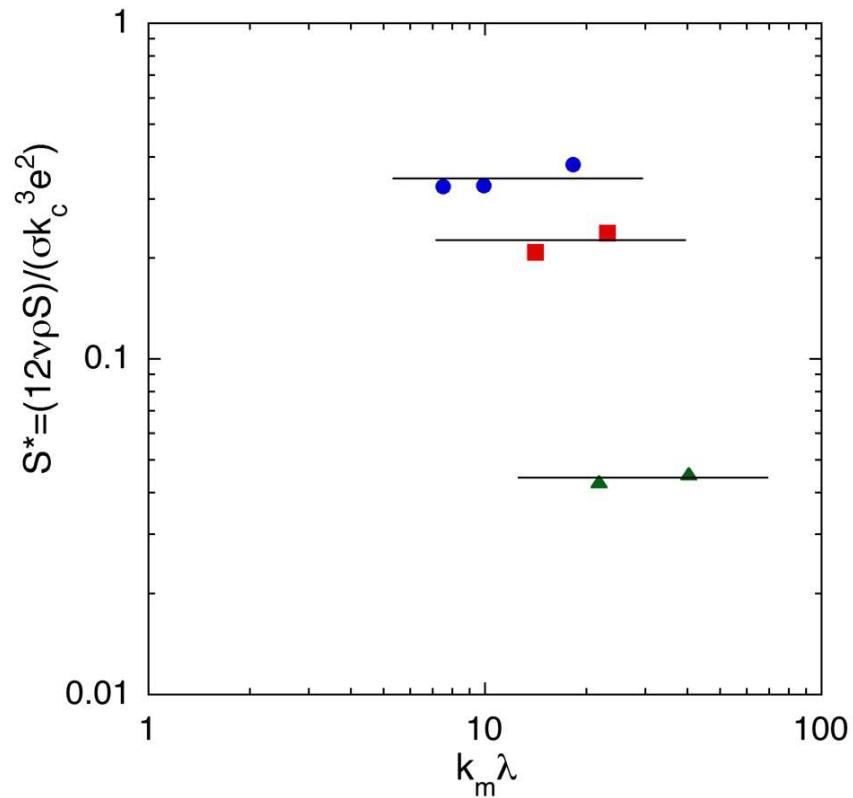


FIG. 2.15 – Taux de croissance mesuré en fonction des longueurs d’onde  $\lambda$  : mise en perspective de l’existence d’un plateau. Les symboles ● représentent des expériences effectuées avec une viscosité de  $50 10^{-6} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$ , d’un entrefer de 0.375 mm et d’une épaisseur de bandelette d’environ 1.1 mm. Les symboles ■ représentent des expériences effectuées avec une viscosité de  $50 10^{-6} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$ , d’un entrefer de 0.375 mm et d’une épaisseur de bandelette d’environ 1.5 mm. Les symboles ▲ représentent des expériences effectuées avec une viscosité de  $20 10^{-6} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$ , d’un entrefer de 0.150 mm et d’une épaisseur de bandelette d’environ 1.5 mm.

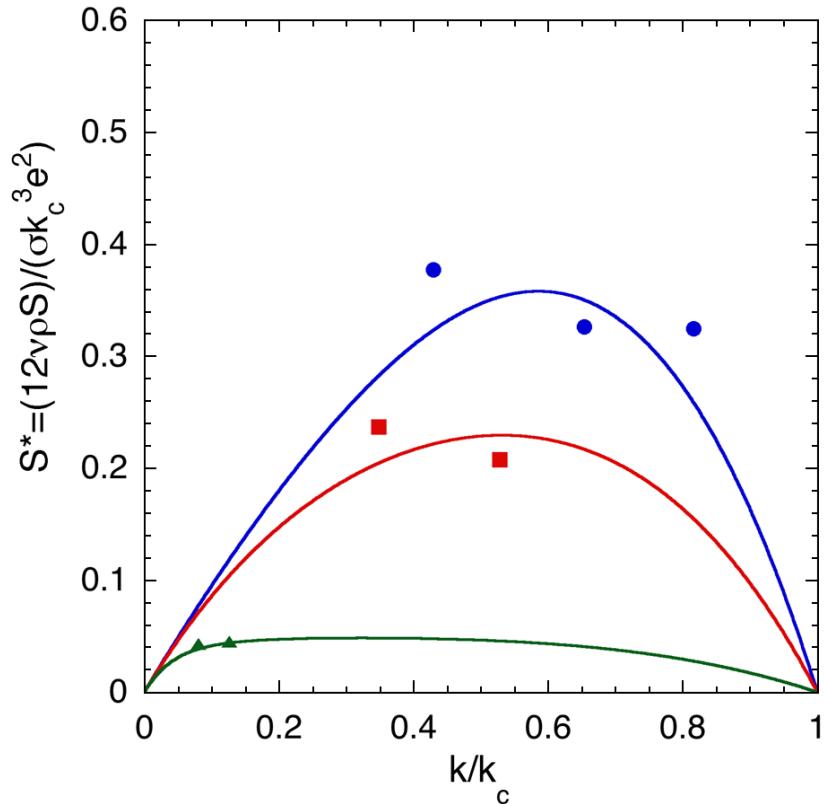


FIG. 2.16 – Taux de croissance mesuré en fonction du nombre d'onde adimensionné  $k/k_c$  : mise en comparaison avec la relation de dispersion. Les symboles ● représentent des expériences effectuées avec une viscosité de  $50 10^{-6} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$ , d'un entrefer de 0.375 mm et d'une épaisseur de bandelette d'environ 1.1 mm. Les symboles ■ représentent des expériences effectuées avec une viscosité de  $50 10^{-6} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$ , d'un entrefer de 0.375 mm et d'une épaisseur de bandelette d'environ 1.5 mm. Les symboles ▲ représentent des expériences effectuées avec une viscosité de  $20 10^{-6} \text{ m}^2 \text{s}^{-1}$ , d'un entrefer de 0.150 mm et d'une épaisseur de bandelette d'environ 1.5 mm.

### 2.6.4 Rapport d'amplitudes

La manière dont l'instabilité est produite et observée présente l'avantage de suivre l'évolution des deux interfaces et ainsi de voir le couplage entre les deux interfaces. Dans l'élaboration du modèle, on obtient une équation prédisant le rapport des amplitudes entre les deux interfaces. Pour comparer les mesures expérimentales avec le modèle, nous avons utilisé l'équation 2.85 :

$$\frac{|\xi^+|}{|\xi^-|} = \frac{\left(\frac{\rho\alpha S}{k} - \sigma k^2 - \Lambda\right)}{\left(\frac{\rho\alpha S}{k} + \sigma k^2 - \Lambda\right)} e^{-kh} \quad (2.104)$$

Nous utilisons pour le taux de croissance  $S$  et le nombre d'onde  $k$  les mesures expérimentales. Pour le gradient de pression  $\Lambda$ , nous utilisons l'approximation faible  $h$ .

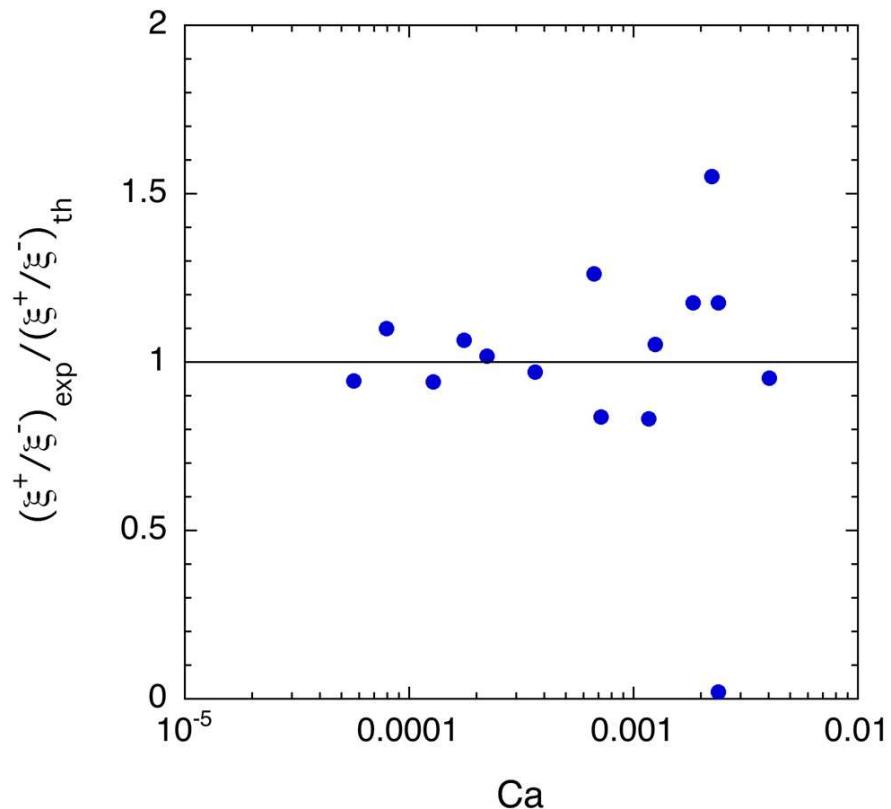


FIG. 2.17 – Comparaison du rapport d'amplitudes entre les interfaces.

Sur la figure 2.17 nous avons représenté le rapport  $|\xi^+|/|\xi^-|$  mesure expérimentale sur la prédiction théorique du rapport des amplitudes. De cette manière, une valeur de 1 indique une correspondance entre les expériences et les prédictions théoriques. On constate sur ce graphique que tous les points sont autour de la valeur 1 avec une dispersion augmentant avec la hauteur de fluide  $h$ . Notre analyse de stabilité linéaire faisant ressortir la valeur du rapport d'amplitude donne une bonne correspondance entre les valeurs théoriques prédites et les valeurs expérimentales mesurées.

## 2.7 Evolution des ponts liquides

### 2.7.1 Au-delà du régime linéaire

Les paragraphes précédents traitaient de l'instabilité en régime linéaire. Le développement à long terme des formes est non linéaire. Nous allons à présent nous intéresser à la déformation non linéaire de la bandelette ainsi que la formation des ponts liquides, minces arches reliant les amas liquides.

### 2.7.2 Courbure et amincissement

Soit une portion de bandelette liquide de position moyenne  $\xi(X, t)$ . L'épaisseur locale est donnée par  $h(X, t)$ . En un point  $X$  de la bandelette la vitesse de chute admet deux composantes : une composante normale  $V$  et une composante tangentielle  $U$ . La vitesse de chute de la bandelette est donnée par la dérivée temporelle de la position  $\dot{\xi}$ .

En effectuant un bilan vertical, autrement dit le long du mouvement de la bandelette, la vitesse de chute s'écrit :

$$V = \dot{\xi} \cos(\alpha) \approx \dot{\xi} \quad (2.105)$$

Avec  $\alpha$  l'angle entre la composante normale de la vitesse et la direction du mouvement. Dans l'hypothèse des faibles pentes, l'angle  $\alpha$  est petit. L'expression de la vitesse est celle déjà obtenue précédemment.

A présent nous allons faire un bilan le long de la bandelette. Premièrement un bilan de matière :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} (h U) = 0 \quad (2.106)$$

Avec  $s$  la coordonnée curviligne. Le second est un bilan de force le long de la bandelette :

$$\eta \frac{U}{e} = -\rho g e \sin(\alpha) \quad (2.107)$$

On néglige dans ce bilan les effets de la tension de surface. Nous utilisons comme hypothèse que la courbure des ponts liquides est constante. La courbure est donnée par la relation suivante :

$$\frac{1}{R} = \frac{\xi''}{(1 + \xi'^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (2.108)$$

Dans l'approximation faible pente, cette relation se simplifie :

$$\frac{1}{R} = \xi'' \quad (2.109)$$

Une courbure constante implique alors  $\xi'' = Cte$ . Nous formulons cette hypothèse *a posteriori* en détaillant les images. Nous remarquons que la forme des ponts liquides est très bien approximée par une parabole, c'est-à-dire une forme ayant une courbure constante. La figure 2.18 montre l'exemple de trois ponts liquides dont la forme épouse très bien des cercles.

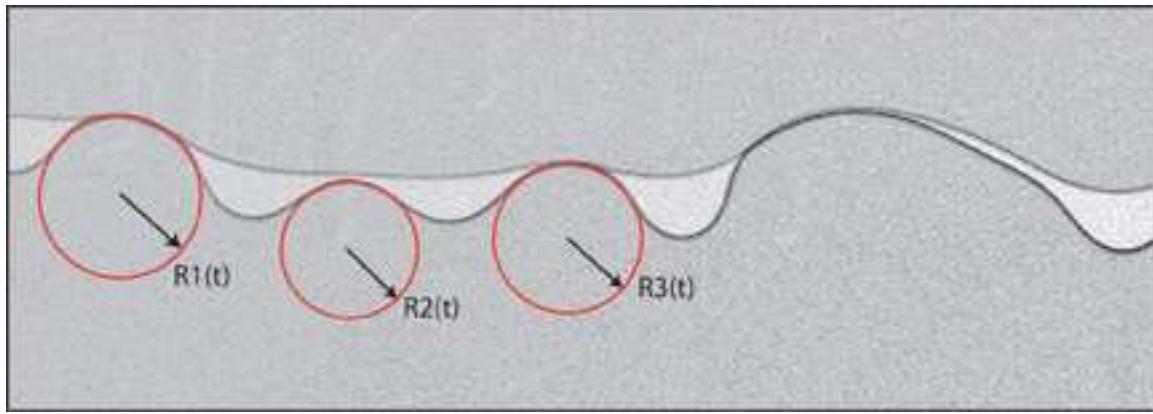


FIG. 2.18 – Exemple de ponts liquides avec les rayons de courbure associés.

On néglige également les effets d'étirement. La vitesse tangentielle  $U$  varie le long du pont liquide et génère une contrainte visqueuse longitudinale :

$$2\eta \frac{\partial U}{\partial s} \quad (2.110)$$

dont on ne tient pas compte en première approximation.

En utilisant l'approximation faible pente, il est possible d'obtenir une expression simplifiée pour l'élément infinitésimal  $ds$  :

$$ds = \sqrt{1 + \xi'^2} dX \approx dX \quad (2.111)$$

L'angle  $\alpha$  est défini comme étant l'angle entre la composante normale de la vitesse et la direction du mouvement. Il est également défini comme étant l'angle entre l'élément infinitésimal  $ds$  et  $dX$ . La figure 2.19 montre schématiquement les relations entre les éléments infinitésimaux. Nous pouvons relier l'angle  $\alpha$  comme suit :

$$\frac{d\xi}{dX} = \tan(\alpha) \approx \sin(\alpha) = \xi' \quad (2.112)$$

Nous pouvons réécrire nos bilans en utilisant les approximations précédentes :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial X} (h U) = 0 \quad (2.113)$$

et

$$U = -\frac{g e^2}{\nu} \xi' = -V_0 \xi' \quad (2.114)$$

Soit en remplaçant cette expression de la vitesse dans le bilan de matière :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial X} (V_0 \xi' h) \quad (2.115)$$

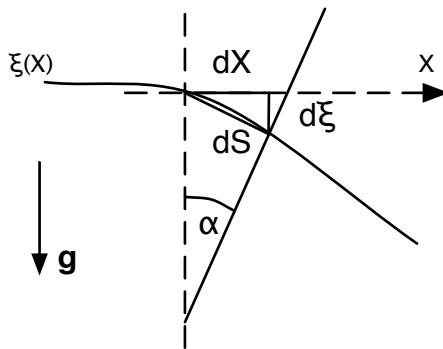


FIG. 2.19 – Schéma sur les relations entre les éléments infinitésimaux le long de la bandelette  $\xi$ .

Au début de ce chapitre nous avions montré comment s'exprimait la vitesse de chute en fonction de la taille de la bandelette. Nous rappelons ici l'équation bilan qui nous permet d'avoir l'expression de la vitesse :

$$\frac{\eta V h}{e} + \sigma Ca^{2/3} = \rho g \cos(\alpha) h e \quad (2.116)$$

Nous avions deux limites en posant  $Ca_0 = Ca(V_0/V)$ . La première dans le cas où  $Ca_0^{1/3}(h/e)$  est grand devant un. Dans cette limite la vitesse de chute  $V$  est égale à  $V_0$ . Il n'y a pas de couplage avec l'épaisseur.

Dans la limite où  $Ca_0 = Ca(V_0/V)$  est petit devant un il existe un couplage direct entre l'évolution de la forme et l'épaisseur de la bandelette. Dans cette limite, nous avons la relation suivante :

$$\left( \frac{\dot{\xi}}{V_0} \right)^{\frac{2}{3}} = Ca_0^{\frac{1}{3}} \frac{h}{e} \quad (2.117)$$

Nous allons utiliser les variables réduites suivantes :

$$\dot{\tilde{\xi}} = \frac{\dot{\xi}}{V_0} \quad (2.118)$$

$$\tilde{h} = \frac{h}{e} \quad (2.119)$$

$$\beta = Ca_0^{\frac{1}{3}} \quad (2.120)$$

$$\tilde{X} = \frac{X}{e} \quad (2.121)$$

$$\tau = t \frac{V_0}{e} \quad (2.122)$$

Avec ces nouvelles variables, on peut réécrire la relation 2.117 entre la vitesse de descente et l'épaisseur :

$$\left(\tilde{\xi}\right)^{\frac{2}{3}} = \beta h \quad (2.123)$$

De même, le bilan de matière s'écrit :

$$\frac{e}{V_0} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\tilde{h}}{e} \right) = \frac{1}{e} \frac{\partial}{\partial \tilde{X}} \left( \tilde{\xi}' \frac{h}{e} \right) \quad (2.124)$$

Soit

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tilde{X}} \left( \tilde{h} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{X}} \right) \quad (2.125)$$

en utilisant l'équation 2.123 dans l'équation 2.125, on aboutit à l'équation suivante pour  $\xi$  :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \dot{\xi} \right)^{\frac{2}{3}} = \frac{\partial}{\partial \tilde{X}} \left( \dot{\xi}^{\frac{2}{3}} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{X}} \right) \quad (2.126)$$

Cette équation admet comme solution la forme suivante :

$$\xi = C - b \frac{\tilde{X}^2}{\tau} \quad (2.127)$$

Pour calculer la valeur de la constante  $b$ , il nous faut remplacer ce type de solution dans l'équation différentielle. Tout d'abord, le membre de gauche :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{b \tilde{X}^2}{\tau^2} \right)^{\frac{2}{3}} = -\frac{4}{3} b^{\frac{2}{3}} \tilde{X}^{\frac{4}{3}} \tau^{-\frac{7}{3}} \quad (2.128)$$

Puis, le membre de droite :

$$\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{X}} = -2 b \frac{\tilde{X}}{\tau} \quad (2.129)$$

avec

$$\dot{\xi}^{\frac{2}{3}} = b^{\frac{2}{3}} \frac{\tilde{X}^{\frac{4}{3}}}{\tau^{\frac{4}{3}}} \quad (2.130)$$

Ce qui nous donne :

$$\dot{\xi}^{\frac{2}{3}} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{X}} = -2 b^{\frac{5}{3}} \tilde{X}^{\frac{7}{3}} \tau^{-\frac{7}{3}} \quad (2.131)$$

Soit pour le membre de droite :

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{X}} \left( \dot{\xi}^{\frac{2}{3}} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{X}} \right) = -\frac{14}{3} b^{\frac{5}{3}} \tilde{X}^{\frac{4}{3}} \tau^{-\frac{7}{3}} \quad (2.132)$$

Or les équations 2.128 et 2.132 sont égales. Ce qui nous donne comme condition pour la constante  $b$  :  $b = 2/7$ . Soit alors pour la variable  $\tilde{\xi}$  :

$$\tilde{\xi} = C - \frac{2}{7} \frac{\tilde{X}^2}{\tau} \quad (2.133)$$

Avec l'évolution de la forme de la bandelette, il nous est désormais possible de prévoir l'évolution de l'épaisseur  $h$ . Reprenons l'équation 2.115 :

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \tilde{X}} \left( \tilde{h} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{X}} \right) = 0 \quad (2.134)$$

Soit en utilisant l'expression de  $\tilde{\xi}$  trouvée précédemment :

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \tilde{X}} \left( \tilde{h} \frac{4}{7} \frac{\tilde{X}}{\tau} \right) = 0 \quad (2.135)$$

En développant le second terme de l'équation :

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tau} + \frac{4}{7} \frac{\tilde{X}}{\tau} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tilde{X}} + \frac{4}{7} \frac{\tilde{h}}{\tau} \quad (2.136)$$

Soit en simplifiant par  $4/7 \tau$  et en faisant ressortir les dérivées logarithmiques :

$$\frac{\frac{4}{7} \partial \tilde{h}}{\partial \ln \tau} + \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \ln \tilde{X}} + \tilde{h} = 0 \quad (2.137)$$

On pose à présent  $T = \ln \tau^{4/7}$  :

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial T} + \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \ln \tilde{X}} + \tilde{h} = 0 \quad (2.138)$$

On effectue le changement de variable suivant :

$$\tilde{h} = H e^{-T} \quad (2.139)$$

Les dérivées partielles deviennent alors :

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial T} = \frac{\partial H}{\partial T} e^{-T} - \tilde{h} e^{-T} \quad (2.140)$$

Et :

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \ln \tilde{X}} = \frac{\partial H}{\partial \ln \tilde{X}} e^{-T} \quad (2.141)$$

Ce qui nous ramène l'équation différentielle à :

$$\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial H}{\partial \ln \tilde{X}} = 0 \quad (2.142)$$

Cette équation admet des solutions sous la forme :

$$H = F(\ln \tilde{X} - T) \quad (2.143)$$

La condition initiale de notre modèle est la suivante :

$$h(\tau = 1) = h_0 \quad (2.144)$$

Avec  $h(\tau = 1)$  indépendant de  $X$ . La valeur  $\tau = 1$  marque la transition entre le régime en chute libre pour des temps inférieurs à un et le régime stationnaire au-delà, voire [appendice C](#) pour la discussion sur la transition.

Or  $T = \ln \tau^{4/7}$ . Par conséquent,  $T(\tau = 1) = 0$ . La solution pour  $H$  s'écrit :

$$H = F(\ln \tilde{X}) = \tilde{h} e^T \quad (2.145)$$

En particulier pour  $\tau = 1$  :

$$H = \frac{h_0}{e} = Cte \quad (2.146)$$

Car indépendant de  $X$ . Finalement :

$$\tilde{h} = \frac{h}{e} = \frac{h_0}{e} e^{-T} \quad (2.147)$$

Soit en utilisant la définition de  $T = \ln \tau^{4/7}$  :

$$h = h_0 e^{-\frac{4}{7} \ln \tau} = h_0 e^{-\frac{4}{7}(\ln t + \ln \frac{V_0}{e})} = h_0 e^{-\ln \frac{V_0}{e} \frac{4}{7}} e^{-\ln t \frac{4}{7}} \quad (2.148)$$

Soit :

$$h = h_0 \left( \frac{V_0}{e} \right)^{-\frac{4}{7}} t^{-\frac{4}{7}} \quad (2.149)$$

### 2.7.3 Limite du modèle

Le modèle que nous venons de détailler présente de sévères hypothèses. En effet, nous ne prenons pas en compte les effets visqueux. Nous négligeons également les effets de courbures du pont liquide dans l'expression de la pression.

Nous négligeons également les effets de vitesses de chute différentes le long du pont liquide. En effet, lorsque la bandelette s'amincit pour former un pont liquide, la vitesse de chute varie le long du pont, plus faible au centre, là où l'épaisseur est la plus mince et plus élevée aux extrémités. Cette variation de vitesse entraîne une variation du rayon de courbure d'avancée local le long du pont liquide. La pression au sein du fluide varie donc et un gradient de pression longitudinal s'établit au sein de la bandelette.

Enfin un gradient de pression hydrostatique s'établit entre le haut du pont liquide et les amas liquides aux extrémités du pont.

### 2.7.4 Évolution de l'épaisseur et du rayon de courbure

Nous venons de montrer que le profil de la bandelette  $\xi$  suivait la loi suivante au cours de la formation d'un pont liquide :

$$\xi = C - \frac{2}{7eV_0} \frac{X^2}{t} \quad (2.150)$$

Autrement dit à un instant  $t$  donné, la forme du pont liquide est caractérisée par une parabole. Cette parabole peut être approximée dans une région proche du maximum par un cercle de rayon  $R$ . La figure 2.18 montre un exemple de bandelettes ayant formé des ponts liquides. Pour trois de ces ponts, nous avons dessiné un cercle épousant très bien la forme du pont.

La figure 2.20 montre l'évolution temporelle des rayons de courbure. Les rayons sont adimensionnés par le rayon de courbure minimum. Le temps est adimensionné par le taux de croissance  $S$ . L'origine des temps correspond au moment où la bandelette commence à chuter.

On remarque que pour les premiers instants, les rayons de courbure diminuent. En effet, la bandelette est initialement lisse, par conséquent le rayon de courbure de l'interface est infini. On peut représenter la bandelette à l'aide de l'expression suivante :

$$y = \xi \sin(kx) \quad (2.151)$$

où  $y$  représente la position de l'interface. La dérivée seconde de la position s'écrit :

$$y'' = \xi k^2 \sin(kx) \quad (2.152)$$

Or, en première approximation linéaire, la dérivée seconde de la position est égale à la courbure, autrement dit l'inverse du rayon de courbure. Par conséquent on obtient la relation suivante :

$$R(t)^{-1} = k^2 \xi(t) \quad (2.153)$$

L'évolution du rayon de courbure est directement proportionnelle à l'évolution de l'interface. Pour les trois rayons de courbure que nous suivons, nous remarquons une décroissance exponentielle avec la même pente. La mesure de cette pente nous renseigne sur le taux de croissance de l'instabilité. Les trois décroissances sont comparées avec une évolution exponentielle décroissante représentée par une droite en trait plein.

Dans les unités temporelles adimensionnées par le taux de croissance, on remarque que le rayon de courbure minimum est atteint pour  $St \approx 2.5$ . Le temps d'instabilité définit ainsi la transition entre simple développement linéaire de l'instabilité et formation des ponts liquides avant rupture.

Pour deux rayons de courbure, on observe une augmentation du rayon au cours du temps. Cette remontée correspond à la formation et au développement du pont liquide. Le modèle sur l'évolution de ces formes nous indique que l'arche du pont suit une forme quadratique. Nous avons montré que la forme du pont était bien décrite par une parabole.

Notre modèle prévoit également une augmentation au cours du temps de l'ouverture de la parabole. Nous observons là encore de manière qualitative un élargissement de forme parabolique au cours du temps.

Les derniers points sont mesurés juste avant la brisure. Le développement des ponts liquides s'effectue entre le moment où le rayon de courbure est minimal et le moment de sa rupture. Cette phase est bien plus rapide d'environ 4 à 5 fois l'évolution linéaire de l'instabilité. La stabilité linéaire décrit donc la quasi intégralité de l'instabilité.

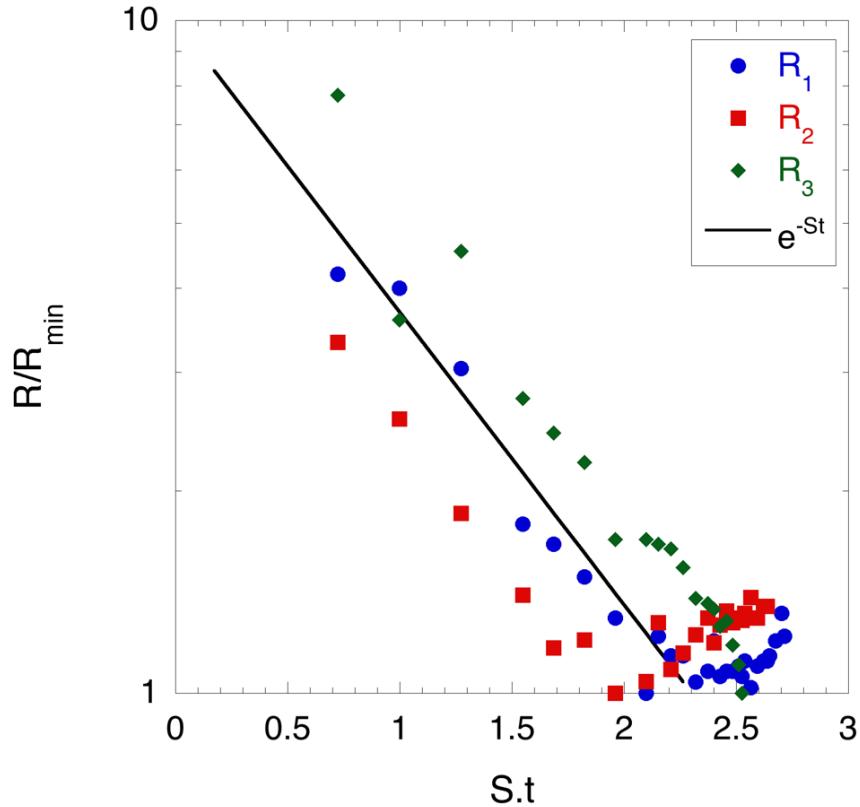


FIG. 2.20 – Evolution des rayons de courbure en fonction du temps.

Nous avons également mesuré l'évolution temporelle de l'épaisseur aux endroits les plus minces des ponts liquides. La figure 2.21 représente l'évolution temporelle de trois épaisseurs de ponts liquides. L'épaisseur  $h$  est adimensionnée par l'épaisseur initiale  $h_0$  de la bandelette. Le temps est adimensionné par le temps de l'instabilité  $S$ . L'origine des temps correspond au moment où la bandelette commence à chuter. Nous venons de voir que la phase linéaire s'étend jusqu'à des temps égaux à  $St = 2$ . Au-delà, nous assistons à la formation de ponts liquides. Or, il se trouve que la phase décrite par notre modèle dure cinq fois moins que la phase linéaire. Cet amincissement du pont liquide ne s'effectue que pour les points expérimentaux se trouvant après  $St = 2$ . A cet instant-là, l'épaisseur locale de la bandelette a déjà diminué et se trouve proche du minimum observable. Les épaisseurs mesurées deviennent très fines et se comptent en quelques pixels. Le manque de

définition et la très faible durée de l'amincissement rendent impossible la confirmation de notre prédition théorique.

Nous pouvons cependant caractériser la décroissance pendant la phase linéaire de l'instabilité. En effet, on connaît l'évolution des deux interfaces. On peut définir une épaisseur comme étant la soustraction de l'épaisseur initiale avec l'épaisseur de la bandelette corru-guée :

$$\delta h = h_0 - (\xi^+ - \xi^-) \quad (2.154)$$

en explicitant les expressions de chacune des interfaces :

$$\delta h = h_0 - (|\xi^+| e^{St} - |\xi^-| e^{St}) = h_0 - (|\xi^+| - |\xi^-|) e^{St} \quad (2.155)$$

On s'attend à trouver une annulation en temps fini de l'épaisseur. La figure 2.21 montre l'évolution de l'épaisseur  $h$  mesurée à l'endroit le plus fin d'un pont liquide. Cette épaisseur  $h$  est égale au terme  $\delta h$  donné précédemment. Cette épaisseur est rapportée à l'épaisseur initiale  $h_0$  et les temps sont adimensionnés par le temps caractéristique de l'instabilité. L'évolution de l'épaisseur  $h$  dans ces unités est donnée par :

$$\frac{h}{h_0} = \frac{\delta h}{h_0} = 1 - \frac{(|\xi^+| - |\xi^-|)}{h_0} e^{St} \quad (2.156)$$

On appelle  $\epsilon$  le terme devant l'exponentielle :

$$\epsilon = \frac{(|\xi^+| - |\xi^-|)}{h_0} \quad (2.157)$$

Ce terme relie l'amplitude initiale des perturbations avec l'épaisseur initiale de la bandelette. La figure 2.21 montre l'évolution de l'épaisseur pour trois ponts liquides. Les mesures sont bien représentées par la fonction donnée dans l'équation 2.156 et nous confirme l'annulation en temps fini de l'épaisseur. Le terme  $\epsilon$  est égal dans notre cas à 0.075.

## 2.8 Formation des gouttes

La formation des gouttes intervient au dernier stade de l'instabilité. Après avoir formé des amas liquides de plus en plus gros reliés par des ponts liquides, les futures proto-gouttes vont se détacher les unes des autres lorsque les minces filaments de liquide vont rompre.

L'épaisseur  $h$  de la bandelette de fluide joue un rôle très important dans le développement de l'instabilité. En effet, c'est cette hauteur qui détermine localement la vitesse de chute et par conséquent va déterminer localement les rayons de courbure d'avancée et de reculée. Cette hauteur locale fixe donc le gradient de pression au sein du fluide et pilote ainsi la sélection de mode et le taux de croissance de l'instabilité.

Nous nous sommes donc intéressés à la distribution des tailles de gouttes en fonction de cette hauteur locale  $h$ . Nous avons défini un paramètre de contrôle  $\gamma$  relatif à la rugosité initiale de la bandelette, c'est-à-dire la variation initiale de la hauteur  $h$  de fluide. La

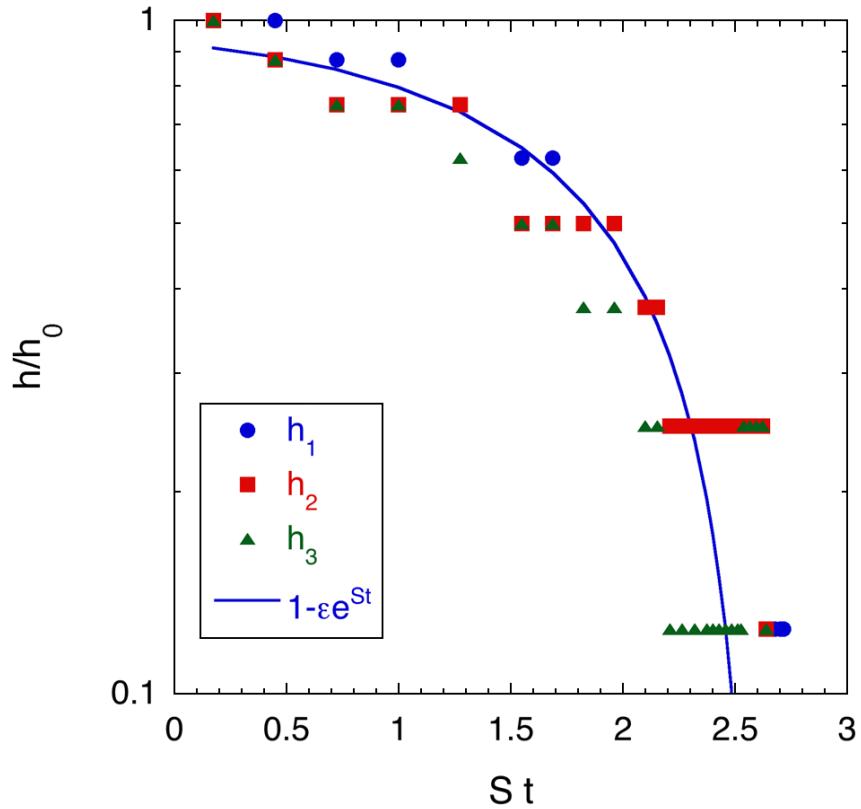


FIG. 2.21 – Évolution des rayons de courbure en fonction du temps. La courbe en trait plein représente la fonction  $1 - \epsilon e^{St}$ . Dans ce cas  $\epsilon$  vaut 0.075 et représente  $(|\xi^+| - |\xi^-|)/h_0$ .

rugosité est définie de la même manière que dans l'étude de la fragmentation des ligaments par Marmottant et Villermaux [42] et Villermaux & *al.* [74]. Il est défini comme suit :

$$\gamma = \frac{\langle h^2 \rangle}{\langle h \rangle^2} \quad (2.158)$$

où  $\langle h \rangle = \int h(x)dx$  représente l'épaisseur moyenne de la bandelette. Une valeur de 1 pour  $\gamma$  indique une bandelette parfaitement lisse, tandis qu'une valeur supérieure à 1 indique un état corrugé.

La photo 2.23 montre un exemple de bandelette avec un paramètre de corrugation  $\gamma$  supérieur à 1. Ce paramètre est important, car il nous renseigne indirectement sur la distribution locale des hauteurs de fluide au sein de la bandelette. Cette hauteur locale  $h$  pilote la vitesse de descente et donc le gradient de pression au sein du fluide. Des différences de hauteur engendrent par conséquent des différences de gradient de pression. Ces différences de gradient engendrent alors des mouvements longitudinaux au sein de la bandelette modifiant ainsi la répartition des hauteurs.

Nous avons représenté sur la figure 2.22 l'évolution temporelle du paramètre de corrugation  $\gamma(t)$ . Le temps est adimensionné par le taux de croissance de l'instabilité  $S$ . On

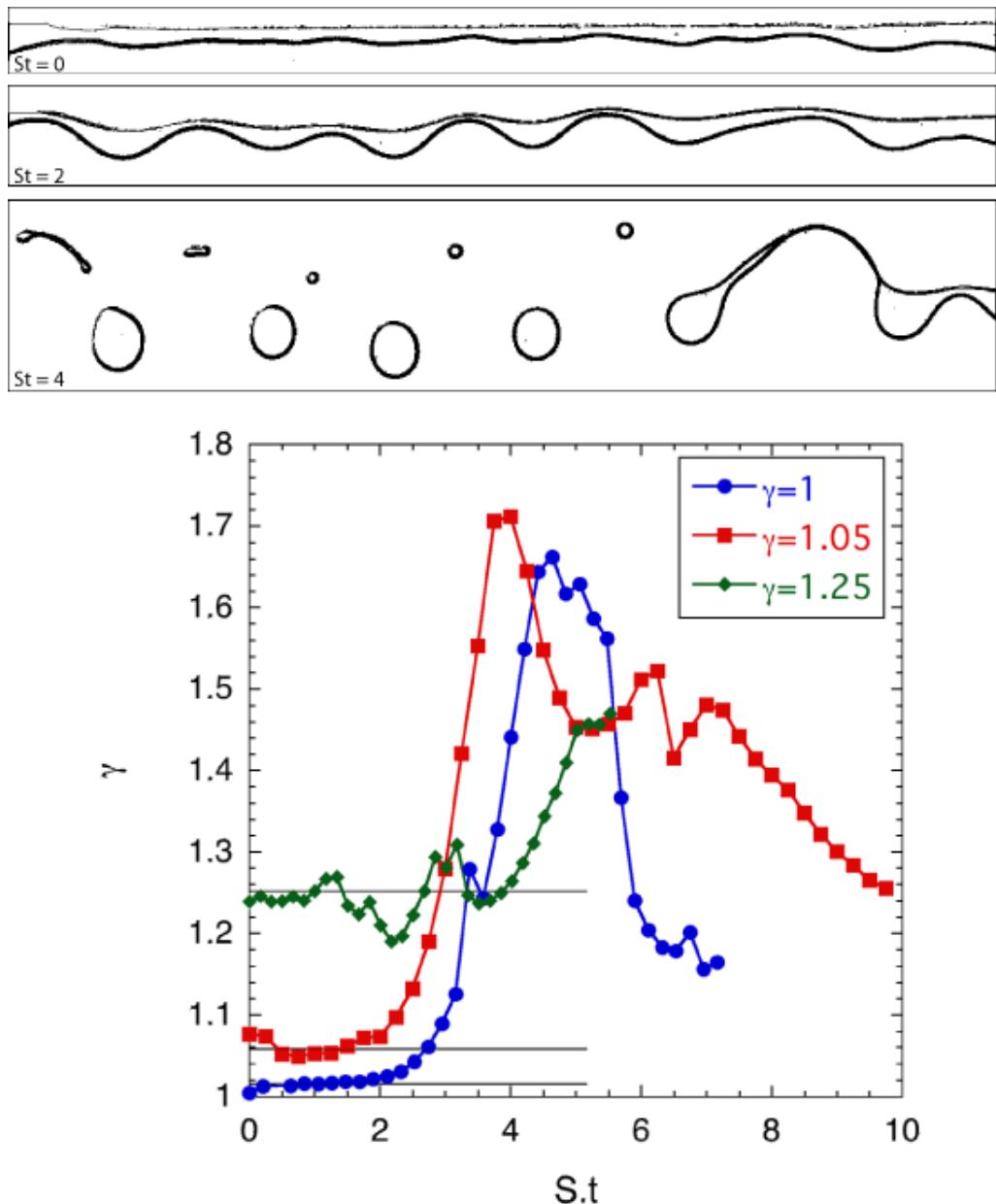


FIG. 2.22 – Évolution du paramètre de corrugation au cours du temps pour trois conditions initiales différentes. Les photos montrent la forme de la bandelette pour trois instants différents et pour une corrugation initiale  $\gamma$  égale à 1.05.

remarque que les trois évolutions sont constantes pour des temps inférieurs à deux fois  $S.t$ . Au-delà de ce temps on constate une brusque augmentation de la corrugation pour atteindre un maximum entre quatre et cinq fois  $S.t$ . Après ce temps, on observe une diminution du paramètre de corrugation.

Pendant la phase linéaire de l'instabilité, le paramètre de corrugation évolue très peu.



FIG. 2.23 – Exemple de bandelette présentant un paramètre de corrugation  $\gamma$  supérieur à 1.

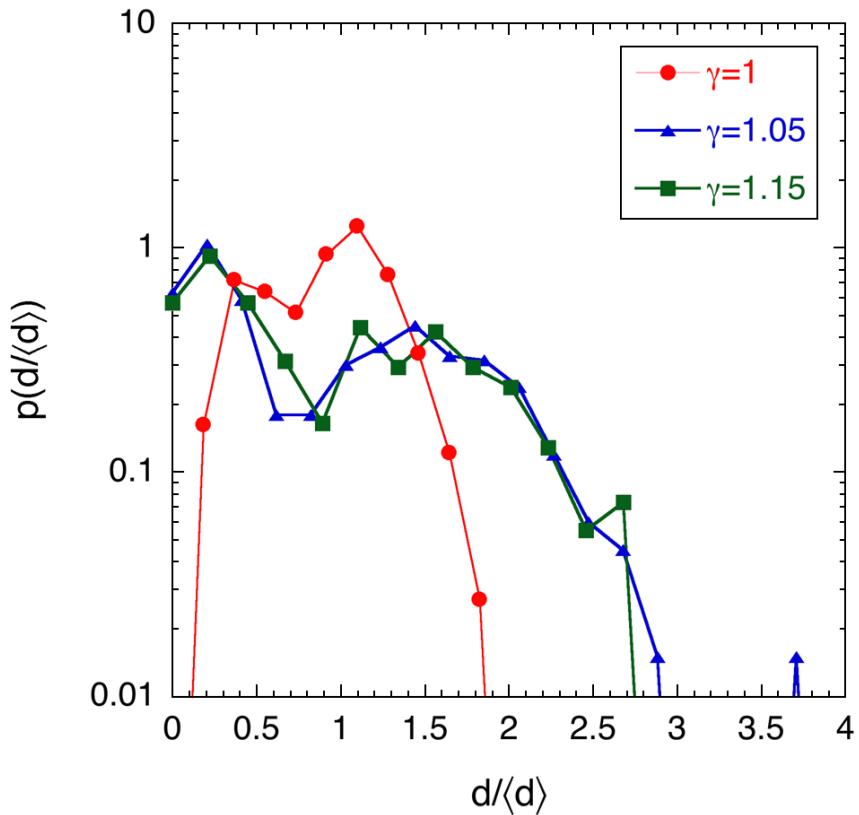


FIG. 2.24 – Distributions des tailles de gouttes en fonction de la rugosité initiale  $\gamma$ .

Marmottant et Villermaux [42] ont montré que le paramètre de corrugation d'un ligament liquide était constant durant la phase de réarrangement. Le paramètre de corrugation augmente lorsque le régime linéaire devient insuffisant pour décrire le système. Une fois que la formation des ponts liquides s'initie, le paramètre de corrugation  $\gamma$  augmente très fortement. Nous avons montré précédemment que ce temps se situe pour 2.5 fois  $St$ . Nous retrouvons ce moment de transition entre instabilité linéaire et formation de ponts liquides avec l'évolution de la corrugation. Les images situées sur la figure 2.22 montre cette transition. La première image correspond à  $St = 0$  et montre la forme initiale de la bandelette. La seconde image correspond à  $St = 2$  et montre une bandelette déformée et on remarque

la formation de ponts liquides au centre de l'image.

Le pic de corrugation intervient entre quatre et cinq fois  $St$ . Il correspond au moment où la bandelette est complètement fragmentée. Nous avons vu précédemment que la fragmentation débutait pour trois  $St$ . La troisième photo sur la figure 2.22 montre cette transition avec un seul pont liquide encore présent et deux gouttes satellites reliées entre elles par un filament liquide.

La relaxation de la corrugation après ce pic est une mesure indirecte des effets de tension de surface faisant évoluer les fragments vers une forme de disque pour minimiser les contraintes.

Sur la figure 2.24, nous avons représenté la distribution des tailles de gouttes pour trois rugosités distinctes. On représente ces distributions en diamètre adimensionné par le diamètre moyen des fragments :  $d/\langle d \rangle$ .

Le cas lisse est représenté par une ligne en trait plein avec des symboles  $\bullet$ . La distribution des tailles présente deux pics étroits autour de  $d = \langle d \rangle$ . Sans rugosité initiale, les gouttes obtenues après brisure de la bandelette initiale sont distribuées de façon monodisperse. La présence des deux pics indique qu'il y a deux tailles caractéristiques. Le premier pic, pour des tailles inférieures à la taille moyenne, correspond aux gouttes formées par les ponts liquides. Le second pic correspond aux amas liquides présents lors de l'instabilité.

Les cas corrugés sont représentés par des lignes en pointillés. On remarque que pour deux paramètres de corrugation bien distincts, les distributions sont parfaitement superposées. On note toujours la présence de deux pics, mais cette fois les distributions sont bien plus larges que dans le cas lisse. La présence de corrugation initiale génère différentes tailles de gouttes lors de la brisure. On remarque aussi que les sommets de chaque pic sont décalés par rapport au cas lisse. Le pic correspondant aux grosses gouttes voit son maximum décalé vers les plus grosses tailles, tandis que le pic relatif aux petits fragments a son maximum décalé vers les petites tailles.

Le fait que les distributions relatives aux cas corrugés se superposent indique que le temps d'évolution de l'instabilité est beaucoup plus long que le temps de réarrangement des perturbations par la tension de surface.

## 2.9 Conclusion

Nous venons d'exposer une expérience pour étudier l'influence d'une couche mince dans les instabilités. La nouveauté de notre montage est de pouvoir suivre très précisément au cours du temps les deux interfaces et de suivre leurs interactions.

Nous avons présenté une étude de stabilité linéaire qui montre l'influence de la taille finie sur la sélection de mode et la vitesse d'évolution de l'instabilité. La relation de dispersion présente un plateau autour du taux de croissance maximal, empêchant ainsi toute prédiction sur le mode sélectionné par l'instabilité. Cependant nous avons un parfait accord entre les taux de croissance théoriques et les taux de croissance observés.

Nous avons également mis en évidence l'influence des modulations d'épaisseur sur la taille des gouttes après brisure de la bandelette initiale.



# Chapitre 3

## Bag-breakup et pluie

### 3.1 Introduction

Le chapitre précédent détaille une instabilité bidimensionnelle qui fait intervenir un couplage entre les interfaces. On retrouve ce même type de mécanisme en trois dimensions dans le cas du *bag-breakup*, aussi appelé gonflement de sac. Ce type d'instabilité se produit dans deux situations bien distinctes. La première correspond au cas d'une goutte liquide percutée par une onde de choc. On observe une déformation de la goutte produisant la formation et le gonflement d'un sac, puis l'atomisation proprement dite. Le second cas se produit lorsqu'une goutte liquide est plongée dans un courant gazeux de manière progressive. On observe là aussi le même phénomène.

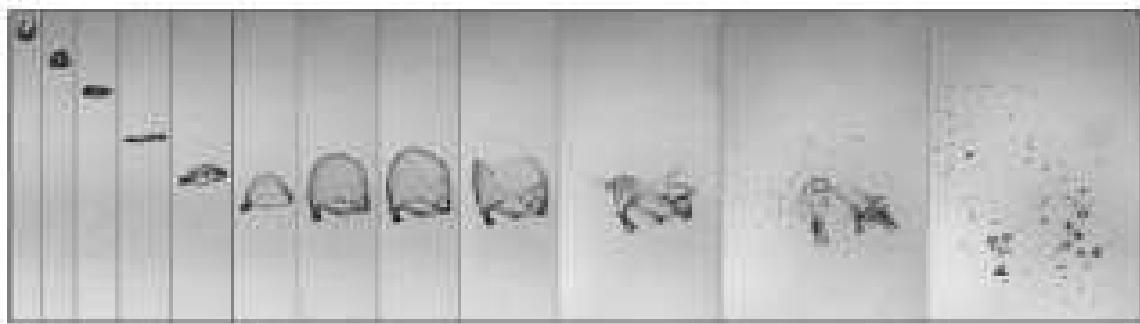


FIG. 3.1 – Phénomène du *bag-breakup* : évolution de la déformation, gonflement du sac, puis atomisation d'une goutte liquide dans un jet gazeux.

Le *bag-breakup* se caractérise qualitativement par la déformation d'une goutte liquide vers une forme de crêpe sous l'action d'un courant gazeux. Ce phénomène est illustré avec la série d'images sur la figure 3.1. Au centre de la crêpe, la couche liquide devient de plus en plus mince jusqu'à atteindre une taille critique, pour laquelle le centre de la crêpe est entraîné par la phase gazeuse et forme un sac en étirant une nappe liquide. L'essentiel du liquide se trouve alors dans un bourrelet liquide. La rupture du sac, c'est-à-dire la rupture

du film liquide, entraîne lors de la récession de la nappe liquide et la rupture du bourrelet : c'est l'atomisation.

Hanson, Domich et Adams [28] étudient en 1963 ce phénomène dans un tube à choc. Avec une astucieuse méthode pour produire et contrôler des gouttes, ils ont pu produire de très bonnes photographies de l'instabilité. On observe bien un tore liquide avec un sac, fine couche liquide gonflée par le violent jet gazeux. Les auteurs ont analysé l'influence des différents paramètres physiques tels que la tension de surface, la densité ou la viscosité sur la formation du sac et l'atomisation. Ils observent que la vitesse critique pour avoir une formation et un gonflement de sac augmente avec la viscosité et diminue avec le diamètre initial des gouttes. De même, la densité et la tension de surface modifient les valeurs des vitesses critiques.

Plus récemment, Chou, Hsiang et Faeth [17] ont repris en 1997 la même expérience et ont observé les différents régimes de l'instabilité, c'est-à-dire la déformation, la brisure, puis l'atomisation pour différents liquides. Avec un modèle simple, ils montrent les effets des différents paramètres physiques et donnent une première explication sur le phénomène. Chou et Faeth [16] poursuivent leur travaux et étudient la déformation de la goutte tout en donnant une explication théorique sur son évolution. Ils commencent également à mesurer la statistique des fragments ainsi obtenue. Dai et Faeth [20] observent en détail la forme de la goutte au cours de sa déformation, leurs résultats sont dans la continuité des précédents travaux.

Ces différentes études ont toutes pour point commun la déformation d'une goutte dans un tube à choc. Or, nous avons dit en préambule qu'il existait une autre méthode pour obtenir le même phénomène. Lorsqu'une goutte arrive dans un jet gazeux de manière progressive, on observe également la formation d'un sac. On observe typiquement ce cas dans la pluie. Une goutte de pluie créée au sein d'un nuage voit sa vitesse relative augmenter au cours de sa chute. Il peut alors arriver que la vitesse critique de déformation soit atteinte et on observe ainsi la formation d'un sac.

Le premier à avoir observé et rapporté la polydispersité des tailles des gouttes de pluie est Bentley [8] en 1904. Il mesure très astucieusement la taille des gouttes pour plusieurs intensités de pluie. Il remarque que la taille des fragments dépend de l'intensité de l'averse. Pour une pluie proche du crachin, les gouttes sont petites avec une faible dispersion. Au contraire, lors d'un orage, la taille des gouttes est plus grosse avec une plus forte dispersion. En 1904, Lénard [37] étudie la forme et la vitesse terminale des gouttes de pluie. Il utilise un dispositif expérimental proche du nôtre pour montrer les effets du vent relatif sur la taille des gouttes. Marshall et Palmer [44] retrouvent expérimentalement en 1948 ces observations et donnent une première distribution des tailles. Ils remarquent une décroissance exponentielle de la distribution en fonction du diamètre. Ils montrent également que les distributions deviennent de plus en plus larges en fonction de l'intensité de la pluie. Plus récemment Srivastava [58] présente en 1971 un modèle de fragmentation et de coalescence pour expliquer la distribution des tailles des gouttes de pluie. Il montre en particulier que les distributions des tailles pour différents rayons initiaux  $r_0$  se superposent lorsque l'on trace ces mêmes distributions dans les unités adimensionnées  $r/r_0$ .

## 3.2 Méthodes d'investigation

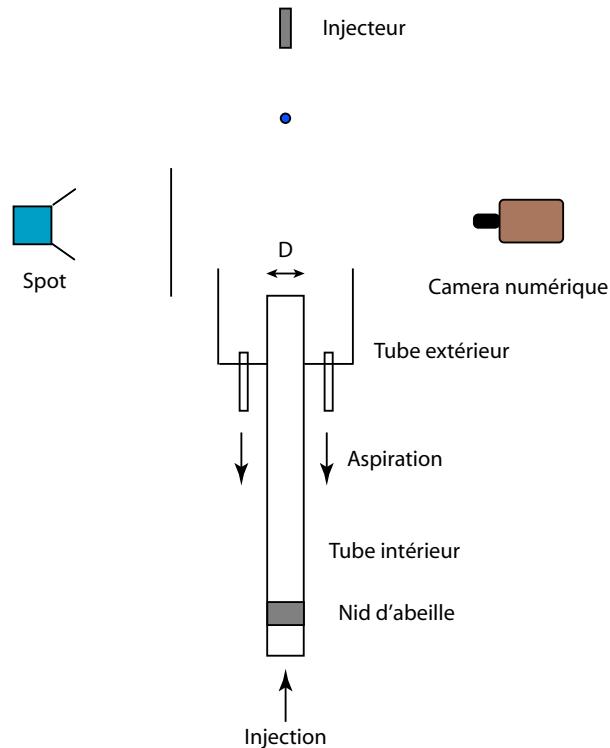


FIG. 3.2 – Schéma de principe pour l'étude du *bag break-up*. Le tube intérieur a une longueur d'un mètre et un diamètre  $D$  de 10 cm.

La figure 3.2 nous montre le montage expérimental de l'étude du *bag break-up* sur des gouttes en chute libre. Il est constitué de deux tubes coaxiaux verticaux. Le tube intérieur a un diamètre de 9 cm et une longueur de 1 m. Cette longueur est suffisante pour laminariser l'écoulement dans le tube. Une arrivée d'air sous pression (environ 6 bar) est placée au bas du montage et sert de point d'injection du gaz. Un nid d'abeille est placé près de l'arrivée d'air pour casser la turbulence et commencer à laminariser l'écoulement. Le tube extérieur d'une hauteur de 15 cm et de 20 cm de diamètre est placé au niveau de la sortie du tube intérieur. Le tube extérieur est relié à un système d'aspiration qui permet de modifier l'écoulement en sortie de tube. La position relative du tube extérieur par rapport au tube intérieur peut être modifiée.

Les gouttes sont créées par la méthode de la goutte pendante à l'aide d'un injecteur placé au-dessus des tubes. Différents injecteurs sont utilisés pour produire plusieurs diamètres de goutte.

Une caméra rapide Phantom V5 est utilisée pour enregistrer l'éclatement des gouttes d'eau. Le phénomène est éclairé grâce à un spot à lumière continue, à travers un écran diffuseur.

Pour produire de très grosses gouttes, nous utilisons une enveloppe de baudruche que l'on remplit d'eau. Nous formons alors des petits sacs liquides en prenant bien soin de tendre le plus possible la baudruche. En perçant à l'aide d'une aiguille la fine membrane, cette dernière se rétracte extrêmement rapidement ne modifiant pas la masse liquide, qui chute alors sous son propre poids. La rupture de la baudruche s'effectue en moins d'un millième de seconde.

### 3.3 Impacts gazeux

#### 3.3.1 Nombre caractéristique

Lorsqu'une goutte rencontre un courant gazeux, deux forces sont en compétition. La pression de l'air exercée au point de stagnation, ainsi que la dépression liée à la vitesse de l'air sur les côtés, entraînent une force de déformation  $\rho_a (\Delta V)^2$ , tendant à aplatis la goutte sous forme de crêpe perpendiculairement à l'écoulement. D'autre part, les forces de tension de surface,  $\sigma/d_0$ , tendent, elles, à ramener la goutte sous forme sphérique.

Le rapport de ces deux forces nous donne le nombre de Weber :

$$We = \frac{\rho_a (\Delta V)^2 d_0}{\sigma} \quad (3.1)$$

avec  $\rho_a$  la masse volumique de l'air et  $(\Delta V)^2$  la vitesse relative de la goutte dans le jet d'air ascendant. Cette vitesse s'écrit dans le référentiel du laboratoire :

$$\Delta V = V_{\text{chute}} + V_{\text{air}} \quad (3.2)$$

Lorsque le nombre de Weber devient plus grand que 1, les effets capillaires ne sont plus assez importants pour maintenir une forme sphérique. L'aspect de la goutte se modifie pour prendre la forme d'une crêpe et va ensuite se casser via le mécanisme du *bag-breakup*.

#### 3.3.2 Chronologie

La série d'images sur la figure 3.3 montre l'évolution d'une goutte liquide dans un jet d'air ascendant au cours du temps. Sur les premières images, on voit la goutte descendre à une vitesse constante et garder une forme ovoïde. A partir de l'image 5, la goutte commence à se déformer, le nombre de Weber est devenu plus grand que 1, les forces de tension de surface n'arrivent plus à compenser la déformation de la goutte. On observe alors l'évolution vers une forme de crêpe, puis les prémices du sac qui va ensuite se gonfler. Ce sac se déchire et la récession de la nappe liquide fragmente le bourrelet.

La série d'images sur la figure 3.4 donne une vue plus détaillée sur la formation, le gonflement et la rupture du sac. On remarque sur ces séries différentes une atomisation riche en fragments.



FIG. 3.3 – Déformation et atomisation d'une goutte liquide dans un jet d'air ascendant. Le temps va de gauche à droite et de haut en bas. Le temps entre chaque image est de  $1/100$  s. La sortie du tube est visible au bas de chaque image.

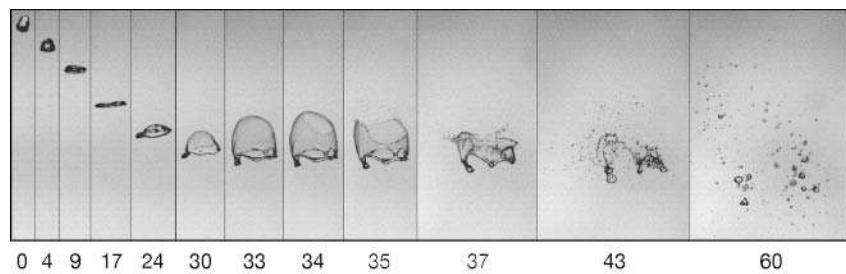


FIG. 3.4 – Détail du phénomène du *bag-breakup*. Le temps exprimé en milliseconde est indiqué au dessous de chaque image.

## 3.4 Vitesse en sortie de tube

Nous avons mesuré la vitesse du gaz à l'aide d'un tube de Pitot. Un rappel sur le fonctionnement du tube de Pitot est donné dans l'annexe [D](#).

### 3.4.1 Vitesse sans aspiration

Nous avons vérifié tout d'abord le profil de vitesse radiale en sortie du tube sans aspiration. On retrouve ces profils sur la figure [3.5](#). Le centre du tube est pris comme origine et nous avons tracé la vitesse du gaz pour deux positions, la première en sortie du tube et la seconde plus en amont dans le jet. La position radiale  $r$  est adimensionnée par le diamètre nominal du tube  $D$ . Les vitesses sont adimensionnées par la vitesse moyenne du gaz au niveau de la sortie du tube. Cette vitesse moyenne est appelée  $\langle V_0 \rangle$ . On observe un profil de type Poiseuille qui s'aplatit à mesure que l'on s'éloigne de la sortie du tube.

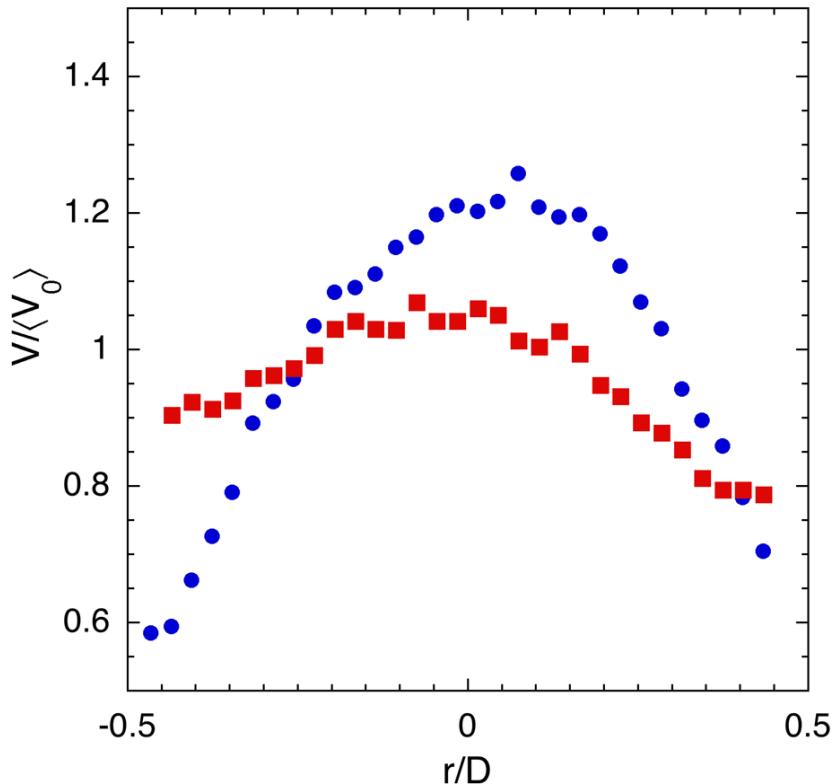


FIG. 3.5 – Profil de vitesse radiale pour deux altitudes : les points ● correspondent aux mesures effectuées au niveau de la sortie du tube. Les symboles ■ correspondent à des mesures prises plus en amont dans le jet.  $\langle V_0 \rangle = 2.03 \text{ m.s}^{-1}$  et  $D = 10 \text{ cm}$ .

Nous avons ensuite caractérisé le profil de vitesse axiale. La figure [3.6](#) montre la vitesse du gaz en fonction de la position sur l'axe. La référence des altitudes est prise au niveau de

la sortie du tube. L'altitude  $Z$  est adimensionnée par le diamètre du tube  $D$  et la vitesse  $V$  est adimensionnée par la vitesse moyenne en sortie  $\langle V_0 \rangle$ . On constate, sur le graphe, l'existence de deux zones bien distinctes. La première est située dans le tube. La vitesse est plus élevée qu'en sortie et décroît rapidement. La deuxième zone se situe en dehors du tube. Sur une hauteur d'environ un diamètre, la vitesse est constante, au-delà elle tend à augmenter légèrement. Cette constance montre que proche du tube, on se trouve dans le cône potentiel du jet. La légère augmentation de vitesse, lorsque l'on s'éloigne de la sortie du tube, provient de la mesure d'un flux turbulent à l'aide d'un tube de Pitot (cf. annexe D)

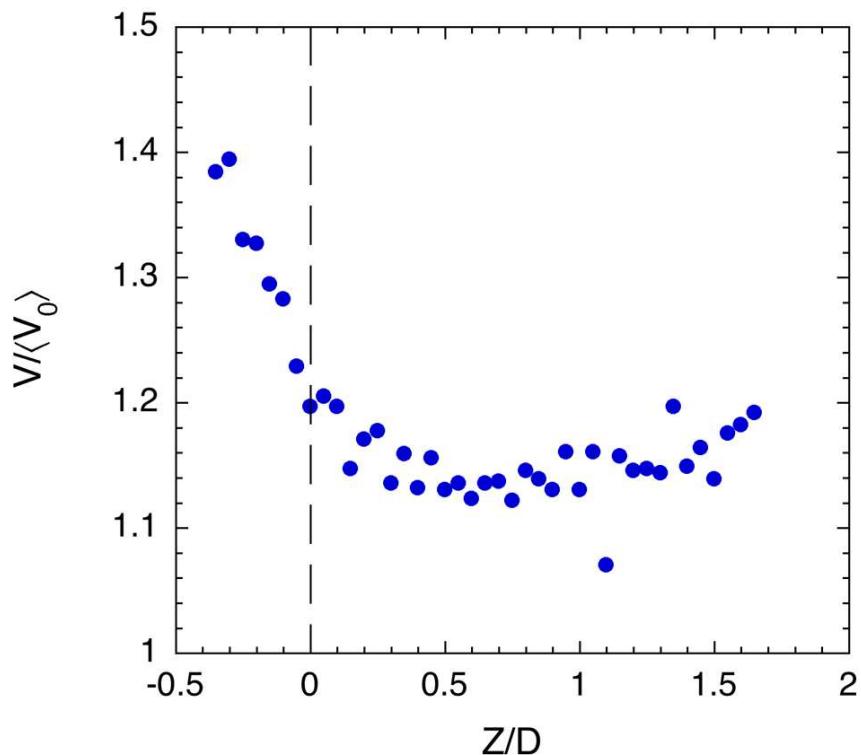


FIG. 3.6 – Profil de vitesse axiale sans aspiration.  $\langle V_0 \rangle = 2.03 \text{ m.s}^{-1}$  et  $D = 10 \text{ cm}$ .

### 3.4.2 Vitesse en présence d'aspiration

Ces profils vont nous servir pour comparer les vitesses du gaz dans le jet en présence de l'aspiration. La figure 3.7 donne un aperçu des différents profils de vitesse axiale pour différentes positions d'aspiration.

L'altitude de référence  $Z = 0$  est toujours la sortie du tube. On appelle  $H$  la différence de hauteur entre la jupe extérieure d'aspiration et la sortie du tube intérieure. Les altitudes sont adimensionnées par le diamètre nominal  $D$  du tube intérieur. Les vitesses sont adimensionnées par la vitesse moyenne  $\langle V_0 \rangle$  sans aspiration au niveau de la sortie du tube.

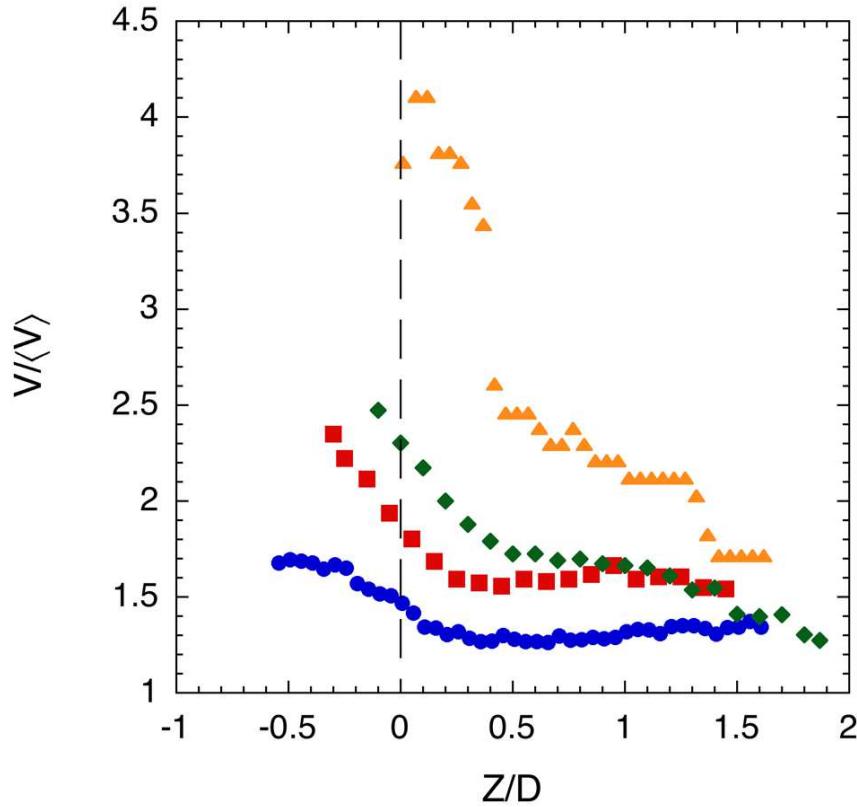


FIG. 3.7 – Profils de vitesse axiale en présence d’aspiration pour différentes hauteurs  $H$  de jupe :  $\bullet$   $H = 0$  cm ;  $\blacksquare$   $H = 2$  cm ;  $\blacklozenge$   $H = 4$  cm ;  $\blacktriangle$   $H = 6.5$  cm.  $\langle V_0 \rangle = 2.03 \text{ m.s}^{-1}$  et  $D = 10$  cm.

On remarque qu’en présence d’aspiration les vitesses du gaz sont plus élevées. La vitesse de sortie est proportionnelle au gradient de pression que l’on impose dans le tube. La pression du gaz que l’on injecte au bas du tube est fixe. En présence d’aspiration, on crée une dépression au niveau de la sortie du tube. De cette manière, on augmente la différence de pression entre le bas du tube et le haut du tube. Le gradient de pression est plus fort ; par conséquent, la vitesse en sortie de tube est plus importante. Ainsi, plus la différence entre les deux tubes est grande, c’est-à-dire plus la hauteur  $H$  est importante, plus la dépression au niveau de la sortie est grande. On retrouve cette tendance sur le graphique, les vitesses les plus élevées sont atteintes avec les plus hautes hauteurs de jupe  $H$ .

On remarque également une modification du profil plus marquée lorsque l’aspiration devient importante. Le passage entre la décroissance de la vitesse et le plateau se fait pour des altitudes de plus en plus importantes et devient de plus en plus marqué. Ce brusque changement de régime provient du fait que l’on modifie très fortement l’écoulement en présence d’aspiration. Les lignes de courant dans le jet gazeux ne sont plus dirigées selon l’axe du tube. Elles sont perturbées de manière à être dirigées dans le sens de l’aspiration qui est contraire au sens du jet. La transition se fait au moment où les effets de l’aspiration

ne perturbent plus le jet.

### 3.5 Déformation de la goutte et formation du sac

Nous nous sommes intéressés aux différents instants importants lors de la déformation. L'instant où la goutte change de topologie pour se mettre sous forme de crêpe, l'instant où le sac commence à se former et enfin l'instant où le sac se brise.

Connaissant la taille de la goutte et en mesurant la vitesse du gaz aux lieux de ces instants, il nous est possible de construire un nombre de Weber. La figure 3.8 montre pour différents diamètres initiaux  $d_0$  la valeur du nombre de weber pour chacun de ces instants.

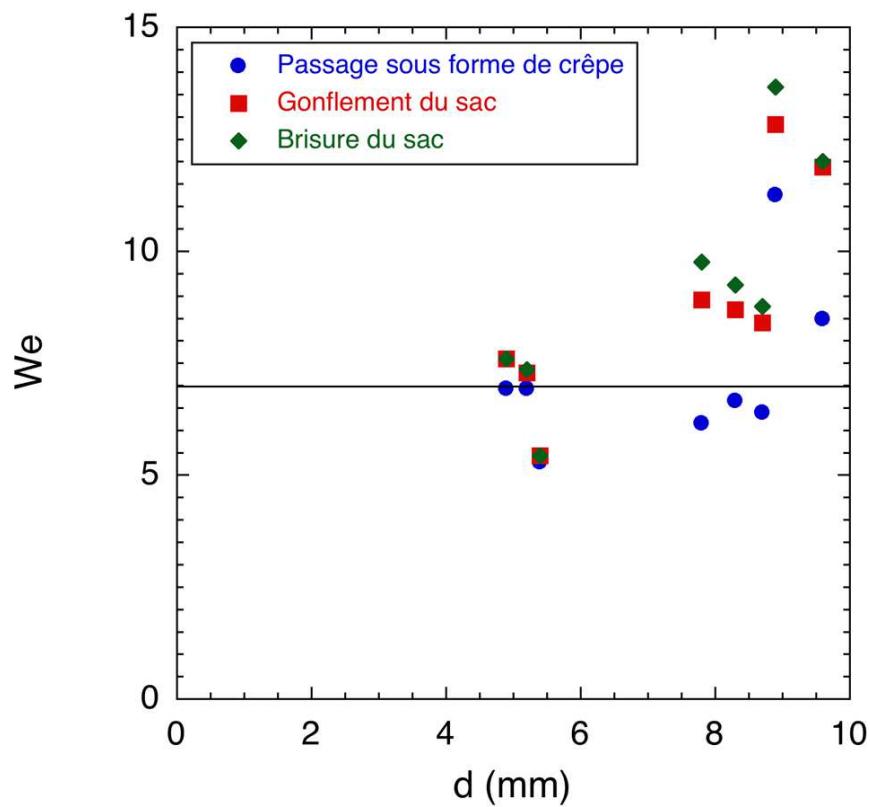


FIG. 3.8 – Nombre de Weber pour différents instants et pour différents diamètres initiaux.

Malgré une certaine disparité des résultats, on peut noter plusieurs choses. Premièrement, le moment correspondant au changement de topologie est sensiblement différent des instants correspondants au gonflement du sac et de la brisure. En effet, pour ces deux derniers instants, les nombres de Weber sont quasiment équivalents. De plus, ce nombre de Weber est toujours supérieur au nombre de Weber correspondant au passage sous forme de crêpe.

Deuxièmement, les nombres de Weber sont tous plus grands que 1, tout en ayant une valeur comprise entre cinq et dix. Le fait de trouver un nombre de Weber légèrement

supérieur à un est prévisible. En effet, ce nombre sans dimension exprime le rapport de deux forces, une force inertielle tendant à déformer la goutte et une force de tension de surface tendant à ramener la surface sous forme sphérique. Un nombre de Weber supérieur à un indique que la force inertielle commence à l'emporter sur les forces de tension de surface. C'est tout naturellement avec un nombre de Weber légèrement supérieur à un que l'on s'attend à voir la déformation puis la brisure de la goutte.

Enfin, on remarque également que les nombres de Weber associés au changement de topologie sont eux rassemblés autour d'une même valeur égale à 7. Cette valeur semble être une valeur seuil qui marque le moment où s'initie le phénomène de *bag-breakup*. En effet, une fois que la goutte change de forme pour former une crêpe, un sac va se créer, se gonfler et se briser. Nous n'avons jamais observé de cas où une goutte passe à l'état de crêpe, mais ne casse pas par la suite. Cette constatation est identique à celle effectuée par Hanson, Domich et Adams [28] en 1963. Les auteurs ont mesuré les vitesses de gaz critiques pour lesquelles ils observaient une brisure en gonflement de sac. Un de leur résultat est présenté sur la figure 3.9. Ce graphe exhibe la relation suivante :  $V^2 d = Cte$ . En analysant la dépendance de cette relation avec les paramètres physiques, ils ont pu ainsi montrer l'existence d'un nombre de Weber critique, égal à 10.

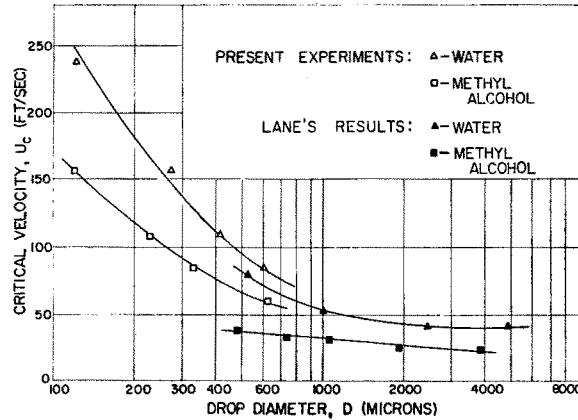


FIG. 3.9 – Vitesse de brisure critique en fonction du diamètre. Mesure effectuée par Hanson, Domich et Adams [28].

Le premier instant important est donc ce moment où la goutte change de topologie. Cet instant correspond à un nombre de Weber autour de 7 indépendant du diamètre initial  $d_0$  de la goutte. Le second moment important est lorsque que le sac est complètement formé et qu'il commence à se rompre. Cet instant initie la fragmentation. On remarque sur la figure 3.8 que ce second moment n'est pas atteint pour un même nombre de Weber critique. Au contraire, le nombre de Weber critique augmente avec le diamètre initial  $d_0$ . Le temps mis par le sac pour se gonfler devient de plus en plus grand à mesure que le diamètre initial grossit. Un temps de gonflement plus grand indique donc une pénétration plus importante dans le jet et donc une vitesse relative de plus en plus grande. Par conséquent, si la goutte

se déforme toujours pour un même nombre de Weber critique, le percement du sac dépend de la taille initiale.

## 3.6 Gonflement du sac

Pour comprendre et prédire comment un sac se forme et se gonfle sur une goutte, il est nécessaire de comprendre comment cette dernière se met sous forme de crêpe. Placé dans un fluide en mouvement, un corps de symétrie de révolution admet deux points d'arrêt ou points de stagnation. Dans le repère lié au corps, la vitesse du fluide est nulle en ces points. Ces points sont situés en amont et en aval du courant. La loi de Bernoulli implique une relation liant la pression au sein du fluide et la vitesse de ce dernier. Ainsi les pressions dans le fluide au niveau des points d'arrêt sont plus forte que sur les bords. Ainsi une surpression se crée de part et d'autre de la goutte dans la direction de l'écoulement, tandis qu'une dépression se forme sur le pourtour de la goutte. Ces zones de surpression et de dépression déforment la goutte en forme en crêpe.

### 3.6.1 Description du courant gazeux

On ne peut pas décrire l'ensemble de la transition de la forme sphérique à une forme de crêpe. Cependant, nous pouvons utiliser une description faible pente à une dimension. Pour cela, nous considérons que la goutte est déjà partiellement écrasée et nous allons décrire son aplatissement en une fine crêpe.

Soit une goutte liquide de masse volumique  $\rho$ , de tension de surface  $\sigma$  et de diamètre initial  $d_0$ , placée dans un courant gazeux de masse volumique  $\rho_a$  et de vitesse  $V_\infty$ .

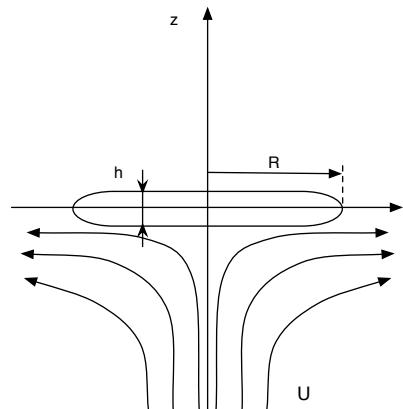


FIG. 3.10 – Modélisation de la goutte sous forme de crêpe au sein d'un écoulement.

La figure 3.10 représente schématiquement une goutte sous forme de crêpe au sein d'un écoulement gazeux. Un repère cylindrique est placé au centre de la goutte. Nous supposons

que tous les paramètres sont indépendants de la coordonnée  $\theta$ . Autrement dit, nous nous plaçons dans le cas axisymétrique.

La vitesse  $\vec{V}$  dans le gaz ne dépend que de la coordonnée radiale  $r$  et d'altitude  $z$  :

$$\vec{V} = \vec{V}(V_r, V_z) \quad (3.3)$$

En première approximation, nous supposons le gaz incompressible. Cette condition nous donne comme première équation :

$$\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_r) = 0 \quad (3.4)$$

Soit en prenant la composante suivant  $z$  de la vitesse sous la forme suivante :

$$V_z = -\gamma z \quad (3.5)$$

Avec  $\gamma \approx U_\infty/d_0$ , la condition d'incompressibilité devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial r} (r U_r) = \gamma r \quad (3.6)$$

Ce qui nous donne alors la composante radiale de la vitesse :

$$V_r = \frac{\gamma r}{2} \quad (3.7)$$

Dans la limite d'une forme de goutte élancée, c'est-à-dire lorsque  $R/h \gg 1$ , les équations stationnaire d'Euler se réduisent alors :

$$V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} = -\frac{1}{\rho_a} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (3.8)$$

Avec  $p$  la pression dans le gaz au contact de la goutte. En utilisant l'expression de la vitesse, on obtient alors :

$$\frac{\gamma^2 r}{4} = -\frac{1}{\rho_a} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (3.9)$$

Soit comme expression de la pression :

$$p = p(0) - \frac{\rho_a \gamma^2}{4} r^2 = p(0) - \frac{k}{2} r^2 \quad (3.10)$$

Avec  $k = \rho_a \gamma^2 / 2$  et  $p(0)$  la pression au niveau du point d'arrêt, c'est-à-dire :

$$p(0) = \frac{\rho_a}{2} V_\infty^2 \quad (3.11)$$

### 3.6.2 Modélisation de la crêpe

Nous avons à présent une description du courant gazeux proche de la goutte. En particulier, nous avons l'expression de la pression. Nous allons à présent nous intéresser à la déformation de la goutte.

### Modélisation sans tension de surface

Cette limite correspond au cas où le nombre de Weber est très grand devant un. Nous appellerons  $U$  la vitesse du fluide au sein de la goutte. Les équations d'Euler nous donnent une première relation :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial r} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (3.12)$$

Sans tension de surface, la pression au sein du liquide est la même que celle du gaz :

$$p = p(0) - \frac{k}{2} r^2 \quad (3.13)$$

La condition d'incompressibilité nous permet de relier la vitesse  $U$  avec l'épaisseur de la crête  $h$  :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U h) = 0 \quad (3.14)$$

Connaissant l'expression de la pression, on obtient le couple d'équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{k}{\rho} r \\ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U h) = 0 \end{cases} \quad (3.15)$$

On recherche des solutions sous la forme :

$$\begin{cases} U = r^\alpha f(t) \\ h = r^\beta g(t) \end{cases} \quad (3.16)$$

En utilisant ces solutions dans les équations 3.15 nous obtenons :

$$\begin{cases} r^\alpha f' + \alpha r^{\alpha-1} r f^2 = \frac{k}{\rho} r \\ r^\beta g' + \frac{\alpha+\beta+1}{r} r^{\alpha+\beta} f g = 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

soit :

$$(f' + \alpha f^2) r^{\alpha-1} = \frac{k}{\rho} \quad (3.18)$$

et :

$$g' + (\alpha + \beta + 1) r^{\alpha-1} f g = 0 \quad (3.19)$$

avec  $f'$  et  $g'$  les dérivées temporelles des fonctions  $f(t)$  et  $g(t)$ . L'équation 3.18 implique la condition suivante :  $\alpha = 1$ . D'où l'équation temporelle de la vitesse  $U$  :

$$f' + f^2 = \frac{k}{\rho} \quad (3.20)$$

Cette équation peut se mettre sous la forme suivante :

$$f' = \frac{k}{\rho} - f^2 \quad (3.21)$$

Soit en réécrivant les termes :

$$\frac{df}{\frac{k}{\rho} - f^2} = dt \quad (3.22)$$

Or la primitive du membre de gauche est une primitive connue pour  $f \in ]-\sqrt{k/\rho}; \sqrt{k/\rho}[$  :

$$\int \frac{df}{\frac{k}{\rho} - f^2} = \sqrt{\frac{\rho}{k}} \operatorname{Atanh} \left( \sqrt{\frac{\rho}{k}} f \right) = t \quad (3.23)$$

En inversant cette relation, on obtient l'expression de la fonction  $f(t)$  :

$$f(t) = \sqrt{\frac{k}{\rho}} \tanh \left( \sqrt{\frac{k}{\rho}} t \right) \quad (3.24)$$

Cette fonction admet deux limites particulières en fonction de la valeur du rapport  $\sqrt{k/\rho}$  :

- $\sqrt{k/\rho} \gg 1$  :  $f \approx \sqrt{k/\rho}$
- $\sqrt{k/\rho} \ll 1$  :  $f \approx \frac{k}{\rho} t$

Cependant aucune condition n'est fixée dans l'équation 3.18 pour  $\beta$ . Il nous faut donc résoudre l'équation de l'épaisseur  $h$ , connaissant l'expression de la vitesse :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U h) = 0 \quad (3.25)$$

Connaissant la forme de  $U$ , cette équation se réduit alors à :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 h f) = 0 \quad (3.26)$$

Soit en développant la dérivée partielle selon  $r$  :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \left( 2r h f + r^2 \frac{\partial h}{\partial r} f \right) = 0 \quad (3.27)$$

Soit en réarrangeant les termes :

$$\frac{\partial h}{f \partial t} + r \frac{\partial h}{\partial r} + 2h = 0 \quad (3.28)$$

Le second terme est une dérivée logarithmique. Pour pouvoir résoudre cette équation différentielle, nous pouvons effectuer le changement de variable suivant :

$$\tau = \int_0^t f(t^*) dt^* \quad (3.29)$$

Soit en utilisant la forme de  $f$  :

$$\tau = \int_0^t \sqrt{\frac{k}{\rho}} \tanh \left( \sqrt{\frac{k}{\rho}} t^* \right) dt^* \quad (3.30)$$

Soit en posant  $X = \left(\sqrt{k/\rho}\right) t^*$  :

$$\tau = \int_0^{\sqrt{k/\rho} t} \tanh(X) dX \quad (3.31)$$

Ce qui donne :

$$\tau = \ln \left( \cosh \left( \sqrt{\frac{k}{\rho}} t \right) \right) \quad (3.32)$$

On obtient alors l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} + \frac{\partial h}{\partial \ln r} + 2h = 0 \quad (3.33)$$

Pour résoudre cette équation, nous allons nous affranchir du dernier terme en posant l'épaisseur de la crêpe  $h$  sous la forme suivante :

$$h = \tilde{h} e^{-2\tau} \quad (3.34)$$

Ainsi, le premier terme de l'équation différentielle s'écrit :

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tau} e^{-2\tau} - 2\tilde{h} e^{-2\tau} \quad (3.35)$$

tandis que le second s'exprime comme :

$$\frac{\partial h}{\partial \ln r} = \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \ln r} e^{-2\tau} \quad (3.36)$$

De cette manière, l'équation 3.33 se met sous la forme suivante :

$$\frac{\partial \tilde{h}}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{h}}{\partial \ln r} = 0 \quad (3.37)$$

Cette équation admet une solution de la forme :

$$\tilde{h} = F(\ln r - \tau) \quad (3.38)$$

Nous prenons comme condition initiale  $h(t = 0) = h_0$ . Pour  $t = 0$ , la variable  $\tau$  est nulle. On obtient alors :

$$h_0 = F(\ln r) = Cte \quad (3.39)$$

Finalement, on obtient une relation pour  $h$  indépendante du rayon  $r$  :

$$h = h_0 e^{-2\tau} \quad (3.40)$$

Soit en utilisant l'expression de  $\tau$  :

$$h = h_0 e^{-2 \ln(\cosh(\sqrt{k/\rho} t))} \quad (3.41)$$

Soit :

$$h = \frac{h_0}{\left(\cosh\left(\sqrt{k/\rho}t\right)\right)^2} \quad (3.42)$$

Soit pour des temps supérieurs à  $\sqrt{\rho/k}$  :

$$h \approx h_0 e^{-2\sqrt{k/\rho}t} \quad (3.43)$$

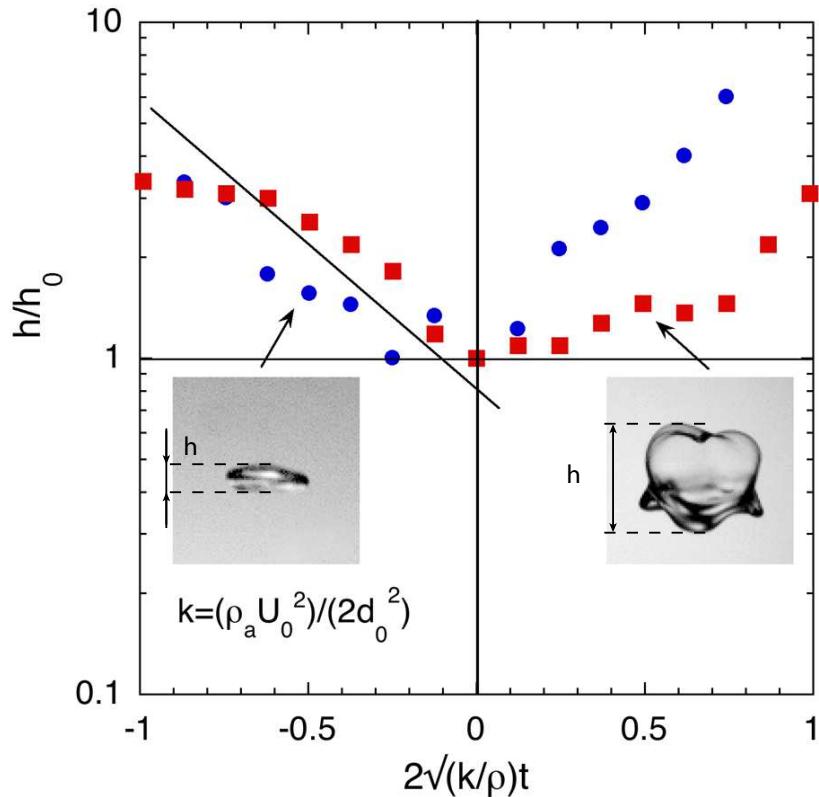


FIG. 3.11 – Évolution de l'épaisseur  $h$ , au cours du temps pour deux expériences différentes. Les images montrent les différents régimes. Pour des temps négatifs, la goutte évolue en forme de crêpe, tandis que pour des temps positifs, la goutte forme un sac qui se gonfle au cours du temps. La droite en trait plein indique une décroissance exponentielle.

L'épaisseur de la crêpe décroît exponentiellement avec le temps. Nous avons représenté sur la figure 3.11 l'évolution de l'épaisseur en fonction du temps. L'épaisseur mesurée  $h$  est rapportée à l'épaisseur la plus fine observée  $h_0$ . L'origine des temps est placée à cet instant. Des temps positifs correspondent à l'évolution du gonflement du sac, tandis que des temps négatifs correspondent à la décroissance de l'épaisseur lors du passage sous forme de crêpe. Les temps sont adimensionnés par le facteur  $2\sqrt{k/\rho}$  que l'on vient de trouver précédemment.

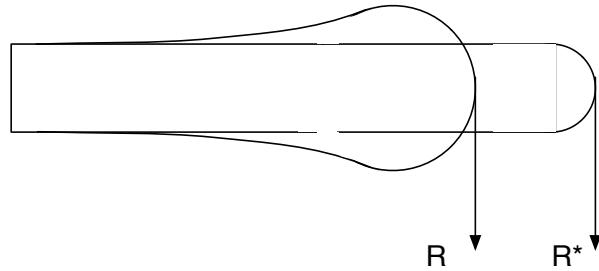


FIG. 3.12 – Prise en compte des effets capillaires pour la modélisation de la crêpe. Le rayon  $R^*$  correspond au cas sans tension de surface. Le rayon  $R$  prend en compte les effets de tension de surface et l'existence d'un bourrelet.

Le placement de l'origine des temps au moment de la formation du sac permet de distinguer les deux phases. Cette origine permet également de comparer les mesures expérimentales entre elles. Sur la figure 3.11, on observe l'évolution de l'épaisseur pour deux expériences différentes. On remarque que, pour des temps positifs, les évolutions des épaisseurs sont différentes. Cependant, pour des temps négatifs, c'est-à-dire lors de l'amincissement de la crêpe, les évolutions sont comparables. Dans une échelle logarithmique en ordonnée et linéaire en abscisse, les épaisseurs suivent une loi linéaire. Cette tendance montre que l'épaisseur décroît de manière exponentielle avec le temps. Cependant, cette décroissance est très rapide, puisqu'il faut moins d'une fois le temps caractéristique  $(\sqrt{\rho/k})/2$  pour arriver à une épaisseur suffisamment mince pour initier la formation du sac.

### Effet capillaire

Dans les paragraphes précédents, nous nous sommes intéressés à la déformation de la goutte, sans prendre en compte les effets de tension de surface. Nous avons pu ainsi déterminer l'évolution de l'épaisseur au cours du temps. Cependant, il nous est impossible, dans cette approximation, de calculer la valeur du rayon  $R$ . Pour cela, il nous faut à présent tenir compte de la tension de surface. Les effets capillaires vont principalement jouer au niveau du pourtour extérieur. La forme réelle que prend la goutte est un globule, c'est-à-dire une zone centrale d'épaisseur constante bordée d'un bourrelet liquide plus épais. Le schéma représenté sur la figure 3.12 montre le cas sans tension de surface et le cas en présence de tension de surface et l'existence d'un bourrelet.

Nous allons utiliser une solution de raccord. Loin du bord, nous prenons comme hypothèse que les effets capillaires sont négligeables. Par conséquent, ce que nous avons trouvé précédemment est toujours valable, en particulier, l'évolution de l'épaisseur  $h$ . Toutefois, à proximité de l'extrémité du globule, nous prenons en compte la tension de surface via le

saut de pression engendré par la courbure de l'interface :

$$\Delta p_{Laplace} = \frac{2\sigma}{h} \quad (3.44)$$

Les équations de base sont les mêmes que précédemment, à savoir l'équation d'Euler :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (3.45)$$

avec une vitesse  $U$  ayant pour forme de solution  $U = r f(t)$  loin du bord. L'expression de la pression est toujours :

$$p(r) = p(0) - \frac{k r^2}{2} \quad (3.46)$$

sauf au bord où l'on rajoute le saut de pression :

$$p(R) = p(0) - \frac{k R^2}{2} + \frac{2\sigma}{h} \quad (3.47)$$

En intégrant l'équation 3.45 entre 0 et  $R$  on aboutit à l'expression suivante :

$$\int_0^R \left( \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial r} \right) dr = -\frac{1}{\rho} (p(R) - p(0)) \quad (3.48)$$

La forme de la solution de la vitesse  $U$  est identique au cas sans tension de surface pour pouvoir être raccordée à ce cas. En effet, on retrouve le cas précédent si la tension de surface  $\sigma$  est nulle. Nous utilisons donc pour la vitesse la forme suivante :  $U = r f(t)$ , avec  $U(R) = R f(t)$ . Avec cette forme de vitesse, on obtient la relation suivante :

$$\int_0^R \left( r f' + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{U^2}{2} \right) \right) dr = \frac{1}{\rho} (p(0) - p(R)) \quad (3.49)$$

Soit en intégrant le terme de gauche :

$$\frac{R^2}{2} f' + \frac{U(R)^2}{2} = \frac{1}{\rho} (p(0) - p(R)) \quad (3.50)$$

En utilisant la forme de  $U$  en  $R$  :

$$\frac{R^2}{2} (f' + f^2) = \frac{1}{\rho} (p(0) - p(R)) \quad (3.51)$$

En explicitant la valeur de la pression  $p$  en  $R$  :

$$\frac{R^2}{2} (f' + f^2) = \frac{k}{\rho} \frac{R^2}{2} - \frac{2\sigma}{\rho h} \quad (3.52)$$

Soit :

$$f' + f^2 = \frac{k}{\rho} - \frac{4\sigma}{\rho h R^2} \quad (3.53)$$

Tout au long de l'aplatissement de la goutte, le volume de cette dernière reste constant. Soit  $\Omega$  son volume. Sous forme de crêpe, ce volume  $\Omega$  s'exprime comme suit :

$$\Omega \approx \pi R^2 h \quad (3.54)$$

Ce qui nous donne alors l'équation différentielle pour la vitesse :

$$f' + f^2 = \frac{k}{\rho} - \frac{4\pi\sigma}{\rho\Omega} \quad (3.55)$$

Nous allons définir un temps caractéristique  $t^*$  comme suit :

$$\frac{1}{t^{*2}} = \frac{k}{\rho} = \frac{\rho_a}{\rho} \frac{U_\infty^2}{2d_0^2} \quad (3.56)$$

soit :

$$t^* = \frac{d_0}{U_0} \sqrt{\frac{2\rho}{\rho_a}} \quad (3.57)$$

temps identique à celui trouvé par Ranger et Nicholls [48]. L'équation différentielle sur  $f$  se réécrit alors :

$$f' + f^2 = \frac{1}{t^{*2}} \left( 1 - \frac{\sigma}{\rho} \frac{4\pi}{\Omega} \frac{2\rho d_0^2}{\rho_a U_\infty^2} \right) \quad (3.58)$$

Or le volume  $\Omega$  s'exprime aussi en fonction du diamètre initial  $d_0$  :  $\Omega = (4/3)\pi(d_0/2)^3$ . Le dernier terme de l'équation précédente se simplifie en faisant apparaître le nombre de Weber :

$$\frac{\sigma}{\rho} \frac{4\pi}{\Omega} \frac{2\rho d_0^2}{\rho_a U_\infty^2} = \frac{8\sigma d_0^2}{\rho_a U_\infty^2 \frac{4}{3} \frac{d_0^3}{8}} = \frac{12\sigma}{\rho_a U_\infty^2 d_0} = \frac{1}{We} \quad (3.59)$$

L'équation différentielle sur  $f$  s'exprime alors :

$$f' + f^2 = \frac{1}{t^{*2}} \left( 1 - \frac{1}{We} \right) \quad (3.60)$$

Et admet une solution quasi-identique à celle trouvée pour l'évolution de l'épaisseur :

$$f(t) \sim \tanh \left( \frac{t}{t^*} \sqrt{1 - \frac{1}{We}} \right) \quad (3.61)$$

Nous voulions au départ caractériser l'extension radiale de la goutte au cours du temps. Connaissant la vitesse, nous pouvons en déduire l'expression du rayon  $R(t)$  :  $U(R) = \dot{R}(t) = R f(t)$ , c'est-à-dire  $f(t) = \dot{R}/R$ . Nous en déduisons alors l'expression de  $f'$  :

$$f' = \frac{\ddot{R}}{R} - \left( \frac{\dot{R}}{R} \right)^2 = \frac{\ddot{R}}{R} - f^2 \quad (3.62)$$

Autrement dit :

$$f' + f^2 = \frac{\ddot{R}}{R} = \frac{1}{t^{*2}} \left( 1 - \frac{1}{We} \right) \quad (3.63)$$

Nous obtenons une équation différentielle linéaire du second ordre classique. Lorsque le nombre de Weber est inférieur à un, cette équation est celle d'un oscillateur. Pour des nombres de Weber supérieurs à un, les solutions de cette équation sont des fonctions exponentielles croissantes.

Dans la limite des très grands nombres de Weber, la solution pour le rayon devient :

$$R(t) \sim e^{t/t^*} \quad (3.64)$$

Tandis que pour la décroissance de l'épaisseur :

$$h(t) \sim e^{-2t/t^*} \quad (3.65)$$

Le volume de la goutte se calcule en utilisant le produit suivant :  $R^2 h = Cte$ . Par conservation de matière il est constant.

### 3.6.3 Gonflement du sac

Le gonflement du sac résulte d'une brisure de symétrie du système. Deux effets sont en cause. Le premier provient du décollement de l'écoulement extérieur autour de la goutte déformée. La pression au niveau du point d'arrêt devient plus forte que la pression derrière la crêpe. Le second vient de la forme elle-même de la goutte. Cette dernière ressemble à un globule en ayant une épaisseur au centre plus faible que sur les bords. Le bourrelet liquide rend ainsi le pourtour plus inertiel que le centre. Une fois la poche créée, le jet gazeux entraîne le liquide, gonflant ainsi le sac. Ce même effet se retrouve lorsque l'on applique un courant gazeux sur une nappe liquide savonneuse pour créer des bulles de savon. Un exemple est présenté sur la figure 3.13.

Soit  $\xi(r, t)$  la position moyenne de la goutte en fonction du rayon  $r$  et du temps  $t$ . Nous allons appliquer le principe fondamental de la dynamique sur un élément infinitésimal  $dS$  :

$$\frac{d}{dt} (\rho h(r, t) dS \dot{\xi}) = p(r) dS \frac{1}{\sqrt{1 + \xi'^2}} \quad (3.66)$$

Avec  $\dot{\xi}$  la dérivée temporelle de l'interface, c'est-à-dire sa vitesse,  $\xi'$  la dérivée spatiale et  $p(r)$  la différence de pression totale de part et d'autre de la nappe liquide.

Soit un élément de masse  $\delta m$  constant :

$$\delta m = \rho h \delta S \quad (3.67)$$

De l'équation 3.66, il vient :

$$\sqrt{1 + \xi'^2} \ddot{\xi} = \frac{p}{\rho h(t)} \quad (3.68)$$

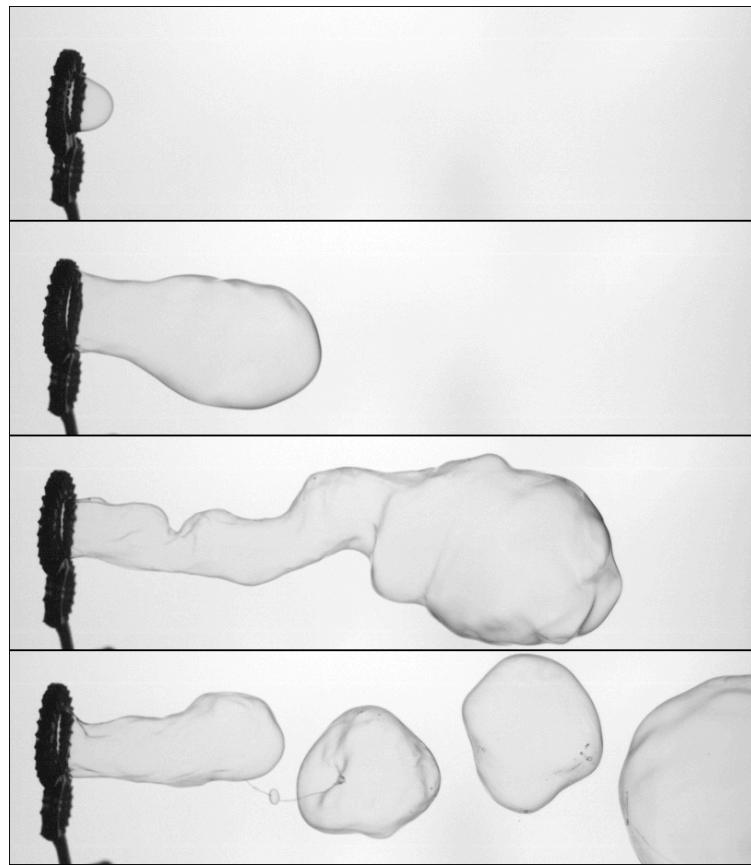


FIG. 3.13 – Cliché instantané lors de la création d'une bulle de savon. *Crédit : N. Bremond & E. Villermaux.*

En utilisant le résultatat 3.65 sur l'évolution de l'épaisseur :

$$h(t) = d_0 e^{-2t/t^*} \quad (3.69)$$

et l'approximation faible pente :  $\xi' \ll 1$  on obtient l'expression suivante :

$$\dot{\xi} = \frac{p}{\rho d_0} \frac{t^*}{2} (e^{2t/t^*} - 1) \quad (3.70)$$

avec  $\dot{\xi}(t = 0) = 0$ . Soit pour l'expression de  $\xi(t)$  :

$$\xi(t) = \frac{p}{\rho d_0} \frac{t^{*2}}{4} \left( e^{2t/t^*} - 2 \frac{t}{t^*} - 1 \right) \quad (3.71)$$

Pour des temps inférieur au temps de Ranger et Nichols,  $t/t^* \ll 1$  :

$$\xi \sim \frac{p(r)}{\rho d_0} t^{*2} e^{t/t^*} \quad (3.72)$$

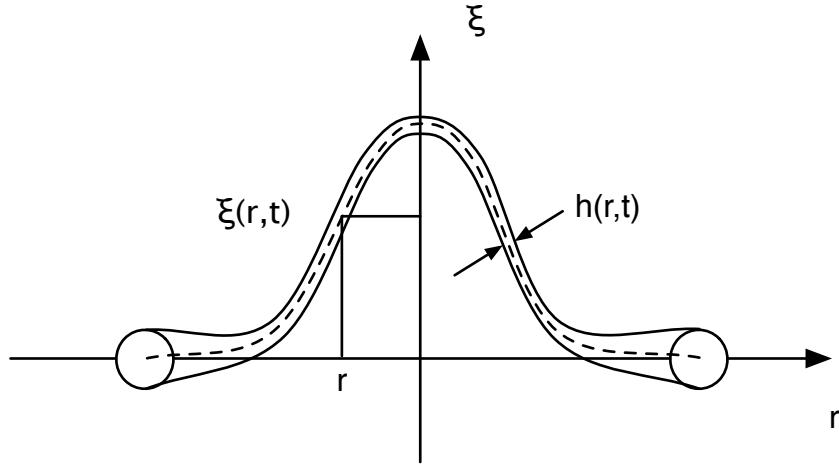


FIG. 3.14 – Vue en coupe lors du gonflement du sac. La position moyenne  $\xi$  est représentée à l'aide d'un trait en pointillés.

Le sommet de l'interface est pour  $r = 0$ . Son évolution temporelle aux premiers instants du gonflement devient :

$$\xi(0, t) \approx \frac{p(0)}{\rho d_0} t^2 = \frac{\rho_a U_\infty^2}{\rho d_0} t^2 = d_0 \left( \frac{t}{t^*} \right)^2 \quad (3.73)$$

La figure 3.15 représente l'évolution du sac au cours du temps. Le temps initial correspond au moment où l'épaisseur de la goutte est la plus fine. Le temps est adimensionné par le temps  $t^*$ . La hauteur du sac  $h$  est rapportée à la plus petite épaisseur  $h_{min}$  et adimensionnée par le diamètre initial  $d_0$ . Quatre mesures pour différents diamètres initiaux sont représentées dans une échelle logarithmique. On remarque que l'accroissement du sac est proportionnel au carré du temps adimensionné. Cette constatation expérimentale confirme la relation 3.73 trouvée précédemment, donnant la dépendance temporelle de la taille du sac.

### 3.7 Statistique de la brisure

Habituellement, les expériences sur le phénomène du gonflement de sac se font sur des gouttes de petite taille avec un diamètre de quelques centaines de microns. Dans ces conditions, il est très difficile d'établir une statistique détaillée des fragments après la brisure. Dans le cas de la pluie, Marshall et Palmer [44] donnent les premiers des distributions de taille en fonction de l'intensité de la pluie. Srivastava [58] montre ensuite que ces distributions se confondent en une courbe maîtresse, lorsque l'on adimensionne le diamètre par le diamètre initial  $d_0$ . Cependant, les gouttes utilisées pour ces mesures ont des diamètres initiaux très proches compris entre 0.25 et 0.35 mm. Dans le cas du *bag-breakup*, dans

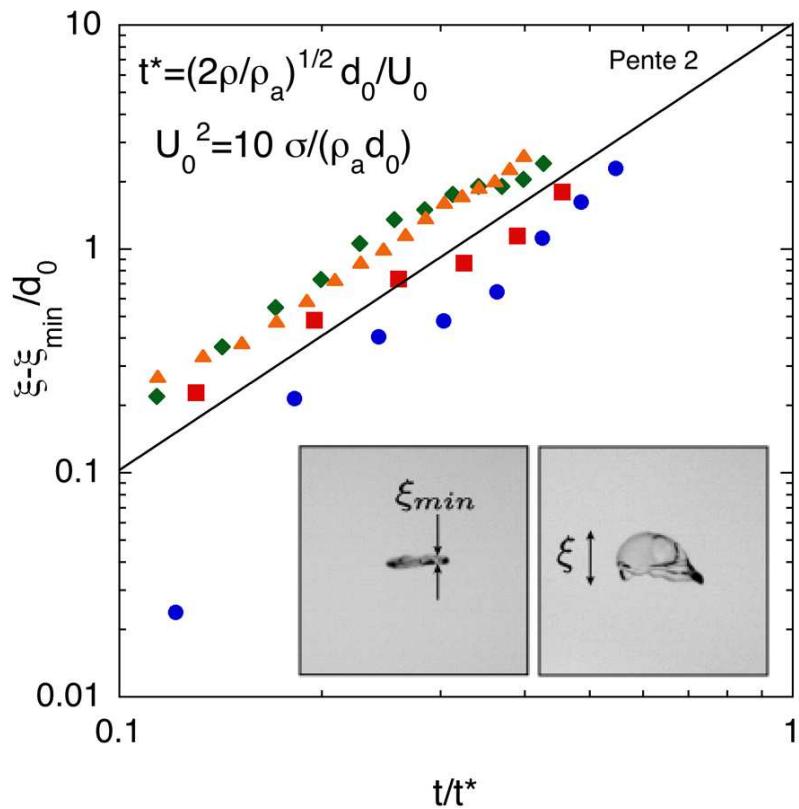


FIG. 3.15 – Evolution du sac au cours du temps. Les symboles ● et ■ correspondent à un diamètre initial  $d_0$  de 4.5 mm. Les symboles ▲ correspondent à un diamètre initial de 8 mm et les symboles ◆ à un diamètre de 12 mm. Les images rappellent les notations utilisées,  $h_{min}$  représente l'épaisseur la plus fine de la crêpe, tandis que  $h$  représente la taille du sac.

un tube à choc, Chou et Faeth [16] donnent un aperçu rapide des tailles des gouttelettes résultantes.

### 3.7.1 Relation entre diamètre initial et taille moyenne

Avant d'analyser dans le détail les formes des distributions, nous nous sommes intéressés à la dépendance du diamètre moyen  $\langle d \rangle$  des fragments avec le diamètre initial  $d_0$ . La figure 3.16 montre cette relation.

Pour des diamètres initiaux inférieurs à 12 mm, il existe une relation linéaire donnant la moyenne des fragments  $\langle d \rangle$ . Cette droite passe par l'origine, car pour un diamètre initial nul, il n'y a pas de fragment et par conséquent, une taille moyenne de fragments nulle. Nous montrons sur la figure 3.16 la droite reliant le diamètre initial  $d_0$  avec la taille moyenne  $\langle d \rangle$ . On remarque que pour de très grands diamètres, les tailles des fragments sont plus faibles que ceux attendus en suivant la relation linéaire. Cet écart indique un effet de saturation se produisant lorsque le diamètre initial devient important. Il est intéressant de constater

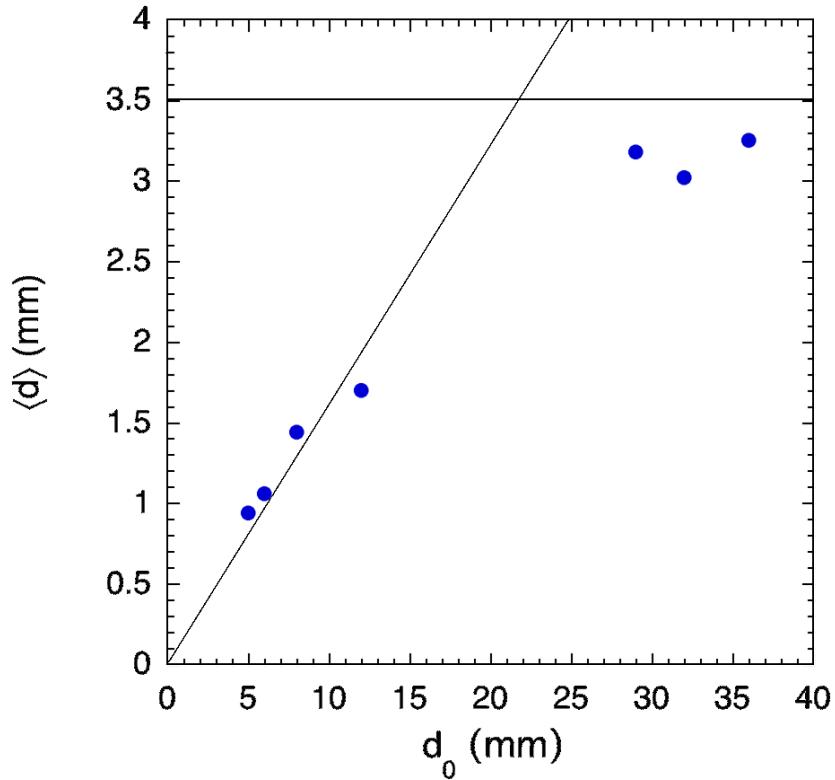


FIG. 3.16 – Diamètre moyen  $\langle d \rangle$  des fragments après brisure en fonction du diamètre initial  $d_0$ .

que la taille des fragments est toujours inférieure à la longueur capillaire.

Pour comprendre l'origine de cette saturation, nous allons discuter sur les conditions de stabilité et de déformation d'une goutte pour faire ressortir les tailles caractéristiques. Soit une goutte de diamètre initial  $d$  et de volume initial  $\Omega \equiv d^3$  et de masse volumique  $\rho$ . La goutte chute verticalement et se déforme au sein d'un jet gazeux de masse volumique  $\rho_a$  et de vitesse  $V$ , pour former une crêpe d'épaisseur  $h$  et de rayon  $R$ . Effectuons un bilan de force :

$$\rho d^3 \ddot{z} = -\rho d^3 g + \rho_a (\dot{z} + V)^2 R^2 \quad (3.74)$$

soit

$$\frac{\ddot{z}}{g} = -1 + \frac{\rho_a}{\rho} \frac{R^2}{d^3} (\dot{z} + V)^2 \quad (3.75)$$

La condition pour qu'un sac se forme et se gonfle est la suivante :

$$\frac{\rho_a d}{\sigma} (\dot{z} + V)^2 = 1 \quad (3.76)$$

Soit en faisant ressortir cette expression dans l'équation 3.75 :

$$\frac{\ddot{z}}{g} = -1 + \frac{\rho_a d}{\sigma} (\dot{z} + V)^2 \cdot \frac{\sigma}{d} \frac{R^2}{\rho g d^3} \quad (3.77)$$

Soit  $a$  la longueur capillaire :

$$a^2 = \frac{\sigma}{\rho g} \quad (3.78)$$

L'expression 3.77 devient alors :

$$\frac{\ddot{z}}{g} = -1 + \frac{a^2 R^2}{d^4} \quad (3.79)$$

Soit en utilisant la conservation du volume :  $\Omega \equiv d^3 \equiv h R^2$  :

$$\frac{\ddot{z}}{g} = -1 + \frac{a^2}{d h} \quad (3.80)$$

La nappe liquide du sac est instable. La condition pour laquelle le temps d'instabilité de la nappe augmente très fortement permettant ainsi au sac de se gonfler est la suivante :  $k_c h < 1$  (condition établie dans le chapitre 2). La nappe étant instable au sens de Rayleigh-Taylor, la longueur d'onde de coupure est égale à :

$$k_c = \sqrt{\frac{\rho (\ddot{z} + g)}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\rho g}{\sigma} \frac{a^2}{d h}} = \frac{1}{\sqrt{d h}} \quad (3.81)$$

La condition devient alors :

$$k_c h < 1 \implies h < \sqrt{d h} \quad (3.82)$$

Qui est toujours vraie.

Lorsque la goutte se déforme, sa vitesse de chute est constante  $\dot{z} = Cte$ , autrement dit  $\ddot{z} = 0$ . La figure 3.17 montre le suivi temporel du centre de gravité d'une goutte entre le moment où elle est lâchée et le moment où elle se brise. La courbe en trait plein montre une trajectoire de chute libre. La droite, quant à elle, indique une évolution à vitesse constante. On observe que la goutte commence par suivre une trajectoire de type chute libre. À mesure qu'elle pénètre dans le jet, sa vitesse devient constante. Ceci nous donne, du fait de l'équation 3.80, la relation suivante :

$$\frac{a^2}{d h} = 1 \quad (3.83)$$

Par conséquent, la condition de formation d'un sac devient :

$$h < a \quad (3.84)$$

La longueur capillaire ressort comme une valeur limite sur l'épaisseur de la crêpe. Les fragments obtenus après brisure sont donc toujours plus petits que la longueur capillaire.

Dans le cas de très grosses gouttes, lors de l'aplatissement, la condition  $h < a$  n'est plus respectée. La crêpe a alors le temps de développer des modulations d'épaisseur, dont la longueur d'onde est fixée par la longueur capillaire. Ces modulations d'épaisseur initient la formation de plusieurs sacs. Chaque sac vérifie alors la condition  $h < a$  et les fragments obtenus sont également plus petits que la longueur capillaire.

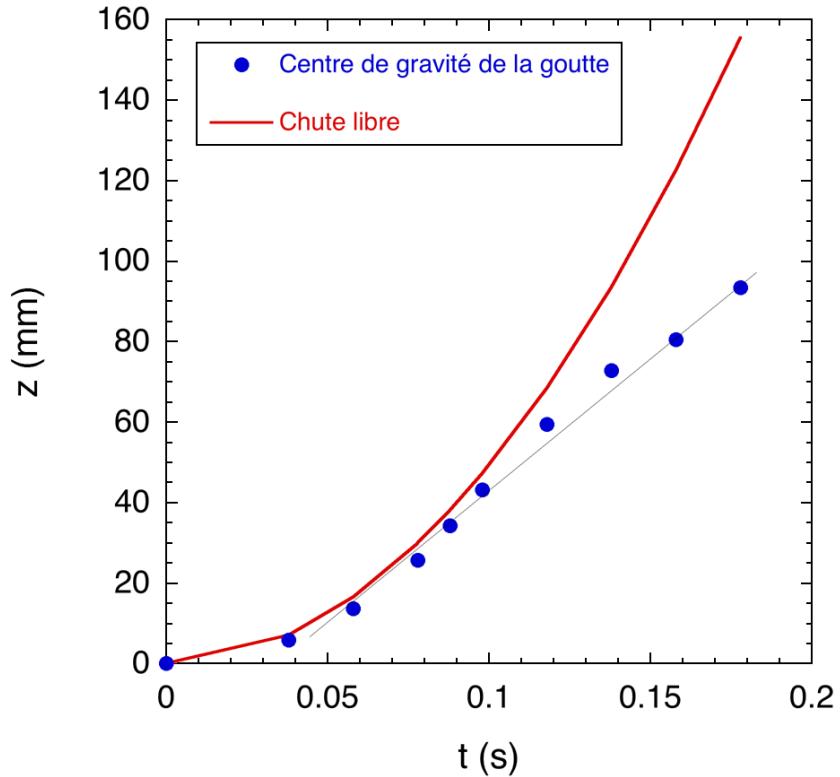


FIG. 3.17 – Suivi du centre de gravité d'une goutte au sein du jet gazeux. La position  $z$  exprime la distance entre la goutte et l'injecteur. Le dernier point correspond au dernier moment où il est possible de déterminer un centre de gravité, c'est-à-dire au moment de la brisure du sac.

La longueur capillaire fixe donc une condition pour le gonflement multicellulaire et apparaît comme une taille limite dans la taille des fragments obtenus.

Les clichés représentées sur la figure 3.18 montrent deux exemples d'évolution distincts en fonction du diamètre initial  $d$ . Les images du haut correspondent à un diamètre initial de 8 mm. On observe la formation d'un seul sac. Les images du bas correspondent à un diamètre initial de 35 mm. La crêpe formée ne satisfait plus la condition  $h < a$  et on observe la formation de plusieurs sacs.

### 3.7.2 Taille du bourrelet

Nous pouvons utiliser la description de l'amincisement pour estimer cette saturation. La majorité des fragments provient du tore liquide au moment où le sac se rompt. Nous allons estimer la taille de ce ligament qui est donné par la taille du bourrelet.

Le bourrelet provient de la différence d'évolution du rayon  $R(t)$  en présence de tension de surface avec la prédiction  $\tilde{R}(t)$  sans tension de surface. En effet, les effets capillaires tendent à ralentir l'extension de la goutte sous forme de globule. Cette différence d'évolution se

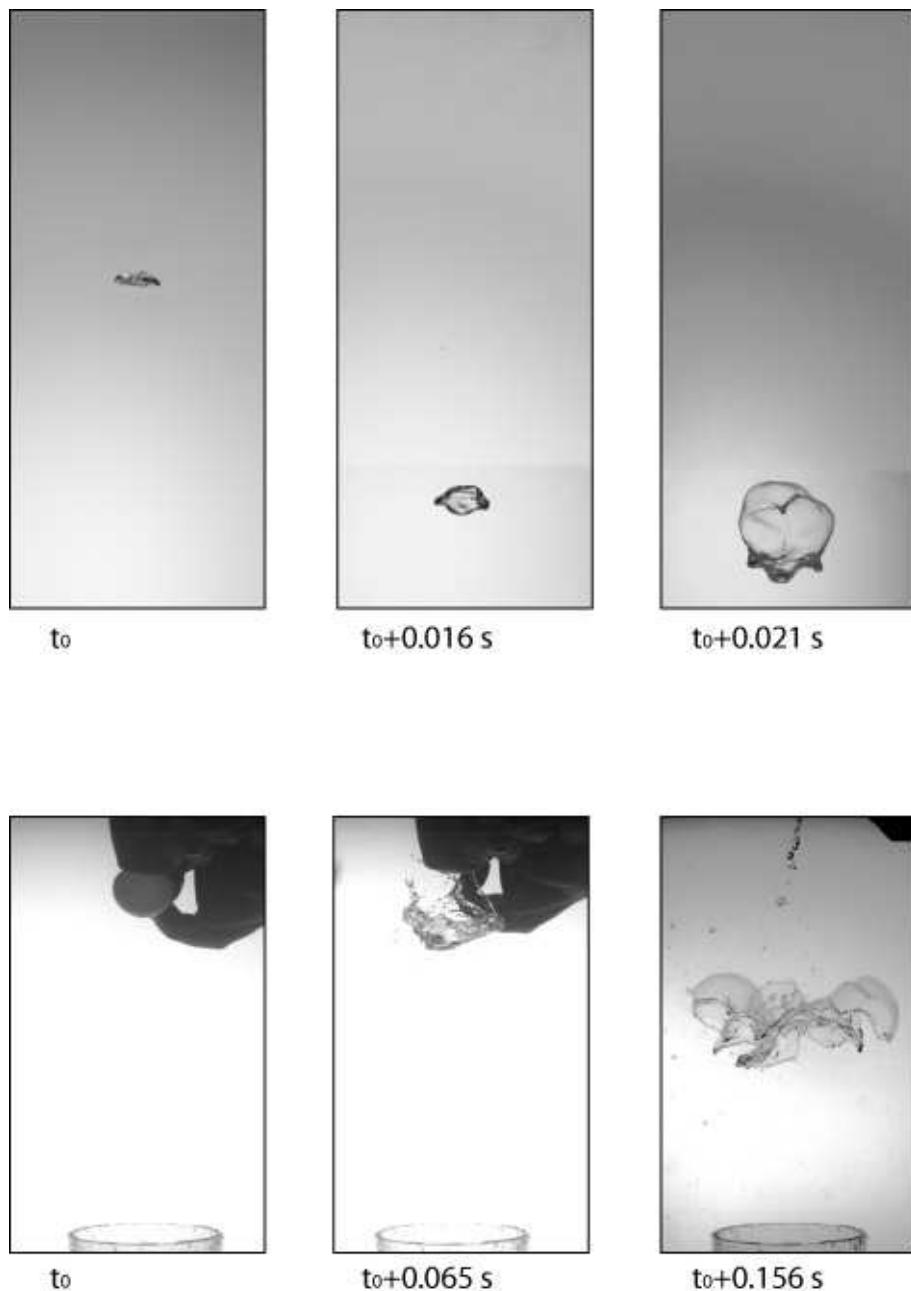


FIG. 3.18 – Différence d'évolution en fonction du diamètre initial  $d$ . Les images du haut correspondent à un diamètre initial de 8 mm. Les images du bas correspondent à un diamètre initial de 35 mm. On montre un exemple de gonflement multicellulaire pour ces images.

traduit par une accumulation de liquide au niveau du pourtour de la goutte déformée. Soit  $b(t)$  la taille caractéristique du bourrelet. A l'aide d'un bilan, de matière il nous est possible

de prédire la taille du bourrelet  $b(t)$  :

$$2\pi R \frac{db^2}{dt} = \pi h R \left( \frac{d\tilde{R}}{dt} - \frac{dR}{dt} \right) \quad (3.85)$$

Avec  $R(t)$  le rayon de la goutte en présence de tension de surface :

$$R(t) \sim d_0 e^{\frac{t}{t^*} \sqrt{1-1/We}} \quad (3.86)$$

$\tilde{R}(t)$  le rayon de goutte sans tension de surface

$$\tilde{R}(t) \approx d_0 e^{t/t^*} \quad (3.87)$$

Et  $h(t)$  l'épaisseur de la crêpe loin du bord :

$$h(t) \sim d_0 e^{-2t/t^*} \quad (3.88)$$

On trouve alors :

$$\frac{db^2}{dt} \sim h \tilde{R} \left( \frac{1}{t^*} - \frac{1}{t^*} \sqrt{1 - \frac{1}{We}} \right) \quad (3.89)$$

Soit pour  $We \ll 1$  :

$$\frac{db^2}{dt} \sim h \tilde{R} \frac{1}{t^* We} \quad (3.90)$$

Soit :

$$b^2 \sim \frac{d_0^2}{t^* We} \int_0^t e^{-\tau/t^*} d\tau \quad (3.91)$$

Ce qui donne comme taille de bourrelet :

$$b \sim \frac{d_0}{\sqrt{We}} (1 - e^{-t/t^*})^{\frac{1}{2}} \quad (3.92)$$

La taille du bourrelet croît rapidement durant les premiers instants puis sature. Le diamètre moyen des fragments  $\langle d \rangle$  est proportionnel à la taille du bourrelet :  $\langle d \rangle \sim b$ . En prenant comme hypothèse que le film se rompt lorsque l'épaisseur atteint une taille critique  $h_c$ , il nous est possible d'avoir une prédiction sur la taille moyenne  $\langle d \rangle$  :

$$\langle d \rangle \sim b(t_c) \sim \frac{d_0}{\sqrt{We}} \left( 1 - \sqrt{\frac{h_c}{d_0}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.93)$$

Lorsque l'épaisseur critique  $h_c$  n'est pas trop petite devant  $d_0$ , la relation précédente montre qu'il y a une relation plus faible qu'une proportionnalité directe entre la taille moyenne  $\langle d \rangle$  et le diamètre initial  $d_0$ .

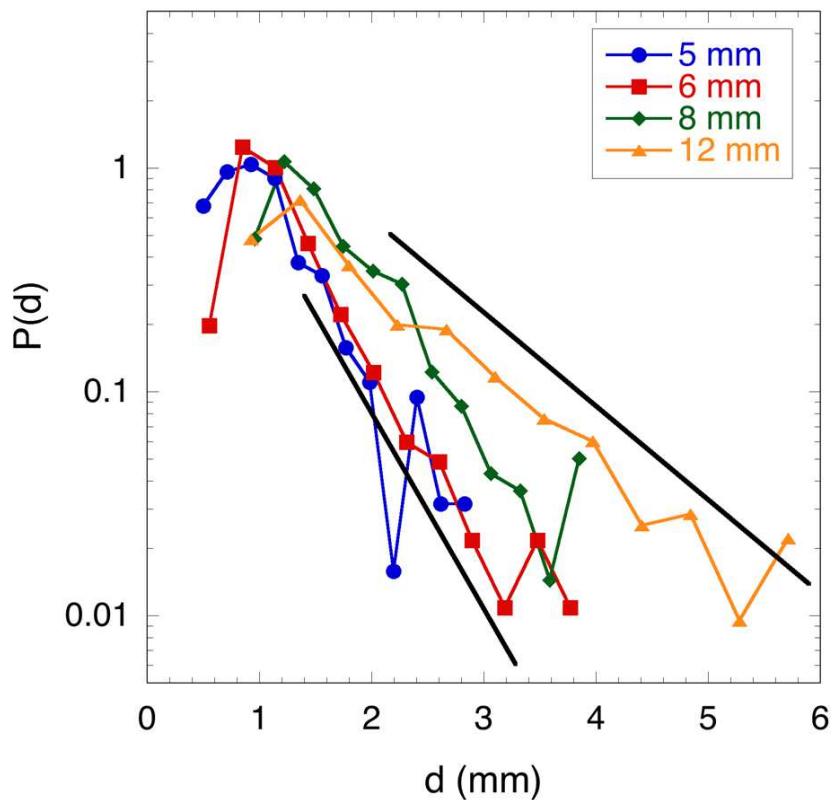


FIG. 3.19 – Distributions des tailles de gouttes pour plusieurs diamètres  $d_0$  initiaux.

### 3.7.3 Distribution des tailles de gouttes

La figure 3.19 montre la distribution des tailles de gouttes pour plusieurs diamètres initiaux  $d_0$ . On remarque que les gouttes formées sont bien plus petites que la taille initiale. Les distributions présentent une queue exponentielle dont la pente varie avec le diamètre initial. Plus ce dernier est grand et plus la distribution est large.

La forme des distributions est identique quelque soit le diamètre initial  $d_0$ . Elles sont constituées d'une queue exponentielle dont la pente varie avec la taille initiale. Elles admettent également un maximum ainsi qu'une forme de cloche pour les plus petits diamètres. Les photos sur la figure 3.20 montrent trois instants successifs de la brisure d'une goutte de diamètre initial  $d_0 = 12$  mm. On remarque que la rupture du sac initie la fragmentation complète de la goutte. La formation et la récession, d'un bourrelet lorsque le film liquide du sac se rompt, forme de petits ligaments, qui en se brisant, forment des gouttelettes de petites taille. La rupture du bourrelet liquide entourant le sac intervient ensuite et forme de plus gros fragments. Les distributions observées sont le reflet de ces deux phénomènes. La forme de cloche pour les petits diamètres montre la répartition statistique des gouttes formées lors de la rupture du sac. La queue exponentielle traduit, elle, la fragmentation du bourrelet entourant le sac.

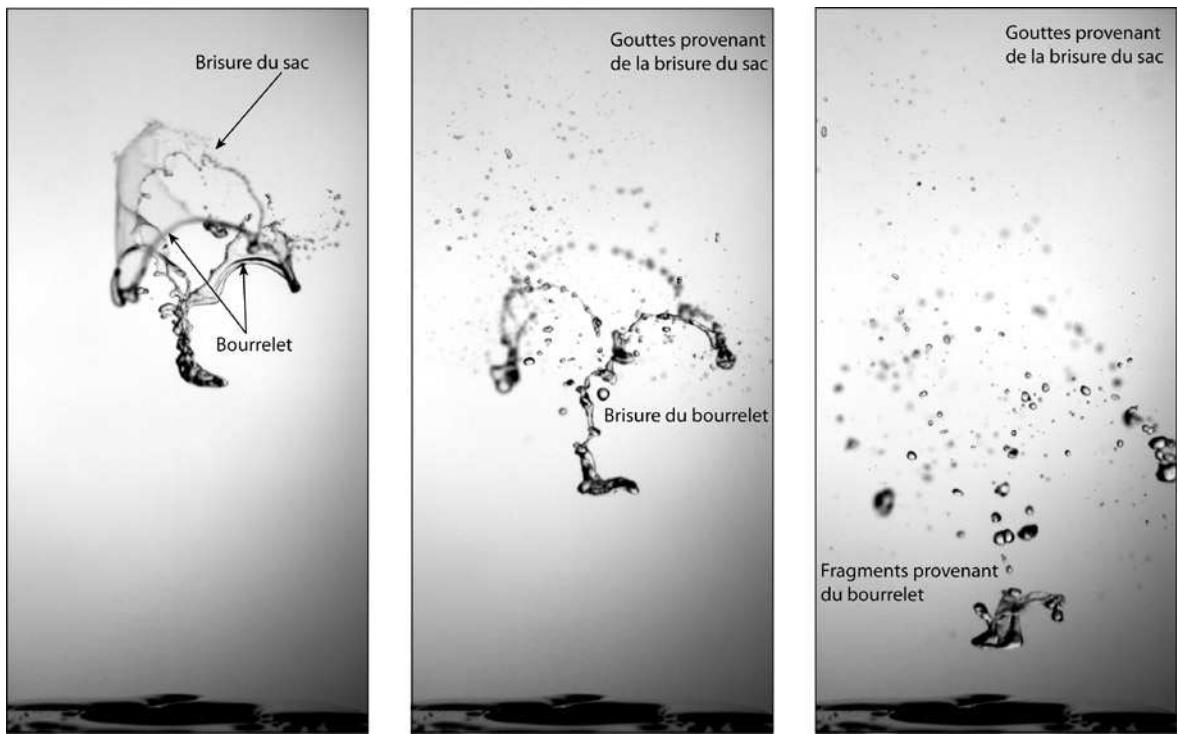


FIG. 3.20 – Détail sur la fragmentation d'une goutte au sein d'un courant gazeux pour trois instants successifs. Le diamètre initial est  $d_0 = 12$  mm.

La figure 3.21 montre les mêmes distributions dans les unités adimensionnées  $d/\langle d \rangle$ . Les distributions se superposent en une seule courbe maîtresse, signe que l'atomisation se fait de manière auto-similaire. Le diamètre initial  $d_0$  ne conditionne pas la forme de la distribution mais fixe uniquement le diamètre moyen des fragments. La pente de la queue exponentielle est quant à elle déterminée par la taille moyenne des fragments.

Pour vérifier ce caractère auto-similaire, c'est-à-dire cette indépendance avec la taille initiale, nous avons comparé deux images provenant de deux séries expérimentales différentes. Ces deux images montrent des gouttes après fragmentation dont le diamètre initial est égal à 4.5 mm et 12 mm. Les images sont choisies de manière à ce qu'initialement, chaque goutte soit représentée sur l'image avec la même surface apparente. Nous avons donc changé la distance de prise de vue en fonction du diamètre initial.

La figure 3.22 montre ces deux images. Nous observons que les tailles de fragments sont effectivement comparables en surface apparente pour chacune des deux images. Cependant, nous remarquons qu'il n'y a pas le même nombre de fragments. Plus le diamètre initial est grand et plus le nombre de fragments est important.

### 3.7.4 Comparaison avec les mesures météorologiques

Nous pouvons comparer nos résultats avec certaines observations météorologiques, en particulier celle de Marshall et Palmer [44]. La figure 3.23 montre leur principal résultat, la

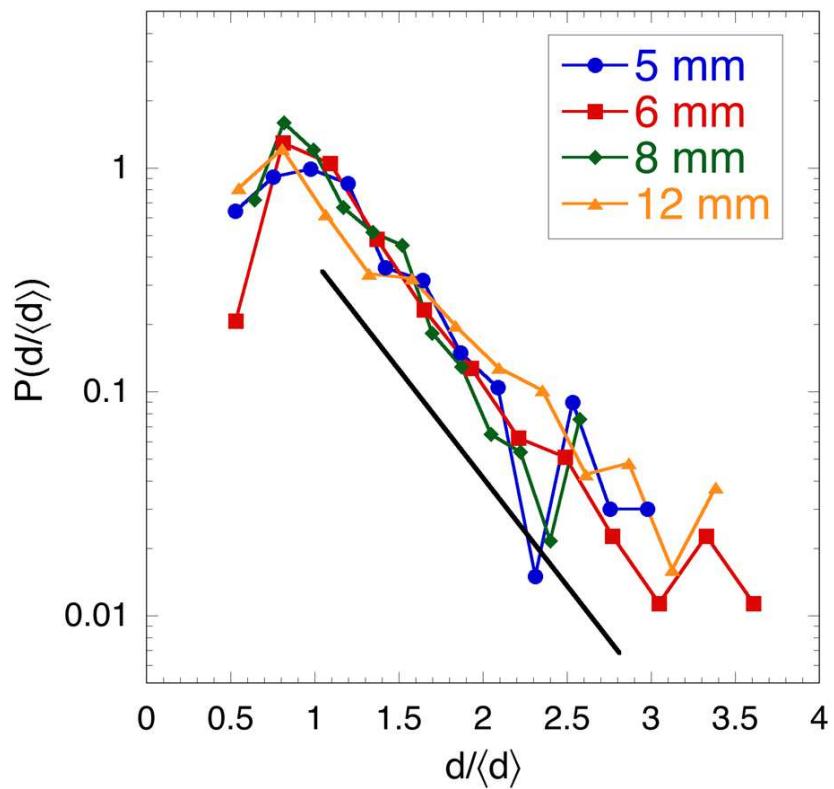


FIG. 3.21 – Distributions des tailles de gouttes pour plusieurs diamètres  $d_0$  initiaux.

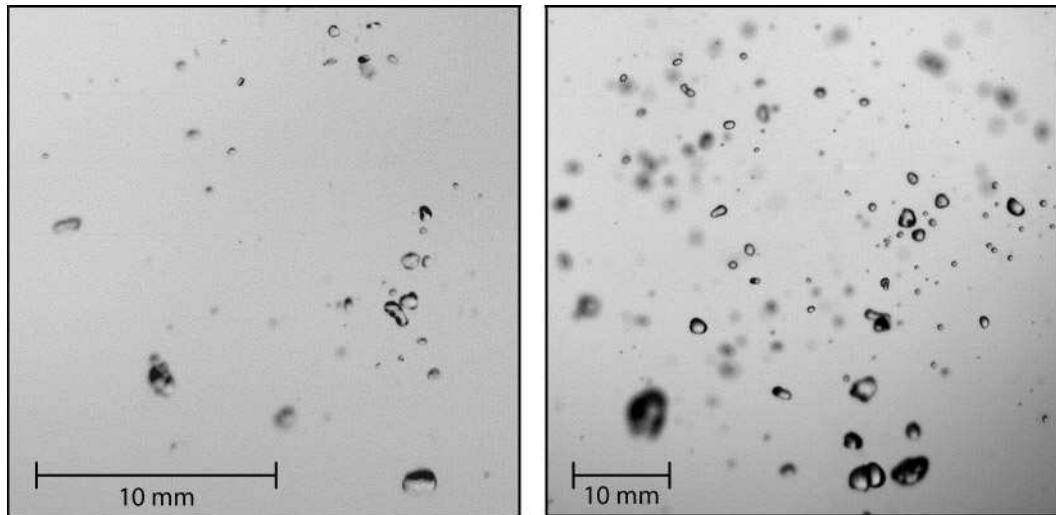


FIG. 3.22 – Exemples d'atomisation pour deux diamètres initiaux différents. A gauche 4.5 mm et à droite 12 mm.

distribution des tailles de gouttes dans la pluie en fonction de son intensité. Les distribu-

tions sont plus larges lorsque l'intensité de la pluie est plus importante. Ces distributions exponentielles ainsi que la différence de pente est similaire aux mesures que nous avons effectuées précédemment. En particulier, les distributions montrées sur la figure 3.19

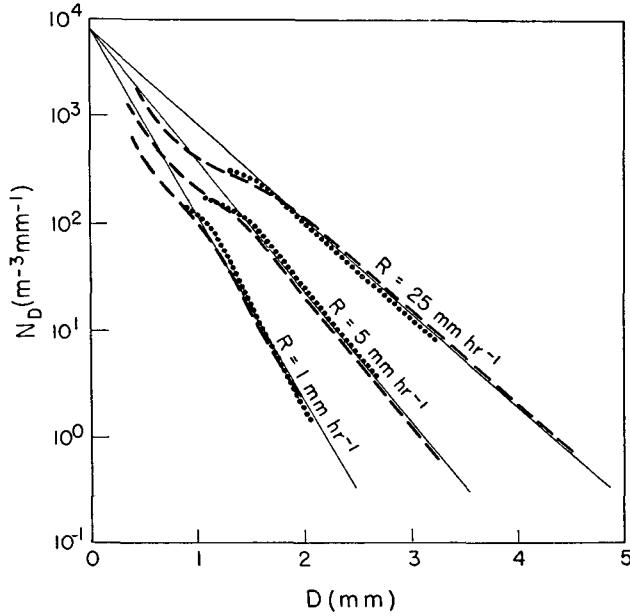


FIG. 3.23 – Fonction de distribution en trait plein comparé avec différentes observations.

Le résultat principal est que les distributions se mettent sous une forme exponentielle :

$$n(d) = n_0 e^{-\Lambda d} \quad (3.94)$$

Avec  $\Lambda$  un paramètre dépendant de l'intensité de la pluie, caractérisée ici par  $R$  qui correspond à la pluviométrie. On remarque déjà que  $n_0$  est indépendant de  $R$ . Il vaut environ  $0.08 \text{ cm}^{-4}$ . Une mesure de  $\Lambda$  donne :

$$\Lambda = 41 R^{-0.21} \text{ cm}^{-1} \quad (3.95)$$

Le terme de pluviométrie peut être ré-exprimé en terme de débit. La pluviométrie s'exprime en unité de longueur par unité de temps. Il représente la quantité d'eau que l'on reçoit par unité de temps. En multipliant ce terme par une unité de surface  $S$ , on obtient le volume d'eau de pluie reçu par unité de temps, c'est-à-dire un débit  $Q$  :

$$R = \frac{Q}{S} = \langle n V d^3 \rangle \quad (3.96)$$

où l'opérateurs  $\langle \rangle$  désignent une moyenne sur les diamètres  $d$ . La quantité  $V(d)$  représente la vitesse de chute d'une goutte de taille  $d$  et  $n(d)$  le nombre de gouttes de taille  $d$ . Autrement dit en exprimant ces moyennes sur les diamètres sous forme intégrale :

$$R \sim \int n(d) V(d) d^3 dd \quad (3.97)$$

Si on considère une région éloignée de la zone de création des gouttes de pluie, la vitesse de chute est égale à la vitesse de chute limite, soit quand la force de pression dynamique égalise le poids de la goutte :

$$\frac{1}{2}C_d d^2 \rho_a V^2 \sim \rho d^3 g \quad (3.98)$$

Avec  $C_d$  un coefficient de frottement d'ordre 1. Soit alors une vitesse limite de l'ordre de :

$$V(d) = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_a}} \sqrt{gd} \quad (3.99)$$

On suppose également que l'histogramme de la taille des gouttes  $n(d)$  se met sous la forme suivante :

$$n(d) = n_0 f\left(\frac{d}{\langle d \rangle}\right) \quad (3.100)$$

Avec  $n_0$  une constante indépendante de  $d$  et  $\langle d \rangle$ . En remplaçant les expression de la vitesse de chute et du nombre de gouttes dans l'équation 3.97, on obtient l'expression suivante :

$$R \sim \sqrt{\frac{\rho}{\rho_a}} g^{\frac{1}{2}} n_0 \int f\left(\frac{d}{\langle d \rangle}\right) d^{\frac{1}{2}} d^3 dd \quad (3.101)$$

Soit en utilisant la variable  $X = \frac{d}{\langle d \rangle}$  :

$$R \sim \sqrt{\frac{\rho}{\rho_a}} g^{\frac{1}{2}} n_0 \langle d \rangle^{\frac{9}{2}} \int f(X) X^{\frac{7}{2}} dX \quad (3.102)$$

Marshall et Palmer mesurent une distribution exponentielle, autrement dit la fonction  $f(X)$  s'écrit alors :

$$f(X) = e^{-X} \quad (3.103)$$

Ces fonctions de distribution ne sont qu'une partie des fonctions de distribution réelles représentées par des fonctions gamma. Ces fonctions admettent une queue exponentielle de plus en plus large et importante à mesure que le paramètre d'ordre de la fonction gamma augmente.

Ce qui signifie que le paramètre  $\Lambda$  est équivalent au diamètre moyen  $\langle d \rangle$ , soit alors :

$$\langle d \rangle \equiv \Lambda^{-1} \sim \left( \frac{R}{\sqrt{\frac{\rho}{\rho_a}} g^{\frac{1}{2}} n_0} \right)^{\frac{2}{9}} \quad (3.104)$$

Soit :

$$\Lambda \sim R^{-\frac{2}{9}} \quad (3.105)$$

Résultat à comparer avec la relation 3.95, qui donne comme exposant sur  $R$  la valeur de 0.21 avec  $2/9 = 0.222$ . L'accord quantitatif sur l'exposant est excellent.

Cette hypothèse prévaut uniquement dans le cas d'une dépendance linéaire entre le diamètre initial et le diamètre moyen des fragments. Or, nous avons vu précédemment

qu'il y avait un phénomène de saturation de plus en plus important au fur et à mesure que l'on augmente le diamètre initial. Toutefois pour les premiers points, il existe une relation linéaire entre le diamètre initial et le diamètre moyen. Nous observons également que la saturation intervient uniquement pour des diamètres supérieurs à deux fois la longueur capillaire, c'est-à-dire dans notre cas environ 6 mm. Dans une pluie réelle, la longueur capillaire fixe un rayon maximal de taille de goutte. Au-delà, la goutte se déforme et se scinde en plusieurs parties. Par conséquent, nous pouvons utiliser l'hypothèse d'une dépendance linéaire entre le diamètre moyen et la taille initiale.

On peut ensuite aller plus loin et chercher l'ordre de grandeur du préfacteur :

$$\sqrt{\frac{\rho}{\rho_a}} g^{\frac{1}{2}} n_0 \int_0^\infty X^{\frac{7}{2}} e^{-X} dX \quad (3.106)$$

Or le terme intégral est une intégrale connue et vaut :

$$\int_0^\infty X^{\frac{7}{2}} e^{-X} dX = \frac{105 \sqrt{\pi}}{16} \approx 11.6 \quad (3.107)$$

On trouve alors :

$$\left( 11.6 \sqrt{\frac{\rho}{\rho_a}} g^{\frac{1}{2}} n_0 \right)^{\frac{2}{9}} = 4.6 \text{ mm}^{-1} \quad (3.108)$$

Soit un accord parfait avec les résultats de Marshall et Palmer.

## 3.8 Conclusions

Les nombreuses études sur le *bag-breakup* portent essentiellement sur des systèmes de tubes à choc où la goutte initiale est littéralement soufflée. Du fait de la violence du choc, peu d'études ont pu être réalisées sur la taille des fragments obtenus. Nos travaux montrent que dans le cas d'un jet gazeux progressif, l'instant primordial du phénomène est le changement de topologie avec la formation d'une forme de crêpe. On confirme également que le nombre de Weber associé à cet instant est constant et indépendant de la taille de la goutte.

Une modélisation de l'aplatissement de la goutte puis du gonflement du sac permet de comprendre la totalité du processus. Nous montrons comment et pourquoi une goutte dans un jet se déforme en globule. L'épaisseur centrale de la couche liquide diminue de manière exponentielle tandis que les effets capillaires s'opposent à l'extension radiale de la goutte. Cette compétition entre extension et rappel capillaire initie la formation d'un bourrelet liquide sur le pourtour de la goutte. La taille de ce bourrelet fixe alors la taille des fragments lors de l'atomisation. La différence d'épaisseur le long d'un rayon couplé à la différence de pression de part et d'autre du liquide, brise la symétrie et crée une poche gazeuse entourée d'une nappe liquide. Cette nappe est entraînée par le jet, formant et gonflant le sac. La taille de ce sac varie de manière quadratique avec le temps. Nous

montrons quelles sont les tailles et les temps caractéristiques qui pilotent cet aplatissement puis ce gonflement.

Le dispositif expérimental permet une étude statistique sur la taille des fragments. Nos résultats permettent d'expliquer les observations météorologiques. On montre que le diamètre moyen des fragments varie avec la taille initiale et semble saturer vers une taille moyenne égale à la longueur capillaire. On montre également que les distributions ont une forme universelle en  $d/\langle d \rangle$ . Par ailleurs, un simple modèle fondé sur la brisure d'une goutte unique dans ces unités-là retrouve de manière très précise des observations naturelles. Notre modèle ne fait pas intervenir d'interactions entre les gouttes initiales.



# Chapitre 4

## Impact sur un solide

### 4.1 Introduction

Nous venons de voir que lors d'un impact gazeux, la déformation et la brisure se font toujours aux mêmes nombres de Weber. Il n'est pas possible d'analyser la dépendance de la forme de la distribution des tailles des fragments ou de leur diamètre moyen en fonction du nombre de Weber, le seul paramètre étant ici le diamètre initial  $d_0$ .

Nous nous sommes donc intéressés à un impact différent, l'impact sur un solide. La littérature abonde d'études sur les impacts de liquide sur des parois solides. Yarin [77] rappelle les différents types d'impacts et liste les derniers résultats connus. Nous n'allons pas nous intéresser au cas des impacts liquide-liquide, ni aux impacts liquide à faible profondeur. Seuls certains impacts liquide-solide particuliers nous intéressent ici.

Ces questions ont de très nombreuses applications : par exemple les imprimantes à jet d'encre fonctionnent en projetant sur une feuille de papier de très petites gouttes d'encre. On retrouve aussi ces impacts dans le refroidissement de surfaces chaudes par projection de gouttes d'eau. D'une manière naturelle, les impacts d'eau sur des surfaces froides telles que des câbles électriques ou des ailes d'avions engendrent la formation de couches de glace sur ces surfaces pouvant entraîner la rupture du matériau. Les impacts des gouttes de pluie sur les végétaux peuvent aussi propager diverses substances, germes ou maladies en percutant une surface contaminée et se propager via les gouttelettes créées lors du choc et de la brisure qui en résulte.

Toutefois, les parois sur lesquelles on observe ces impacts sont très grandes par rapport au diamètre initial de la goutte. L'existence de la paroi entraîne une dissipation visqueuse lors de l'expansion de la nappe. Du fait de ces frottements, ce type d'impact est très éloigné de nos impacts gazeux.

C'est pourquoi nous avons étudié les impacts sur des cibles de taille comparable à la goutte initiale. Du fait de sa petite taille, la dissipation visqueuse n'a lieu qu'au moment du choc sur un temps très court. Le reste de l'évolution se fait alors dans l'air ambiant, sans aucune paroi. On retrouve donc une certaine analogie avec les impacts gazeux, seule la nature du choc diffère. Cette fois le nombre de Weber au moment du choc n'est plus

constant, il dépend, entre autres, de la vitesse au moment de l'impact. Nous allons donc nous intéresser au devenir de la goutte après impact et comprendre quelles sont les influences du diamètre initial et de la vitesse de chute sur la dynamique de la nappe et sur la brisure.

Rohzkov, Prunet-Foch et Vignes-Adler [51] ont initié l'étude de ce type d'impact. Plus récemment, Bakshi, Roisman et Tropea [3] se sont intéressés aux impacts sur des sphères dont le diamètre est comparable à celui des gouttes. Leurs études s'inscrivent dans le prolongement des études sur les impacts liquide-solide infini. Certaines personnes se sont intéressées aux chocs sur des surfaces inclinées ou rugueuses. La question qu'elles se posent est la suivante : que se passe-t-il si la taille d'une goutte devient comparable aux irrégularités de la paroi solide ? Ce type de situation est le cas typique que l'on retrouve dans les imprimantes à jet-d'encre. Pour que ces dernières soient de plus en plus précises, il faut qu'elles puissent envoyer des gouttes les plus petites possibles. Actuellement, les gouttes créées par une buse d'imprimante sont de taille comparable aux irrégularités du papier. La dynamique de l'impact est donc a priori différente de celle sur une surface parfaitement plane et infinie. L'étude de Rohzkov, Prunet-Foch et Vignes-Adler porte sur la structure de la nappe, des flux entre le centre de la goutte et le bourrelet et sur la déstabilisation.

## 4.2 Méthodes d'investigation

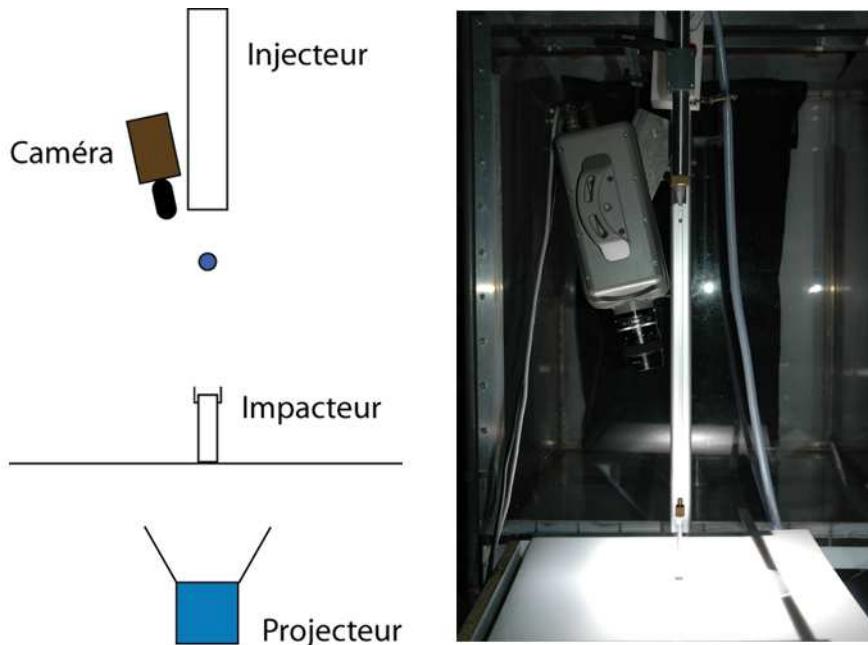


FIG. 4.1 – Schéma de principe de l'impact d'une goutte.

Les gouttes sont créées à l'aide d'un injecteur par la méthode de la goutte pendante. On place un impacteur solide de section comparable à celle des gouttes juste en-dessous.

On enregistre le phénomène avec une caméra rapide Phantom V5, chaque image a une résolution maximale de 1024x1024 pixels, l'intensité lumineuse sur chaque pixel est codée sur 8 bits, la vitesse d'acquisition dépend de la taille des images et vaut typiquement 1000 images par seconde pour des images de 1024 pixels de côté. On éclaire le tout de manière directe en intercalant entre l'impacteur et la source lumineuse un écran diffuseur. L'éclairage provient d'un projecteur à lumière continue HMI de 575 W de puissance.

## 4.3 Impacts sur une cible de petite taille

### 4.3.1 Chronologie

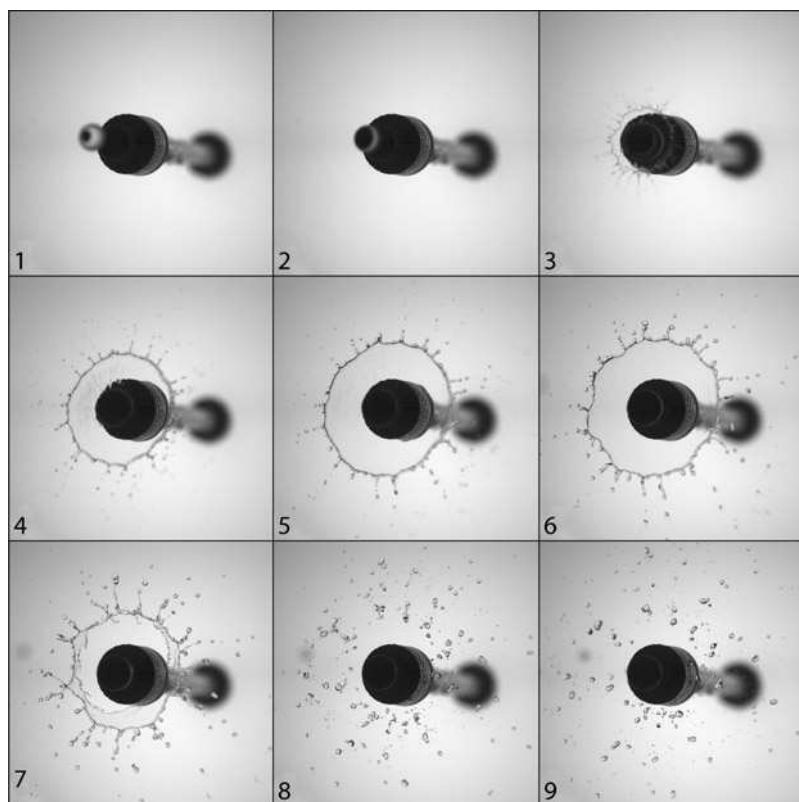


FIG. 4.2 – Chronologie de l'impact. Le temps va de gauche à droite et de haut en bas. Le temps entre chaque image est de  $3/1000$  s. La taille de la goutte initiale est de  $d_0 = 6$  mm, chaque vignette fait environ 53 mm de largeur et de hauteur et le nombre de Weber associé est :  $We = 1400$ .

La figure 4.2 montre une série d'images détaillant la chronologie de l'impact. La goutte initiale tombe verticalement au-dessus d'une cible (image 1 et 2). Une fois que la goutte touche la cible, une nappe liquide se forme et on observe son expansion (image 3 à 6). Le film liquide au centre devient de plus en mince et finit par casser. Le bord extérieur recesse,

tandis qu'un bord intérieur, dû à la rupture du film liquide au centre de la nappe, croît radialement (image 7). La rencontre des deux bourrelets liquides initie la brisure (image 8 et 9).

### 4.3.2 Influence du nombre de Weber

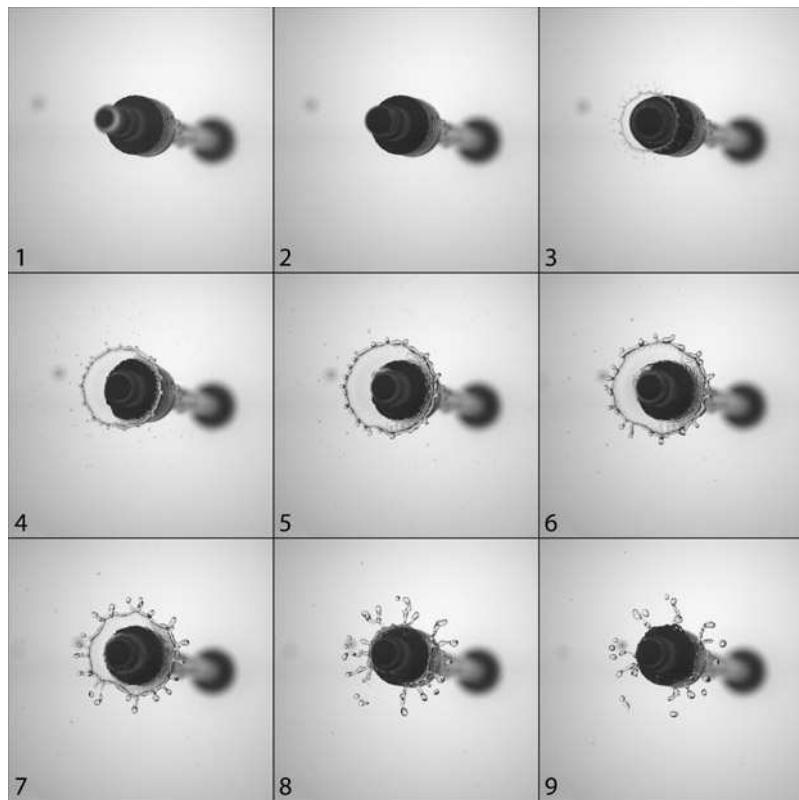


FIG. 4.3 – Chronologie de l'impact. Le temps va de gauche à droite et de haut en bas. Le temps entre chaque image est de  $3/1000$  s. La taille de la goutte initiale est de 6 mm, chaque vignette fait environ 53 mm de largeur et de hauteur et le nombre de Weber associé est :  $We = 500$ .

Pour ce type d'impact les différents paramètres physiques importants sont le diamètre initial  $d_0$  de la goutte, la vitesse  $U_0$  au moment de l'impact et la tension de surface  $\sigma$ .

Le rôle de la viscosité est délicat. Après le choc initial, la nappe se développe dans l'air ambiant, la dynamique est alors inertielle. Cependant, pendant le choc, la viscosité est déterminante pour connaître la vitesse d'éjection du fluide. Ce problème est très similaire au cas rencontré par Antkowiak, Bremond, Le Dizès et Villermaux [2] lors de leur étude sur la déformation et l'évolution d'une interface liquide située dans un tube lors d'un impact. Toutefois, leur dynamique se déroule loin de toute surface solide et par conséquent, la viscosité n'intervient pas durant l'impact. Les effets de la viscosité se font ressentir lors de l'évolution du jet liquide. Dans notre cas, la viscosité intervient au moment du choc,

elle va, entre autres, jouer un rôle sur la vitesse d'expansion de la nappe. Après le choc initial, la viscosité est présente lors de la formation et de l'évolution des ligaments liquides ainsi qu'au sein de la nappe, puisque nous montrons qu'il existe des différences de vitesse. Durant nos expériences, nous n'avons pas fait varier la viscosité du fluide, par conséquent, nous n'en tiendrons pas compte dans le reste de notre exposé.

En regardant la chronologie, on remarque qu'au moment de l'impact, il y a un transfert de quantité de mouvement. Initialement, nous avons un mouvement de chute vertical et après l'impact, un mouvement radial d'expansion selon un plan horizontal. On remarque aussi que la tension de surface tend à ramener la nappe vers le centre. On se retrouve dans une configuration où deux forces sont en compétition, une force inertielle et une force de tension de surface. C'est donc tout naturellement que l'on va utiliser le nombre de Weber qui exprime le rapport de ces deux forces :

$$We = \frac{\rho U_0^2 d_0}{\sigma} \quad (4.1)$$

Faire varier l'un de ces trois paramètres revient à faire varier le nombre de Weber, nous avons donc fait uniquement varier la vitesse d'impact  $U_0$ . Les figures 4.2 et 4.3 montrent la chronologie pour deux impacts ayant des vitesses différentes. Le premier se fait avec un nombre de Weber égal à 1400, tandis que le second avec un nombre de Weber égal à 500. On constate des différences notables, l'expansion de la nappe est d'autant plus rapide que le nombre de Weber est grand, la taille maximale de la nappe est elle aussi d'autant plus grande que le nombre de Weber est grand. On remarque aussi que le nombre de gouttes augmente tandis que leur taille diminue.

### 4.3.3 Temps d'impact

La figure 4.4 représente une série d'images montrant l'impact d'une goutte vue de côté. Le nombre de Weber est d'environ  $We = 1400$ . Le temps va de gauche à droite et de haut en bas. La fréquence d'acquisition est de 1500 images par secondes. La première image montre la goutte sur le point de toucher la cible. Sur la suivante, on observe son écrasement ainsi que les prémisses de la future nappe. Sur les deux images suivantes, on remarque la disparition de la goutte initiale. Tout le liquide passe de la forme initiale vers la nappe en seulement 2 images. Le temps d'impact est très court devant le temps de vie de la nappe qui s'étend à cette fréquence entre 40 et 50 images.

L'impact est visible sur les images 2 et 3. A partir de l'image 4 on observe l'évolution de la nappe avec une expansion radiale. A partir de l'image 8, la nappe passe à travers l'impacteur et continue de chuter. Ceci n'entraîne pas de rupture du film. Elle interviendra plus tard, lorsque la nappe liquide deviendra trop mince.

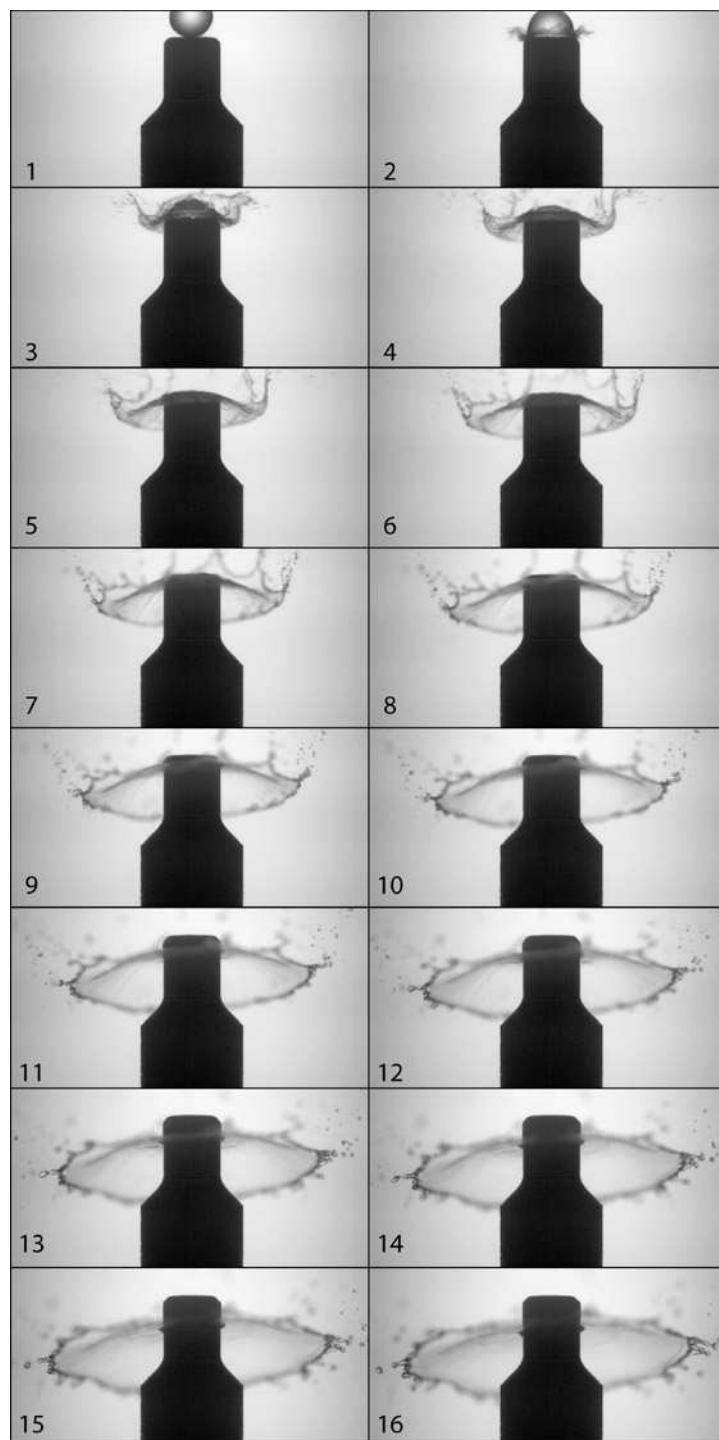


FIG. 4.4 – Vue de côté d'un impact. Le temps va de gauche à droite et de haut en bas. L'intervalle de temps entre chaque image est de  $1/1500$  s, la goutte initiale a un diamètre de 6 mm, chaque vignette mesure environ 50 mm de large et 25 mm de haut. Le nombre de Weber associé est de :  $We = 1400$ .

## 4.4 Évolution du bourrelet extérieur

Nous allons à présent nous intéresser à l'évolution de la nappe, c'est-à-dire caractériser sa croissance et sa récession, ainsi que sa taille maximale. On constate que plus la vitesse d'impact est grande, plus la taille maximale de la nappe grandit. Nous avons donc mesuré le rayon maximal que pouvait prendre la nappe en fonction du nombre de Weber d'impact. Soit  $r_{max}$  le rayon maximal de la nappe liquide.

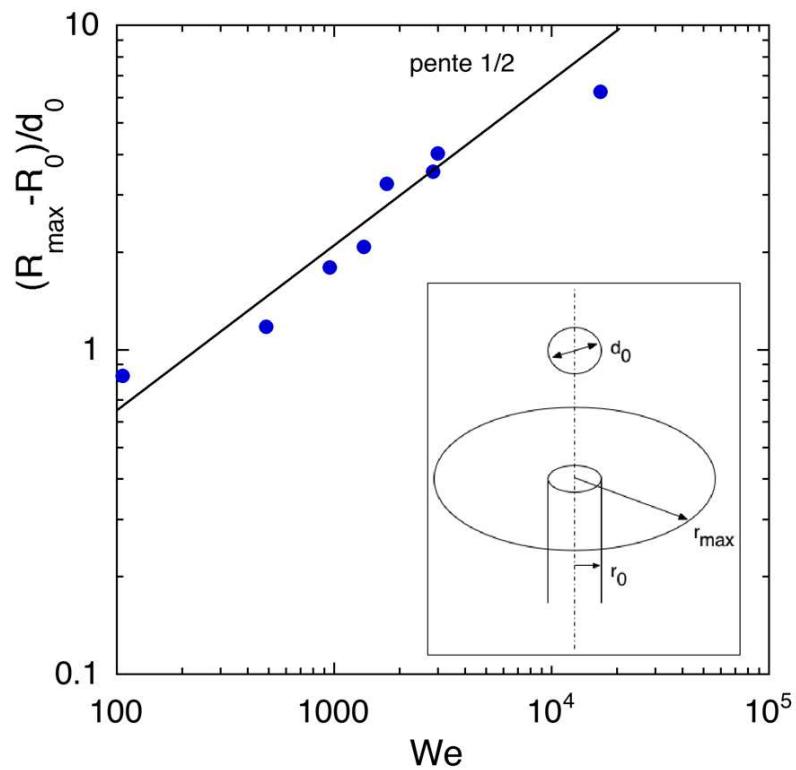


FIG. 4.5 – Taille maximale de la nappe en fonction du nombre de Weber.

La figure 4.5 montre la dépendance du rayon maximal  $r_{max}$  au nombre de Weber. Comme le rayon est calculé à partir du centre de l'impacteur, nous avons corrigé  $r_{max}$  en lui retranchant le rayon initial  $r_0$ . Lorsque le nombre de Weber d'impact est nul, autrement dit lorsqu'il n'y a pas d'impact, la taille maximale est donnée par le diamètre initial  $r_{max} \approx d_0/2 \approx r_0$ . Or, comme le diamètre de la cible est quasiment identique au diamètre initial le rayon maximal  $r_{max}$  s'apparente au rayon initial  $r_0$  pour un nombre de Weber nul. Ainsi, lorsque le nombre de weber est égal à zéro, le rayon maximal corrigé vaut lui aussi zéro. Ce rayon corrigé est adimensionné par le diamètre initial de la goutte  $d_0$ .

Dans une représentation en coordonnées logarithmiques, on remarque que les différentes valeurs mesurées sont alignées suivant une droite de pente égale à 1/2 sur un peu plus de

deux décades. Le rayon maximal de la nappe varie comme la racine carrée du nombre de Weber :

$$\frac{r_{max} - r_0}{d_0} = \frac{1}{10} We^{\frac{1}{2}} \quad (4.2)$$

Nous avons également accès à l'évolution temporelle du rayon de la nappe. Le graphe 4.6 représente la variation du rayon  $r$  au cours du temps pour deux paramètres d'impact différents.

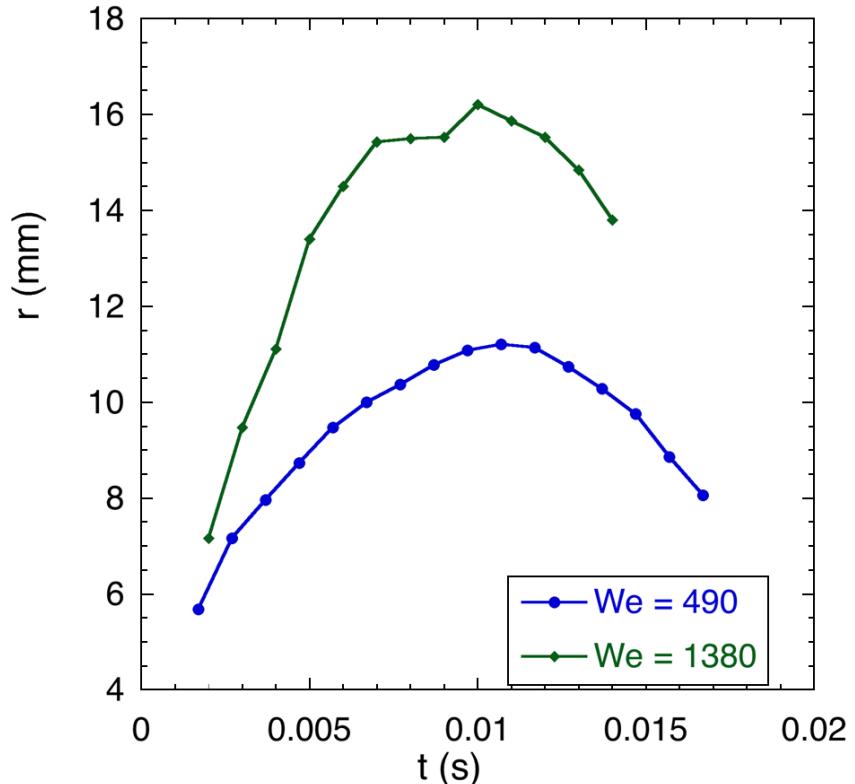


FIG. 4.6 – Évolution temporelle du rayon pour deux nombres de Weber différents.

On retrouve l'effet du nombre de Weber sur la taille de la nappe. Plus ce dernier est grand et plus le diamètre de la nappe est grand. On remarque que la taille de la nappe augmente au cours du temps jusqu'à atteindre un maximum,  $r_{max}$ . Cet instant-là est le même pour les deux courbes. Ensuite, la nappe récessse sous l'effet de la tension de surface et se brise quelques instants plus tard. Le dernier point sur la courbe correspond à la dernière image sur laquelle il était possible de mesurer un rayon. On remarque que cet instant est encore le même pour les deux courbes. Quelque soit le paramètre d'impact, le temps nécessaire pour atteindre le rayon maximal  $r_{max}$  puis l'instant de la brisure est le même. Ces temps sont indépendants du nombre de Weber.

A présent, nous allons utiliser une manière plus naturelle de représenter l'évolution des rayons. Pour cela, il nous faut un temps de référence. Etant donné l'indépendance des

temps avec le nombre de Weber, nous pouvons exclure l'utilisation de la vitesse initiale  $U_0$ . Le modèle type masse-ressort fait naturellement intervenir un temps  $T$  (équation 4.14) indépendant de la vitesse initiale et correspondant au temps de vibration de la goutte :

$$T = \sqrt{\frac{\rho d_0^3}{24 \sigma}} \quad (4.3)$$

Le graphique 4.7 représente l'évolution temporelle du rayon de la nappe. Le temps est adimensionné par le temps de vibration  $T$ . Le rayon exprimé  $r$  est celui mesuré et nous l'adimensionnons par le rayon maximal  $r_{max}$ . Nous voyons que, pour 5 paramètres d'impact différents, les courbes se superposent bien. Ceci indique que le nombre de Weber au moment de l'impact détermine l'amplitude de l'extension de la nappe. Cependant la dynamique de la nappe est indépendante du nombre de Weber.

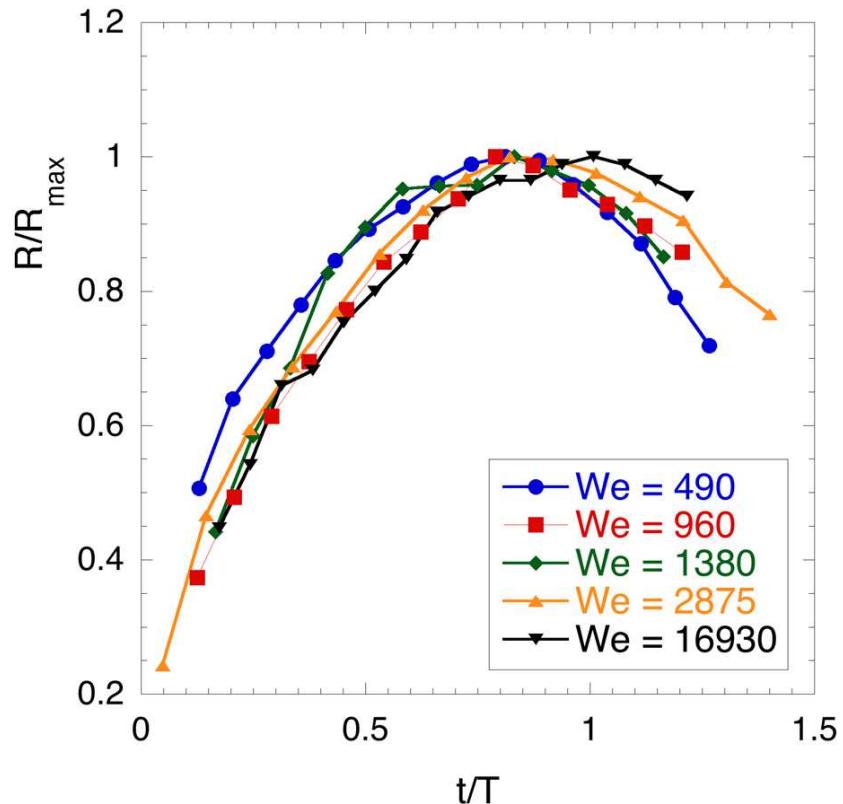


FIG. 4.7 – Évolution adimensionnée du rayon.

## 4.5 Épaisseur de la nappe

La figure 4.2 vue précédemment nous montre en plusieurs images le déroulement d'un impact. On remarque que lorsque le bourrelet commence à récesser, un trou apparaît au

centre de la nappe. On observe alors la création d'un bourrelet interne que l'on peut suivre sur plusieurs images. Taylor [68] et Culick [19] montrent que la vitesse de récession du bord d'une nappe dépend uniquement de la tension de surface  $\sigma$ , de l'épaisseur  $h$  et de la masse volumique  $\rho$  :

$$U = \left( \frac{2\sigma}{\rho h} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.4)$$

Connaissant la valeur de la vitesse  $U$  de récession, nous pouvons déterminer l'épaisseur de la nappe  $h$ . Nous représentons l'évolution du bord interne  $r$  de la nappe au cours du temps sur la figure 4.8. L'inversion de l'expression de la vitesse nous donne l'épaisseur de la nappe  $h$ .

$$h = \frac{2\sigma}{\rho U^2} \quad (4.5)$$

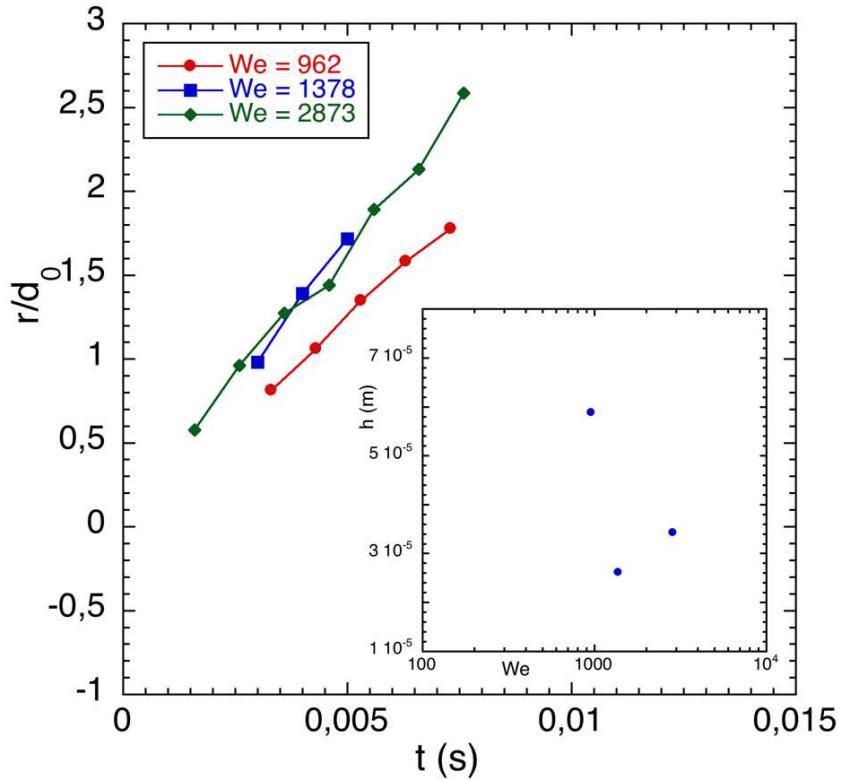


FIG. 4.8 – Évolution du bord interne de la nappe au cours du temps pour trois paramètres d'impact différents. En insert : dépendance de l'épaisseur de la nappe avec le nombre de Weber.

L'insert sur la figure 4.8 nous montre l'épaisseur de la nappe pour trois nombres de Weber différents. On remarque que la vitesse du bord interne est constante au cours du

temps. Ceci nous indique que l'épaisseur de la nappe est constante pendant ces instants. On remarque également que les pentes, donc les vitesses, sont identiques. L'épaisseur de la nappe formée après le choc est indépendante du nombre de Weber.

La nappe liquide formée lors de l'impact a, au moment de la rupture, une épaisseur d'environ  $40\ \mu\text{m}$ . Connaissant la taille maximale de la nappe et son épaisseur, nous pouvons estimer la quantité de liquide comprise dans la nappe. Pour une goutte de diamètre initial  $d_0 = 6\ \text{mm}$ , on obtient un volume initial  $V_0$  de :

$$V_0 = \frac{4\pi}{3} \left( \frac{d_0}{2} \right)^3 = 1.13 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3 \quad (4.6)$$

Pour un nombre de Weber d'impact de 1400, le rayon maximal atteint par la nappe est de 17 mm, le volume liquide contenu dans la nappe est :

$$V_{\text{nappe}} \approx \pi r_{\text{max}}^2 h = 3.6 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3 \quad (4.7)$$

Dans ce cas, le volume dans la nappe équivaut à un tiers du volume initial. Plus généralement, la fraction de liquide contenu dans la nappe est égal à :

$$\frac{V_{\text{nappe}}}{V_0} = \frac{24 r_{\text{max}}^2 h}{4 d_0^3} \quad (4.8)$$

En utilisant la relation liant le rayon maximal au nombre de Weber :

$$\frac{V_{\text{nappe}}}{V_0} \sim \frac{6 h}{10 d_0} We^2 \quad (4.9)$$

Nous venons de voir que l'épaisseur  $h$  de la nappe est constante, la fraction liquide contenue dans la nappe varie comme le carré du nombre de Weber. Ce calcul d'estimation nous donne une limite sur l'hypothèse d'une masse de la nappe négligeable par rapport à la masse du bourrelet. Cette estimation donne également une estimation d'un nombre de Weber critique pour lequel le volume de la nappe deviendrait supérieur au volume initial. Cette éventualité étant impossible, cette limite nous indique que pour des nombres de Weber supérieurs nous devrions observer une autre dynamique de l'impact. Lors de nos expériences, nous nous sommes toujours trouvés en dessous de cette limite.

## 4.6 Modèle masse ressort

On représente sur le schéma 4.9 une idéalisation de l'impact d'une goutte sur un substrat solide de taille comparable. À gauche, juste avant impact, la goutte chute avec une vitesse  $U_0$ . À droite, une modélisation de la nappe caractérisée par une faible épaisseur au centre et un bourrelet liquide en périphérie. On suppose que l'ensemble de la masse liquide  $M$  est contenue dans ce bourrelet.

En effectuant un bilan des forces exercées sur la nappe, on s'aperçoit qu'il n'existe qu'une seule force  $F$ , due aux forces de tension de surface. Cette force est proportionnelle

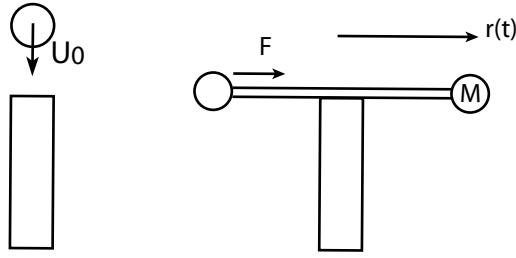


FIG. 4.9 – Idéalisation de l'impact.

à la dimension du bourrelet liquide, c'est-à-dire à la taille  $r$  de la nappe. De plus, elle est dirigée vers l'intérieur et s'oppose donc au mouvement. Un système équivalent en mécanique est le système masse-ressort.

Les conditions initiales du système sont les suivantes :

$$r(t=0) = 0 \quad (4.10)$$

et

$$\dot{r}(t=0) = U_0 \quad (4.11)$$

En appliquant le premier principe de la dynamique, il vient :

$$M\ddot{r} = -\sigma 2\pi r \quad (4.12)$$

d'où :

$$\ddot{r} + 2\pi \frac{\sigma}{M} r = \ddot{r} + \frac{r}{T^2} = 0 \quad (4.13)$$

Or  $M = \rho \frac{\pi}{12} d_0^3$ , on peut donc exprimer la constante de temps  $T$  en fonction des différents paramètres physiques :

$$T^2 = \frac{M}{2\pi\sigma} = \frac{\rho\pi d_0^3}{24\pi\sigma} = \frac{1}{24} \frac{\rho d_0^3}{\sigma} \quad (4.14)$$

L'équation différentielle se résout simplement et on trouve comme expression pour  $r$  :

$$r(t) = A \sin\left(\frac{t}{T} + \phi\right) \quad (4.15)$$

En utilisant les conditions initiales, on trouve une expression pour  $A$  et  $\phi$  et on obtient finalement :

$$r(t) = T U_0 \sin\left(\frac{t}{T}\right) \quad (4.16)$$

On en tire tout de suite  $r_{max} = T U_0$ , ce qui nous donne en remplaçant l'expression de  $T$  :

$$r_{max} = \sqrt{\frac{1}{24} \frac{\rho d_0^3}{\sigma}} U_0 = \frac{d_0}{\sqrt{24}} \sqrt{\frac{\rho d_0 U_0^2}{\sigma}} = \frac{d_0}{\sqrt{24}} W e^{\frac{1}{2}} \quad (4.17)$$

Une première dérivée temporelle nous donne la vitesse :

$$\dot{r}(t) = U_0 \cos\left(\frac{t}{T}\right) \quad (4.18)$$

et la dérivée seconde par rapport au temps nous donne l'accélération :

$$\ddot{r}(t) = -\frac{U_0}{T} \sin\left(\frac{t}{T}\right) \quad (4.19)$$

Connaissant la taille maximale de la nappe et en ayant comme hypothèse que l'ensemble de la masse est contenue dans le bourrelet, il nous est possible de déterminer sa taille. On suppose que le bourrelet est un tore de rayon  $r_{max}$  et de section  $2d_b$ . Le volume d'un tore est donné par la relation suivante :

$$V_b = 2\pi d_b^2 r_{max} = V_0 \quad (4.20)$$

et est égal au volume initial de la goutte, on obtient alors comme expression du diamètre du bourrelet :

$$d_b^2 = \frac{1}{12 r_{max}} (d_0)^3 = \frac{\sqrt{24}}{12} d_0^2 W e^{-\frac{1}{2}} \quad (4.21)$$

La conservation de la masse nous donne :

$$r_{max} \langle d \rangle^2 \sim d_0^3 \quad (4.22)$$

Soit en utilisant l'équation 4.2 pour l'expression du rayon maximal :

$$\langle d \rangle^2 d_0 \left(1 + \frac{1}{5} W e^{\frac{1}{2}}\right) \sim d_0^3 \quad (4.23)$$

d'où

$$\frac{\langle d \rangle}{d_0} \sim \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{5} W e^{1/2}}} \quad (4.24)$$

Soit pour des nombres de Weber supérieur à 1,  $W e \gg 1$

$$\frac{\langle d \rangle}{d_0} \sim W e^{-\frac{1}{4}} \quad (4.25)$$

## 4.7 Vitesse au sein de la nappe

Le fait qu'une majeure partie de la masse liquide se retrouve dans le bourrelet indique qu'il existe une vitesse au sein de la nappe. La détermination de cette vitesse s'effectue en suivant une particule solide piégée dans la nappe au moyen de la caméra rapide. Le protocole est exactement le même que celui décrit par Christophe Clanet et Emmanuel

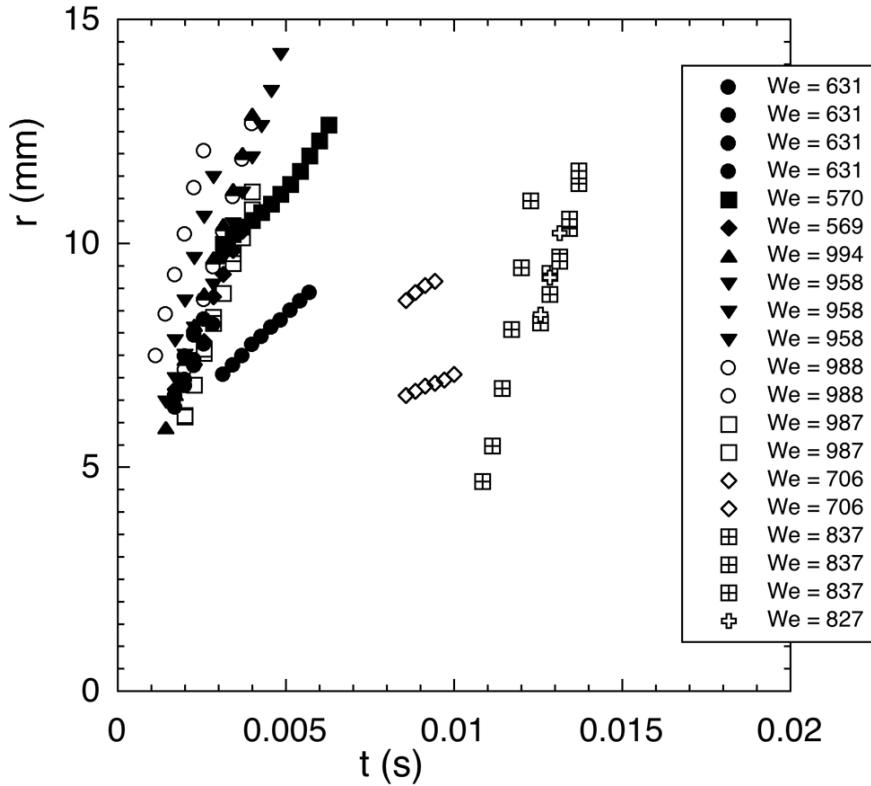


FIG. 4.10 – Position  $r$  des traceurs en fonction du temps pour différents nombres de Weber d’impact.

Villermaux lors de leur étude sur les nappes liquides [18]. La figure 4.12 donne un exemple de suivi.

Les graphiques sur les figures 4.10 et 4.11 montrent la position d’un traceur au cours du temps pour différents paramètres d’impact. La position  $r = 0$  correspond au centre de l’impacteur. La position minimale d’apparition d’un traceur est supérieure à 4 mm. Cette distance correspond au rayon initial de la goutte, c’est pourquoi on ne peut rien suivre en-deçà de cette distance. L’origine des temps correspond au moment de l’impact.

Sur le graphique 4.10, les quatre derniers cas sont à part, de même sur le graphique 4.11, le cas  $We = 720$ , avec comme symbole des triangles pleins renversés  $\blacktriangledown$ , est lui aussi à part. Bien qu’étant singulier par rapport aux autres courbes, ces cas ne sont pas atypiques. Ils correspondent à des situations différentes et peuvent être expliqués.

Avant de continuer sur les vitesses des traceurs dans leur ensemble, analysons ces cas particuliers. Sur le premier graphique, les quatre derniers cas sont singulièrement différents des autres courbes. Nous appelons temps d’apparition  $t_{app}$  l’instant pour lequel un traceur est détecté pour la première fois. Les temps d’apparition des traceurs sont très grands et les vitesses de ces derniers sont comparables aux tout premiers traceurs observables. Cependant, le fait que la vitesse soit différente des autres aux temps longs ne contredit pas les premières observations, c’est-à-dire une diminution progressive de la vitesse. En

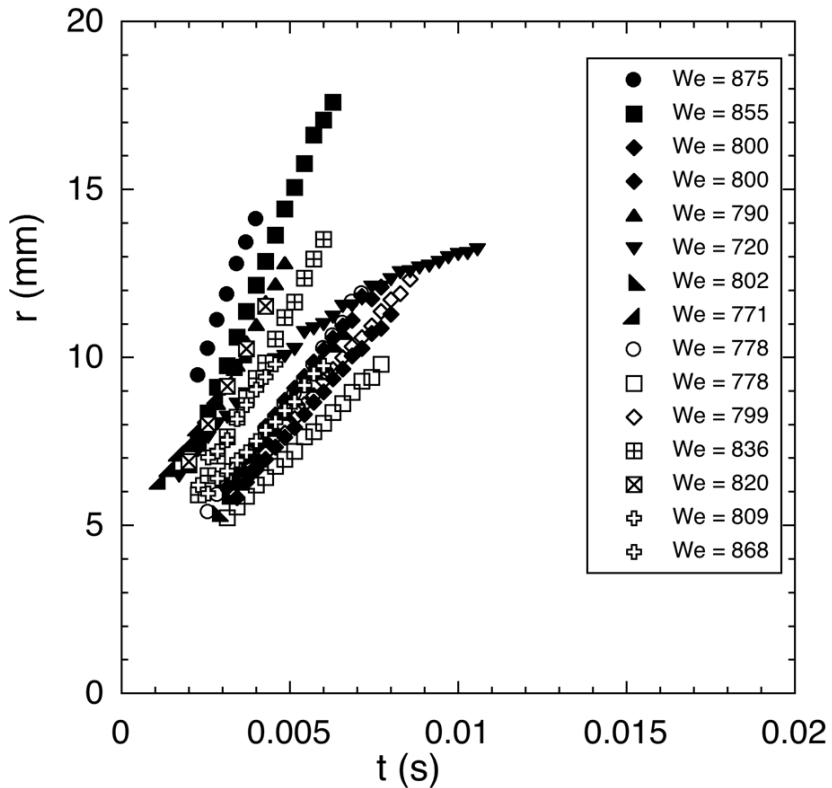


FIG. 4.11 – Position  $r$  des traceurs en fonction du temps pour différents nombres de Weber d’impact.

regardant les images associées, on s’aperçoit que ces traceurs précèdent toujours le bord en expansion d’un trou dans la nappe. Les temps associés à ces traceurs correspondent aux temps de brisure des nappes. C’est à ces instants que la nappe se perce. Le bourrelet interne se propage au sein de la nappe, déplaçant ainsi le liquide en amont. Les traceurs, bien que toujours dans la nappe, sont entraînés par le bourrelet et leurs vitesses sont identiques aux vitesses d’extension des trous au sein de la nappe.

De même, sur le deuxième graphique, on remarque pour ce traceur que sa position ne varie pas linéairement avec le temps. En analysant les images expérimentales dont une série est présentée sur la figure 4.13, on s’aperçoit qu’il existe deux régimes. Le premier correspond à un mouvement radial uniforme avec une vitesse constante. Ce régime est caractérisé par une droite sur le graphique. Le deuxième régime commence lorsque la particule solide est déviée de sa trajectoire initiale et ne suit plus un mouvement radial. On observe donc une diminution de sa vitesse radiale, ce qui explique la déviation sur le graphique 4.12. Les images sur la figure 4.13 montrent le phénomène. Les flèches indiquent la position du traceur. La ligne en pointillés représente un rayon sur lequel se déplace le traceur. Sur la première image, la ligne passe par le centre de l’impacteur et par le traceur. Cette même droite est dessinée sur la dernière image.

Revenons à présent sur l’évolution des positions des traceurs. On remarque que la

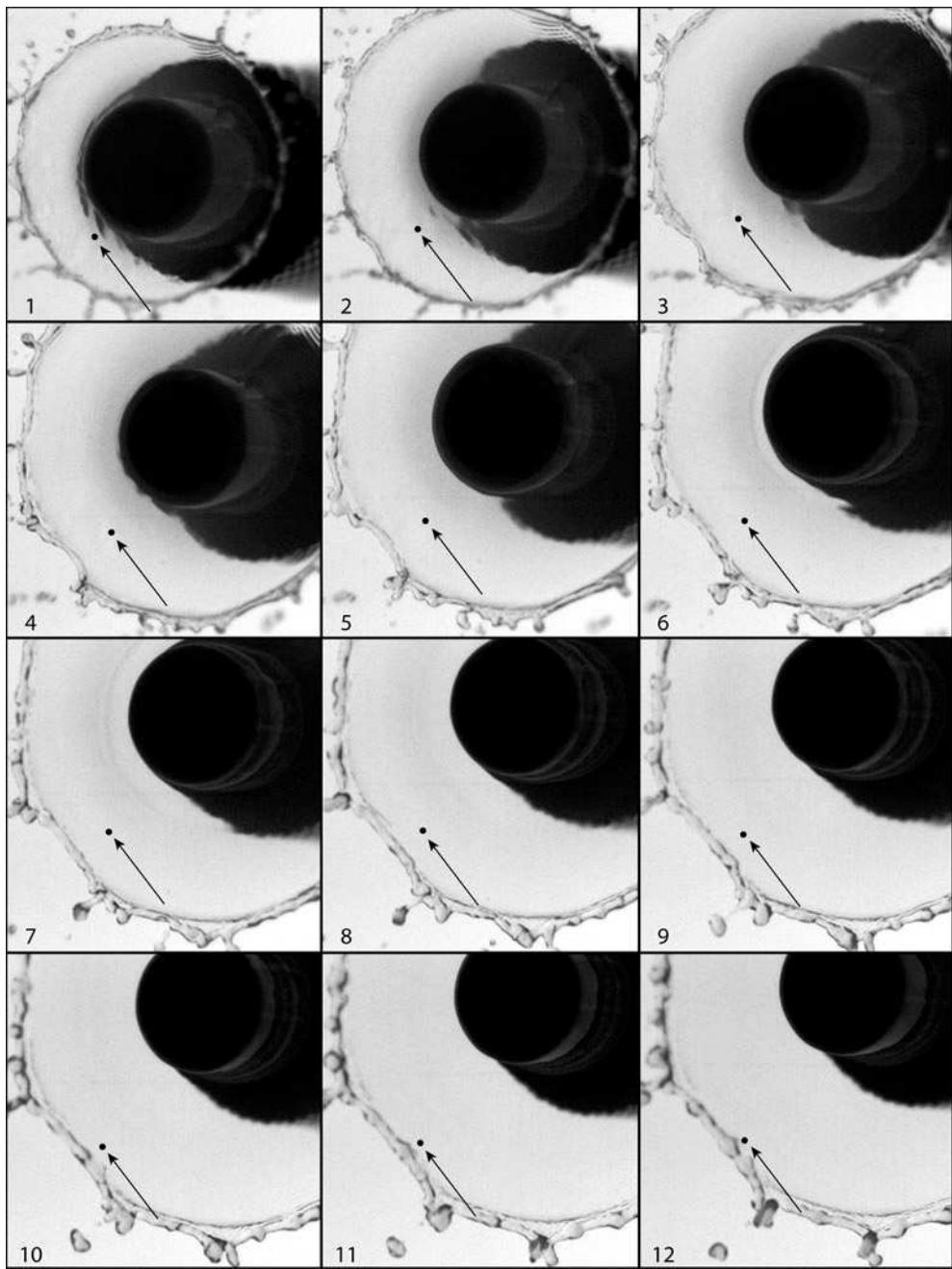


FIG. 4.12 – Suivi d'une particule. Les flèches indiquent la position du traceur. Le nombre de Weber d'impact est de 790. Le temps entre deux images est de 2/3500 secondes.

position d'un traceur varie linéairement avec le temps, ce qui indique une vitesse constante du traceur au sein de la nappe. Cette observation est en accord avec celle effectuée par Rohzkov [51]. Quelque soit le nombre de Weber d'impact, les vitesses des traceurs ne sont pas très différentes les unes des autres. En revanche, on observe que plus le temps

d'apparition du traceur est grand, plus la vitesse de ce dernier est faible. Ceci s'observe mieux sur le deuxième graphique.

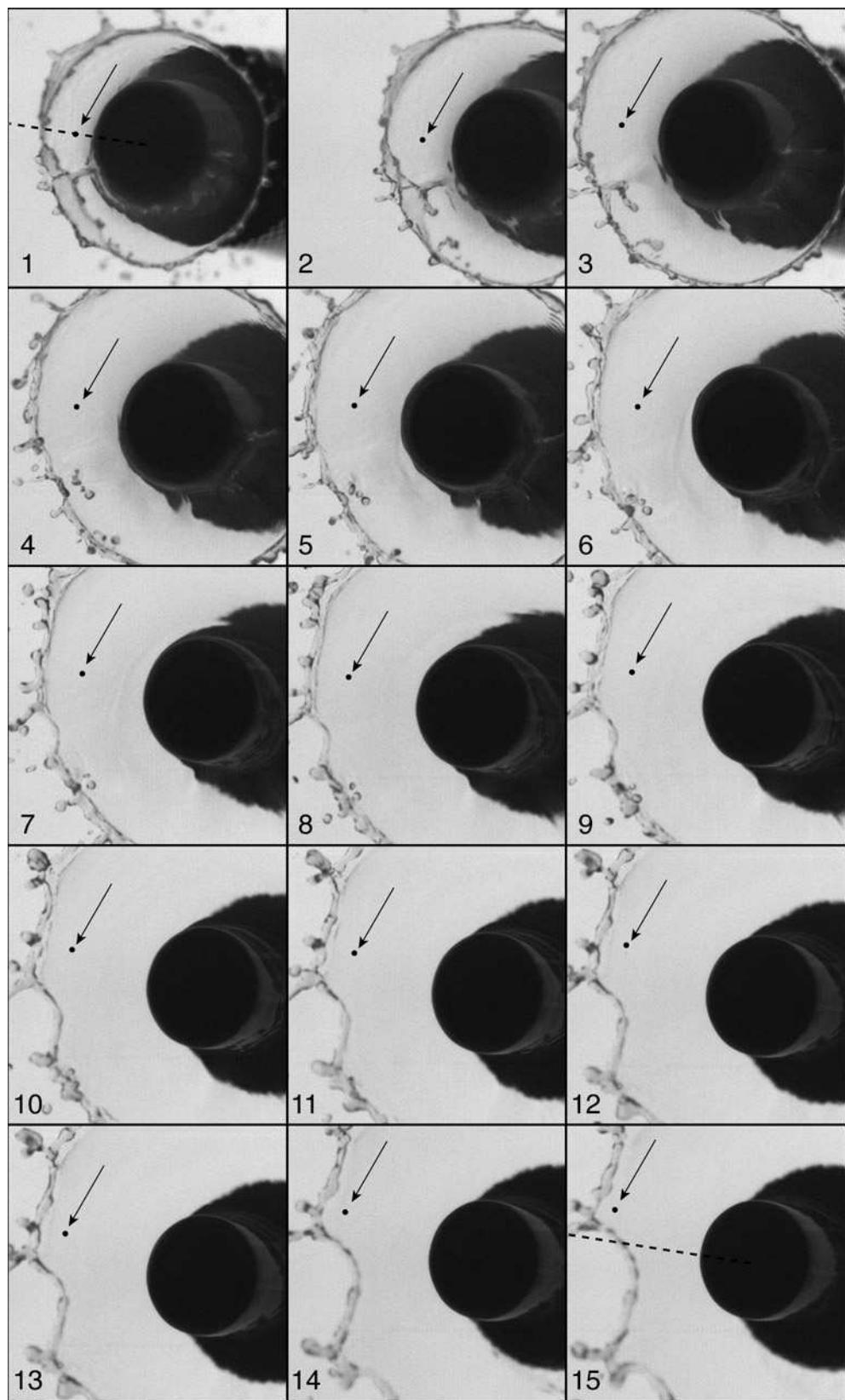


FIG. 4.13 – Mouvement non radial d'une particule. Les flèches indiquent la position du traceur. Les courbes en pointillés représentent la trajectoire radiale initiale. Le nombre de Weber d'impact est de 720. Le temps entre deux images est de 2/3500 secondes.

On peut comparer la position d'un traceur avec l'évolution de la nappe. Le graphique 4.14 montre l'évolution d'un traceur apparaissant très tôt dans la nappe ainsi que deux évolutions de nappe. Les nombres de Weber sont choisis de manière à encadrer au mieux celui correspondant au traceur. La position radiale  $r$  est celle mesurée. Elle correspond à la position du traceur et de la taille de la nappe. Le temps quant à lui est adimensionné par le temps de vibration  $T$  donné dans l'équation 4.14 :

$$T = \sqrt{\frac{\rho d_0^3}{24 \sigma}} \quad (4.26)$$

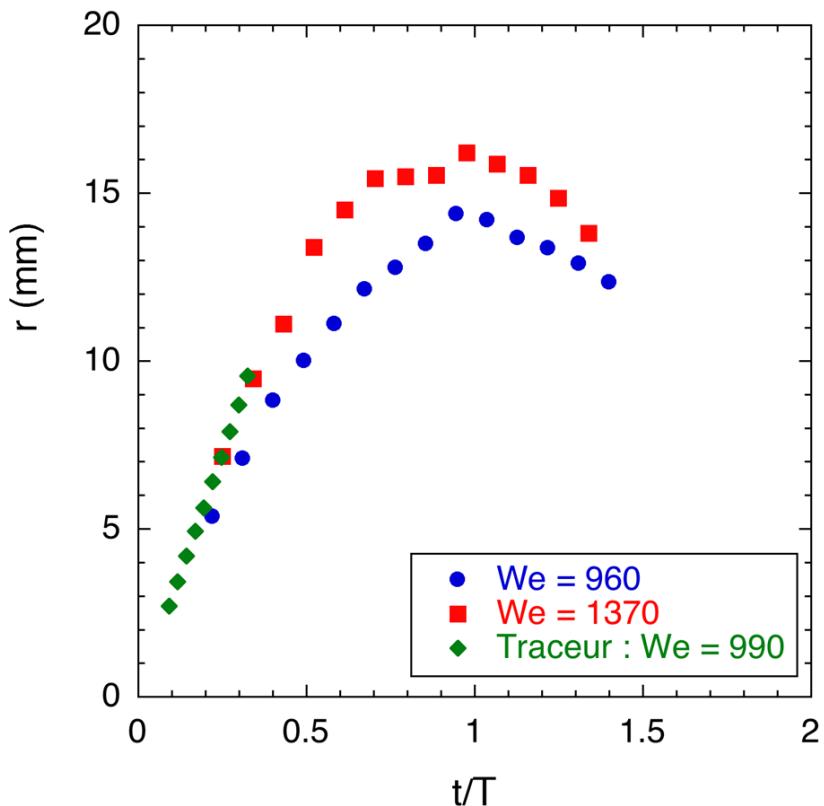


FIG. 4.14 – Comparaison entre la position du bord et la position d'un traceur au cours du temps.

On remarque que la position du traceur suit une évolution comparable à celle de la nappe. La vitesse du traceur est très proche de la vitesse d'expansion de la nappe. Toutefois, cette vitesse est constante, contrairement à la vitesse d'expansion de la nappe qui elle décroît. On remarque également que la dynamique de la nappe se déroule sur des temps inférieurs à  $2T$ . Le maximum est atteint pour un temps égal à  $T$ .

Nous nous sommes intéressés aux vitesses des traceurs en fonction du temps pour différents nombres de Weber. La vitesse est calculée en approximant la position des traceurs

avec une droite en utilisant la méthode des moindres carrés. Cette vitesse est rapportée en fonction de la vitesse d'impact  $U_0$  et le temps est adimensionné avec le temps de vibration  $T$ . La figure 4.15 montre les différentes vitesses obtenues.

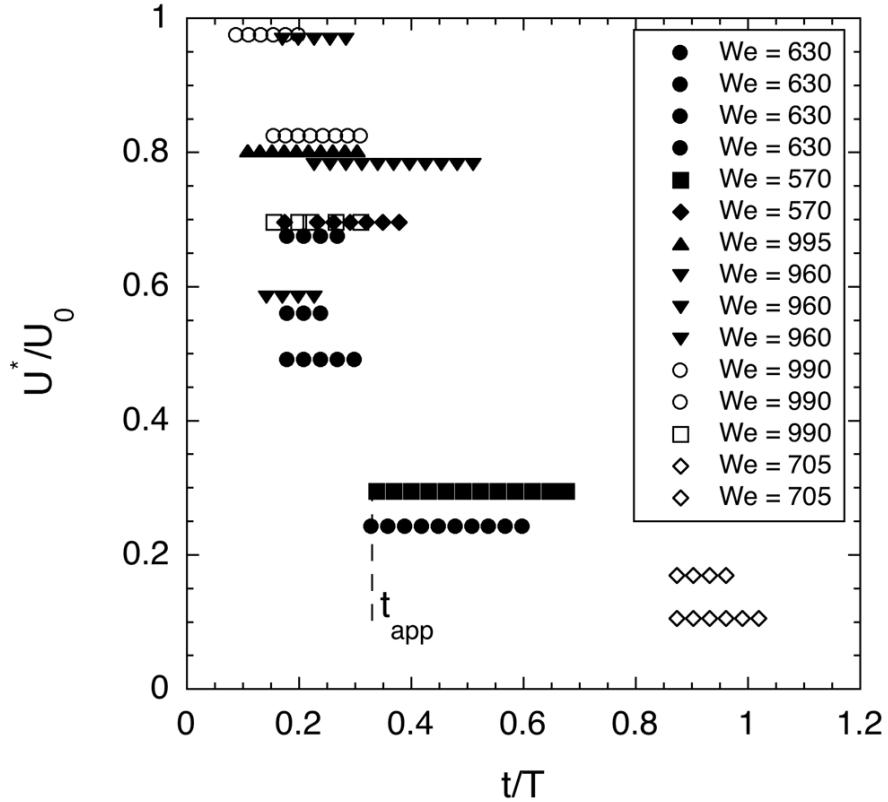


FIG. 4.15 – Comparaison entre la position du bord et la position d'un traceur au cours du temps.

Etant donné que la vitesse est constante selon  $r$ , on s'attend bien à trouver des portions de droites horizontales. On remarque que la vitesse du traceur n'excède jamais la vitesse d'impact. La gamme de vitesse est très étendue et on ne voit aucune relation entre la vitesse et le nombre de Weber. Nous appelons temps d'apparition, l'instant pour lequel une particule est détectée puis suivie. Plus cet instant d'apparition est grand et plus la vitesse de la particule est faible. Pour un temps d'apparition  $t_{app}$  donné, une particule va avoir une vitesse propre, constante au cours du temps. Plus ce temps d'apparition est long et plus la vitesse de la particule est faible.

Pour mieux comprendre ce fait, nous avons alors interpolé les positions pour déterminer l'instant où la particule est injectée dans la nappe. Autrement dit, nous avons interpolé les courbes des positions et chercher le temps d'injection, que l'on notera  $t_{inj}$ , pour lequel la position vaut  $d_0/2$ . Ce temps d'injection est différent du temps d'apparition. Ce dernier est mesurable, tandis que le temps d'injection définit l'instant pour lequel une particule est injectée dans la nappe.

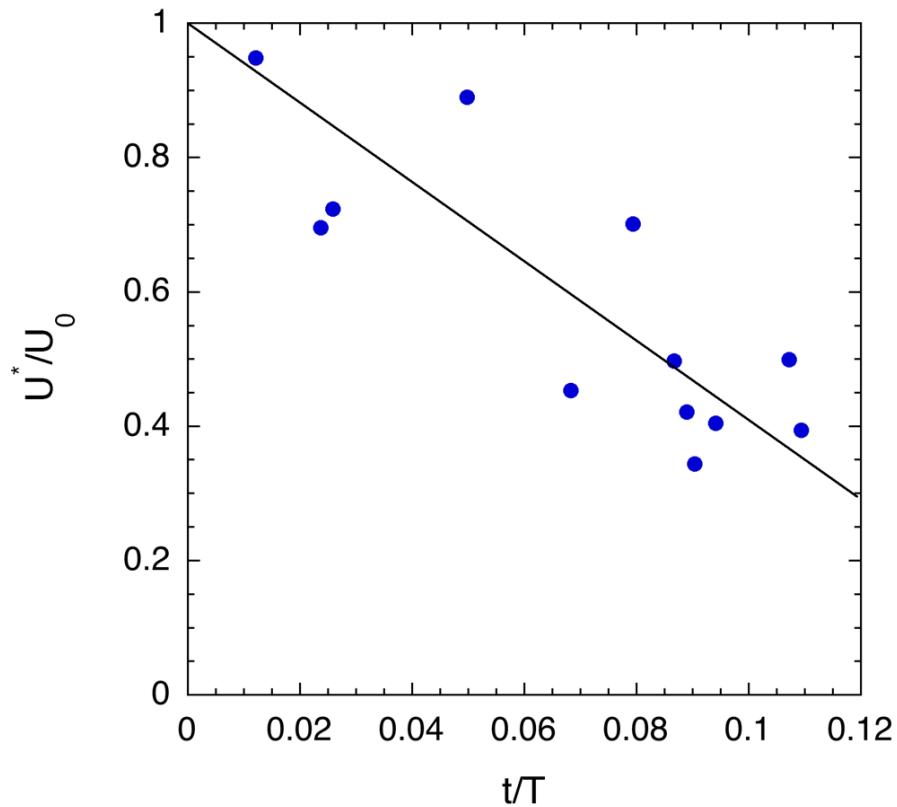


FIG. 4.16 – Vitesse des traceurs au sein de la nappe au moment du temps d’ injection  $t_{inj}$ .

La figure 4.16 représente la vitesse du traceur  $U^*$  interpolée au temps d’ injection  $t_{inj}$  de ce dernier. La vitesse est adimensionnée par la vitesse d’ impact  $U_0$  et le temps par le temps de vibration  $T$ . Malgré une grande dispersion, on note une tendance : les vitesses d’ injection  $U^*$  sont proches de la vitesse d’ impact pour des instants très proches de l’ impact. Plus le temps d’ injection  $t_{inj}$  est grand et plus la vitesse  $U^*$  est faible. La grande dispersion des mesures expérimentales ne peut nous renseigner sur la dépendance de la vitesse avec le temps d’ injection. Cependant, en reprenant tout ce que nous venons de constater, nous pouvons écrire la vitesse comme suit :

$$U^* = \epsilon(t_{inj}) U_0 \quad (4.27)$$

avec  $\epsilon$  un nombre sans dimension compris entre 0 et 1, décroissant avec le temps. Au temps d’ injection  $t_{inj}$ , la valeur d’ epsilon détermine la vitesse au sein de la nappe. Au vu de la répartition des points, la manière la plus simple de représenter  $\epsilon$  est une fonction affine décroissante :

$$\frac{U^*}{U_0} = 1 - \alpha \frac{t_i}{T} \quad (4.28)$$

avec  $\alpha$  un paramètre constant sans dimension. La figure 4.16 montre un exemple de ce type de représentation à travers une droite. La pente de cette droite,  $\alpha$ , vaut dans ce cas 10.

Au cours de nos expériences nous avons réussi à observer ce phénomène de vitesse différente en fonction du temps d'apparition. Les images sur la figure 4.17 montrent l'évolution de deux traceurs apparaissant à deux moments différents mais ayant un mouvement le long d'un même rayon. On voit la distance entre les deux traceurs augmenter au cours du temps.

Compte tenu des observations précédentes, nous pouvons écrire la différence de vitesse entre les deux particules comme suit :

$$\Delta U^* = U_1^* - U_2^* = \frac{\alpha}{T} \Delta t_{inj} U_0 \quad (4.29)$$

Avec  $U_1^*$  la vitesse de la particule numéro 1 et  $U_2^*$  la vitesse de la particule numéro 2. La vitesse de la première particule s'écrit donc :

$$U_1^* = U_2^* + U_0 \Delta t_{inj} \frac{\alpha}{T} > U_2^* \quad (4.30)$$

La vitesse de la première particule est plus grande que la seconde, la distance entre ces particules va par conséquent augmenter avec le temps.

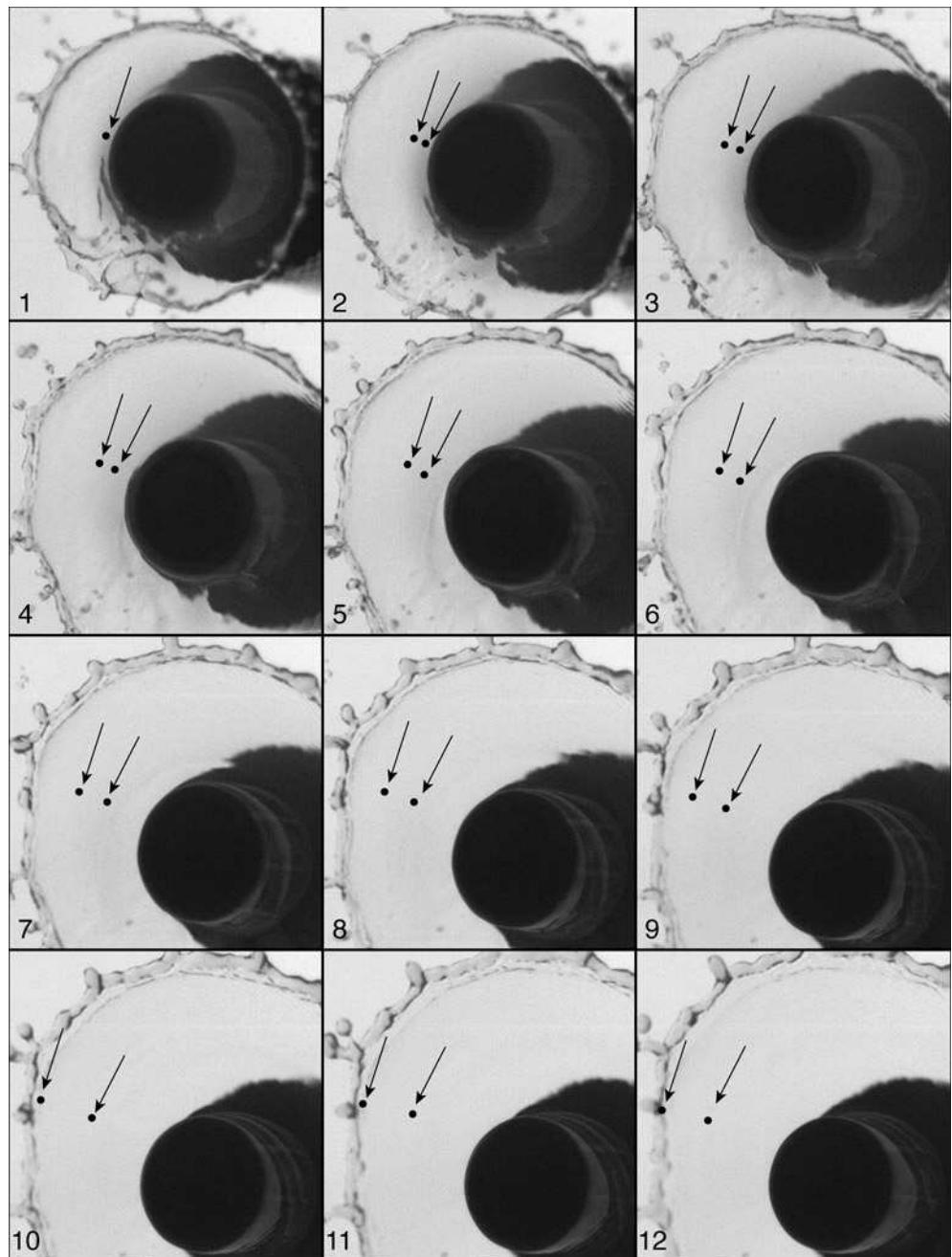


FIG. 4.17 – Visualisation de la dépendance de la vitesse avec le temps d'injection du traceur. Les flèches indiquent la position des traceurs. Le nombre de Weber d'impact est de 800. Le temps entre deux images est de 2/3500 secondes.

## 4.8 Évolution des perturbations du bourrelet

Le bord de la nappe est instable et sa déformation va initier la formation des ligaments. En repérant la position du bord sur chaque image, nous sommes capables de mesurer une évolution des perturbations. Soit  $r(\theta, t)$ , la position angulaire en l'instant  $t$  du bord. Le rayon moyen mesuré est donné par la relation suivante :

$$R(t) = \langle r(\theta, t) \rangle_\theta \quad (4.31)$$

où l'opérateur moyenne s'effectue sur l'ensemble des positions  $r$  suivant  $\theta$  à un instant  $t$  donné. En appelant  $\epsilon$  la déformation du bord, on peut réécrire la position du bord comme suit :

$$r = R + \epsilon \quad (4.32)$$

Un exemple de rayon mesuré  $r(t)$  et de rayon moyen  $R(t)$  est donné sur la photo 4.18. Cette manière d'écrire impose une condition à  $\epsilon$  :  $\langle \epsilon \rangle = 0$ . Pour mesurer l'évolution de la

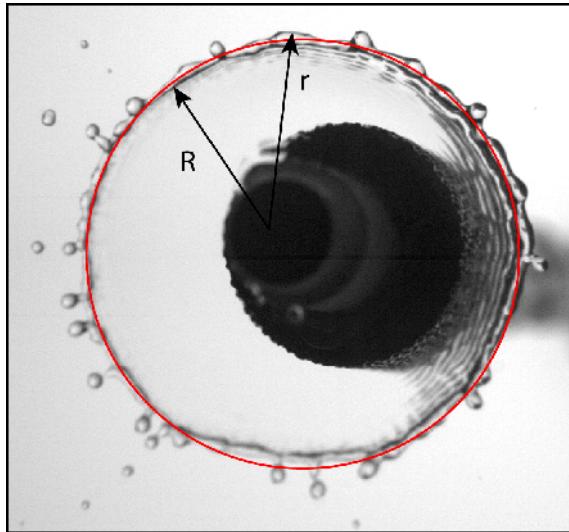


FIG. 4.18 – Exemple de mesure d'un bord de nappe corrugée. Le cercle correspond à une idéalisation de la nappe avec comme rayon  $R$ . Le rayon mesuré quant à lui est égal à  $r$ .

déformation, nous allons calculer la moyenne du carré de la position  $r$  du bord :

$$\langle r^2 \rangle = \langle (R + \epsilon)^2 \rangle = R^2 + \langle \epsilon^2 \rangle \quad (4.33)$$

En divisant cette mesure par le carré de la position moyenne, on obtient la relation suivante :

$$\frac{\langle r^2 \rangle}{\langle r \rangle^2} = 1 + \frac{\langle \epsilon^2 \rangle}{R^2} \quad (4.34)$$

Soit alors une mesure de la perturbation :

$$\frac{\langle \epsilon^2 \rangle}{R^2} = \frac{\langle r^2 \rangle}{\langle r \rangle^2} - 1 \quad (4.35)$$

Nous avons repéré la position du bord d'une nappe au cours du temps pour différents nombres de Weber. Nous avons ensuite mesuré l'évolution de la perturbation au cours du temps. La figure 4.19 montre l'évolution temporelle de la perturbation pour différents nombres de Weber.

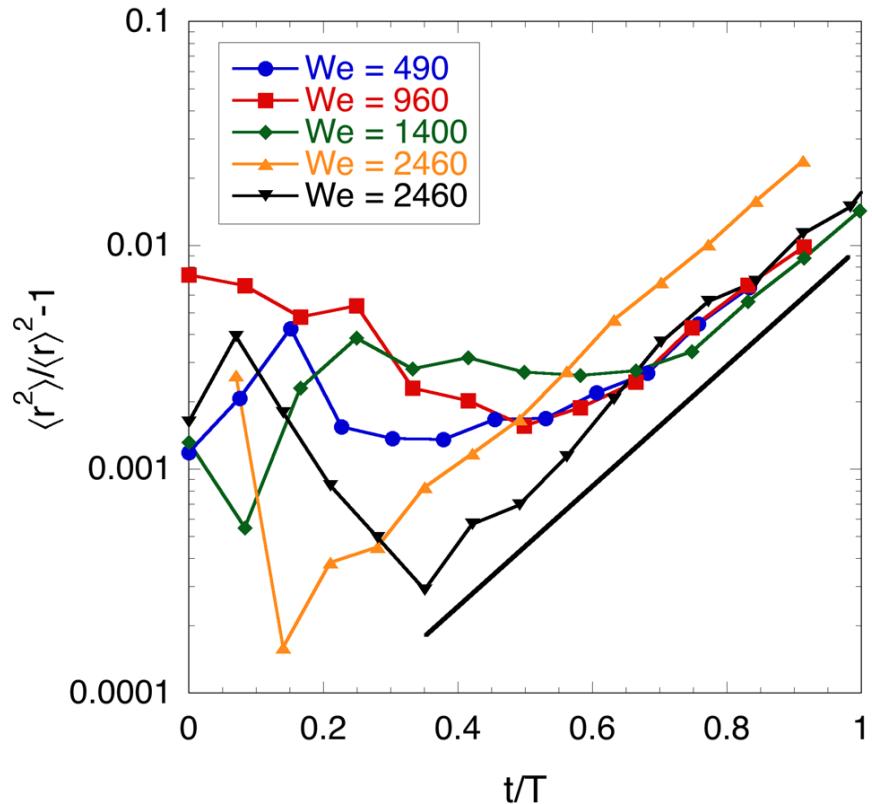


FIG. 4.19 – Évolution temporelle de la perturbation du bord de la nappe pour différents nombres de Weber d'impact. Les mesures pour le nombre de Weber,  $We = 2460$ , ont été réalisées en utilisant l'éthanol comme fluide.

Le temps est adimensionné par le temps de vibration  $T$ . On remarque tout d'abord que l'amplitude des perturbations initiales varie fortement d'une expérience à l'autre. Ces perturbations sont liées à l'impact ainsi qu'à l'état de surface de l'impacteur. Ces conditions varient pour chaque expérience. On observe ensuite une diminution de la corrugation, signe que les perturbations initiales se résorbent. Après avoir atteint un minimum, le paramètre de corrugation augmente de nouveau. On remarque que cette variation est identique quelque soit le nombre de Weber et suit une évolution exponentielle. Nous soulignons cette variation à l'aide d'une droite placée sur la figure 4.19. Une des expériences réalisées avec de l'éthanol et ayant un nombre de Weber d'impact égal à  $We = 2460$ , suit une évolution parallèle mais ne se superpose pas avec les autres courbes. Ceci est dû au fait que l'instant pour lequel l'état de corrugation minimum est atteint, intervient plus tôt. Le reste de l'évolution se fait donc en avance par rapport au reste des expériences mais reste parallèle.

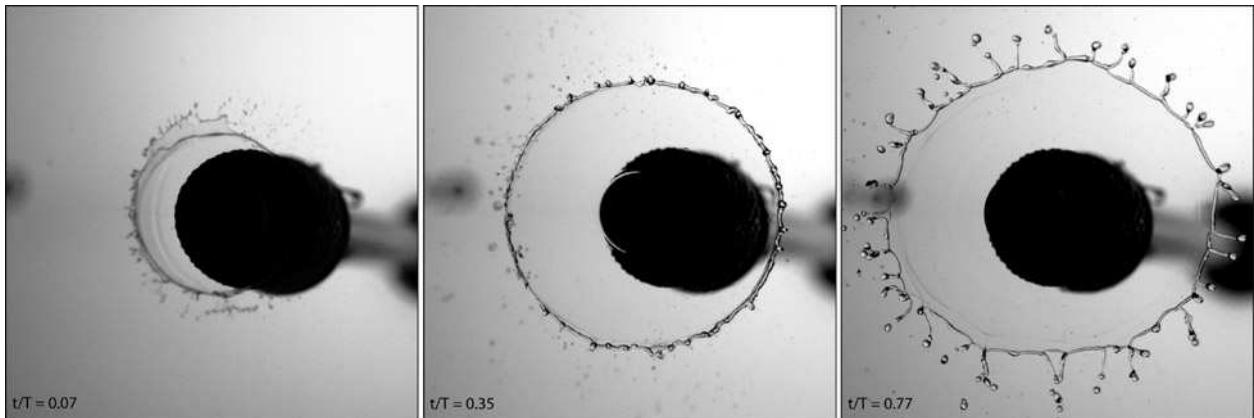


FIG. 4.20 – Détails sur l'état de corrugation pour trois instants différents. Le nombre de Weber d'impact est  $We = 2460$  et il s'agit d'une goutte d'éthanol.

Nous montrons sur la figure 4.20 trois photos montrant trois états de corrugation du bord pour trois instants différents. Il s'agit d'une expérience réalisée avec de l'éthanol et ayant un nombre de Weber d'impact de  $We = 2460$ . La première photo montre la déformation de la goutte  $2/1000$  s après l'impact. Le bord est corrugé et présente de très nombreuses déformations. Au fur et à mesure que la nappe se crée, les corrugations du bord deviennent plus faibles au regard de la taille de la nappe elle-même. Ensuite, sur la troisième photo, on observe la création de ligaments.

L'observation de ces photos nous indique qu'au cours d'un impact les perturbations initiales sont tout d'abord atténuées et que par la suite le bord de la nappe se déforme. L'évolution de cette instabilité est donnée par l'évolution de la corrugation. Cette instabilité du bourrelet est indépendante du nombre de Weber mais également des perturbations initiales.

#### 4.8.1 Mécanismes d'instabilités du bourrelet

Pour caractériser la déformation du bourrelet, nous pouvons envisager deux scénarios possibles. Le premier fait intervenir un mécanisme d'instabilité de type Rayleigh-Taylor, tandis que le second priviliege une instabilité de type Rayleigh-Plateau.

##### Déformation du bourrelet via un mécanisme de type Rayleigh-Taylor

La déformation du bourrelet liquide peut s'expliquer schématiquement via deux mécanismes d'instabilité différente. La première est une instabilité du type Rayleigh-Taylor (détalée dans l'annexe A). Dans le référentiel centré sur le bord de la nappe, le bourrelet liquide subit une accélération centripète. Cette dernière, dirigée du fluide le plus dense vers le fluide le moins dense, génère un gradient de pression positif du fluide dense vers le fluide moins dense, critère d'instabilité de Rayleigh-Taylor.

L'accélération que subit le bord de la nappe est une fonction du temps :

$$a(t) = -\ddot{R} = \frac{U_0}{T} \sin\left(\frac{t}{T}\right) \quad (4.36)$$

On fait l'hypothèse que l'accélération qui déstabilise le bord est égale à l'accélération maximale du bord :

$$a_m = \frac{U_0}{T} \sim \left(\frac{\sigma U_0^2}{\rho d_0^3}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.37)$$

La longueur d'onde de Rayleigh-Taylor basée sur la longueur capillaire et associée à cette accélération vaut :

$$\lambda_m = \left(\frac{3\sigma}{\rho a_m}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.38)$$

Soit en remplaçant par l'expression de  $a_m$  :

$$\lambda_m \sim \left(\frac{\sigma^{\frac{1}{2}} d_0^{\frac{3}{2}}}{\rho^{\frac{1}{2}} U_0}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.39)$$

Soit en utilisant la définition du nombre de Weber

$$\lambda_m \sim \left(\frac{d_0^2}{We^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.40)$$

Or, le diamètre moyen des fragments est directement relié à cette longueur d'onde, d'où la relation suivante :

$$\langle d \rangle \sim \lambda_m \sim We^{-1/4} d_0 \quad (4.41)$$

Cette longueur d'onde est associée au taux de croissance maximale de l'instabilité de Rayleigh-Taylor, soit pour :

$$\omega_m = -\left(\frac{8}{27} \frac{\rho a_m^3}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{4}} \quad (4.42)$$

soit en explicitant la valeur de l'accélération :

$$|\omega_m| \sim We^{-\frac{1}{8}} \left(\frac{U_0}{d_0}\right) \quad (4.43)$$

### Déformation du bourrelet via un mécanisme de type Rayleigh-Plateau

La seconde est une instabilité de Plateau-Rayleigh. Le bord de la nappe forme un ligament liquide sous forme de tore et est naturellement instable. Le taux de croissance maximal est atteint lorsque le nombre d'onde satisfait la relation suivante :

$$k_m b_0 \sim 0.7 \quad (4.44)$$

associée au taux de croissance suivant :

$$|\omega_m| \sim \left( \frac{\sigma}{\rho b_0^3} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.45)$$

avec  $b_0$  le diamètre du bourrelet. Or, si on l'assimile à un tore de rayon de révolution  $R_m$  et de diamètre  $b_0$  et que l'on suppose que toute la masse liquide initialement contenue dans la goutte est transférée dans le bourrelet, nous avons la relation suivante :

$$V_b = 2\pi b_0^2 R_m = \frac{4}{3}\pi \left( \frac{d_0}{2} \right)^3 = V_0 \quad (4.46)$$

avec  $V_b$  le volume du bourrelet et  $V_0$  le volume initial de la goutte. Nous pouvons extraire une estimation de la taille du bourrelet :

$$b_0^2 \sim \frac{d_0^3}{R_m} \quad (4.47)$$

En utilisant la dépendance du rayon maximal avec le nombre de Weber :

$$R_m \sim d_0 We^{\frac{1}{2}} \quad (4.48)$$

On obtient alors pour le diamètre du bourrelet :

$$b_0^2 \sim d_0^2 We^{-\frac{1}{2}} \quad (4.49)$$

Soit alors la dépendance de la longueur avec le nombre de Weber :

$$\lambda_m \sim b_0 \sim d_0 We^{-\frac{1}{4}} \quad (4.50)$$

Or, le diamètre moyen des fragments est directement relié à cette longueur d'onde pour cette instabilité basée sur le diamètre maximal du bourrelet, d'où la relation suivante :

$$\langle d \rangle \sim \lambda_m \sim d_0 We^{-\frac{1}{4}} \quad (4.51)$$

Le taux de croissance associé s'écrit :

$$|\omega_m| \sim \left( \frac{\sigma We^{3/4}}{\rho d_0^3} \right)^{\frac{1}{2}} \sim \frac{1}{T} We^{\frac{3}{8}} \quad (4.52)$$

### Comparaison des deux mécanismes d'instabilité

L'équation 4.52 nous donne la dépendance du taux de croissance de l'instabilité de Rayleigh-Plateau avec le nombre de Weber :

$$|\omega_m| \sim \frac{1}{T} We^{-\frac{1}{8}}$$

avec  $T = \sqrt{\rho d_0^3 / \sigma}$ , soit en fonction du nombre de Weber :

$$T = \frac{d_0}{U_0} \sqrt{\frac{\rho U_0^2 d_0}{\sigma}} = \frac{d_0}{U_0} W e^{\frac{1}{2}}$$

Par conséquent :

$$|\omega_m| \sim \frac{U_0}{d_0} W e^{-\frac{1}{8}}$$

identique à l'expression 4.43 donnant la relation entre le taux de croissance de l'instabilité de Rayleigh-Taylor avec le nombre de Weber.

Les deux mécanismes sont donc identiques, ils fournissent les mêmes lois d'échelle pour le taux de croissance. En particulier, celui-ci dépend intrinsèquement du nombre de Weber, or la figure 4.19 montre au contraire que l'amplification des corrugations est indépendante de We, une fois le temps remis à l'échelle par T. Nous expliquons dans la section suivante l'origine de ce paradoxe et la manière de le lever.

#### 4.8.2 Prise en compte de l'évolution du bord

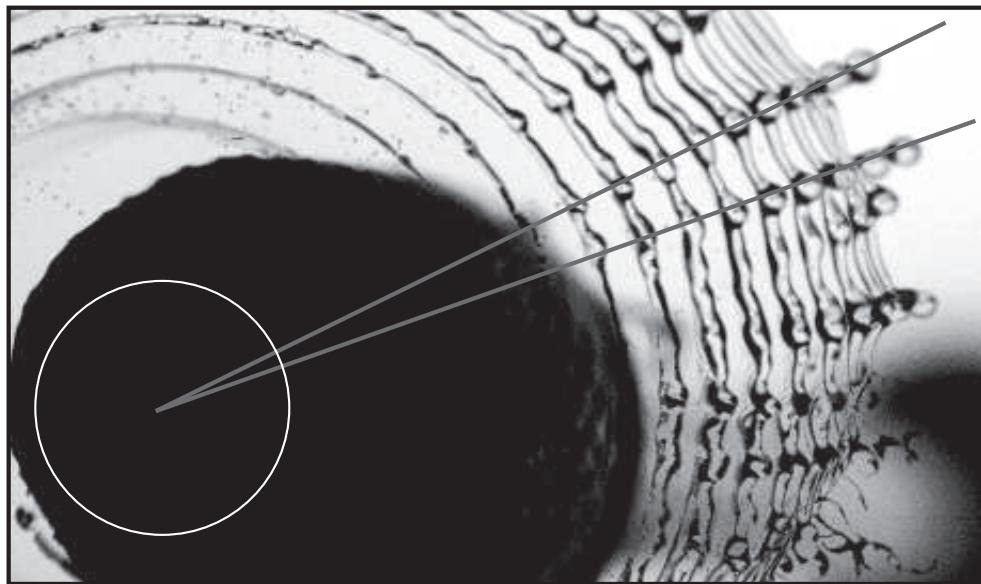


FIG. 4.21 – Détail sur l'évolution des perturbations au cours du temps. Le nombre de Weber d'impact est  $We = 2460$ . Le montage consiste en une superposition de chaque étape de la déformation. Le temps entre chaque image est de  $1/1000$  s. La distance entre chaque bourrelet sur deux images successives diminue au fur et à mesure que la nappe grandit, signe d'une décélération,  $\ddot{R} < 0$

La photo représentée sur la figure 4.21 détaille l'évolution de la déformation au cours du temps. Il s'agit d'une superposition de plusieurs images prises à  $1/1000$  s d'intervalle.

On observe que la croissance d'une perturbation sur le bord suit une trajectoire radiale. La distance entre deux perturbations successives augmente avec le temps. On remarque également que la distance séparant la position du bourrelet entre deux images diminue au fur et à mesure que l'on s'éloigne du centre, autrement dit lorsque que la nappe grandit. Cette diminution indique une décélération et nous oriente vers une instabilité de type Rayleigh-Taylor.

Nous allons décomposer la variation de l'amplitude selon la méthode utilisée dans un autre contexte par Tomotika en 1936. La déformation varie sous l'effet de l'instabilité et de l'expansion de la nappe.

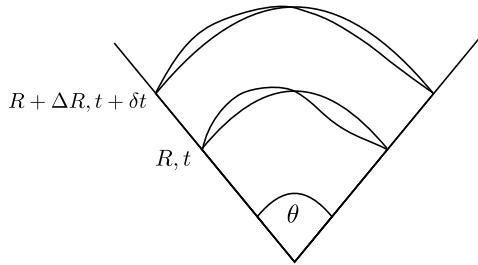


FIG. 4.22 – Schéma illustrant la déformation de la perturbation.

Évaluons, tout d'abord, l'effet de la déformation lors de l'expansion de la nappe. Nous avons remarqué sur la photo 4.21 que les perturbations se développent selon une direction radiale. Nous avons vu dans la partie précédente (section 4.7) que les particules fluides gardent leur vitesse initiale de manière balistique jusqu'à atteindre le bord, et que cette vitesse dépend du temps d'injection de la particule.

Soit  $\delta U_0$  la différence de vitesse, autrement dit la différence de position, entre deux particules séparées d'un angle  $\delta \theta$ . L'amplitude de la déformation du bord est alors égale à :

$$\xi(t) = R(\theta + \delta \theta) - R(\theta) \quad (4.53)$$

Or nous avons montré que l'évolution du rayon du bord s'exprime comme suit :

$$R(t) = d_0 \sqrt{We} \sin \left( \frac{t}{T} \right) = U_0 f(t) \quad (4.54)$$

L'équation 4.53 peut s'exprimer à l'aide de la dérivée du rayon  $R$  par la position angulaire  $\theta$  :

$$\xi = \frac{\partial R}{\partial \theta} \delta \theta = \frac{\partial R}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial U_0} \delta U_0 \quad (4.55)$$

Soit :

$$\xi = \frac{\partial R}{\partial U_0} \delta U_0 = f \delta U_0 \quad (4.56)$$

Nous obtenons alors les relations suivantes :

$$\xi = f \delta U_0 \quad (4.57)$$

et

$$R = f U_0 \quad (4.58)$$

On obtient alors l'égalité suivante :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\xi}{R} \right) = 0 \quad (4.59)$$

Les corrugations sont homothétique par la préservation des différences de vitesses de l'écoulement de base. Par conséquent, de l'équation 4.59 il vient :

$$\frac{\dot{\xi}}{R} - \frac{\xi}{R^2} \dot{R} = 0 \quad (4.60)$$

soit :

$$\frac{\dot{\xi}}{\xi} = \frac{\dot{R}}{R} \quad (4.61)$$

Évaluons ensuite l'évolution de la perturbation lors de l'instabilité de type Rayleigh-Taylor. L'accélération  $a(t)$  subie par la nappe est donnée par :

$$a(t) = -\ddot{R} = \frac{U_0}{T} \sin \left( \frac{t}{T} \right) \quad (4.62)$$

Nous utilisons comme hypothèse une accélération constante le long du pourtour de la nappe. La longueur capillaire qui fixe l'échelle de régularisation de cette instabilité vaut (c.f. appendice A) :

$$l \sim \sqrt{\frac{\sigma}{\rho a(t)}} \quad (4.63)$$

Pour  $\lambda \gg l$ , le taux de croissance de l'amplitude de perturbation du bord  $\xi(t)$  est alors :

$$\frac{\dot{\xi}}{\xi} \approx \sqrt{\frac{a(t)}{\lambda(t)}} \quad (4.64)$$

La longueur d'onde minimale amplifiée par ce processus correspond à l'accélération maximale  $a_m = U_0/T$ , soit

$$\lambda_m = d W e^{-\frac{1}{4}} \quad (4.65)$$

conformément à l'estimation précédente.

La variation totale de l'amplitude de la déformation est la somme de ces deux contributions :

$$\frac{\dot{\xi}}{\xi} = \frac{\dot{R}}{R} + \sqrt{\frac{a(t)}{\lambda(t)}} \quad (4.66)$$

Le premier terme vient de la déformation géométrique de l'interface, tandis que le second traduit la déformation via le mécanisme d'instabilité de type Rayleigh-Taylor. Soit en utilisant les dérivées logarithmiques :

$$\frac{d}{dt} \ln \left( \frac{\xi}{R} \right) = \sqrt{\frac{a(t)}{\lambda(t)}} \quad (4.67)$$

La conservation géométrique des distances nous impose la condition suivante :

$$\frac{\lambda}{R} = Cte \quad (4.68)$$

Nous obtenons alors la relation :

$$\frac{\dot{\lambda}}{\lambda} = \frac{\dot{R}}{R} \quad (4.69)$$

En utilisant cette condition dans l'équation 4.67 :

$$\frac{d}{dt} \ln \left( \frac{\xi}{R} \right) = \sqrt{\frac{a(t)}{R(t)}} \quad (4.70)$$

L'accélération subie par une particule fluide est égale à :

$$a(t) = -\ddot{R} \quad (4.71)$$

En utilisant l'équation 4.16 du rayon de la nappe obtenue dans le modèle masse-ressort :

$$R(t) = U_0 T \sin \left( \frac{t}{T} \right) \quad (4.72)$$

$$\ddot{R}(t) = -\frac{U_0}{T} \sin \left( \frac{t}{T} \right) = -\frac{1}{T^2} R(t) \quad (4.73)$$

d'où finalement :

$$\frac{d}{dt} \ln \left( \frac{\xi}{R} \right) = \frac{1}{T} \quad (4.74)$$

soit :

$$\frac{\xi}{R} \sim e^{t/T} \quad (4.75)$$

Nos mesures de perturbation se font en calculant le paramètre de corrugation suivant :

$$\gamma = \frac{\langle r^2 \rangle}{\langle r \rangle^2} - 1 \quad (4.76)$$

Soit :

$$\gamma = \frac{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2}{\langle r \rangle^2} \quad (4.77)$$

Le terme  $\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2$  est une mesure de l'amplitude  $\xi$  de la déformation. Autrement dit le paramètre de corrugation  $\gamma$  se réécrit comme suit :

$$\gamma = \frac{\xi^2}{R^2} \sim e^{2t/T} \quad (4.78)$$

en utilisant l'équation 4.75. La figure 4.19 montre l'évolution de la corrugation  $\gamma$  en fonction du temps adimensionné par le temps de vibration  $T$ . Nous avons remarqué que le paramètre de corrugation suivait une loi exponentielle en  $t/T$  quelque soit le nombre de Weber d'impact.

## 4.9 Statistique de la brisure

Les différentes séries d'images montrent bien que le bourrelet liquide présente des corrugations de plus en plus marquées et on assiste à la création de ligaments liquides. Le bourrelet et les ligaments vont se briser et on observe la création d'une multitude de fragments liquides.

La compilation sur plusieurs expériences d'impact pour un nombre de Weber donné nous permet de calculer la taille moyenne  $\langle d \rangle$  des fragments obtenus ainsi que la distribution statistique des tailles.

La figure 4.23 montre la dépendance de la taille moyenne des fragments  $\langle d \rangle$  en fonction du nombre de Weber. Cette taille moyenne est rapportée au diamètre initial  $d_0$  de la goutte. On remarque qu'en échelle logarithmique, le diamètre moyen s'approxime très bien avec une droite de pente  $-1/4$  sur plus de deux décades. On obtient alors une relation liant le diamètre moyen avec le nombre de Weber :

$$\langle d \rangle = 1.0 d_0 We^{-\frac{1}{4}} \quad (4.79)$$

Lorsque le nombre de Weber est égal à un, la taille moyenne des fragments est égale au diamètre initial, soit :

$$\frac{\langle d \rangle}{d_0} = 1 \quad \text{pour } We = 1 \quad (4.80)$$

Cette valeur seuil marque la transition entre une adhésion au substrat et un impact. Inférieur à un, le nombre de Weber indique que les forces de tension de surface dominent. Par conséquent, la goutte reste en tout temps sous forme connexe. Pour des nombres de Weber supérieurs à un, les forces inertielles sont plus importantes que les effets capillaires : la goutte se déforme.

Cette relation est identique à l'approximation 4.51 obtenue précédemment en dérivant le modèle de type masse-ressort (section 4.6). L'équation 4.24 nous donne la relation entre le diamètre moyen et le diamètre initiale :

$$\frac{\langle d \rangle}{d_0} \sim \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{5} We^{1/2}}} \quad (4.81)$$

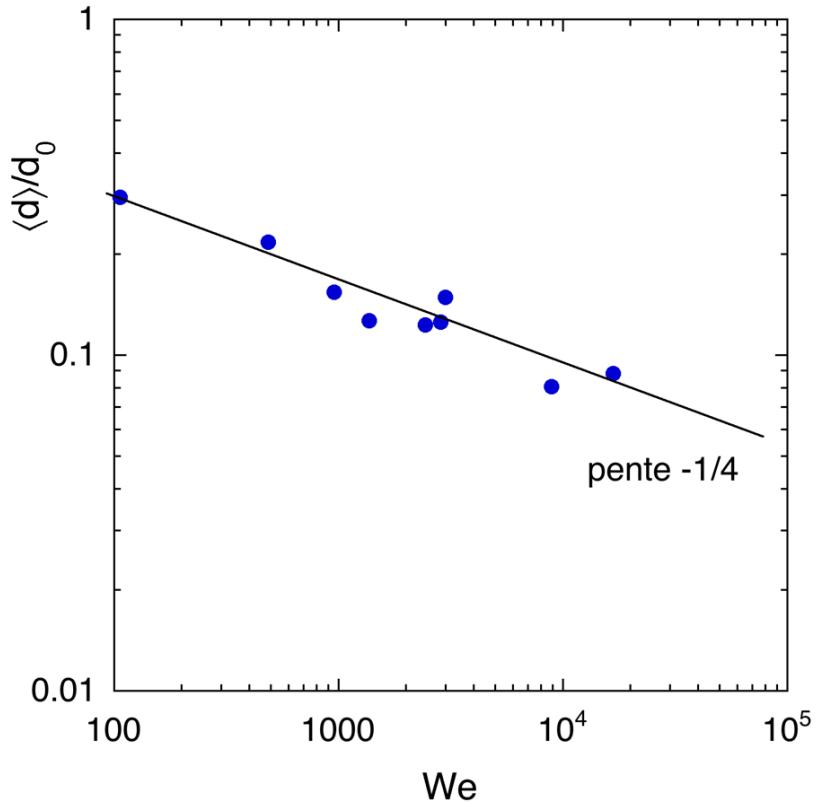


FIG. 4.23 – Taille moyenne des gouttes après la brisure en fonction du nombre de Weber.

et  $\langle d \rangle \rightarrow d_0$  lorsque le nombre de Weber est inférieur à 1,  $We \ll 1$ .

Plus l'impact va se produire à grand nombre de Weber et plus la taille des fragments sera petite. On retrouve cette constatation avec les images. Les figures 4.3 et 4.2 vues précédemment montrent la chronologie d'un impact pour deux nombres de Weber différents, respectivement 500 et 1400. La comparaison entre les deux dernières images des chronologies montre clairement une différence sur la taille des fragments. On remarque également que plus le nombre de Weber d'impact est important et plus le nombre de fragments est grand. En regardant plus attentivement, on s'aperçoit qu'il existe une plus grande variété de tailles des fragments pour l'impact ayant un nombre de Weber égal à 1400.

Nous avons donc représenté les distributions des tailles sur la figure 4.24 pour différents nombres de Weber d'impact. Nous avons deux longueurs caractéristiques pour les impacts, le diamètre initial  $d_0$  de la goutte et la taille moyenne des fragments  $\langle d \rangle$ . Dans les paragraphes précédents, nous avons vu qu'il existait une relation entre le diamètre initial  $d_0$  et la taille moyenne des fragments  $\langle d \rangle$ . Tous les impacts se font avec un diamètre initial identique, il est donc plus judicieux de représenter les distributions en fonction du diamètre moyen des fragments, c'est-à-dire dans les unités  $d/\langle d \rangle$ .

On remarque que la forme de la distribution dépend du nombre de Weber d'impact. Pour un nombre de Weber d'impact égal à  $We = 490$ , la distribution présente deux pics,

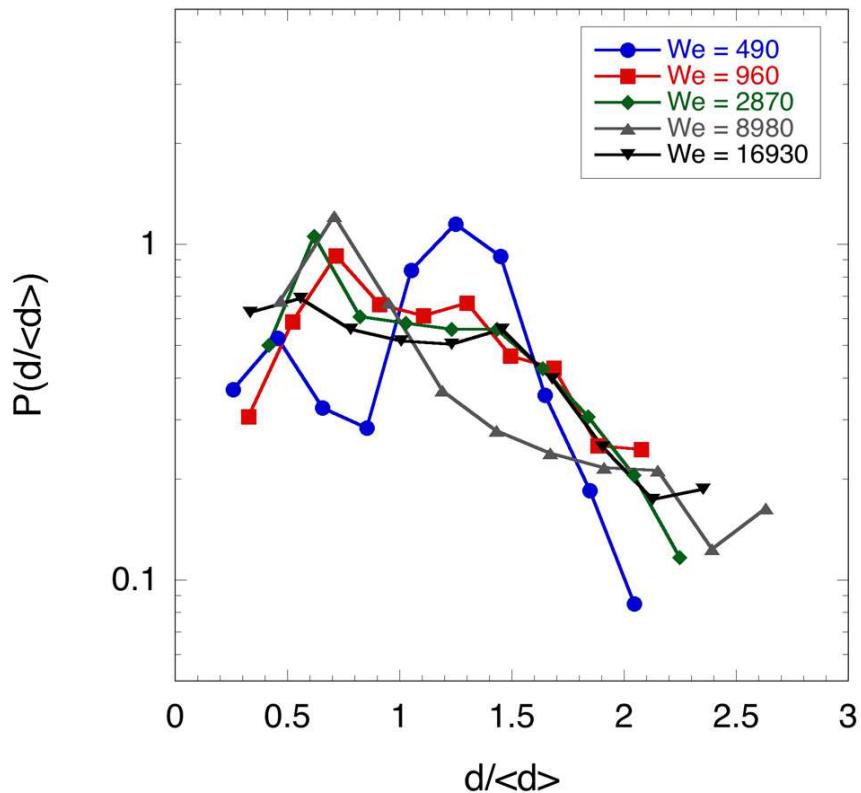


FIG. 4.24 – Distribution  $P(d/\langle d \rangle)$  pour différents impacts.

tandis que pour le reste des distributions, il n'existe plus qu'un seul pic. Au fur et à mesure que le nombre de Weber d'impact augmente, la distribution tend à avoir une queue exponentielle.

Le changement de forme indique des dynamiques différentes plus ou moins prépondérantes en fonction du nombre de Weber d'impact. Nous illustrons ce changement de forme à l'aide des figures 4.25 et 4.26. Les deux séries d'images montrent la déformation et la brisure d'une goutte pour un nombre de Weber respectivement égal à  $We = 490$  et  $We = 960$ . La première image correspond à la première observation de l'impact. L'intervalle de temps entre chaque image est de  $2/1000$  s.

La dynamique d'expansion et récession de la nappe est identique sur les deux séries. Toutefois, pour le plus faible nombre de Weber, la nappe se rétracte jusqu'à ce que le bourrelet touche l'impacteur. Les ligaments formés ont le temps de se développer et de grossir. Leurs brisures donnent lieu à un ensemble de gouttes de grande taille avec peu de dispersion. Pour l'expérience ayant un nombre de Weber d'impact égal à  $We = 960$ , on remarque que la nappe se rompt avant que le bourrelet ne se rétracte sur l'impacteur. La croissance d'un bourrelet interne et son expansion vers l'extérieur est une dynamique nouvelle par rapport au cas précédent. La rencontre du bord externe avec le bord interne de la nappe initie la brisure. Le nombre de fragments est bien plus important et les tailles

observées sont plus faibles.

Ce changement de forme des distributions avec le nombre de Weber d'impact est en contradiction avec les mesures statistiques que nous avons effectuées pour des gouttes se fragmentant au sein d'un jet de gaz, dans le chapitre précédent. Lors de ces impacts gazeux, la forme des distributions est indépendante des conditions initiales.

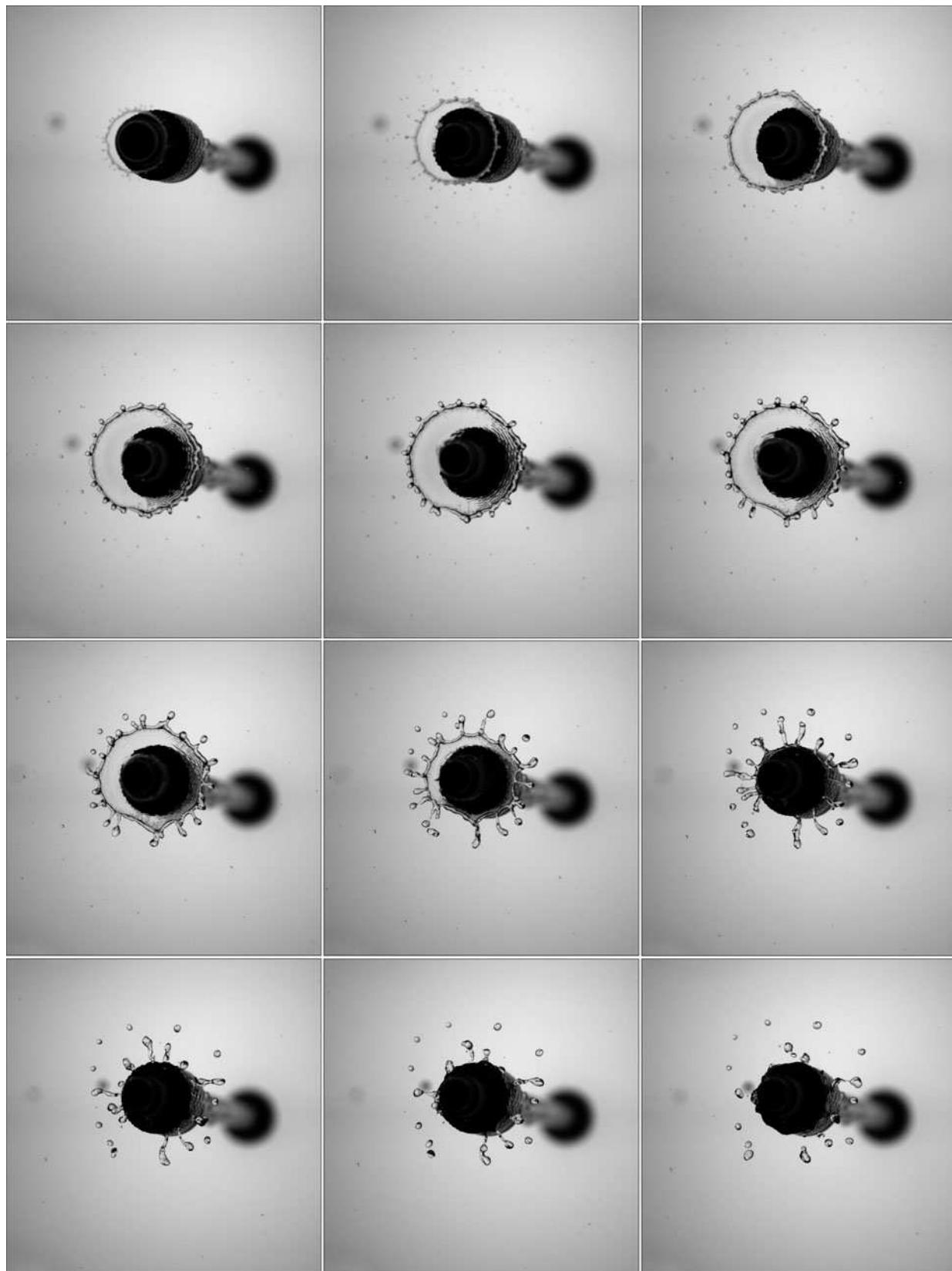


FIG. 4.25 – Évolution de la déformation pour un nombre de Weber égal à  $We = 490$ . Le temps va de gauche à droite et de haut en bas. L'intervalle de temps entre chaque image est de  $2/1000$  s.

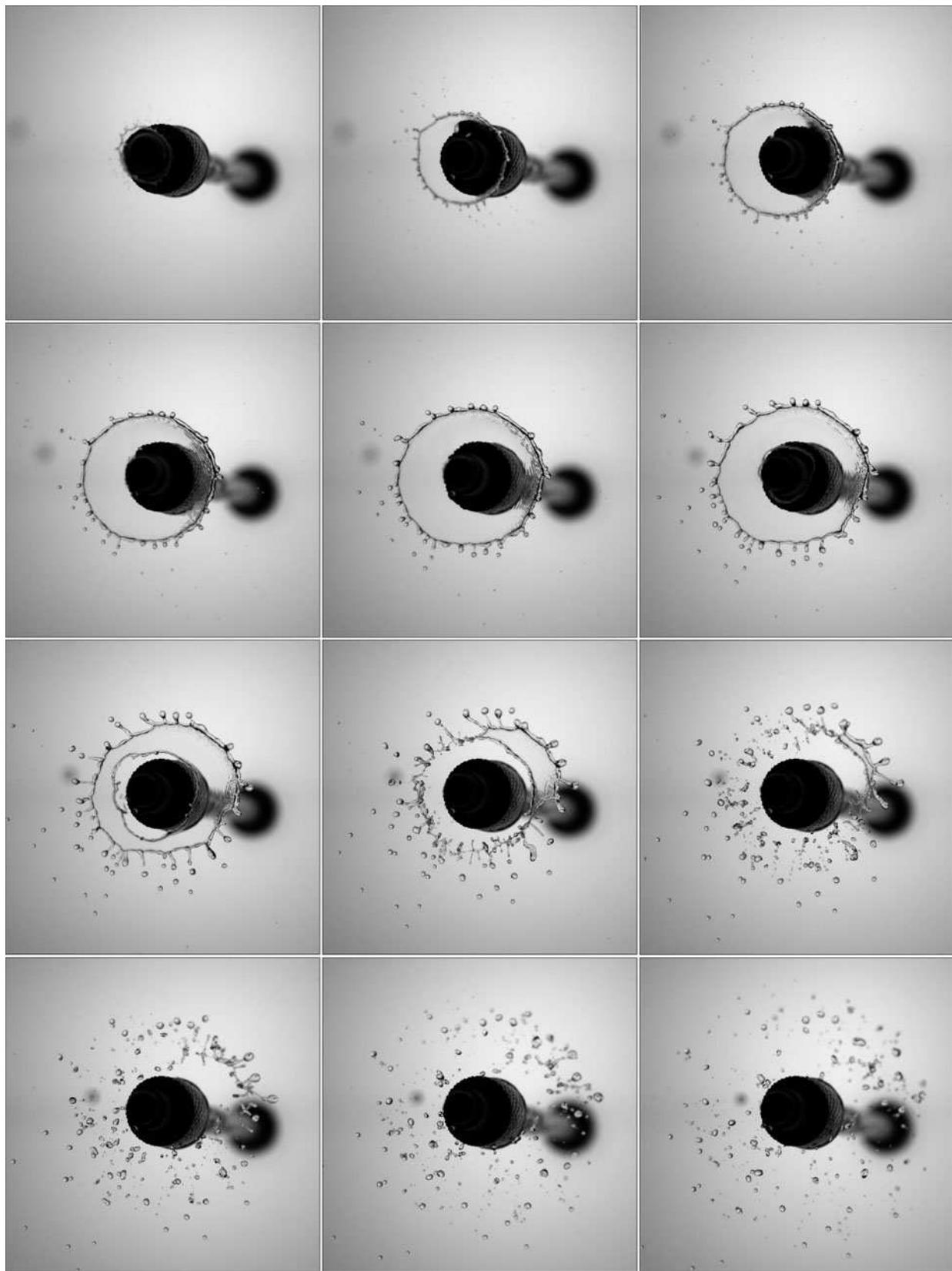


FIG. 4.26 – Évolution de la déformation pour un nombre de Weber égal à  $We = 960$ . Le temps va de gauche à droite et de haut en bas. L'intervalle de temps entre chaque image est de  $2/1000$  s.

### 4.9.1 Fragmentation composée

#### Faible nombre de Weber

Pour des nombres de Weber d'impact inférieurs à 1000, le bord de la nappe se rétracte jusqu'à revenir sur l'impacteur. La brisure de la goutte provient essentiellement de la brisure de ligaments ayant tous la même taille. Les photos sur la figure 4.25 montrent clairement que les ligaments formés ont le même diamètre. L'atomisation d'un ligament produit une distribution de taille de goutte connue. Marmottant a montré au cours de sa thèse que la brisure de ligaments produit des distributions gamma [41, 74, 43]. En appelant  $a$  le diamètre moyen des gouttes résultant de la brisure :

$$a = \langle d \rangle \quad (4.82)$$

la distribution se met sous la forme suivante :

$$p(d|a) = \frac{1}{a} \left( \frac{d}{a} \right)^{n-1} e^{-n \frac{d}{a}} \frac{n^n}{\Gamma(n)} \quad (4.83)$$

avec  $n$  le paramètre d'ordre de la fonction gamma. Ce paramètre d'ordre est relié à la corrugation initiale du ligament [41, 74, 43]. Dans le cas de très grosses corrugations, ce paramètre d'ordre  $n$  vaut typiquement entre 3 et 5.

Dans le cas d'un impact ayant un nombre de Weber égal  $We = 490$ , les ligaments formés présentent de très fortes corrugations. La distribution des tailles de gouttes est alors bien approximée par une distribution gamma d'ordre 5.

La figure 4.27 montre la distribution des diamètres adimensionnés  $d/\langle d \rangle$  pour un nombre de Weber d'impact égal à  $We = 490$ . La courbe en trait plein représente une distribution gamma d'ordre 5. On constate que les points expérimentaux s'alignent parfaitement avec cette distribution gamma.

#### Nombre de Weber au delà du nombre de Weber de transition

Au-delà d'un nombre de Weber d'impact de 500, le bord de la nappe ne rejoint plus l'impacteur. La nappe liquide se rompt en son centre et un deuxième bourrelet, interne, se forme et se déplace à la rencontre du bord extérieur. Les trois photos représentées sur la figure 4.28 montrent l'interaction des deux bourrelets, extérieur et intérieur, ainsi que la brisure qui en résulte. L'interaction des deux bourrelets produit un ensemble de ligaments de tailles différentes.

La photo représentée sur la figure 4.29 montre en détail une partie du bord de la nappe au moment de la brisure. On observe la présence de plusieurs ligaments de tailles différentes. Chacun des ligaments élémentaires vont se briser et donner chacun une distribution statistique des diamètres des fragments. Cette distribution est égale à la distribution d'un seul ligament présenté dans l'équation 4.83.

La répartition statistique des tailles des ligaments est elle aussi donnée par une distribution gamma. En effet, ces ligaments sont issus de la *brisure* d'un ligament initial : le

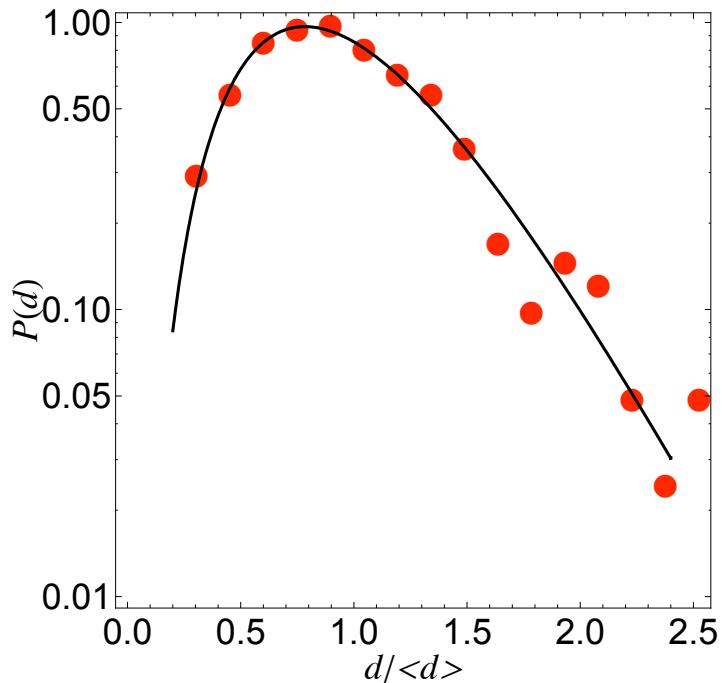


FIG. 4.27 – Distribution des tailles adimensionnées  $d/\langle d \rangle$  de fragments pour un nombre de Weber d’impact égal à  $We = 490$ . La distribution est comparée avec une distribution gamma d’ordre 5.

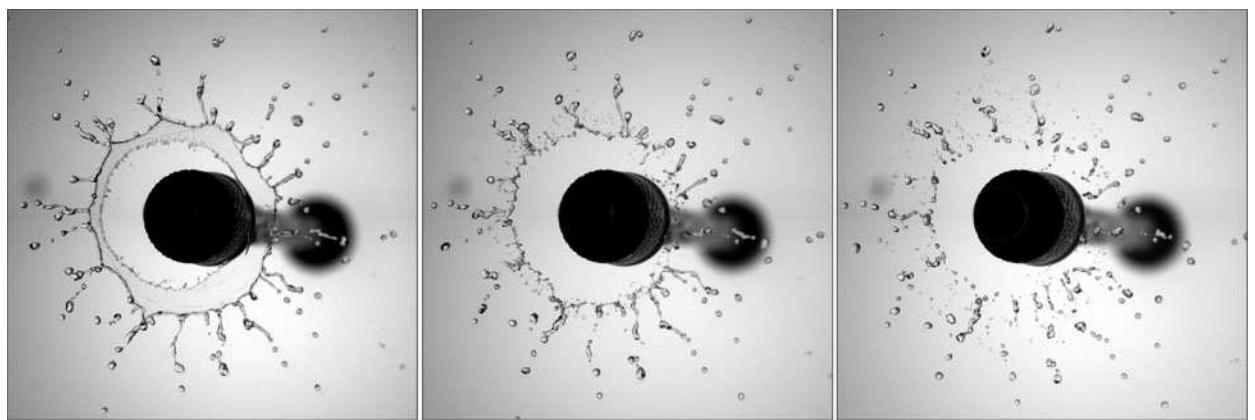


FIG. 4.28 – Interaction et brisure du bourrelet. Le nombre de weber d’impact est  $We = 1400$ . L’intervalle de temps entre chaque image est de  $1/1000$  s.

bord de la nappe. En appelant  $b$  la moyenne des diamètres  $a$  des ligaments :

$$b = \langle a \rangle \quad (4.84)$$

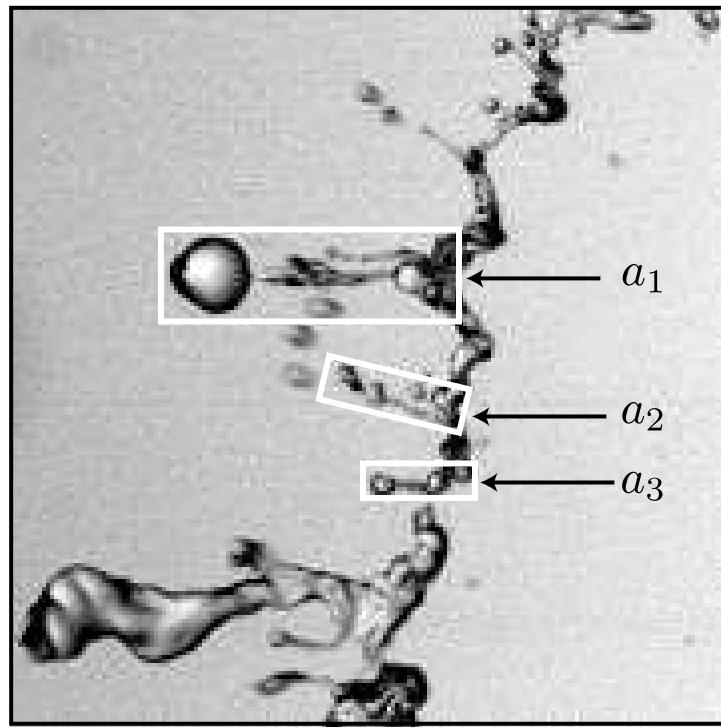


FIG. 4.29 – Détail sur la création de ligaments de tailles différentes au moment de la brisure. Il s'agit d'un détail de l'image centrale sur la figure 4.28. Les boîtes rectangulaires sont autosimilaires.

puisque la taille des fragments conditionne la taille du ligament.

$$q(a) = \frac{1}{b} \left(\frac{a}{b}\right)^{m-1} e^{-m\frac{a}{b}} \frac{m^m}{\Gamma(m)} \quad (4.85)$$

où  $m$  est un ordre caractéristique de la largeur de la distribution  $q$ . Lorsque  $m \gg 1$ , la distribution des tailles de ligaments tend vers un delta de dirac :

$$q(a) \rightarrow \delta(a - b) \quad (4.86)$$

La distribution globale dans le spray est donc :

$$P(d) = \int_0^\infty p(d|a) q(a) da \quad (4.87)$$

soit :

$$P(d) = \frac{n^n}{\Gamma(n)} \frac{m^m}{\Gamma(m)} \int_0^\infty \frac{da}{a} \left(\frac{d}{a}\right)^{n-1} \left(\frac{a}{b}\right)^{m-1} e^{-n\frac{d}{a} - m\frac{a}{b}} \quad (4.88)$$

qui peut se réécrire sous la forme suivante :

$$P(d) = \frac{n^n}{\Gamma(n)} \frac{m^m}{\Gamma(m)} 2 \left(\frac{1}{b}\right)^n \left(\frac{n}{m b d}\right)^{\frac{m-n}{2}} K_{m-n} \left(2 \sqrt{\frac{m n d}{b}}\right) \quad (4.89)$$

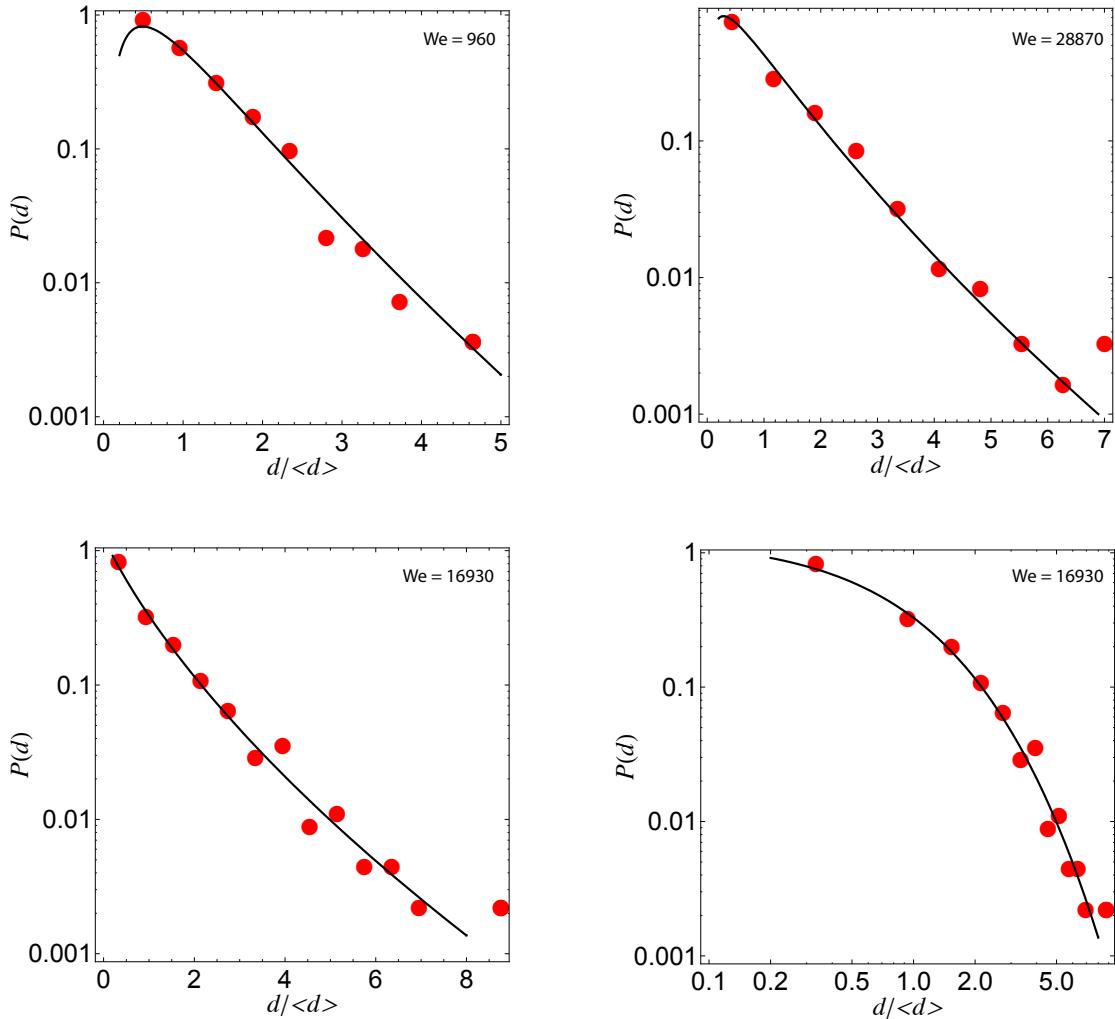


FIG. 4.30 – Distribution des diamètres adimensionnés  $d/\langle d \rangle$  pour trois nombres de Weber d’impact différent. En haut à gauche,  $We = 960$ . Les paramètres  $m$  et  $n$  valent  $m = 5$  et  $n = 3.5$ . En haut à droite,  $We = 2870$ , les paramètres  $m$  et  $n$  valent  $m = 5$  et  $n = 1.8$ . En bas le nombre de Weber d’impact est égal à  $We = 16930$ ,  $m = 5$  et  $n = 1$ . A gauche, les coordonnées sont linéaires en abscisses et logarithmiques en ordonnée. À droite, les abscisses et ordonnées sont en coordonnées logarithmiques.

avec  $K_{m-n}$  la fonction de Bessel d’ordre  $m - n$ .

La figure 4.30 montre trois distributions des diamètres adimensionnés  $d/\langle d \rangle$  pour trois nombres de Weber d’impact. Les deux courbes du haut sont pour des nombres de Weber d’impact respectivement égaux à 960 et 2870. Les courbes en trait plein correspondent à la distribution  $P(d)$  donnée dans l’équation 4.89 avec pour  $We = 960$ ,  $m = 5$  et  $n = 3.5$  et pour  $We = 2870$ ,  $m = 5$  et  $n = 1.8$ . On remarque que la queue de la distribution varie plus fortement qu’une exponentielle.

Les deux graphiques du bas sur la figure 4.30 représentent la distribution des diamètres pour  $We = 16930$ ,  $m = 5$  et  $n = 1$ . Le graphique de gauche montre cette distribution dans des coordonnées linéaires en abscisses et logarithmiques en ordonnées. La distribution est légèrement courbée et varie plus fortement qu'une exponentielle. Le graphique de droite montre cette même distribution dans des coordonnées logarithmiques. On remarque que la distribution ne suit pas une loi de puissance.

## 4.10 Conclusion

Le sujet des impacts liquides sur un solide fait l'objet d'une très grande littérature. Toutefois très peu porte sur les impacts sur une surface finie. A mi-chemin des études sur les nappes liquides et des études sur les impacts liquide-solide, nos travaux montrent l'évolution de l'impact dans un milieu évanescents jusqu'à la fragmentation complète de la goutte initiale. Bien qu'éloigné du cadre instabilité en couche mince, cette étude se veut complémentaire de celle sur la pluie et le *bag-breakup*.

On montre que le développement de la nappe ne dépend ni de la taille de la nappe, ni de la vitesse d'impact, ni de la tension de surface. Cependant l'évolution de la forme, elle, dépend de ces paramètres, regroupés dans le nombre de Weber. On montre que la taille maximale varie comme la racine carrée du nombre de Weber et que la taille moyenne des fragments varie comme l'inverse de la puissance un quart du nombre de Weber. Ces constatations expérimentales sont de plus confirmées par un modèle du type masse-ressort. Quant aux distributions des tailles des fragments résultant de la brisure, on montre également l'influence du nombre de Weber sur leur forme.



# Chapitre 5

## Les systèmes de mousse

### 5.1 Le mûrissement

#### 5.1.1 Un milieu à la fois simple et complexe

Les mousses se comportent de manière étonnamment complexe, surtout au regard de leur simplicité apparente. En effet, une mousse est constituée d'un ensemble de petits volumes gazeux appelés cellules qui sont séparées par une fine paroi liquide ou solide appelée séparatrice. Du fait de sa grande contenance de gaz, la densité d'une mousse est très faible.



FIG. 5.1 – Élément incontournable de toute boisson alcoolisée fermentée.

Les systèmes de mousses sont très largement utilisés dans l'industrie et dans notre quotidien. Faire la vaisselle, se savonner, se raser ou faire la lessive, voici quelques exemples de mousses que l'on peut produire chez soi. On retrouve également les mousses dans l'agro-alimentaire comme les mousses au chocolat, les oeufs battus en neige ou certaines boissons, alcoolisées ou non, qui forment une mousse à leur surface. La figure 5.1 donne un exemple d'une boisson que l'on fabrique depuis l'antiquité.

Dans le cas des boissons, le processus de création des mousses est dû au dégazage rapide des gaz contenus dans la boisson en présence d'aspérités et de sites de nucléation sur la surface du contenant. Selon la nature des liquides et des gaz dissous, les bulles

ainsi créées vont former une mousse à la surface du liquide. Les différents groupes de Champagne™ souhaitent avoir les plus fines bulles possible sans aucune mousse en surface. A contrario, le groupe Guinness™ remplace le gaz dissous de leur boisson par de l'azote dans le but d'avoir une mousse qui dure plus longtemps. La dynamique d'une mousse dépend du gaz contenu dans ses cellules et du liquide constituant les parois.

Les mousses sont également utilisées comme moyen de lutte contre les incendies, en particulier contre les feux d'hydrocarbures. Du fait de sa faible densité, la mousse reste à la surface des hydrocarbures et étouffe ainsi les feux.

Les industries chimiques et minières utilisent aussi des systèmes de mousse pour récupérer certains composés chimiques ou les *fines*, principalement par réactions chimiques. La mousse contient un agent qui réagit et fixe certains composés. La très faible densité de la mousse lui permet de flotter et de rester au dessus de n'importe quel liquide. Il est ainsi aisément de la récupérer pour la traiter et recueillir les composés recherchés.

Toutefois, toutes les mousses évoluent et vieillissent. Cette dégradation se fait de deux manières. La première est la disparition des cellules au niveau de la surface de la mousse. Le film liquide devient trop mince puis casse et la cellule disparaît. Cette disparition dépend de la surface d'échange entre la mousse et le milieu ambiant, elle devient négligeable dès lors que le volume de la mousse devient très grand par rapport à la surface d'échange. La deuxième manière est inhérente à la mousse elle-même. Certaines cellules se vident dans d'autres. On observe alors la disparition des petites cellules au profit des grosses. C'est le phénomène du mûrissement.

Nous montrons un exemple de mûrissement sur la figure 5.2 avec quatre photos montrant quatre instants différents de la vie d'une mousse de savon dans un tube. Au début, la mousse se compose d'une multitude de petites cellules et au fur et à mesure que la mousse vieillit, le nombre de cellules diminue, tandis que leur taille augmente.

Denis Weaire et Stefan Hutzler [76] ont écrit un ouvrage de référence sur le sujet.

### 5.1.2 Un milieu en perpétuelle évolution

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés à des systèmes instables ayant pour finalité une fragmentation. Dans le cas présent, nous avons un système métastable ne donnant pas lieu à une fragmentation. L'évolution de la mousse au cours du temps est une succession d'états mécaniques stables et les transformations mécaniques se font de manière quasi-statique. Toutefois, le système évolue chimiquement en continu via un processus de diffusion de gaz entre ces cellules constitutives.

Nous sommes en présence d'un système évoluant dans le temps et qui peut être représenté de manière statistique avec les outils que nous avons utilisés précédemment. De plus, le phénomène de mûrissement est d'une manière générale une disparition d'un certain nombre de cellules au profit d'autres. Cette dynamique est comparable à un processus d'agrégation. Nous avons vu précédemment que la fragmentation liquide fait intervenir à la fois des processus de brisure mais également des processus d'agrégation, permettant l'évolution d'un état initial quasi homogène vers un état distribué. Nous sommes ici avec un système ayant une dynamique semblable à un processus agrégatif.

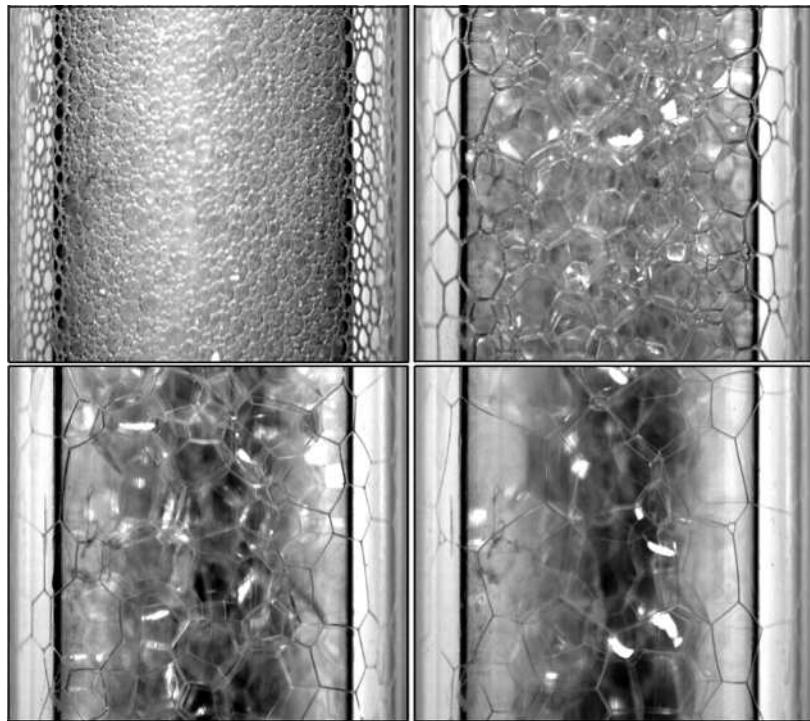


FIG. 5.2 – Différentes étapes du phénomène de mûrissement d'une mousse de savon. Le temps va de gauche à droite et de haut en bas.

De la même manière qu'une bande évoluant dans une cellule de Hele-Shaw, qu'une goutte soufflée par un jet gazeux ou qu'une goutte impactant une cible, nous sommes toujours en présence d'un système ayant un certain état de base évoluant au cours du temps. Le nombre d'objets et leur taille varie également au cours du temps. La figure 1.4 présentée dans l'introduction montre un parallèle entre toutes nos études et illustre que si les objets et les mécanismes physiques sont différents, les évolutions produisent les mêmes effets.

### 5.1.3 Mousse 2D

La figure 5.3 représente la photo d'une mousse à la surface d'un liquide. En noir, sur le bas de l'image, on observe des bulles remontant vers la surface. Plus haut, on remarque le début de la mousse, avec un agglutinement de bulles ne laissant aucune poche liquide. Du fait de la grande contenance en fluide des séparatrices, on dit que la mousse est *mouillée*. En remontant encore, on observe que les cellules sont plus grosses et que leurs séparatrices sont plus fines. On dit alors que la mousse est *sèche*.

En plus du phénomène du vieillissement de la mousse, s'ajoute dans ce contexte la dynamique de drainage des séparatrices et de l'assèchement de la mousse. De plus, dans les expériences en trois dimensions, il est difficile d'avoir une représentation spatiale précise de la mousse et de suivre son évolution au cours du temps. On peut citer, par exemple,

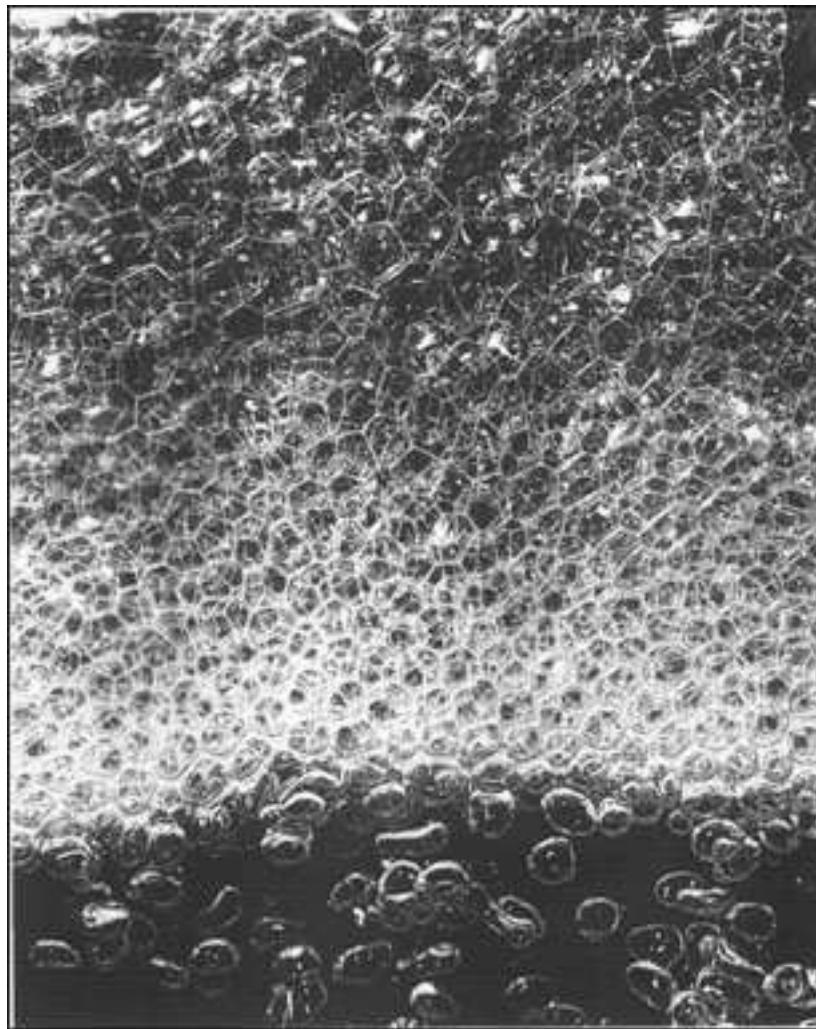


FIG. 5.3 – Instantané d'une mousse réelle à la surface d'un liquide. On observe que plus on monte dans la mousse, plus celle-ci devient *sèche*. *Crédit : J. Cilliers, UMIST.*

la méthode de vision stéréoscopique développée par A. von Doornum et S. Hilgenfeldt [70] pour suivre l'évolution d'une cellule et ainsi améliorer et comprendre la loi empirique sur l'évolution des cellules en fonction du nombre de faces. Cependant, cette technique ne peut suivre qu'une seule cellule et non l'ensemble de la mousse.

C'est pourquoi nous allons plutôt nous intéresser aux mousses à deux dimensions. Ces systèmes présentent l'avantage d'avoir une couche unique de cellules dans une direction, permettant ainsi une visualisation très simple de la mousse. En créant une mousse bidimensionnelle horizontale, on s'affranchit du phénomène de drainage et en utilisant un réservoir étanche, il n'y a plus de surface d'échange avec la mousse. Un exemple de mousse 2D est donné sur la figure 5.4.

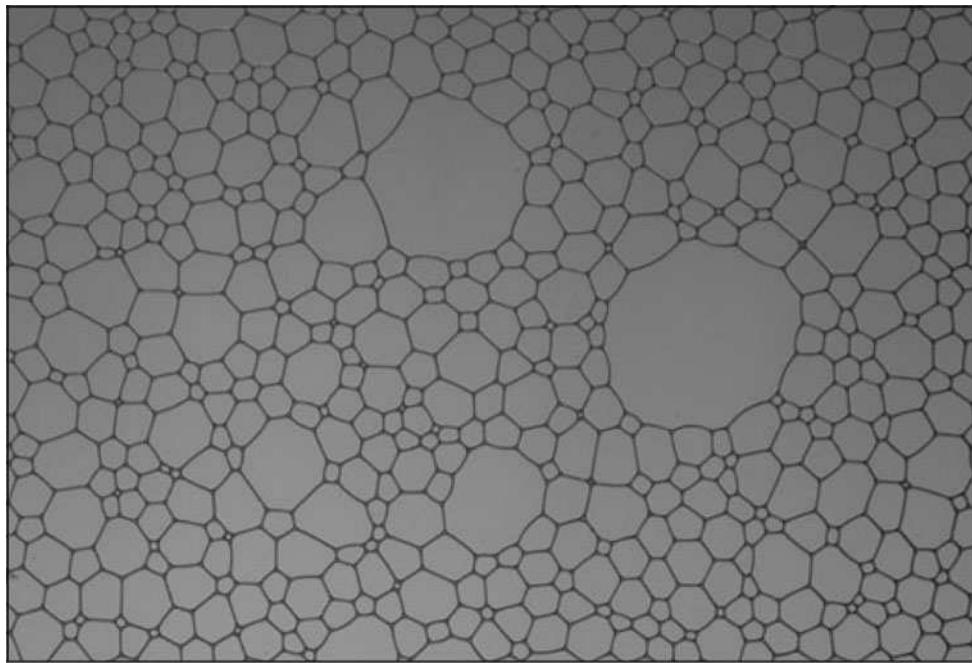


FIG. 5.4 – Instantané d'une mousse coiffante emprisonnée dans une cellule de Hele-Shaw.  
Crédit : C. & E. Villermaux.

#### 5.1.4 Système fermé et soufflerie à mousse

Jusqu'à présent, les études sur le vieillissement et l'évolution des mousses au cours du temps se font à l'aide d'un réservoir étanche. Initialement, le réservoir est rempli d'une mousse dont la distribution initiale des tailles est connue. Le réservoir est ensuite scellé et des images sont prises à différents instants pour suivre l'évolution de la mousse.

Ce mode opératoire présente un inconvénient majeur. Au fur et à mesure que la mousse vieillit, son nombre de cellules constitutives diminue. Les mesures statistiques deviennent de moins en moins précises au fur et à mesure que la mousse vieillit.

Pour nous affranchir de cet inconvénient, nous nous sommes également dirigés vers un système ouvert avec une production en continu de mousse. Nous utilisons un réservoir ouvert dans lequel nous créons une mousse à une extrémité. La création de la mousse étant continue, nous déplaçons l'ensemble de la mousse vers l'autre extrémité.

Nous avons mené deux séries d'expériences sur le mûrissement des mousses pour pouvoir comparer ces deux protocoles expérimentaux. Dans un premier temps, nous montrerons nos résultats obtenus dans un réservoir fermé, puis nous montrerons ceux obtenus à l'aide de la soufflerie.

## 5.2 Montage expérimental

### 5.2.1 Réservoir fermé

Nous nous sommes intéressés au vieillissement en système fermé, pour pouvoir effectuer des comparaisons avec la soufflerie à mousse. Le montage expérimental habituel pour expérimenter le mûrissement des mousses est constitué d'une cellule de Hele-Shaw fermée [27, 60, 59, 64, 63, 62]. Nous avons utilisé un réservoir horizontal en PMMA de 20 cm de côté et 1 mm d'épaisseur. On éclaire le réservoir par en-dessous et une caméra numérique est placée au-dessus pour prendre des photos à intervalle de temps régulier. Les images prises par la caméra ont une résolution de  $1280 \times 1024$  et l'intensité lumineuse est codée sur 12 bits. Le temps entre chaque image dépend du type de mousse. Les expériences faites par Glazier, Gross et Stavans [27] avec une mousse contenant une solution d'eau savonneuse et d'air durent environ 200 h (un peu plus de 8 jours), tandis que celles effectuées par Tam, Cheung et Szeto [64, 63, 62] durent environ 150 h (un peu plus de 6 jours). Pour augmenter la cinétique du mûrissement, il faut augmenter la solubilité des gaz présents dans la mousse au travers des séparatrices (voir la section 5.4.3). Certaines expériences ont été faites avec de la mousse à raser, celles de Durian, Weitz et Pine [23] en sont un exemple. Pour nos expériences en cellules fermées, nous avons utilisé des mousses coiffantes. Nous avons retenu cette solution pour des raisons pratiques, la mousse se gonfle instantanément et est composée d'une multitude de petites cellules microscopiques très largement distribuées en taille. Il n'y a pas, à l'instant initial, de cellules singulièrement plus grosses que les autres. De plus, le temps moyen pour qu'une mousse disparaît au sein du réservoir est de l'ordre de la dizaine d'heures, le gaz contenu dans le cosmétique est du butane et se dissout beaucoup mieux dans la solution que l'azote contenu dans l'air. La solubilité du butane est égale à  $K_H = 0.011 \text{ mol} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{Pa}^{-1}$ , la solubilité du dioxyde de carbone est égale à  $K_H = 0.034 \text{ mol} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{Pa}^{-1}$ , la solubilité de l'azote est égale à  $K_H = 0.00060 \text{ mol} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{Pa}^{-1}$  et celle de l'oxygène est égale à  $K_H = 0.0013 \text{ mol} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{Pa}^{-1}$ . Les expériences menées avec ce type de mousse durent en général entre 10 à 15h. Les photos prises avec la caméra haute résolution ont une taille de  $1280 \times 1024$  pixels et l'intensité lumineuse est codée sur 12 bits, soit sur 4096 niveaux de gris.

La figure 5.5 montre quatre instants différents d'une mousse. On remarque qu'au cours de sa vie, le nombre de cellules de la mousse diminue tandis que la taille moyenne des cellules augmente. Nous nous sommes donc intéressés à l'évolution de la taille moyenne des cellules au cours du temps ainsi que la distribution des tailles au sein de la mousse.

### 5.2.2 Soufflerie à mousse

Les figures 5.6 et 5.7 montrent le schéma de principe de la soufflerie à mousse et l'étude du mûrissement. Il s'agit d'une cellule de Hele-Shaw de 1.2 m de long, 20 cm de large et 0.7 mm d'entrefer. Le réservoir est constitué de deux plaques en PMMA de 15 mm d'épaisseur pour éviter le fléchissement. Un injecteur constitué d'une très aiguille de diamètre 0.5 mm est fixé au bas de la cellule et baigne dans une solution d'eau et de surfactant.

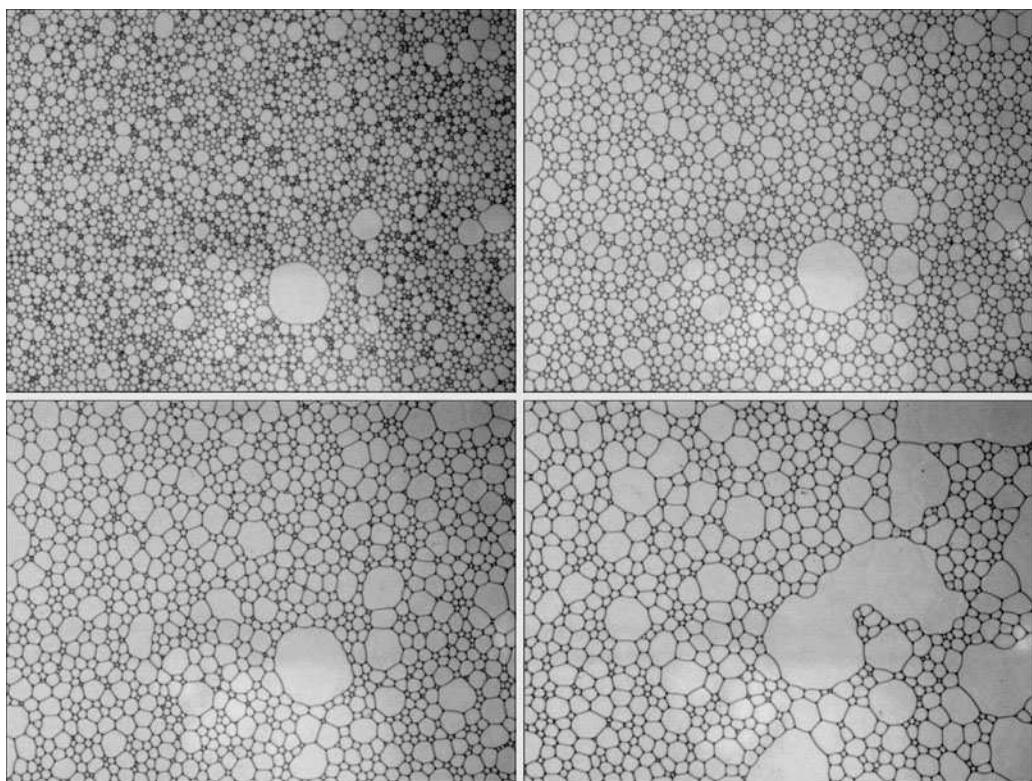


FIG. 5.5 – Évolution temporelle d'une mousse dans un réservoir étanche. Le temps va de gauche à droite et de haut en bas. Le temps entre chaque image est de 40 minutes.

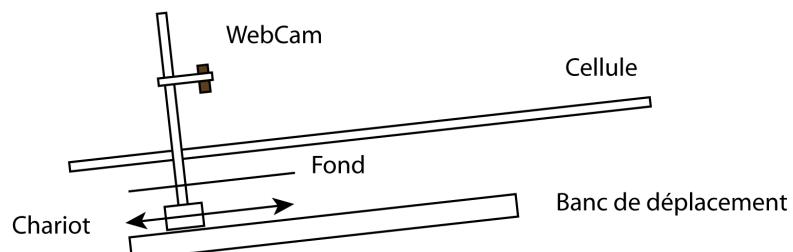


FIG. 5.6 – Vue de coté de la soufflerie à mousse.

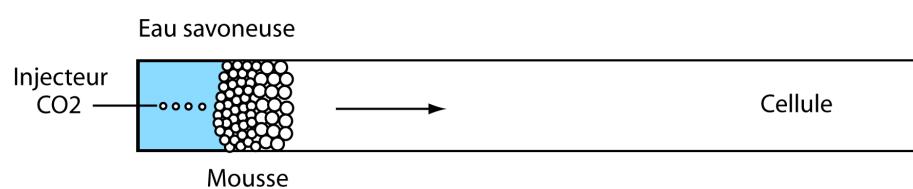


FIG. 5.7 – Vue de dessus de la soufflerie à mousse.

Nous injectons du gaz carbonique sous forme gazeuse de manière continue. En fonction du débit de gaz, nous obtenons une mousse plus ou moins monodisperse. La photo 5.8 montre une vue d'ensemble du dispositif. Nous pouvons voir la cellule dans son berceau noir. Un banc de transfert est placé parallèlement à la cellule. Un écran diffuseur, deux lampes et une webcam sont placés sur le chariot mobile du banc. Cet ensemble est piloté de manière à prendre des images de la mousse à différents endroits de la cellule.

Comme nous injectons le gaz en continu, la mousse formée se déplace à vitesse constante dans la cellule. Observer un endroit particulier de la cellule revient à observer la mousse à un âge donné.

$$\tau = \frac{X}{U} \quad (5.1)$$

avec  $U$  la vitesse de déplacement de la mousse, environ  $1 \text{ m.h}^{-1}$  et  $X$  la position le long du réservoir. Connaissant la vitesse de déplacement  $U$ , observer la mousse à une position  $X$  du réservoir c'est également observer la mousse au temps  $\tau$ . La photo 5.9 montre une vue rapprochée du point d'injection. Nous remarquons que le train de bulles de gaz carbonique est très monodisperse. Nous voyons ensuite l'accumulation des bulles et la formation d'une mousse qui se déplace ensuite vers le haut de l'image.

Une webcam Apple™ est utilisée pour prendre des photos de la mousse à diverses positions, et donc divers instants. La webcam est fixée sur un banc de déplacement, pouvant ainsi balayer l'ensemble du réservoir. En prenant plusieurs images assez rapidement en plusieurs positions et en les juxtaposant, on est capable d'avoir un instantané complet du champ de bulles. La figure 5.10 montre une image recomposée, montrant un instantané de l'ensemble de la mousse. En répétant ce processus, il est possible d'avoir une série d'images montrant chacune l'ensemble du réservoir et donc du champ de cellules constitutives de la mousse pour différents instants. Ainsi, nous avons accès au suivi temporel de l'ensemble de la mousse.

### 5.2.3 Suivi des cellules dans les mousses

Lors d'une expérience, nous prenons à intervalle de temps régulier une image instantanée de l'ensemble du réservoir. Nous traitons ces images avec le logiciel MatLab pour effectuer un suivi temporel de chaque cellule. Pour chaque image, nous identifions chaque cellule avec un identifiant unique. Nous recherchons d'une image à l'autre ce même identifiant pour avoir le suivi temporel de chaque cellule. Pour ce faire, nous calculons entre chaque image un déplacement moyen de l'ensemble de la mousse. À l'aide du déplacement moyen, nous effectuons une comparaison localisée autour de la cellule sur la première image puis autour de sa position supposée sur l'image suivante. L'algorithme de recherche est comparable à celui utilisé pour les mesures P.I.V. Nous effectuons une recherche sur une zone localisée autour du centre supposé de la cellule. En utilisant un algorithme de masquage, il nous est également possible de trouver les identifiants des cellules voisines. Nous déterminons ainsi si la cellule existe d'une image sur l'autre ou si elle a disparu et s'est vidée dans ses proches voisines.

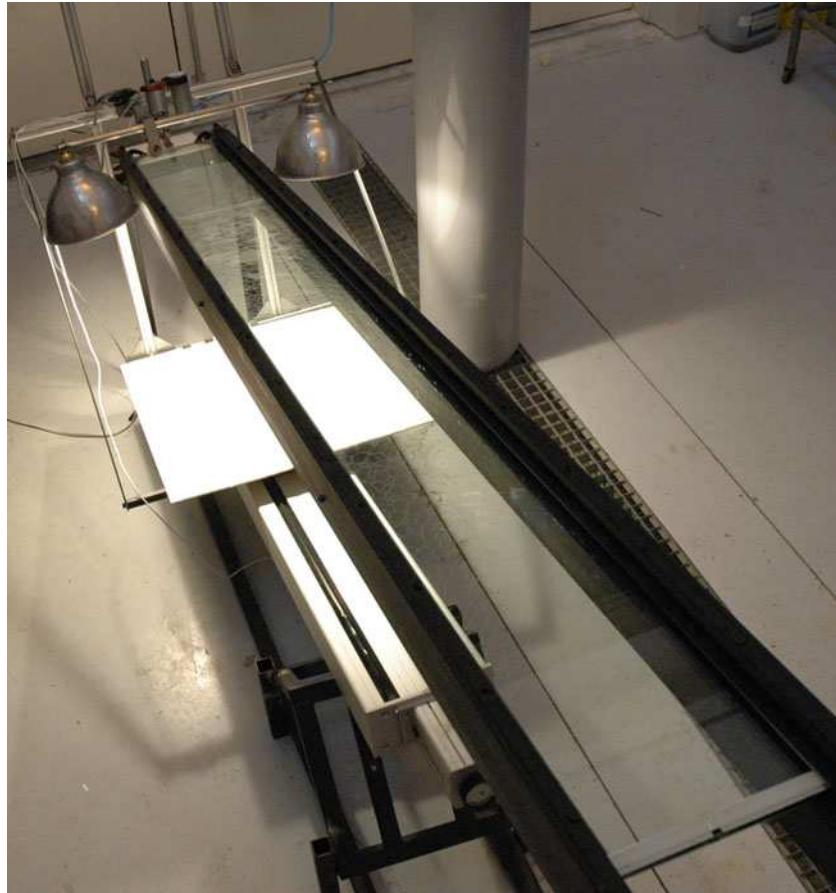


FIG. 5.8 – Vue d'ensemble de la soufflerie à mousse.

La figure 5.11 montre un exemple de suivi d'une cellule sur quatre images successives. Son identifiant unique est marqué au centre de la cellule. De plus, nous avons marqué à l'aide de leurs identifiants les cellules voisines. Notre algorithme permet d'avoir un suivi lagrangien de chaque cellule et d'avoir en plus l'évolution du proche voisinage d'une cellule durant son existence.

## 5.3 Système fermé

### 5.3.1 Surface moyenne des cellules

Nous nous sommes intéressés à la surface moyenne des cellules dans une mousse ainsi que son évolution au cours du temps. Soit  $\langle S \rangle$  la surface moyenne des cellules. La figure 5.12 montre la dépendance de  $\langle S \rangle$  avec le temps.

La moyenne  $\langle S \rangle$  n'est pas calculée en utilisant l'ensemble des surfaces mesurées. Nous avons, au préalable, construit un histogramme des surfaces et nous avons cherché à partir de quelle surface limite  $S_{max}$  les événements statistiques ne sont plus pertinents. Cette surface

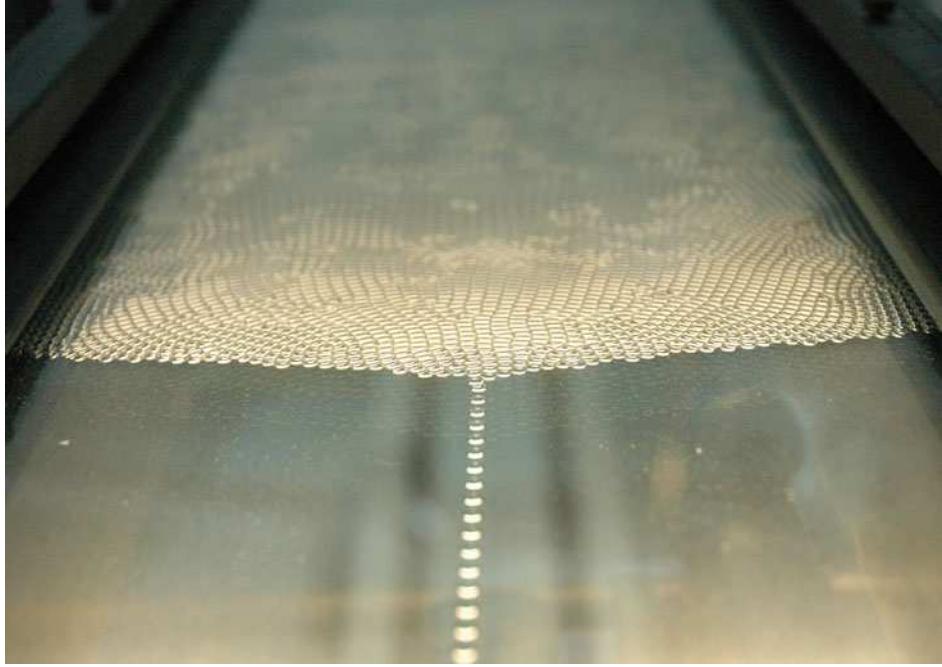


FIG. 5.9 – Vue rapprochée du point d'injection.

maximale est donc définie comme étant le point pour lequel  $S.P(S)$  devient négligeable. La surface moyenne est calculée sur l'ensemble des cellules ayant une surface inférieure à la surface limite  $S_{max}$  :

$$\int_0^{S_{max}} S.P(S) dS \approx \langle S \rangle \quad (5.2)$$

Les cellules exclues sont anormalement grosses et bien que très peu nombreuses ont un impact fort sur la moyenne.

La figure 5.13 montre un exemple de distribution de surface  $P(S)$  multipliée par la surface  $S$ . En encart, seule la distribution  $P(S)$  est représentée. On remarque que pour des surfaces plus grandes que  $90 \text{ mm}^2$ , les valeurs de  $S.P(S)$  deviennent faibles et que les valeurs sont de plus en plus dispersées. Nous considérons que ces points ont un poids statistique très faible et nous les excluons en définissant une surface limite  $S_{max}$ .

L'instant  $t=0$  correspond au moment où la mousse est placée dans le réservoir. Les cellules deviennent clairement identifiables au bout d'environ soixante minutes. On remarque que la surface moyenne  $\langle S \rangle$  varie linéairement avec le temps. Ce résultat vient confirmer des résultats déjà obtenus sur cette question. Smith [56], en 1952, exhibe un graphique montrant la variation linéaire de la surface avec le temps. Stavans [59] retrouve la même loi en 1990. Durian, Weitz et Pine [23] montrent, en 1991, que le diamètre moyen  $\langle d \rangle$  des cellules dans la mousse à raser varie comme la racine carrée du temps, soit une variation linéaire de la surface moyenne avec le temps. Cependant, certaines études montrent des comportements différents. Glazier, Gross et Stavans montrent, via un modèle d'évolution du nombre de cellules au cours du temps, que la surface moyenne varie en loi de puis-

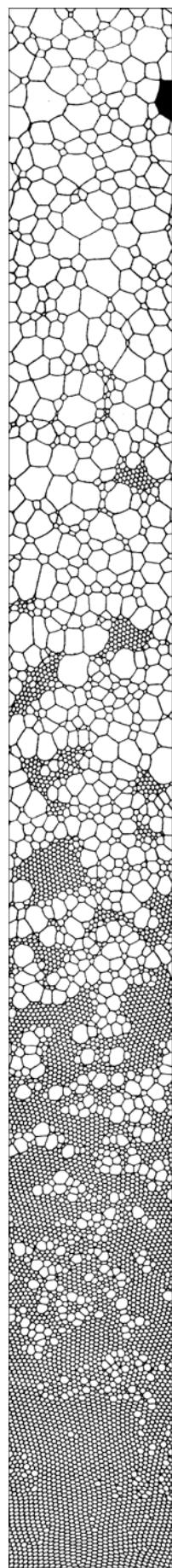


FIG. 5.10 – Image recomposée illustrant un *instantané* de la soufflerie à mousse.

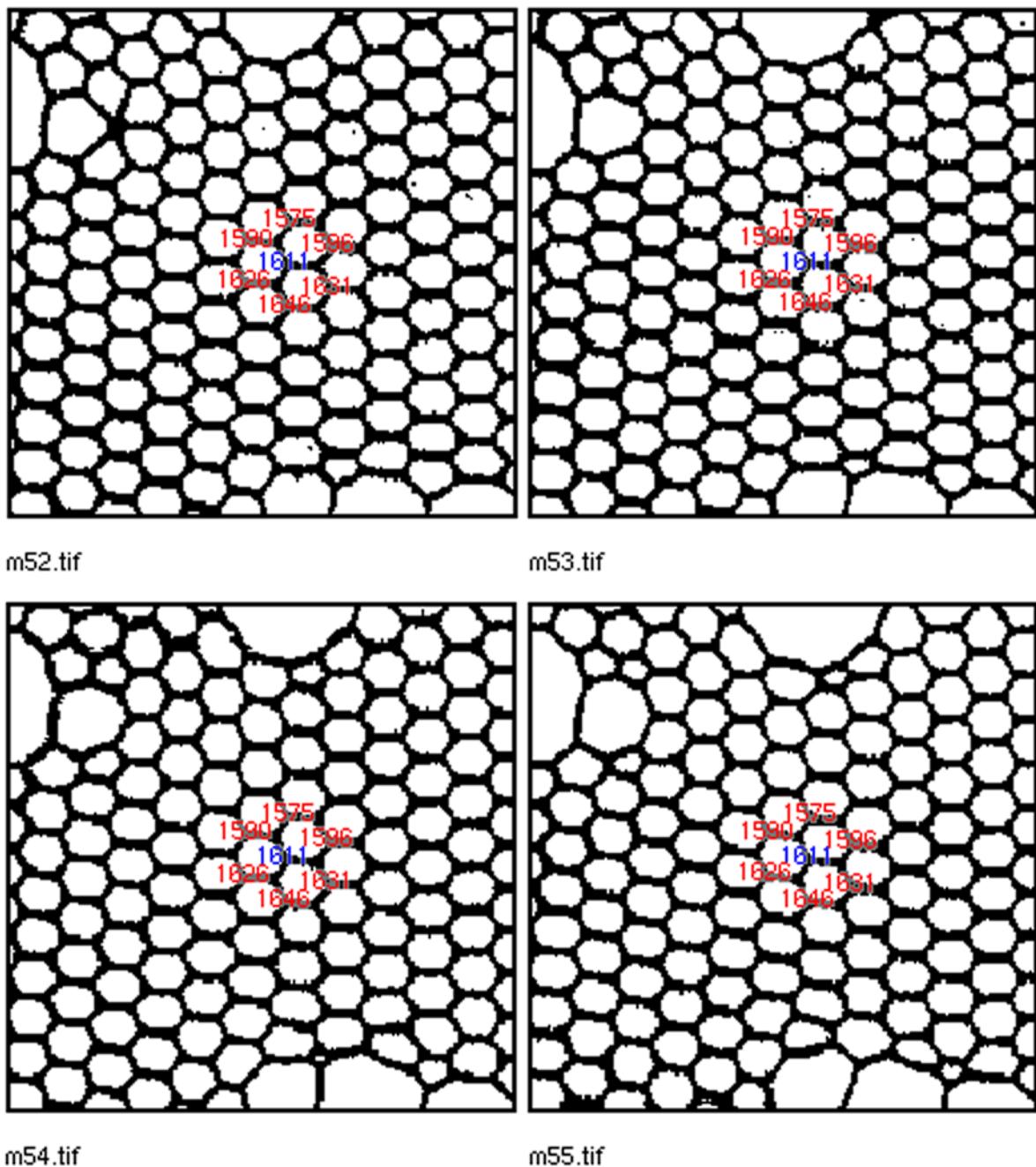


FIG. 5.11 – Exemple de suivi d'une cellule ainsi que de ses voisines sur quatre images successives.

sance avec un exposant égal à 0.6 avec le temps. Aboav [1] expose, dans certains cas, un comportement quadratique de la surface moyenne avec le temps.

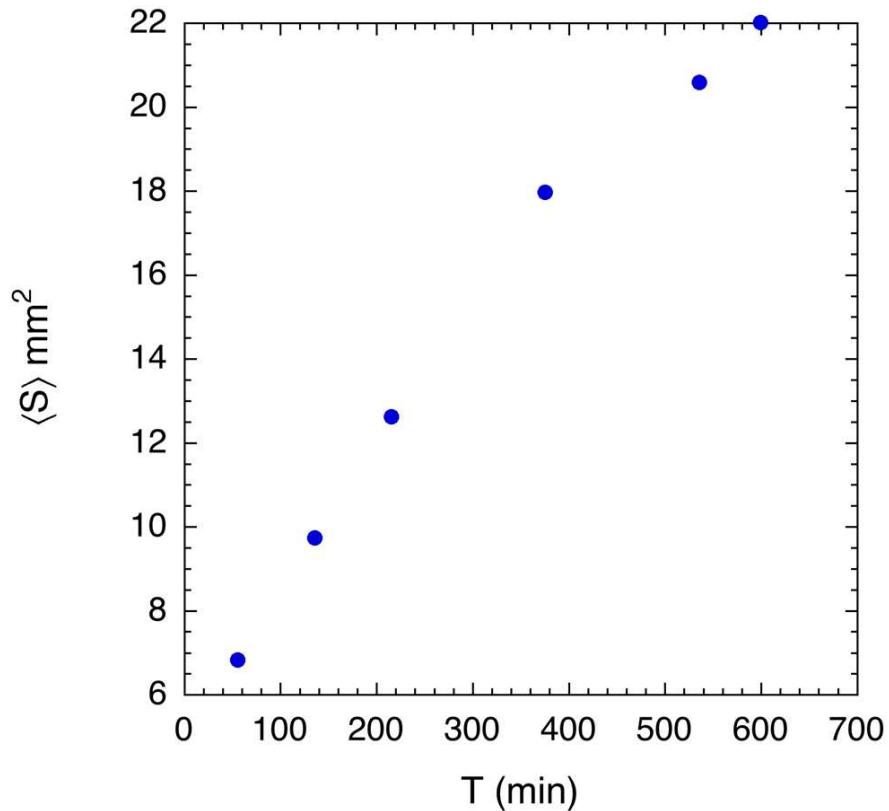


FIG. 5.12 – Évolution de la surface moyenne  $\langle S \rangle$  au cours du temps.

### 5.3.2 Distribution des surfaces

La figure 5.14 montre, pour différents instants, la répartition des tailles au sein d'une mousse. De la même manière que pour le calcul de la moyenne, on exclut, pour chaque distribution, les trop grosses cellules qui n'ont aucune valeur statistique, car il s'agit de cellules extrêmement grosses, voire même de larges trous au sein de la mousse 2D.

On remarque que les distributions ont toutes une décroissance exponentielle en taille. La pente de la distribution devient de moins en moins grande au fur et à mesure que la mousse vieillit. Toutefois, nous avons vu que la surface moyenne évoluait au cours du temps. Nous avons donc comparé ces mêmes distributions en rapportant la surface à la surface moyenne pour chaque instant.

La figure 5.15 montre les distributions des surfaces adimensionnées par la surface moyenne  $\langle S \rangle$ . On remarque que dans les unités  $S/\langle S \rangle$  toutes les distributions ont la même pente.

Il est intéressant de noter que l'on trouve très peu de travaux sur les mousses avec des statistiques sur la surface des cellules, et encore moins sur l'évolution des distributions au cours du temps. Expérimentalement, Beenkaer [5], en 1986, est le premier à donner une comparaison entre un modèle numérique et des données expérimentales. Puis viennent

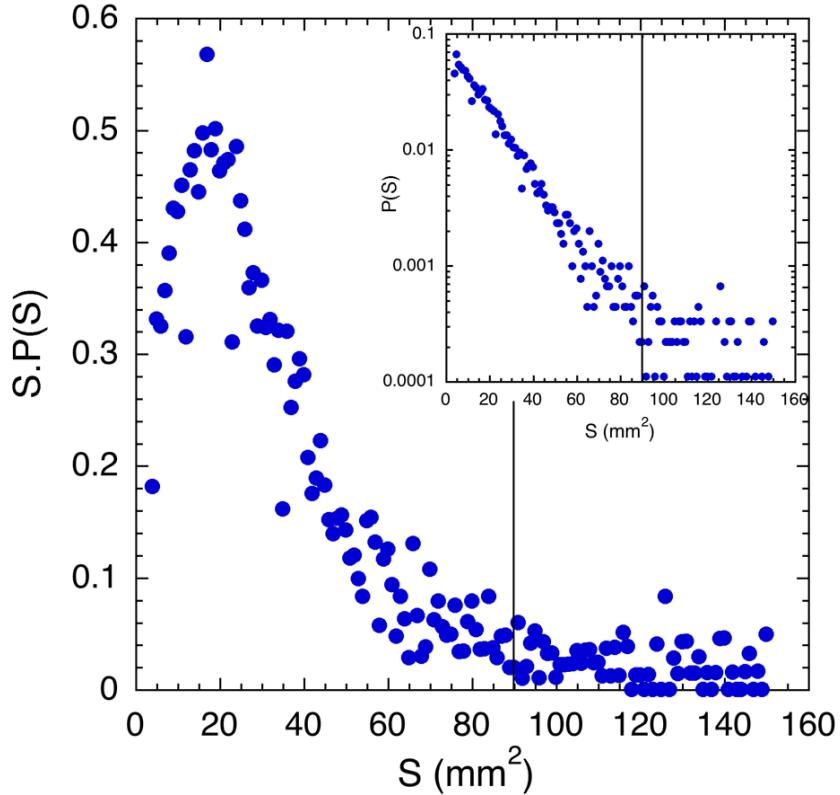


FIG. 5.13 – Exemple de détermination de la valeur  $S_{max}$ . Le graphique représente la distribution des surfaces  $S P(S)$ . Le graphique en encart représente la distribution des surfaces  $P(S)$ .

ensuite les travaux de Stine, Rauseo et Moore [61], Glazier, Anderson et Grest [26] et Stavans [59] en 1990, puis de Icaza, Jiménez-Ceniceros et Castaño [22] en 1994.

Numériquement et théoriquement, Fradkov, Shvindlerman et Udler [25] sont les premiers, en 1985, à montrer une distribution des surfaces. Viennent ensuite les travaux de Rivier [50] en 1985, Beenakker [6] en 1988, Kawazaki, Nagai et Nakashima [33] en 1989, Flyvbjerg [24] en 1993 et Vasconcelos, Cantat et Glazier [72] en 2003.

L'ensemble de ces travaux montrent des distributions comparables aux nôtres. Certains montrent même un régime auto-similaire aux temps longs, avec des distributions se rejoignant en une courbe maîtresse dans les unités  $S/\langle S \rangle$ .

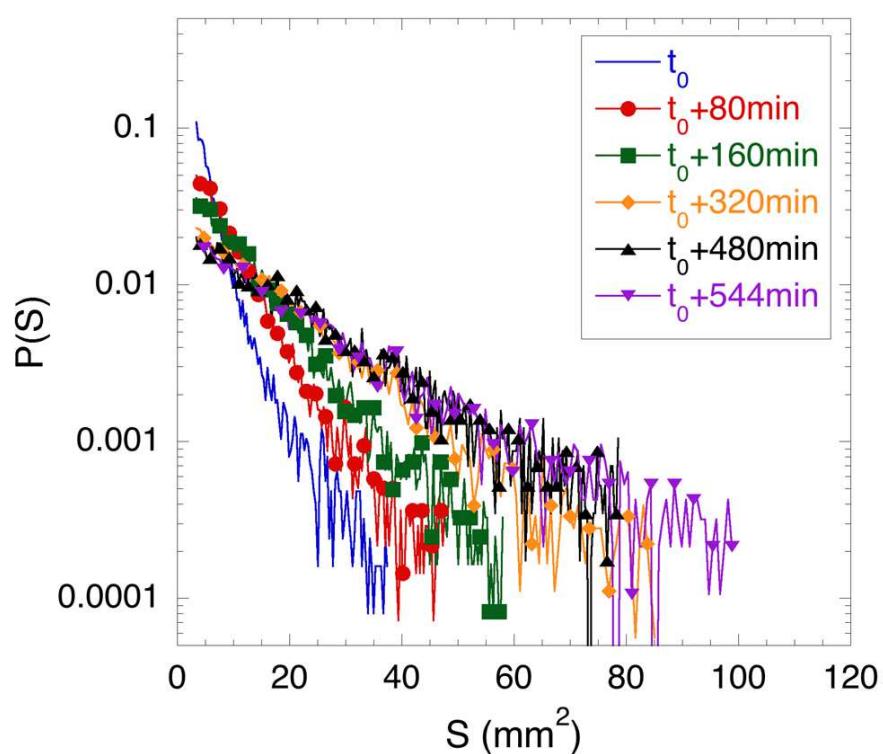


FIG. 5.14 – Distributions des surfaces au sein d'une mousse pour différents instants.

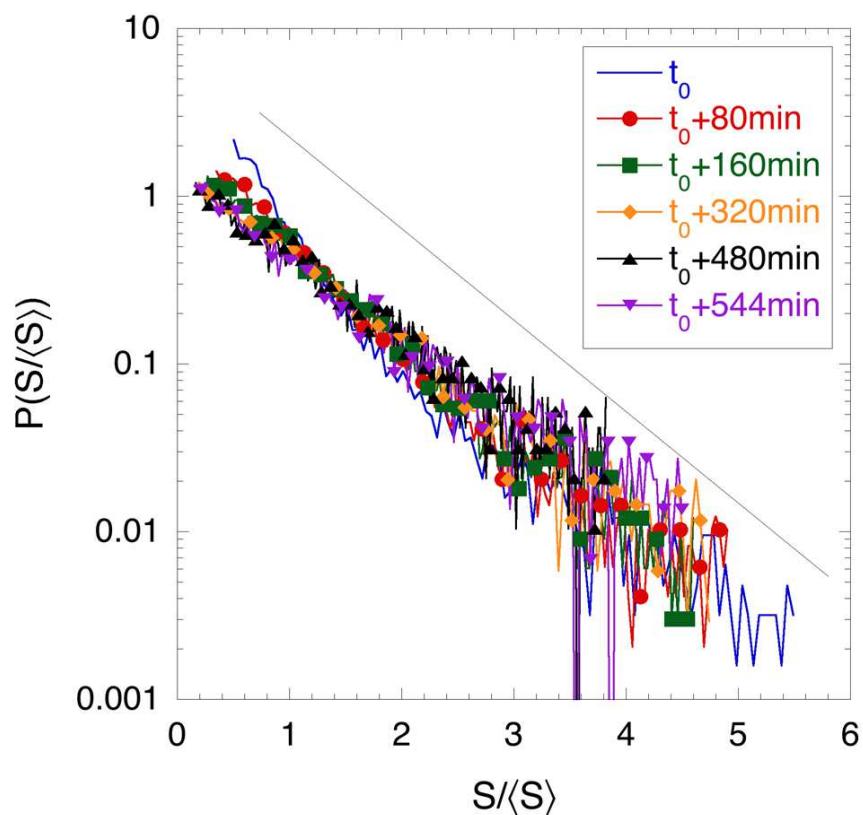


FIG. 5.15 – Distributions des surfaces rapportées à la surface moyenne  $\langle S \rangle$  pour différents instants.

## 5.4 Soufflerie à mousse

### 5.4.1 Surface moyenne des cellules

Comme pour les expériences effectuées dans un réservoir fermé, nous avons tout d'abord caractérisé la surface moyenne de la mousse ainsi que son évolution au cours du temps. Contrairement à un réservoir fermé, la mousse s'écoule continûment dans la soufflerie. Comme nous l'avons déjà énoncé, visualiser un endroit de la soufflerie, c'est également visualiser la mousse à un instant donné. Par conséquent, nous avons divisé les images représentant l'ensemble de la mousse en vingt zones de taille égale. Ainsi, chaque zone correspond à un instant donné de la mousse. Connaissant la vitesse de déplacement de la mousse, nous pouvons déterminer l'âge de la mousse. La figure 5.16 représente la variation temporelle de la surface moyenne des cellules  $\langle S \rangle$  avec le temps. Chaque point correspond à la surface moyenne des cellules au sein d'une zone du réservoir.

On remarque deux régimes, aux temps courts avec une évolution presque constante et aux temps longs une évolution exponentielle de la surface moyenne  $\langle S \rangle$ .

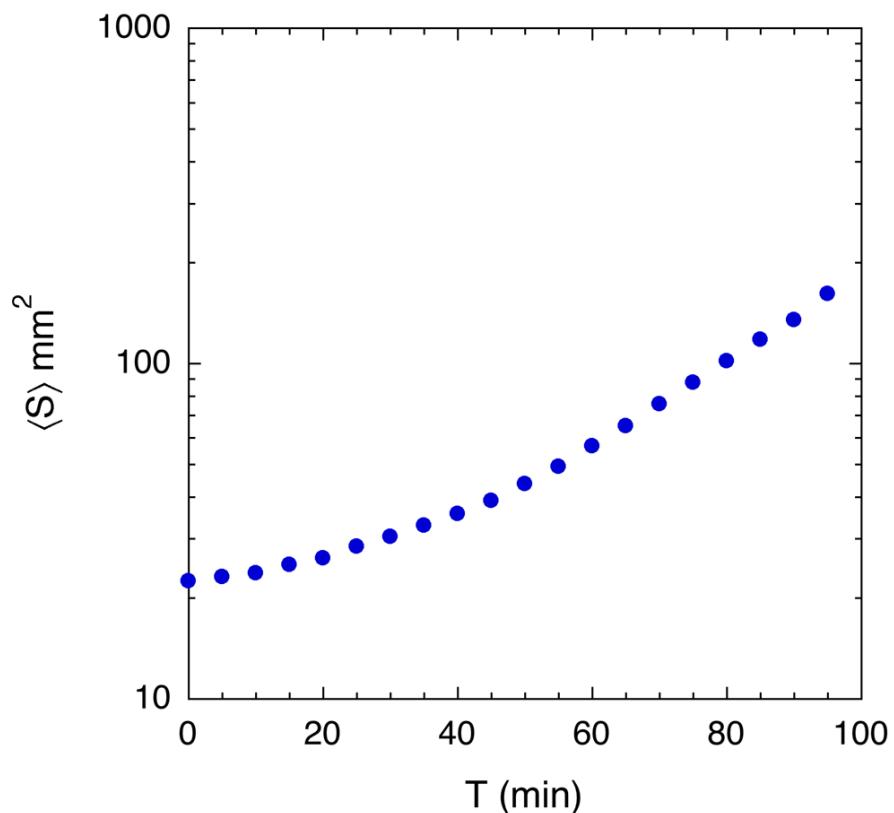


FIG. 5.16 – Surface moyenne au cours du temps en échelle semi-logarithmique.

Jusqu'à présent, personne n'a observé de croissance exponentielle de la surface moyenne avec le temps. De plus, ces résultats semblent différents de ceux observés habituellement

dans un réservoir étanche. Cependant, nous allons montrer que ce comportement est compréhensible et ne vient pas contredire nos précédents résultats.

### 5.4.2 Distribution des surfaces

Nous nous sommes également intéressés à la répartition statistique des surfaces.

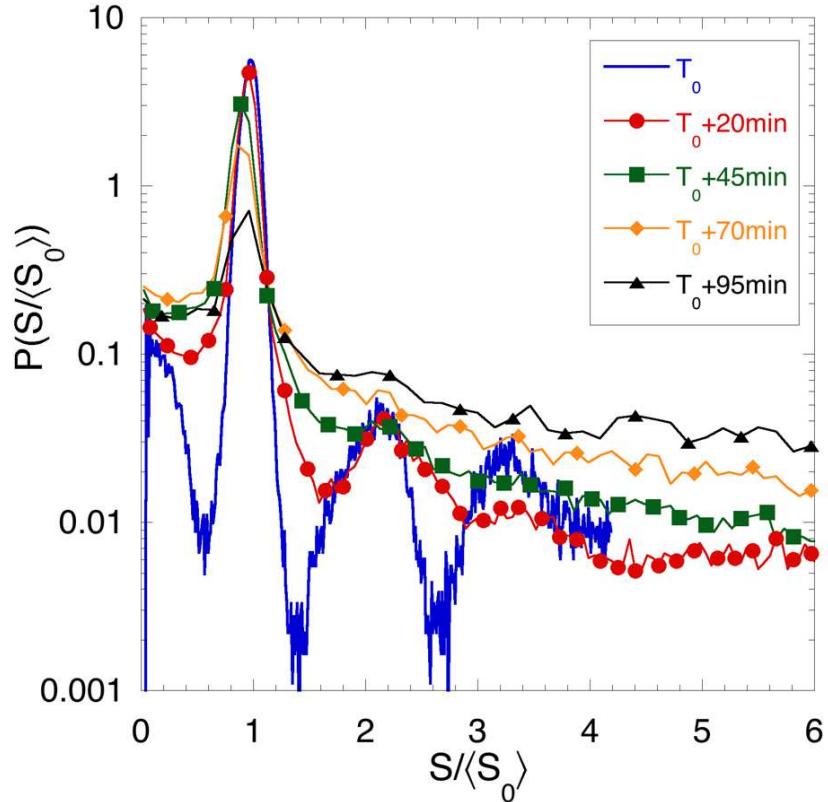


FIG. 5.17 – Distributions des surfaces rapportées à la surface initiale d'injection.

La figure 5.17 montre la répartition des surfaces au sein de la mousse pour différents instants de sa vie. La fonction de densité de probabilité est exprimée en fonction de la surface rapportée à la surface d'injection  $\langle S_0 \rangle$ . On remarque qu'aux tout premiers instants de son existence, la grande majorité des cellules ont une taille égale à  $\langle S_0 \rangle$ . La hauteur et l'étroitesse du pic principal centré sur 1 indiquent également une très faible dispersion des surfaces au moment de la création de la mousse. Les *harmoniques* que l'on voit au moment de l'injection et qui correspondent à des surfaces égales à deux ou trois fois la surface initiale ont une fréquence moins élevée. Ces *harmoniques* correspondent très probablement à la rupture d'une séparatrice entre deux cellules. Cette rupture donne lieu à la création d'une cellule, dont la surface est égale à la somme des surfaces des cellules fusionnantes. Lorsque la mousse évolue, on remarque que le pic centré autour de 1 diminue très fortement et que la distribution devient de plus en plus large.

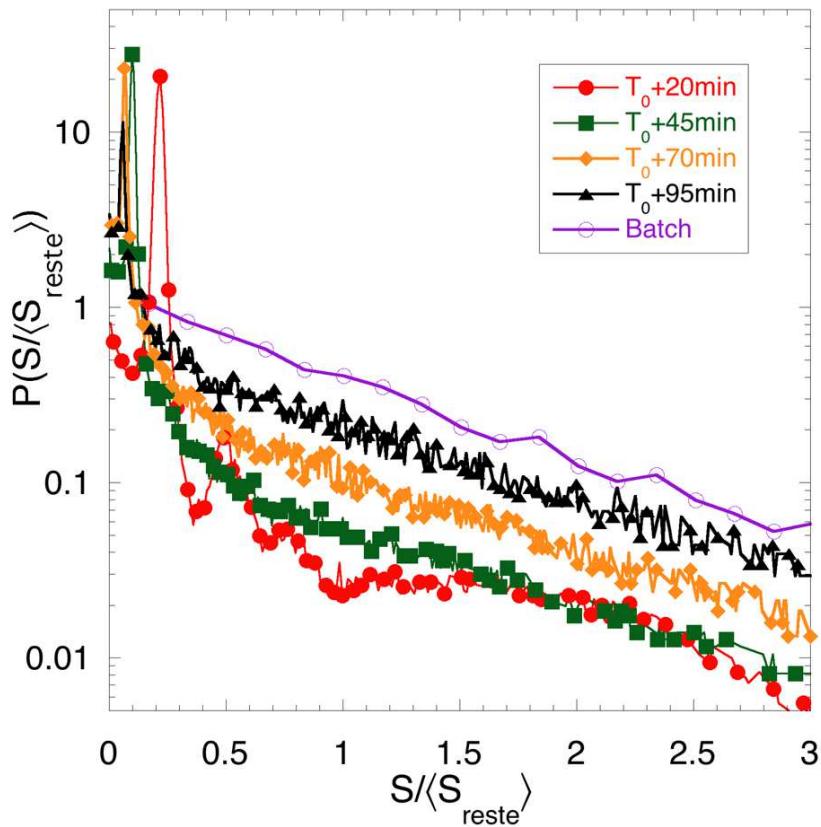


FIG. 5.18 – Distributions des surfaces rapportées à la surface moyenne des cellules excluant les cellules à 6 faces. La courbe avec des cercles  $\circ$  représente la distribution des surfaces obtenues dans un réservoir étanche.

La figure 5.19 montre trois images caractéristiques de la mousse à différents instants de sa vie. Au premier instant, on remarque que la grande majorité des cellules ont la même taille,  $\langle S_0 \rangle$ , et qu'il y a très peu de défauts. Plus tard, on remarque l'existence de cellules dont la surface est toujours  $\langle S_0 \rangle$  au sein d'un ensemble de cellules plus grosses. Ces îlots de cellules sont représentés sur les distributions de la figure 5.17 par le pic centré sur 1. En observant attentivement ces cellules, on remarque qu'elles ont toutes 6 faces. En dehors du pic centré sur  $S = \langle S_0 \rangle$ , les distributions semblent avoir une décroissance exponentielle qui évolue avec le temps. Pour analyser cela, nous avons comparé ces mêmes distributions dans les mêmes unités, mais pour l'ensemble des surfaces  $S$ .

La figure 5.20 montre les mêmes distributions, sans la distribution initiale, sur l'ensemble des surfaces. Au cours du temps, la mousse explore des surfaces de plus en plus grandes. Chaque distribution présente une queue exponentielle de plus en plus large, au fur et à mesure que la mousse vieillit. Cette augmentation est une mesure directe du fait que la taille moyenne des surfaces augmente avec le temps.

On se retrouve donc avec deux ensembles distincts qui n'évoluent pas de la même ma-

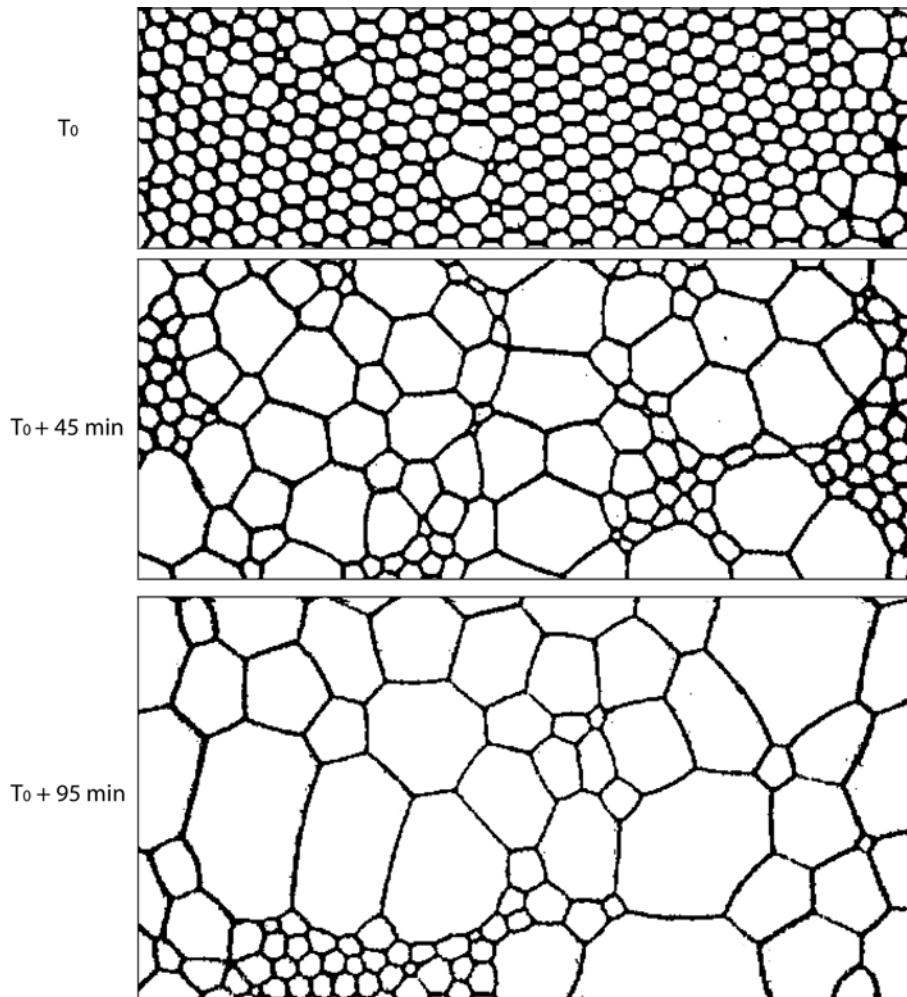


FIG. 5.19 – Images caractéristiques de la mousse pour trois moments différents.

nière. D'un côté, les îlots de cellules à 6 faces qui n'évoluent pas en surface, mais seulement en nombre avec le temps, la figure 5.17 montre bien que le pic centré en  $\langle S_0 \rangle$  diminue avec le temps. De l'autre côté, on a le reste des cellules qui évoluent avec le temps. Ce reste a une distribution exponentielle qui devient de plus en plus large, au fur et à mesure que la mousse vieillit.

On peut donc écrire une loi de probabilité des surfaces :

$$P(S) = p_6 \delta(S - S_0) + \frac{(1 - p_6)}{\langle S_{reste} \rangle} e^{-\frac{S}{\langle S_{reste} \rangle}} \quad (5.3)$$

avec  $p_6$  la fraction de cellules à 6 faces. Cette manière d'écrire permet de découpler l'évolution singulière des cellules à 6 faces, avec le reste des cellules.

En reprenant l'ensemble des distributions on peut, en occultant les cellules à 6 faces, calculer une surface moyenne  $\langle S_{reste} \rangle$ . La figure 5.18 montre les distributions des surfaces au cours du temps dans les nouvelles unités  $S/\langle S_{reste} \rangle$  et on observe que les distributions

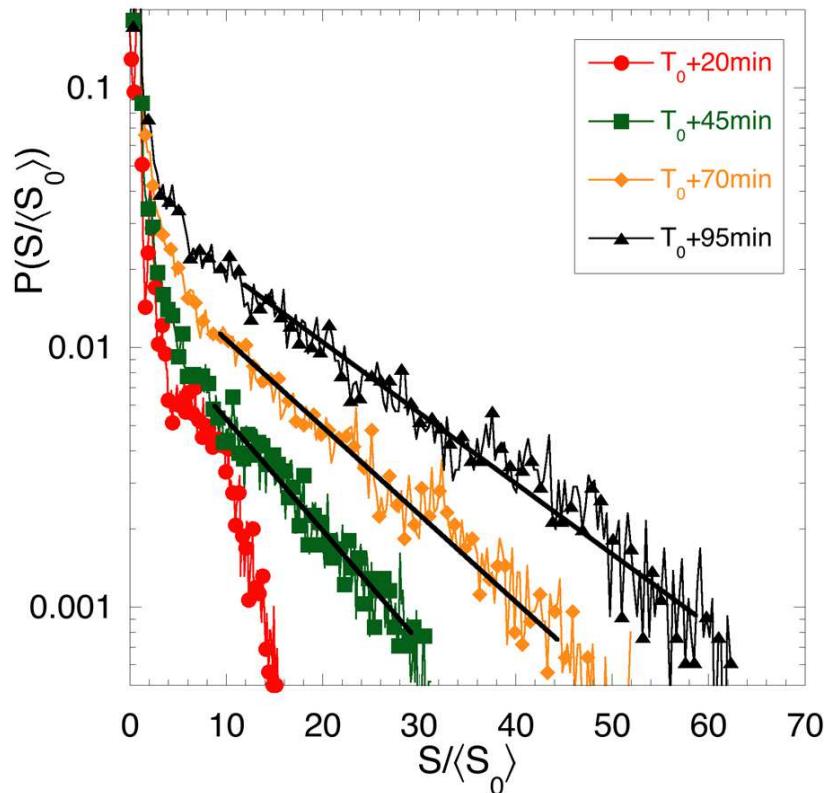


FIG. 5.20 – Distributions des surfaces rapportées à la surface initiale d'injection.

ont la même pente. À titre de comparaison, on représente une distribution obtenue au cours des expériences en système fermé. Nous avions déjà vu que les distributions dans ce type d'expériences étaient auto-similaires et qu'elles prenaient une forme universelle dans ces unités.

Toutefois, bien qu'ayant une même pente, les distributions, dans le cas de la soufflerie, ne se superposent pas. Ceci est dû au fait qu'il existe une part non négligeable de cellules à 6 faces, exclues ici pour le calcul de  $\langle S_{\text{reste}} \rangle$ . La distribution  $P(S/\langle S_{\text{reste}} \rangle)$  dépend du coefficient  $(1 - p_6)$ , où  $p_6$  est la fraction de cellule à 6 faces dans la mousse considérée. Lorsque ce terme diminue, c'est-à-dire lorsque la mousse vieillit, la distribution se rapproche de celle obtenue en système fermé.

Ces observations indiquent donc un comportement universel en  $S/\langle S_{\text{reste}} \rangle$  des distributions des surfaces aux temps longs.

Nous avons représenté sur la figure 5.21 l'évolution temporelle de la moyenne des surfaces, en excluant les cellules à six faces  $\langle S_{\text{reste}} \rangle$ . Contrairement à ce que l'on avait déjà observé précédemment sur la figure 5.16, l'évolution de la surface moyenne sans les cellules à six côtés est linéaire en temps. On retrouve un comportement identique à celui observé dans un réservoir étanche. Ceci nous indique que le mécanisme d'évolution des cellules dépend du nombre de faces, ou tout du moins qu'il existe deux dynamiques, une pour les

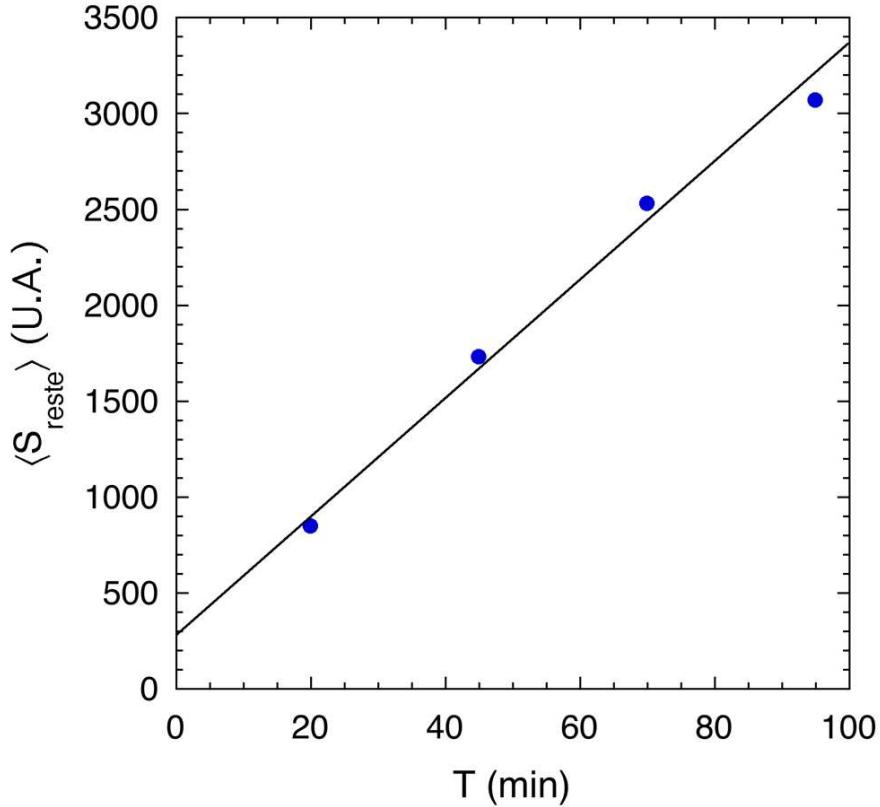


FIG. 5.21 – Évolution de la surface moyenne  $\langle S_{\text{reste}} \rangle$  en fonction du temps.

cellules présentes dans les îlots et une autre pour le reste des cellules.

Il nous est également possible de déterminer la valeur de  $p_6$ , la fraction de cellule ayant six faces. La figure 5.22 montre son évolution au cours du temps. Cette fraction diminue au fur et à mesure que la mousse vieillit. On remarque que cette fraction est élevée, toujours supérieure à 0.5, ce qui signifie que la majorité des cellules au sein de la mousse ont six voisins. La surface moyenne  $\langle S \rangle$  est donc largement dominée par ces cellules à six faces et son augmentation au cours du temps, représentée sur la figure 5.16, est une conséquence de la diminution des cellules à six cotés. Ainsi, on peut estimer que l'évolution de la surface moyenne  $\langle S \rangle$  est inversement proportionnelle au nombre de cellules à six faces  $n_6$  :

$$\langle S \rangle \sim \frac{1}{n_6} \quad (5.4)$$

Nous avons donc comparé ces deux évolutions. Connaissant la fraction de cellule à six voisins  $p_6$  et le nombre de cellules total  $N$ , on en déduit :

$$n_6 = p_6 N \quad (5.5)$$

Chaque courbe est adimensionnée par la valeur à l'instant  $t=0$  pour pouvoir ainsi comparer leur évolution. La figure 5.23 montre en fonction du temps, la variation de la surface

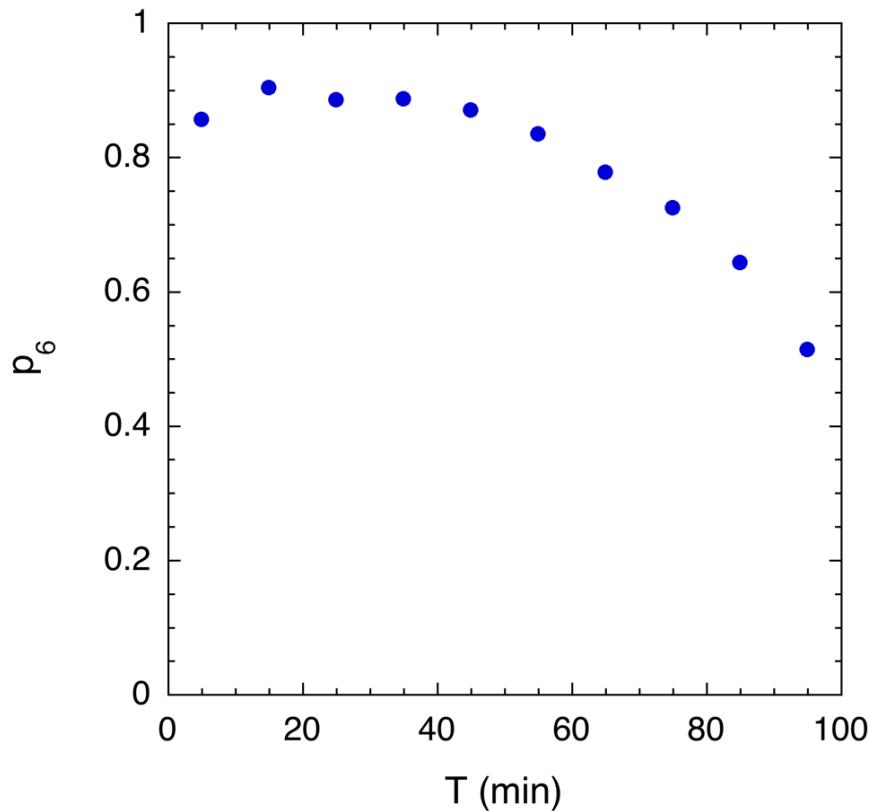


FIG. 5.22 – Évolution de la fraction de cellule à six cotés  $p_6$  en fonction du temps.

moyenne  $\langle S \rangle$  et la variation de l'inverse du nombre de cellules à six cotés  $1/n_6$ . On constate que ces deux courbes ont des évolutions presque identiques. Pendant les premiers instants, durant lesquels les cellules à six faces sont largement majoritaires, la surface moyenne est fixée par le nombre de cellules à six faces. Cette moyenne s'écarte ensuite de la diminution du nombre de cellules à six cotés.

Ainsi, la variation exponentielle de la surface moyenne n'est pas complètement en désaccord avec les résultats précédemment obtenus en réservoir étanche. Il s'agit d'un artefact dû au mécanisme singulier des cellules à six faces. En effet, la variation de la surface moyenne, en excluant les cellules à six côtés est linéaire. On retrouve bien le même comportement qu'en réservoir fermé. Le grand nombre de cellules ayant six faces et leur dynamique particulière modifie très fortement l'évolution de la surface moyenne globale.

### 5.4.3 Loi de von Neumann

Nous venons de constater que l'évolution de la mousse dépendait du nombre de faces. En effet, les îlots de cellules à six faces évoluent différemment du reste de la mousse. Ceci nous indique que la dynamique des cellules dépend du nombre de faces. Selon que le nombre de séparatrices est égal ou différent de six, la dynamique est différente. Cette croissance et

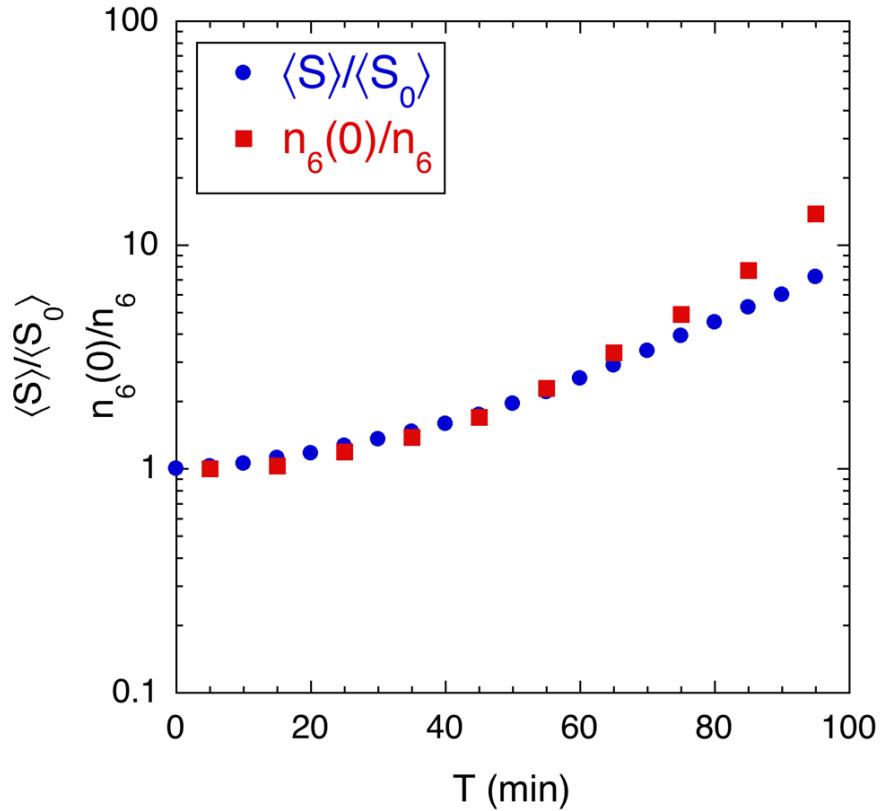


FIG. 5.23 – Comparaison des évolutions de la surface moyenne  $\langle S \rangle$  et de l'inverse du nombre de cellules ayant six voisins  $1/n_6$ .

diminution des cellules proviennent de la diffusion du gaz entre les cellules.

C'est au cours d'un congrès de métallurgie dédié à la croissance de grains cristallins que J. von Neumann [75] a établi la loi d'évolution des surfaces au sein d'une mousse 2D.

$$\frac{dS}{dt} = k(n - 6) \quad (5.6)$$

Avec  $S$  la surface de la cellule,  $n$  son nombre de faces et  $k$  un préfacteur dépendant de la nature du gaz que nous allons expliciter. Cette loi indique que toutes les cellules ayant moins de six côtés vont rapetisser, tandis que celles qui ont plus de six côtés ne font que grossir.

Voici, ici, sa démonstration. Considérons une cellule à  $n$  faces. Chaque face  $i$  doit rejoindre un vertex avec un angle de  $2\pi/3$  pour que les séparatrices soient à l'équilibre mécanique. Au niveau du vertex, nous avons une force de tension de surface pour chaque séparatrice, ayant comme point d'application le vertex et tangent à la séparatrice. Comme le système est à l'équilibre mécanique, la somme de ces trois forces doit être nulle. Cette condition peut être réalisée si et seulement si l'angle entre les forces est égale à  $2\pi/3$ . La courbure de la face  $i$ , reliant les vertex  $i$  et  $i + 1$  est fixée par la loi de Laplace Young,

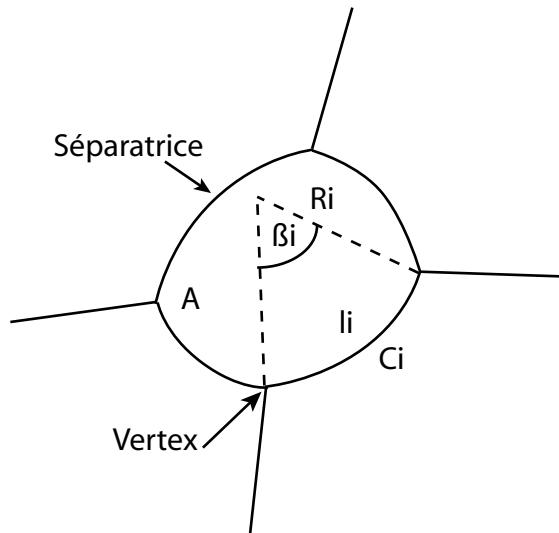


FIG. 5.24 – Schéma d'une cellule au sein d'une mousse.

reliant le saut de pression au niveau d'une interface et sa courbure. Les pressions étant constantes de part et d'autre de la séparatrice, la courbure est constante. Cette courbure peut être reliée à un rayon de courbure  $R_i$ . La face  $i$  a également une longueur d'arc  $l_i$  et un angle d'ouverture  $\beta_i$ , figure 5.24.

L'existence de courbure est associée à une différence de pression de part et d'autre d'une face et est donnée par la loi de Laplace :

$$\Delta p_i = \sigma C_i \quad (5.7)$$

Avec  $\Delta p_i$  la différence de pression entre la cellule et sa voisine séparées par la face  $i$ .

Chaque cellule a une pression interne différente. Cependant chaque cellule est stable mécaniquement. Une différence de pression entre deux cellules ne donne pas lieu à un déplacement d'ensemble. Cependant, des pressions différentes de part et d'autre d'une séparatrice entraînent des transformations physico-chimiques au niveau des interfaces. Les concentrations en gaz dissous dans la séparatrice sont différentes au niveau de chaque interface et un gradient de concentration s'établit. Cette différence de pression au sein des cellules génère une diffusion de gaz à travers la paroi liquide, la dynamique de la transformation est purement diffusive.

Le flux de gaz est proportionnel à la surface de la paroi, que l'on notera  $A_i = \int_i h dl$ . Cette surface est égale au produit de l'épaisseur de la cellule  $h$  avec la longueur d'arc de la séparatrice  $l_i$ . Le flux est inversement proportionnel à l'épaisseur de la séparatrice  $e$ . Le flux est proportionnel à la diffusivité  $D$  du gaz dissous dans la séparatrice ainsi qu'à la concentration en gaz dissous par unité de pression  $C^*$ . De plus, ce flux est proportionnel à la différence de pression entre les cellules  $\Delta p$ . Enfin, le flux volumique doit être proportionnel au volume occupé par le nombre de moles de gaz contenu dans la cellule. Comme le reste

des variables est donné pour une mole, il s'agit du volume molaire  $V_M$ .

$$\Phi = D C^* \Delta p_i \frac{A_i}{e} V_M \quad (5.8)$$

Le flux  $\Phi$  s'exprime en  $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ , la diffusivité  $D$  s'exprime en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , la concentration en gaz dissous  $C^*$  s'exprime en  $\text{mol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{Pa}^{-1}$  et le volume molaire  $V_M$  s'exprime en  $\text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$ .

Ce flux est relié très simplement avec la variation de surface de la cellule :

$$\Phi = \frac{dV}{dt} = h \frac{dS}{dt} = \oint D C^* \Delta p(l) \frac{h}{e} V_M dl \quad (5.9)$$

Avec  $V$  le volume de la cellule. Or la loi de Laplace nous permet de relier la différence de pression avec la courbure :

$$h \frac{dS}{dt} = \oint D C^* \sigma C(l) \frac{h}{e} V_M dl \quad (5.10)$$

Comme le nombre de faces est un nombre entier fini, on peut transformer l'intégrale sur la frontière en une somme sur le nombre de faces. De même, comme la courbure est constante le long d'une face :

$$h \frac{dS}{dt} = \sum_i^n D C^* \sigma C_i \frac{A_i}{e} V_M \quad (5.11)$$

On peut expliciter la courbure  $C_i$  et la surface de la séparatrice  $A_i$  :

$$h \frac{dS}{dt} = - \sum_i^n D C^* \frac{\sigma}{R_i} \frac{h l_i}{e} V_M \quad (5.12)$$

L'épaisseur  $h$  de la cellule n'intervient pas et on obtient une relation liant la variation de la surface avec le reste des variables :

$$\frac{dS}{dt} = - \sum_i^n D C^* \frac{\sigma}{R_i} \frac{l_i}{e} V_M \quad (5.13)$$

Or, par définition, la longueur d'arc  $l_i$  est égale au produit du rayon de courbure  $R_i$  avec l'angle d'ouverture  $\beta_i$ . L'équation précédente se réduit alors :

$$\frac{dS}{dt} = - D C^* \frac{\sigma}{e} V_M \sum_i^n \beta_i \quad (5.14)$$

Il nous reste à exprimer la somme des ouvertures angulaires  $\beta_i$ . Une construction géométrique montre que pour passer d'une face  $i$  à une face  $i+1$ , l'angle entre les deux tangentes de départ vaut  $\beta_i + \pi/3$ , la figure 5.25 montre cette relation. L'angle entre la tangente de départ  $T_{id}$  et la tangente de fin  $T_{if}$  de l'arc  $i$  vaut :

$$(T_{id}; T_{if}) = \beta_i \quad (5.15)$$

de même, l'angle entre la tangente de fin  $T_{if}$  de l'arc  $i$  et la tangente de départ de l'arc  $i + 1$  vaut :

$$(T_{if}; T_{i+1d}) = \frac{\pi}{3} \quad (5.16)$$

nous obtenons alors une relation liant les tangentes de départ des arcs  $i$  et  $i + 1$  :

$$(T_{id}; T_{i+1d}) = \beta_i + \frac{\pi}{3} \quad (5.17)$$

soit la relation recherchée.

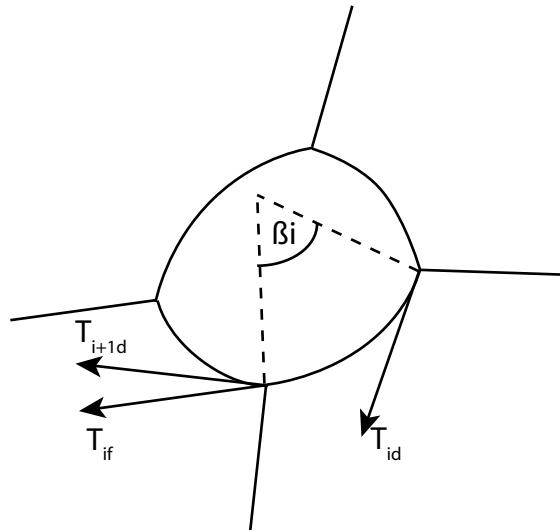


FIG. 5.25 – Schéma explicitant la relation entre les angles.

Sachant que la somme des angles est connue ainsi que le nombre de faces, on obtient la relation suivante :

$$\sum_i^n \beta_i + n \frac{\pi}{3} = 2\pi \quad (5.18)$$

soit en remplaçant dans l'expression précédente :

$$\frac{dA}{dt} = -D C^* \frac{\sigma}{e} V_M \left( 2\pi - n \frac{\pi}{3} \right) \quad (5.19)$$

Et en arrangeant certains termes, on obtient la loi de Von Neumann :

$$\frac{dA}{dt} = D C^* \frac{\sigma \pi}{3e} V_M (n - 6) \quad (5.20)$$

Ce mécanisme a lieu lorsqu'une cellule présente une surpression vis-à-vis de ses voisines. Le gaz contenu dans la cellule diffuse vers les cellules adjacentes, diminuant ainsi le volume de la cellule. Cette diminution de volume peut aller jusqu'à la disparition de la cellule. Ce processus de disparition d'une cellule au profit de ses voisines est aussi appelé processus T2

dans la littérature. La figure 5.26 montre un exemple concret du phénomène. Il est à noter que ce processus entraîne la disparition d'une cellule et la croissance des cellules voisines tout en diminuant leur nombre de faces de un. En effet, la cellule numéro 1 disparaît et les cellules 2,3 et 4 perdent un côté. La figure ?? montre un exemple concret de processus T2. Nous suivons une cellule qui disparaît selon ce processus sur trois images. La quatrième image montre l'état de la mousse juste après la disparition. Le temps entre chaque images est le même et vaut environ 2 minutes. La cellule qui disparaît est marqué à l'aide d'un symbole + tandis que les cellules voisines sont marquées d'un symbole ♦.

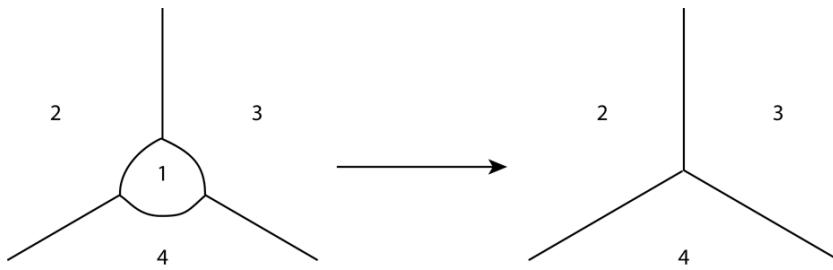
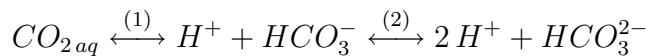


FIG. 5.26 – Phénomène de mûrissement ; appelé aussi processus T2 dans la littérature

Nos expériences se déroulent dans de l'eau savonneuse avec comme gaz du dioxyde de carbone. La tension de surface de l'eau savonneuse se mesure à  $\sigma = 0.32 \text{ mN.m}^{-1}$ . La diffusivité du dioxyde de carbone dans de l'eau pure à  $25^\circ\text{C}$  vaut  $D = 1.9 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ . Le volume molaire est égal à  $V_M = 25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.\text{mol}^{-1}$ . Sous forme dissoute dans l'eau, le dioxyde de carbone réagit comme suit :



Avec  $pK_{a1} = 6.35$ ,  $pK_{a2} = 10.33$ ,  $K_H = 163 \text{ MPa}$  à  $25^\circ\text{C}$  [66]. Le  $pH$  de l'eau savonneuse est égal à 8.3. La forme majoritaire que prend le dioxyde de carbone est le  $\text{HCO}_3^-$ . La solubilité du dioxyde de carbone est égale à :

$$C \simeq \frac{[\text{HCO}_3^-]}{P_{\text{CO}_2}} = 10^{(pH - pK_{a1})} \frac{[\text{CO}_{2\text{aq}}]}{P_{\text{CO}_2}} = 10^{(pH - pK_{a1})} \frac{[H_2O]}{K_H} = 0.06 \text{ mol.m}^{-3}.\text{Pa}^{-1} \quad (5.21)$$

La constante  $C^*$  exprime la solubilité du gaz dans le liquide. Cette valeur est variable d'une mousse à l'autre en fonction des liquides et gaz utilisés. Cette solubilité est également le seul paramètre de contrôle que nous pouvons librement paramétriser.

Ainsi le paramètre  $k$  de l'équation de von Neumann est égal à :

$$k = D C^* \frac{\sigma \pi}{3e} V_M \quad (5.22)$$

seule l'épaisseur des séparatrices  $e$  nous est inconnue. Nous allons ajuster cette valeur pour faire coïncider nos mesures expérimentales avec cette prédition théorique.

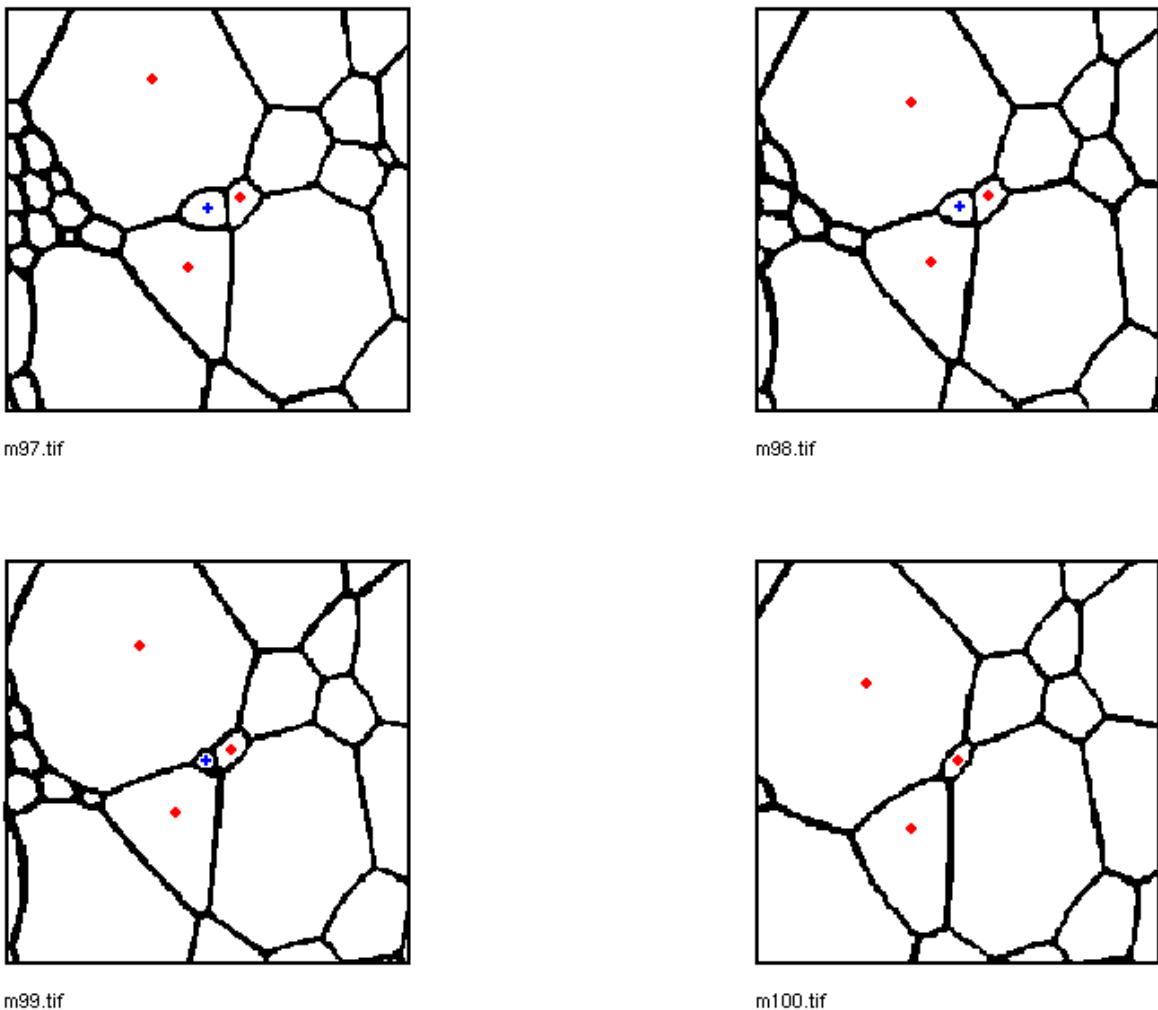


FIG. 5.27 – Exemple d'un processus T2 au sein de notre soufflerie à mousse que l'on peut suivre grâce à nos programmes de suivi.

La figure 5.28 montre la variation temporelle de la surface des cellules en fonction du nombre de faces. La variation de surface est adimensionnée à l'aide de l'équation 5.20 :

$$\frac{dS}{dt} = D C^* \frac{\sigma \pi}{3e} V_M (n - 6) \quad (5.23)$$

pour ne dépendre uniquement que du nombre de faces  $n$ . Soit  $S^*$  la surface adimensionnée telle que :

$$\frac{dS^*}{dt} = (n - 6) = \frac{1}{D C^* \frac{\sigma \pi}{2c} V_M} \frac{dS}{dt} \quad (5.24)$$

La droite en trait plein correspond à la prédition linéaire selon le nombre de faces  $n$ , à savoir  $n - 6$ . Nous ajustons la valeur de l'épaisseur de manière à ce que nos mesures soient alignées avec la relation de von Neumann.

Nous calculons une épaisseur de séparatrice  $e$  de :

$$e = 5.5 \cdot 10^{-6} \text{ m} \quad (5.25)$$

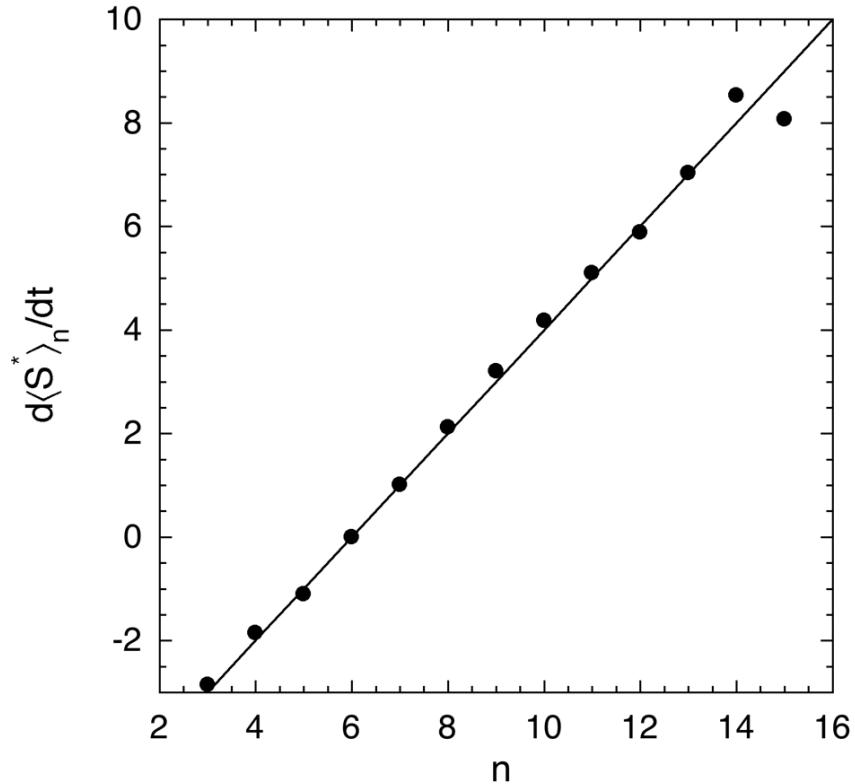


FIG. 5.28 – Évolution de la surface adimensionnée  $S^*$  en fonction du nombre de faces  $n$ . La droite en trait plein correspond à la courbe  $n - 6$ .

Ce résultat est, à ce jour, le plus complet. Glazier, Gross et Stavans [27] sont les premiers à avoir montré une observation expérimentale de la loi de von Neumann. Cependant leurs observations se font sur des cellules ayant un nombre de faces compris entre 4 et 9. Mejía-Rosales, Gámez-Corrales et Ruiz-García [45], en 2000, donnent eux aussi une observation de la variation temporelle de la surface en fonction du nombre de faces. Cependant, leurs résultats sont en désaccord total avec la loi de von Neumann. Ce paradoxe reconnu par les auteurs n'est pas expliqué. En 2003, Vasconcelos, Cantat et Glazier [72] donnent une observation numérique de la loi de von-Neumann. Cependant, là aussi, leurs cellules ont un nombre de faces compris entre 4 et 10.

La loi de von Neumann ne suffit pas à elle seule à expliquer le mûrissement. Il existe aussi un autre processus, appelé T1 dans la littérature qui, lui, ne modifie pas le nombre de cellules. La figure 5.29 montre un exemple de processus T1. Ce processus a lieu lorsque qu'une séparatrice est contrainte de manière à diminuer sa taille. Cette réduction de surface entraîne un rapprochement des vertex jusqu'à obtenir un état métastable de vertex à 4

jonctions. Cet état ne dure pas et on observe l'apparition d'une nouvelle frontière. Ce processus ne modifie pas le nombre de côtés global, ni le nombre de cellules. Cependant, on observe que deux cellules perdent une face, tandis que deux autres en gagnent une. En effet, les cellules 1 et 2 perdent un côté tandis que les cellules 3 et 4 gagnent un côté. Les figures 5.30 et 5.31 montrent deux exemples de processus T1. Chaque cellule est marqué d'un symbole différent. On retrouve bien la différentiation exposé à l'aide du schéma 5.29. La figure 5.31 est très intéressante car elle montre un processus T1 en périphérie d'un îlots de cellules à six faces. Ce processus change la topologie de la mousse, d'une image sur l'autre on remarque que deux cellules ont perdu chacune une face tandis que deux autres cellules ont chacune gagné une face. Ces modifications permettent de modifier le nombre de côtés des cellules périphérique appartenant aux îlots de six faces et ainsi diminuer progressivement la taille de ces îlots.

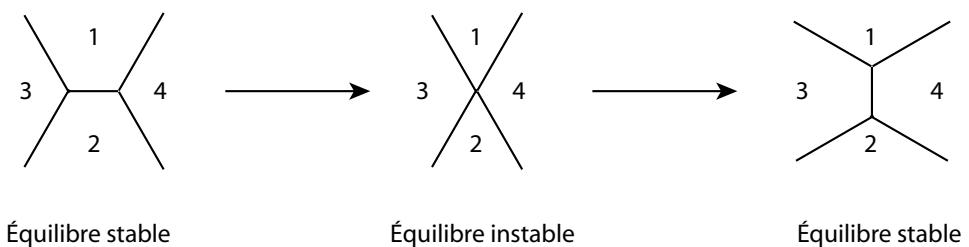
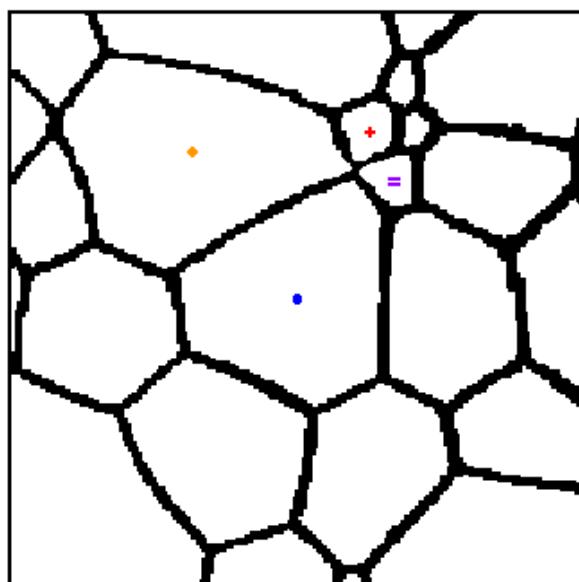
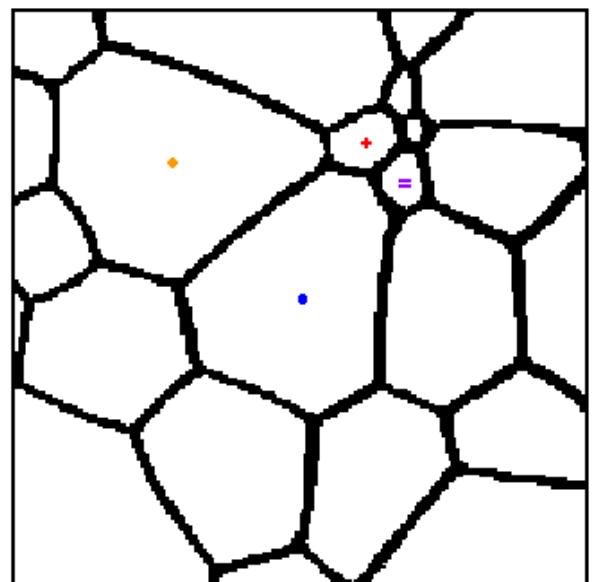


FIG. 5.29 – Changement de conformation, appelé aussi processus T1 dans la littérature

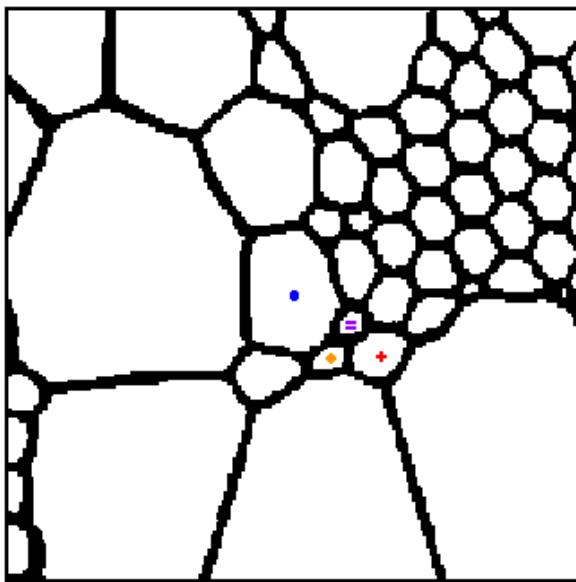


m92.tif

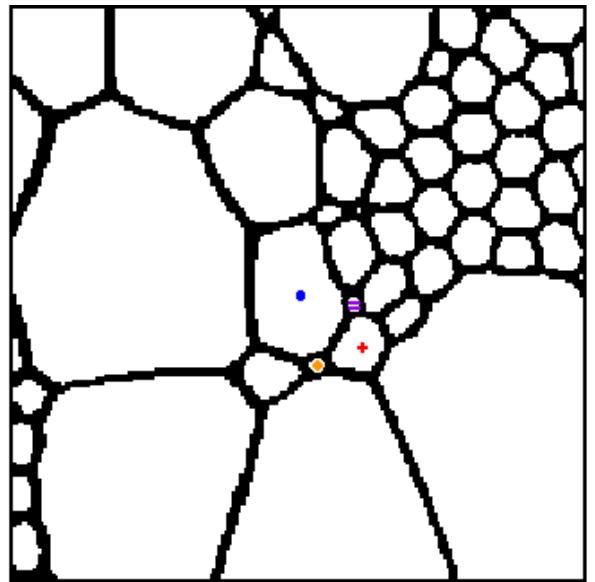


m93.tif

FIG. 5.30 – Exemple de processus T1 au sein de la soufflerie à mousse.



m92.tif



m93.tif

FIG. 5.31 – Exemple de processus T1 au sein de la soufflerie à mousse : ce processus permet de modifier et de supprimer les îlots de cellules à six faces.

#### 5.4.4 Distribution du nombre de côtés

Nous nous sommes aussi intéressés à la distribution du nombre de voisins au sein de la mousse, ainsi qu'à son évolution au cours du temps.

La figure 5.32 montre la répartition du nombre de côtés pour différents instants de la mousse. On remarque un pic centré autour de  $n = 6$  pour chaque instant. Cependant la distribution s'élargit avec le temps, faisant apparaître des cellules avec de plus en plus de côtés, au fur et à mesure que la mousse vieillit. Aux temps longs, la superposition des distributions indique une sorte d'état permanent.

En 1980, Aboav [1] est le premier à donner la distribution du nombre de faces et son évolution avec le temps. Il observe alors un maximum centré autour de  $n=6$ , et dont la distribution s'élargit au fur et à mesure que la mousse vieillit. Il observe aussi un déplacement vers  $n=5$  du maximum de la distribution, tandis que de plus en plus de cellules ont un nombre de faces plus grand.

Cette dérive du nombre moyen de faces  $\langle n \rangle$  vers 5 s'explique grâce aux processus T1 et T2. Le processus T1 modifie la topologie locale de quatre cellules. Cependant, le nombre total de cellules ainsi que le nombre de côtés  $n$  restent inchangés. Le processus T2 entraîne la diminution du nombre de cellules, ainsi que du nombre de côtés.

Soient  $N_f$  le nombre total de faces et  $N_c$  le nombre total de cellules. Le processus T1 ne modifie pas ces valeurs, contrairement au processus T2. Le nombre moyen de faces est

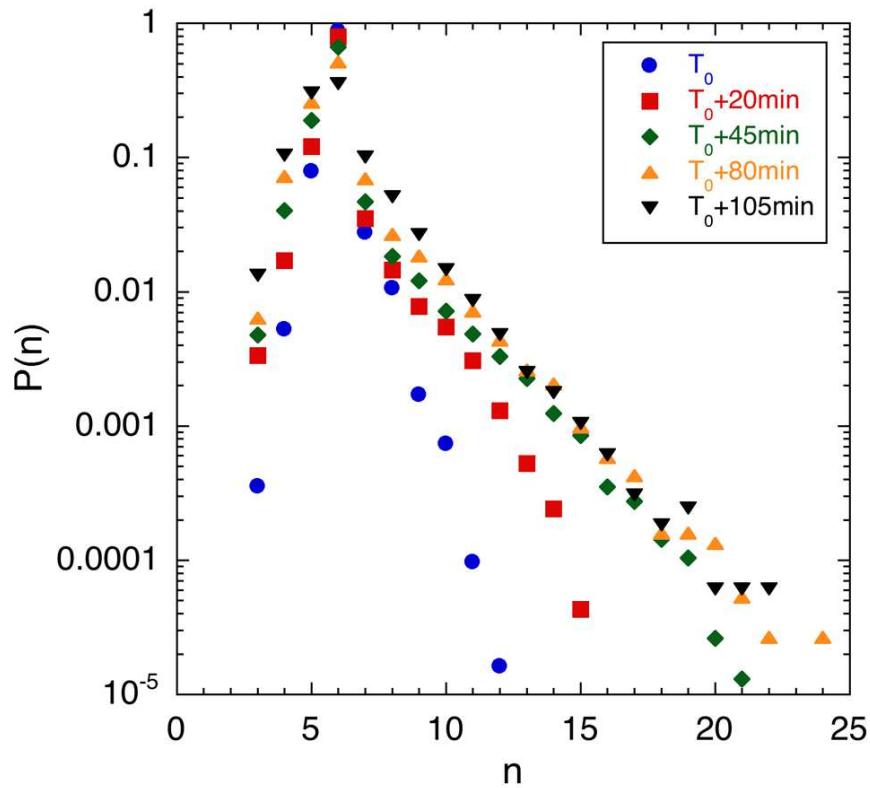


FIG. 5.32 – Distribution du nombre de faces à différents instants.

donné par la relation suivante :

$$\langle n \rangle = \frac{N_f}{N_c} \quad (5.26)$$

Lorsqu'un processus T2 a lieu, les nombres de faces et de cellules sont modifiés. Le nombre total de cellules est diminué de un :

$$N'_c = N_c - 1 \quad (5.27)$$

tandis que le nombre de faces est diminué par six, chaque séparatrice comptant double :

$$N'_f = N_f - 6 \quad (5.28)$$

La moyenne du nombre de faces après ce processus T2 devient alors :

$$\langle n' \rangle = \frac{N'_f}{N'_c} = \frac{N_f - 6}{N_c - 1} \quad (5.29)$$

L'évolution du nombre de faces nous est donnée par :

$$\langle n' \rangle - \langle n \rangle = \frac{N_f - 6}{N_c - 1} - \frac{N_f}{N_c} = \frac{N_c(N_f - 6) - N_f(N_c - 1)}{N_c(N_c - 1)} \quad (5.30)$$

soit :

$$\langle n' \rangle - \langle n \rangle = \frac{-6N_c + N_f}{N_c(N_c - 1)} \quad (5.31)$$

Le signe de cette différence est donnée par le numérateur, le dénominateur étant toujours positif. La relation  $N_f - 6N_c$  s'annule pour  $N_f/N_c = 6$ , est négative pour  $N_f/N_c < 6$  et positive pour  $N_f/N_c > 6$ . Autrement dit :

$$\frac{d\langle n \rangle}{dt} = 0 \text{ si } \langle n \rangle = 6 \quad (5.32)$$

$$\frac{d\langle n \rangle}{dt} < 0 \text{ si } \langle n \rangle < 6 \quad (5.33)$$

et

$$\frac{d\langle n \rangle}{dt} > 0 \text{ si } \langle n \rangle > 6 \quad (5.34)$$

Une dérive vers 5 du nombre moyen de faces, indique que le nombre moyen de faces initiales était inférieur à 6.

En 1985, une première simulation numérique faite par Fradkov, Shvindlerman et Udder [25] montre une distribution centrée autour de  $n = 6$ . En 1989, Kawazaki, Nagai et Nakashima [33] élaborent un modèle théorique sur le phénomène du mûrissement et montrent qu'aux temps longs, la distribution du nombre de côtés atteint une forme limite. Ils confrontent également leurs résultats avec des simulations numériques. Stine, Rauseo et Moore [61], montrent, en 1990, que pour des systèmes mono-couches de Languir ayant une structure de type mousse, une évolution de la distribution du nombre de côtés comparable à la nôtre. Glazier, Anderson et Grest [26] donnent également, en 1990, une évolution de la distribution sensiblement identique à celle que l'on montre. Ce résultat est comparable avec les simulations numériques effectuées en même temps. Flyvbjerg [24] élabore un modèle théorique, en 1993, qui donne une forme de la distribution du nombre de côtés comparable à la nôtre. En 1995, Jiang, Mombach et Glazier [32], montrent des simulations numériques donnant la répartition du nombre de côtés. Bien que très mal résolue, la forme présente un sommet centré sur  $n=6$ . En 2001, Vandewalle et Lentz [71] montrent qu'ils peuvent relier leurs travaux sur le son émis lors d'une rupture d'une paroi avec différents résultats généralement admis sur le mûrissement des mousses. Ils montrent, en particulier, une distribution du nombre de côtés comparable à toutes ces observations.

#### 5.4.5 Loi de Lewis

En 1926, Lewis [38] indique qu'il existe dans un réseau une relation affine entre la surface d'un objet et son nombres de côtés. Autrement dit, on peut relier la surface moyenne d'un objet conditionné au nombre de côtés  $n$ . Cette relation est purement empirique.

$$\langle S_n \rangle = A n + B \quad (5.35)$$

Où  $\langle S_n \rangle$  est la surface moyenne des cellules ayant  $n$  faces et  $A$  et  $B$  sont deux constantes qui dépendent du système considéré. La figure 5.33 montre la relation qui existe entre la

surface moyenne  $\langle S_n \rangle$  et le nombre de côtés  $n$  au sein de notre mousse. On remarque que pour  $n$  supérieur ou égal à 6, la surface moyenne conditionnée à  $n$  varie linéairement avec le nombre de côtés  $n$ . En-dessous, cependant, ce type de comportement n'est plus observé. Le coefficient directeur dépend du temps. Il augmente au fur et à mesure que la mousse vieillit.

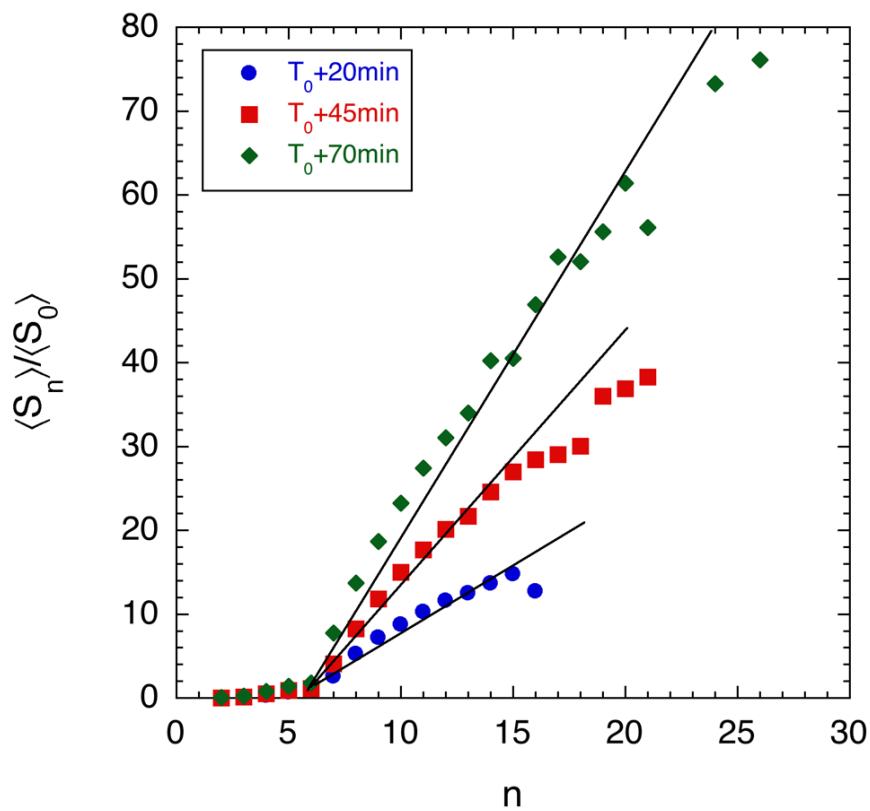


FIG. 5.33 – Relation entre la surface moyenne conditionnée aux nombres de faces et le nombre de côtés pour différents instants.

Fradkov, Shvindlerman et Udler [25] montrent, les premiers, une observation d'après leurs simulations numériques de la loi de Lewis. Ils observent pour  $n$  supérieur à 5 un comportement linéaire, tandis que pour des  $n$  inférieur à 6, ils remarquent une déviation très ressemblante avec celle que l'on observe. Beenaker [4] montre, en 1986, un résultat numérique sur la loi de Lewis. Il observe également une déviation par rapport à la loi linéaire, pour les cellules ayant moins de 6 faces. Glazier, Gross et Stavans [27] montrent, les premiers, une observation expérimentale de la loi de Lewis. Ils trouvent, eux aussi, un comportement linéaire uniquement pour des cellules ayant un nombre de faces supérieur ou égal à 6. Ce résultat est corroboré de manière expérimentale ou numérique, par Marder [40] en 1987, Stine, Rauseo et Moore [61], Glazier, Anderson et Grest [26] en 1990, Flyvbjerg [24] en 1993 et Mejía-Rosales, Gámez-Corrales et Ruiz-García [45] en 2000.

## 5.5 Distribution des surfaces conditionnées au nombre de voisins.

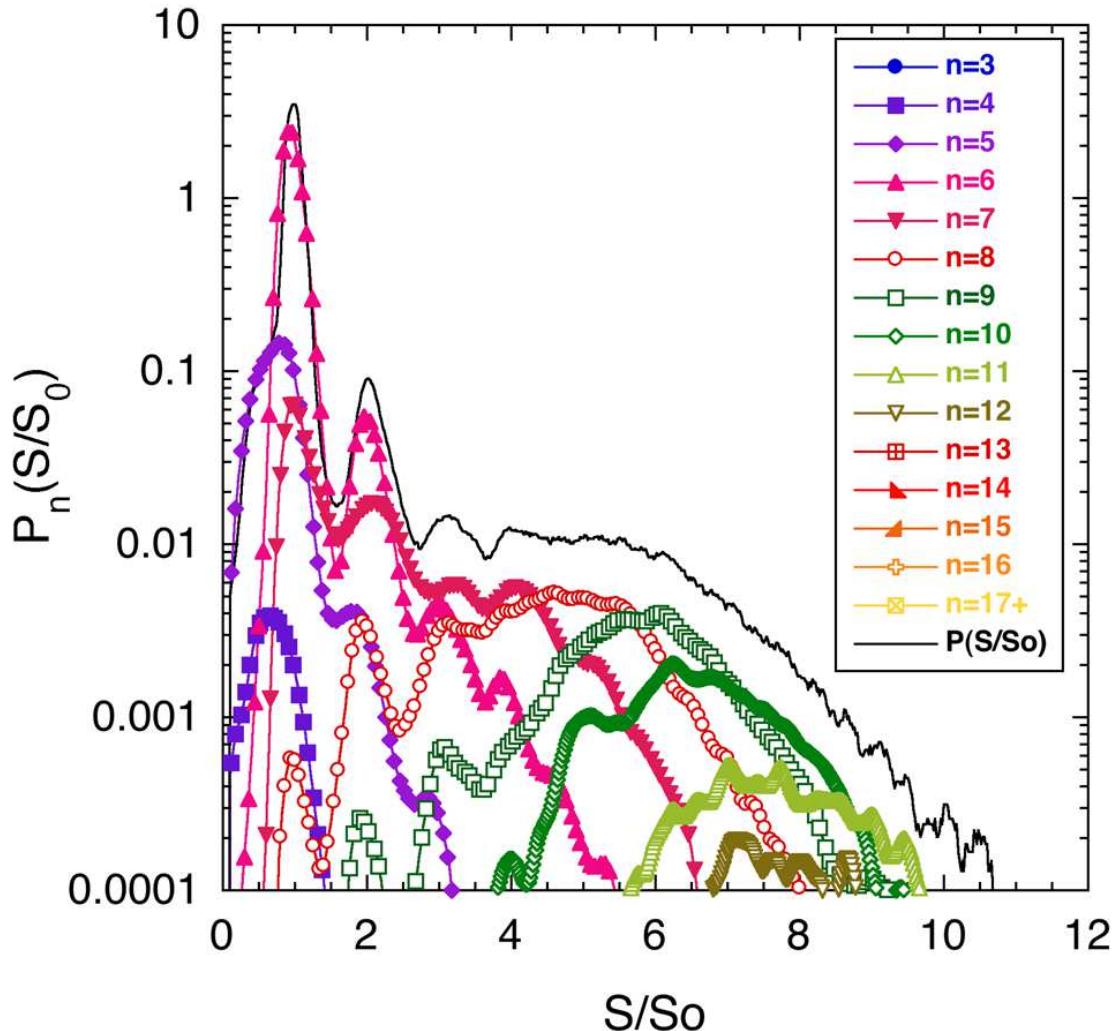


FIG. 5.34 – Distributions des surfaces adimensionnées par la surface d'injection  $S_0$ , conditionnée au nombre de voisins  $n$  pour  $t=20$  min

Les figures 5.34 et 5.35 montrent deux distributions des surfaces, rapportées à la surface initiale  $S_0$ , conditionnées au nombre de voisins  $n$  respectivement pour  $t=20$  min et  $t=45$  min. Les distributions selon le nombre de faces  $n$  ne sont pas normées :

$$\int P_n(S) dS \neq 1 \quad (5.36)$$

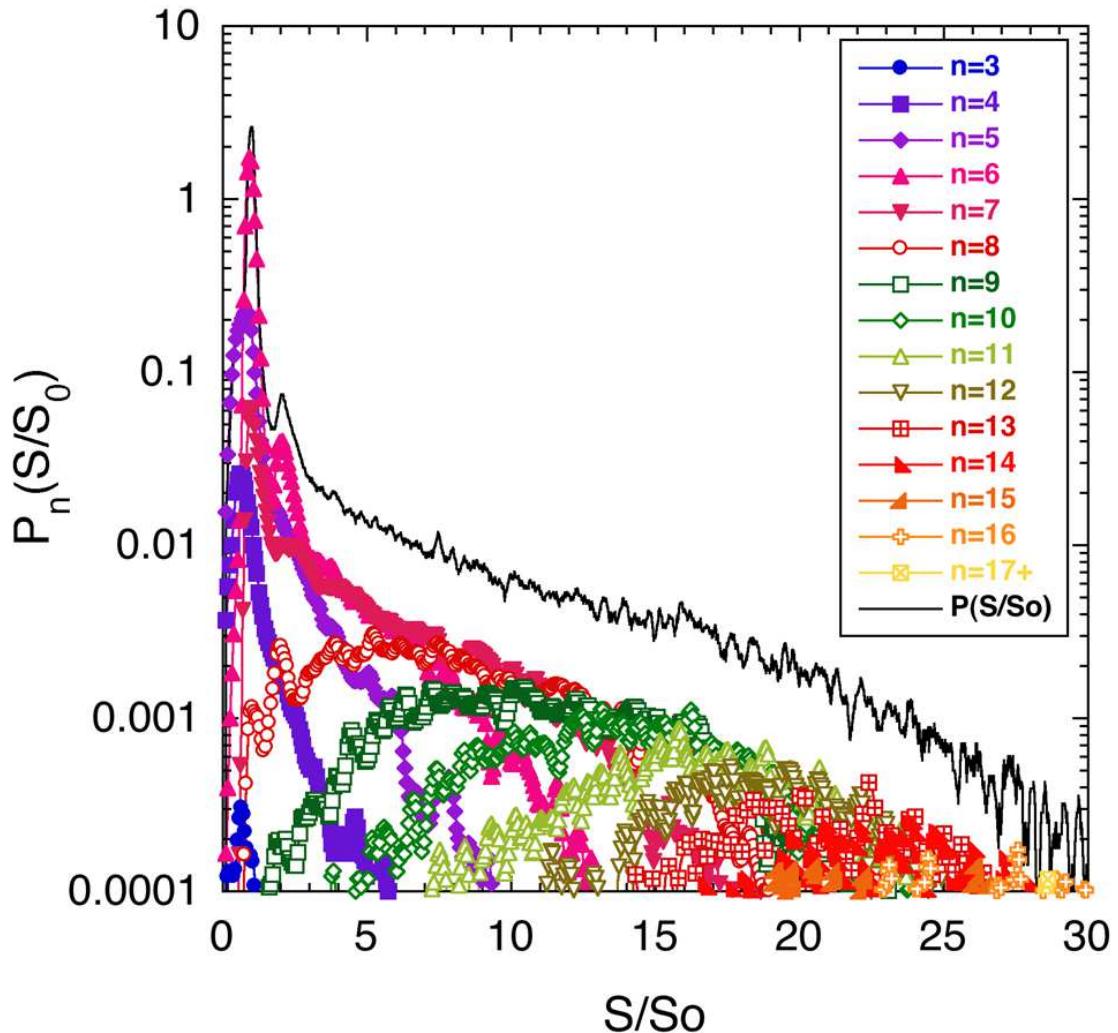


FIG. 5.35 – Distributions des surfaces adimensionnées par la surface d'injection  $S_0$ , conditionnée au nombre de voisins  $n$  pour  $t=45$  min.

Elles sont définies de manière à satisfaire la relation suivante :

$$P(S) = \sum_n P_n(S) \quad (5.37)$$

On observe que plus la mousse vieillit, plus les cellules ayant plus de six voisins sont présentes dans la mousse. On remarque également que plus le nombre de voisins est important, plus les distributions associées explorent des surfaces de plus en plus grandes et présentent un profil gaussien.

La figure 5.36 montre l'écart-type  $\sigma$  des surfaces en fonction du nombre de faces  $n$  pour différents instants :

$$\sigma = \sqrt{\langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2} \quad (5.38)$$

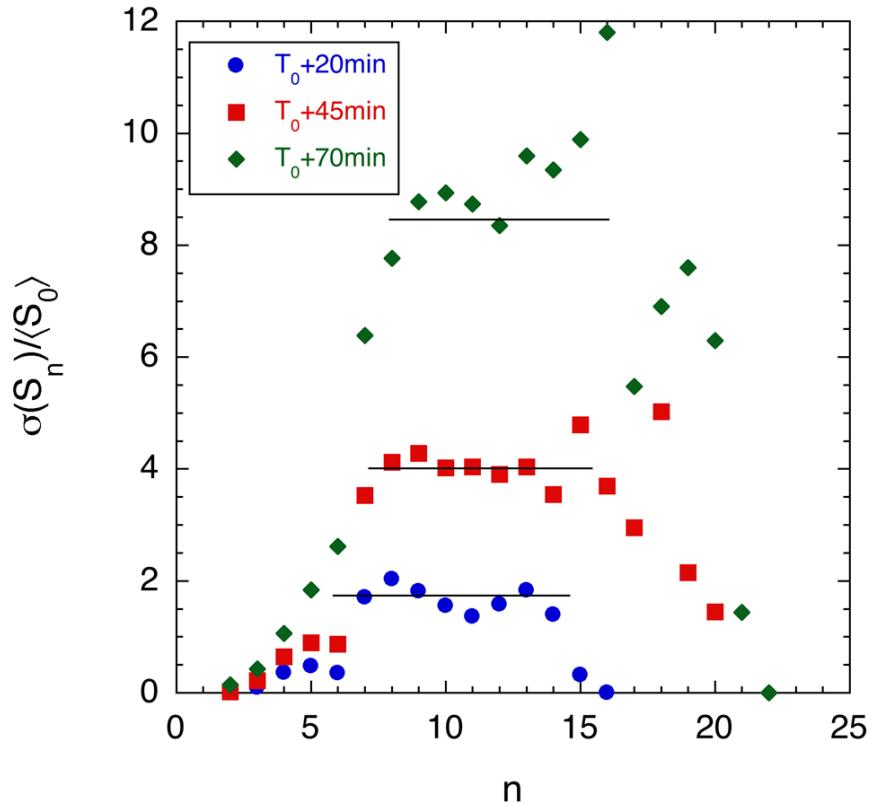


FIG. 5.36 – Ecart-type  $\sigma$  des surfaces en fonction du nombre de faces  $n$  pour différents instants.

L'écart type  $\sigma$  augmente en fonction du nombre de faces tant que ce dernier est plus petit que 9. Au-delà l'écart-type est constant. On remarque également que l'écart-type augmente avec le temps, ce qui signifie une plus larges distributions. Les cellules ayant plus de dix voisins ont une répartition statistique gaussienne dont, la moyenne est prédicté par la loi de Lewis et un écart-type constant indépendant du nombre de faces  $n$ .

## 5.6 Conclusions

Jusqu'à présent, les systèmes expérimentaux conçus pour observer le phénomène du mûrissement des mousses mettaient en jeu une cellule fermée. Le principal inconvénient de ces systèmes vient du phénomène lui-même : au cours du temps, le nombre de cellules diminue, rendant ainsi très délicates les mesures statistiques aux temps longs d'une mousse.

Notre système continu de soufflerie à mousse permet de s'affranchir de cette limite. Bien que nous en soyons aux toutes premières observations, nos premiers résultats montrent que ce que l'on observe est équivalent à ce qui se fait en système fermé. De plus, notre système permet d'aller encore plus loin, puisqu'il est possible de faire un suivi lagrangien de chaque cellule.

Nous avions évoqué dans l'introduction qu'il y avait un parallèle entre le vieillissement des mousses et le réarrangement d'un ligament lorsque ce dernier se brise. Lors de la fragmentation, le ligament se rompt pour former diverses gouttes de tailles variées. Parallèlement à cela, des processus de coalescence interviennent et modifient le nombre et la taille de fragments. Ainsi, il n'est pas possible de décrire la brisure d'un ligament à l'aide d'un modèle de brisure en cascade semblable à celui introduit par Kolmogorov, ni à l'aide d'un modèle purement agrégatif, semblable à celui imaginé par Smoluchowski.

Les systèmes de mousse évoluent au cours du temps. Le mécanisme du vieillissement des mousses se rapproche d'un mécanisme d'agrégation. En effet, le processus de mûrissement implique la disparition d'une cellule au profit de ses voisines. Exactement comme deux gouttes entrant en contact et produisant une autre goutte. Les systèmes de mousse tendent donc vers un système limite évoluant uniquement par coalescence.

Il est intéressant de noter que le système décrit dans le chapitre 2 est totalement à l'opposé de celui des mousses. Il s'agit, en effet, d'un système évoluant vers un état fragmenté, sans aucun mécanisme de coalescence.



# Chapitre 6

## Conclusion

Cette étude montre les effets de la taille finie et de l'interaction entre les interfaces dans diverses configurations.

Une première configuration expérimentale met en avant un écoulement bi-dimensionnel très simple au sein d'une cellule de Hele-Shaw. Les observations ont montré un couplage entre les interfaces, ainsi que l'influence de l'épaisseur de fluide sur le développement de l'instabilité. Une analyse de stabilité linéaire montre la dépendance de la relation de dispersion avec l'épaisseur de fluide entre les interfaces. Au fur et à mesure que cette épaisseur diminue, la relation de dispersion s'aplatit de manière à créer un plateau autour du maximum. Ainsi, aucun mode n'est préférentiellement sélectionné.

Le couplage des interfaces intervient également au moment de la brisure et de la formation des gouttes. L'épaisseur locale de la bandelette pilote directement la vitesse de chute locale ainsi que le gradient de pression locale au sein du fluide. Sans perturbation initiale, la bandelette de fluide se fragmente de manière bi-disperse, avec de grosses gouttes provenant des amas fluides formés pendant la déstabilisation de la bandelette et de plus petites gouttes provenant des ponts liquides liant ces amas. En perturbant initialement la bandelette, on élargit la distribution tout en gardant deux tailles.

Une seconde configuration expérimentale met en application une instabilité en couche mince dans un cas tri-dimensionnel : l'atomisation lors d'un impact gazeux via un gonflement de sac. Nous montrons qu'il existe un nombre de Weber seuil pour lequel le phénomène a lieu. Nous observons une déformation de la goutte jusqu'à atteindre une forme de crêpe. L'épaisseur de fluide au centre de la goutte devient suffisamment faible pour être entraînée par le gaz et formée une nappe liquide. Lorsque cette dernière casse, cela entraîne la brisure du tore liquide restant. Nous montrons que la distribution des tailles de fragments est auto-similaire. Adimensionnées par la taille moyenne des fragments, toutes les distributions se regroupent pour ne former qu'une seule courbe. Lorsque l'on compare nos expériences avec des observations météorologiques, on trouve un accord excellent. Le mécanisme du gonflement de sac permet de très bien comprendre et d'expliquer les tailles des gouttes de pluie.

Une troisième configuration expérimentale met en comparaison les impacts gazeux, vus précédemment, avec cette fois des impacts solides. La grande nouveauté de notre

étude est l'utilisation d'une cible dont le diamètre est équivalent au diamètre initial de la goutte. Au moment de l'impact, une nappe liquide est créée. Du fait de la taille finie de l'impacteur, le développement de la nappe se fait sans frottement solide. On montre que la dynamique de la nappe dépend du nombre de Weber au moment de l'impact. La taille maximale varie comme la puissance  $1/2$  du nombre de Weber, tandis que le moment pour lequel ce maximum est atteint est indépendant de la vitesse d'impact. On montre également comment les distributions évoluent vers une forme générique en fonction du diamètre adimensionné par le diamètre moyen des fragments. On montre également que ce diamètre moyen varie comme l'inverse de la puissance  $1/4$  du nombre de Weber. De plus, toutes ces observations expérimentales sont très bien représentées par un modèle théorique.

Le système expérimental sur le mûrissement des mousses est un peu éloigné des précédentes études. On expose une nouvelle configuration permettant de mieux étudier le phénomène de vieillissement. Lorsqu'une mousse vieillit, son nombre de cellules constitutives diminue tandis que le diamètre moyen des cellules augmente. Jusqu'à présent, on étudiait le mûrissement dans des caissons étanches, l'inconvénient majeur étant la perte de statistique au cours du temps. On montre que notre système reproduit parfaitement le mûrissement, tout en ouvrant de nouvelles perspectives. En effet, notre système de soufflerie à mousse permet un suivi lagrangien de toutes les cellules constitutives de la mousse.

# Annexe A

## Effets de surface

Cette annexe présente quelques rappels sur le concept de tension superficielle et ses effets dans certains cas.

### A.1 Tension superficielle

La tension superficielle  $\sigma$  existant entre un liquide et un gaz est due à la différence des forces d'attraction exercées par chacun des milieux. Le liquide est un état condensé de la matière dans lequel les molécules s'attirent, entre autres, via une interaction de type van der Waals. Une molécule proche de l'interface séparant les deux milieux aura une énergie de cohésion plus faible qu'une molécule placée loin de l'interface. Le liquide ajuste sa surface afin de minimiser ce défaut d'énergie. La tension superficielle, aussi appelée tension de surface, mesure cette perte d'énergie par unité de surface ( $\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$ ). Autrement dit, pour augmenter la surface d'un liquide d'une unité, il faut fournir une énergie correspondant à la tension de surface.

Considérons une surface d'aire  $A$  délimitée par une frontière fermée définie par le vecteur  $\mathbf{r}(s)$ , où  $s$  est l'abscisse curviligne (figure A.1). L'énergie  $\delta E$  qu'il faut fournir pour

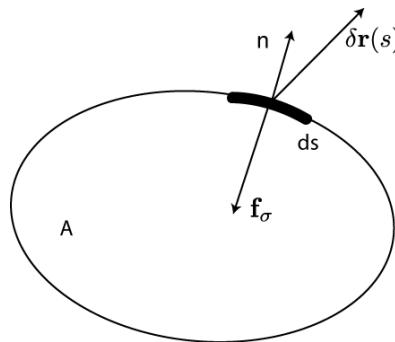


FIG. A.1 – Force capillaire exercée sur la frontière d'une surface  $A$ .

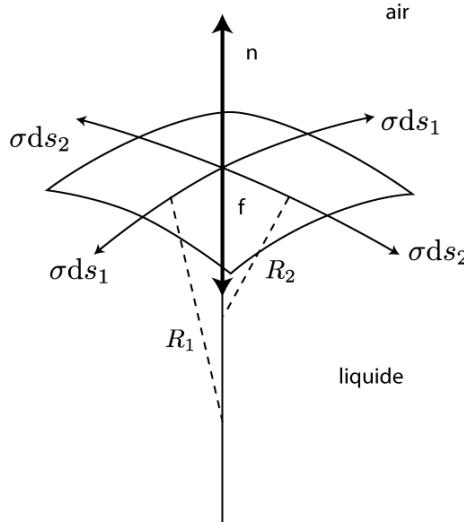


FIG. A.2 – Forces s'exerçant sur un élément infinitésimal d'une surface courbée.

augmenter la surface de  $\delta A$ , correspondant à un déplacement  $\delta \mathbf{r}(s)$  de la frontière s'écrit :

$$\delta E = \sigma \delta A = \sigma \oint \delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dl = \oint \mathbf{f}_\sigma \delta \mathbf{r} \quad (\text{A.1})$$

La tension de surface s'oppose à cet accroissement par le biais d'une force  $f_\sigma$  tangente à la surface, normale à la frontière et dirigée vers l'intérieur de la surface. La tension de surface correspond ainsi à une force par unité de longueur :

$$f_\sigma = \sigma ds \quad (\text{A.2})$$

Considérons, à présent, le cas général d'une surface courbée (figure A.2). Soit un élément infinitésimal  $ds_1 ds_2$  dont les côtés sont perpendiculaires aux plans principaux de la surface et de rayons de courbure principaux  $R_1$  et  $R_2$ . Les molécules du liquide exercent une force sur chaque côté de l'élément pour le maintenir en place. La résultante est dirigée dans le sens de la courbure. Cette force est égale à  $\sigma ds_1 ds_2 (1/R_1 + 1/R_2)$ . Dans le cas de la figure, où la courbure est dirigée dans le sens opposé à la normal  $\mathbf{n}$  de l'interface, cette force correspond à une pression exercée par le liquide. Le saut de pression  $\Delta p$  à la traversée de l'interface s'écrit :

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (\text{A.3})$$

Il s'agit de la relation de Laplace. Une goutte sphérique de rayon  $R$  présente ainsi une surpression égale à  $2\sigma/R$  par rapport au milieu environnant.

## A.2 Ouverture d'une nappe liquide

La tension de surface est aussi responsable de l'expansion d'une ouverture réalisée sur une nappe liquide. La vitesse d'expansion a été calculée par Taylor [68] et Culick [19] à

partir de la conservation de la quantité de mouvement.

Considérons une section d'ouverture angulaire  $d\theta$  dont l'origine coïncide avec l'origine 0 du trou. Le bord est constitué d'un bourrelet liquide supposé cylindrique de diamètre  $d_b$  soumis à une force capillaire radiale  $f_r = 2\sigma r d\theta$ , ainsi qu'à deux forces azimutales  $f_\theta = \pi\sigma d_b$ . Le bourrelet est constitué de la masse  $M$  accumulée au cours de son déplacement sur une distance  $r$ . Par conservation de la masse, son diamètre est :  $d_b = (2rh/\pi)^{1/2}$ . Le rapport de la projection de  $f_\theta$  sur la force  $f_r$  et de  $f_r$  s'écrit :

$$\frac{f_\theta d\theta}{f_r} \sim \left(\frac{h}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.4})$$

L'épaisseur  $h$  des films considérés étant de l'ordre de quelques dizaines de microns, la force tangentielle est rapidement négligeable devant la force radiale. Par conservation de la masse, la masse  $m$  du bourrelet est donnée par :

$$m = \rho h r d\theta \quad (\text{A.5})$$

Le bilan de quantité de mouvement au niveau du bourrelet s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \left( m \frac{dr}{dt} \right) = 2\sigma r d\theta \quad (\text{A.6})$$

En utilisation l'expression de la masse  $m$  de l'expression A.5 dans l'équation A.6 et en intégrant, on obtient :

$$r^2 = \frac{2\sigma}{\rho h} t^2 + at + b \quad (\text{A.7})$$

La condition initiale à  $t = 0$  en  $r = 0$  est telle que  $dr/dt$  reste finie :

$$\frac{r}{t} = c = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho h}} \quad (\text{A.8})$$

### A.3 Instabilité de Rayleigh-Taylor

Considérons une interface initialement plane séparant deux milieux incompressibles, non visqueux, de densités  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , figure A.3. La gravité est perpendiculaire à la surface selon l'axe  $z$ . L'équation de l'hydrostatique nous renseigne sur la variation de pression  $p$  en fonction de l'altitude  $z$  :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho_i g, \quad i = 1, 2 \quad (\text{A.9})$$

La pression est constante pour une altitude donnée, la pression en  $A$  est la même qu'en  $B$ . Considérons une déformation de l'interface d'amplitude  $\xi$ .

Les pressions en  $A$  et  $B$  sont maintenant égales à :

$$p_A - p_{-\infty} = \int_{-\infty}^{-\xi} \rho_1 g dz + \int_{-\xi}^{\xi} \rho_1 g dz + \int_{\xi}^{z_A} \rho_2 g dz \quad (\text{A.10})$$

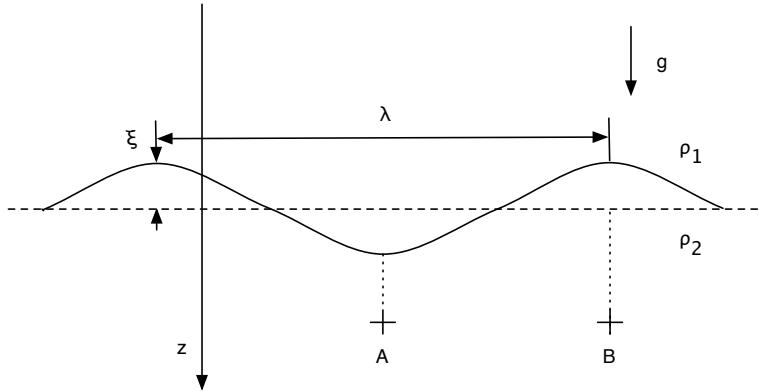


FIG. A.3 – Schéma de principe de l'instabilité d'une interface de densité soumise à la gravité.

$$p_B - p_{-\infty} = \int_{-\infty}^{-\xi} \rho_1 g dz + \int_{-\xi}^{\xi} \rho_2 g dz + \int_{\xi}^{z_B} \rho_2 g dz \quad (\text{A.11})$$

Il existe une différence de pression  $\Delta p$  entre les points  $A$  et  $B$  qui sont à la même altitude ( $z_A = z_B$ ) :

$$\Delta p = p_A - p_B = 2\xi(\rho_2 - \rho_1)g \quad (\text{A.12})$$

Si  $\Delta p$  est positif alors un écoulement horizontal de  $A$  vers  $B$  s'établit. Les liquides étant incompressibles, un écoulement vertical se développe et amplifie la modulation  $\xi$  de l'interface, qui à son tour augmente la différence de pression. La surface est donc instable si  $\rho_1 > \rho_2$ . Cette instabilité fut étudiée en premier par Rayleigh [49] en 1883, dans le cas de deux milieux superposés soumis au champ gravitationnel.

En 1950, Taylor [67] généralise le problème en considérant une interface soumise à une accélération perpendiculaire à son plan. Il aboutit au critère de stabilité suivant : une interface séparant deux milieux de densités différentes est instable si elle est soumise à une accélération normale dirigée vers le milieu le plus dense. Sans tension de surface, il n'y a pas de sélection de mode et le taux d'amplification varie comme  $\sqrt{gk}$ , où  $k$  est le nombre d'onde de la perturbation.

Le cas d'une instabilité de type Rayleigh-Taylor en couche mince est évoqué par Taylor sans prendre en compte la tension de surface et aboutit à la même relation de dispersion. Limat [39] expose, en 1993, différents résultats en couche mince mais avec une seule interface liquide. L'analyse en couche mince avec tension de surface est la première fois évoquée et résolue par Keller et Kolodner [34] en 1954, puis reprise par Bremond [12] en 2005.

Lorsqu'il s'agit d'une interface liquide / gaz où  $\rho_1 \gg \rho_2$ , l'ordre de grandeur de la pression déstabilisatrice varie comme  $\rho_1 g \xi$ . La tension de surface introduit une pression à l'interface, qui s'oppose à la déformation de l'interface. En considérant un déplacement  $\xi$  faible devant la longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k$  de la perturbation, la courbure de l'interface peut être approximée par  $\xi k^2$ . L'ordre de grandeur de la pression capillaire est ainsi égal à

$\sigma \xi k^2$ . Le nombre d'onde critique  $k_c$  au delà duquel la surface reste stable est :

$$k_c = \sqrt{\frac{\rho_1 g}{\sigma}} \quad (\text{A.13})$$

Dans le cas de deux milieux semi-infinis, une analyse linéaire de l'instabilité conduit à une relation entre la pulsation  $\omega$  et le nombre d'onde  $k$  qui est donnée par :

$$\omega^2 = \frac{\sigma k^3}{\rho_1} - g k \quad (\text{A.14})$$

Cette relation nous donne le taux d'amplification maximum  $\omega_m$  et la longueur d'onde associée  $\lambda_m$  :

$$\omega_m = \left( \frac{4}{27} \frac{\rho_1 g^3}{\sigma} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{A.15})$$

$$\lambda_m = 2 \pi \sqrt{3} \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_1 g}} \quad (\text{A.16})$$

La tension de surface fixe donc une échelle de longueur en-dessous de laquelle une perturbation de l'interface n'est pas amplifiée. La prise en compte de la viscosité diminue le taux d'amplification et modifie le mode sélectionné mais ne change pas le nombre d'onde de coupure.



# Annexe B

## Traitements d'images

### B.1 Traitements d'images

Toutes les expériences sont visualisées et enregistrées au travers de caméras numériques. Il nous faut donc utiliser et concevoir diverses méthodes de traitements d'images pour pouvoir exploiter au mieux les films expérimentaux. Toutes nos images sont enregistrées au format TIFF non compressé. Ce format d'image est pour nous la meilleure solution car il est standard et non destructif. Les images sont donc utilisables sur tous les logiciels de traitements d'images. De plus, des bibliothèques de fonctions permettent de les ouvrir et de travailler dessus avec différents langages de programmation tel que le langage C ou Fortran.

Nous avons utilisé principalement trois types de logiciel dont deux spécifiques aux traitements d'images, il s'agit de NIH Image ainsi que sa version plus récente ImageJ, et d'un logiciel de calcul numérique, MatLab.

L'unité de base d'une image est le pixel. Pour convertir cette unité inhérente aux images dans des unités physiques, des images de calibration ont été prises pour chaque enregistrement. Nos deux caméras, la Phantom V5 ainsi que la Hamatsu sont dotées de pixels "carrés", c'est-à-dire qu'une distance mesurée en pixels dans une direction horizontale est la même dans une direction verticale. La calibration permet donc de savoir à quoi correspond un pixel de l'image en unité physique.

Une grosse partie du traitement d'image est basé sur un filtre développé par Philippe Marmotant au cours de sa thèse [41].

#### B.1.1 Élimination de l'image de fond

Chaque pixel de l'image correspond à une certaine intensité lumineuse que l'on notera  $I$ . Sur la caméra Phantom, l'intensité lumineuse  $I$  est codée sur 8 bits, c'est-à-dire sur 256 niveaux de gris allant de 0 (noir) pour une intensité minimale et 255 (blanc) pour une intensité maximale. La caméra Hamatsu code elle l'intensité lumineuse  $I$  sur 12 bits, soit 4096 niveau de gris.

Chaque image contient différents objets (gouttes, bandelettes) et un fond. Le fond correspond à l'image sans qu'aucun objet soit présent. Ce fond présente des inhomogénéités inhérentes à l'écran diffuseur. Pour gommer ces différences de niveau et rendre les images plus facilement exploitablest il existe deux solutions :

- La soustraction. Soit une image contenant des objets à étudier et une image de fond. L'image améliorée est construite selon la méthode suivante, pour chaque pixel :  $I_{\text{résultat}} = I_{\text{image}} - I_{\text{fond}}$ . L'intérêt de cette méthode est de rendre le fond de l'image uniforme. L'inconvénient est de diminuer le contraste des objets présents sur l'image initiale.
- La division. L'image améliorée est construite selon la méthode suivante, pour chaque pixel :  $I_{\text{résultat}} = I_{\text{image}} / I_{\text{fond}}$ . Cette méthode suppose l'existence d'objet modifiant la transmission de lumière selon une loi linéaire :  $I_{\text{image}} = tI_{\text{fond}}$ . Un objet complètement translucide aura un coefficient  $t$  de transmission égale à 1 tandis qu'un objet complètement opaque aura un coefficient de transmission égale à 0. L'intérêt de cette méthode est de rendre uniforme le fond de l'image (proche du blanc) et de rendre opaques les objets (proche du noir). Son inconvénient est d'augmenter les différences d'intensité lumineuse du fond et donc d'augmenter le bruit de l'image.

Les images sont codées sur 256 niveaux de gris, il ne peut y avoir de valeurs supérieures à 255, ni de valeurs inférieures à 0. Pour cela, les algorithmes utilisés sont les suivants :

- La soustraction.

$$I_{\text{résultat}} = \frac{I_{\text{image}} - I_{\text{fond}}}{2} + 128 \quad (\text{B.1})$$

- La division.

$$I_{\text{résultat}} = \frac{I_{\text{image}}}{I_{\text{fond}}} \times 255 \quad (\text{B.2})$$

La figure B.1 montre quatre images représentant la même chose mais en ayant subi des traitements différents. L'image originale est en haut à gauche. Il s'agit d'une portion d'une image obtenue lors de l'enregistrement d'une expérience avec la caméra rapide Phantom. Cette image nous montre une série de gouttes obtenues après la rupture d'une bandelette liquide. La ligne noire en haut de l'image représente le bord supérieur d'une des plaques de verre de la cellule de Hele-Shaw. Cette image présente une zone plus claire dans son coin inférieur droit et une zone plus sombre dans son coin supérieur gauche. La fonction d'éclairage n'est pas homogène.

Nous avons photographié avant de faire l'acquisition de l'expérience une image de fond. Cette image contient tous les éléments fixes présents dans le champ de la caméra ainsi que la fonction d'éclairage. Nous venons de lister deux procédés pour supprimer ces inégalités d'éclairage. La première est la soustraction de l'image originale avec l'image de fond. Le résultat est donné sur la figure B.1 avec l'image en haut à droite. La soustraction rend le fond de l'image uniforme et supprime les éléments fixes présents dans les images. Cependant, le résultat manque de contraste.

La division est le second procédé pour éliminer les différences d'éclairage sur une image. Sur la figure B.1, le résultat de la division entre l'image originale et l'image de fond est représenté sur la photo en bas à gauche. Le résultat est une image plus contrastée que

la soustraction tout en ayant un fond homogène. Cependant, l'image est beaucoup plus bruitée.

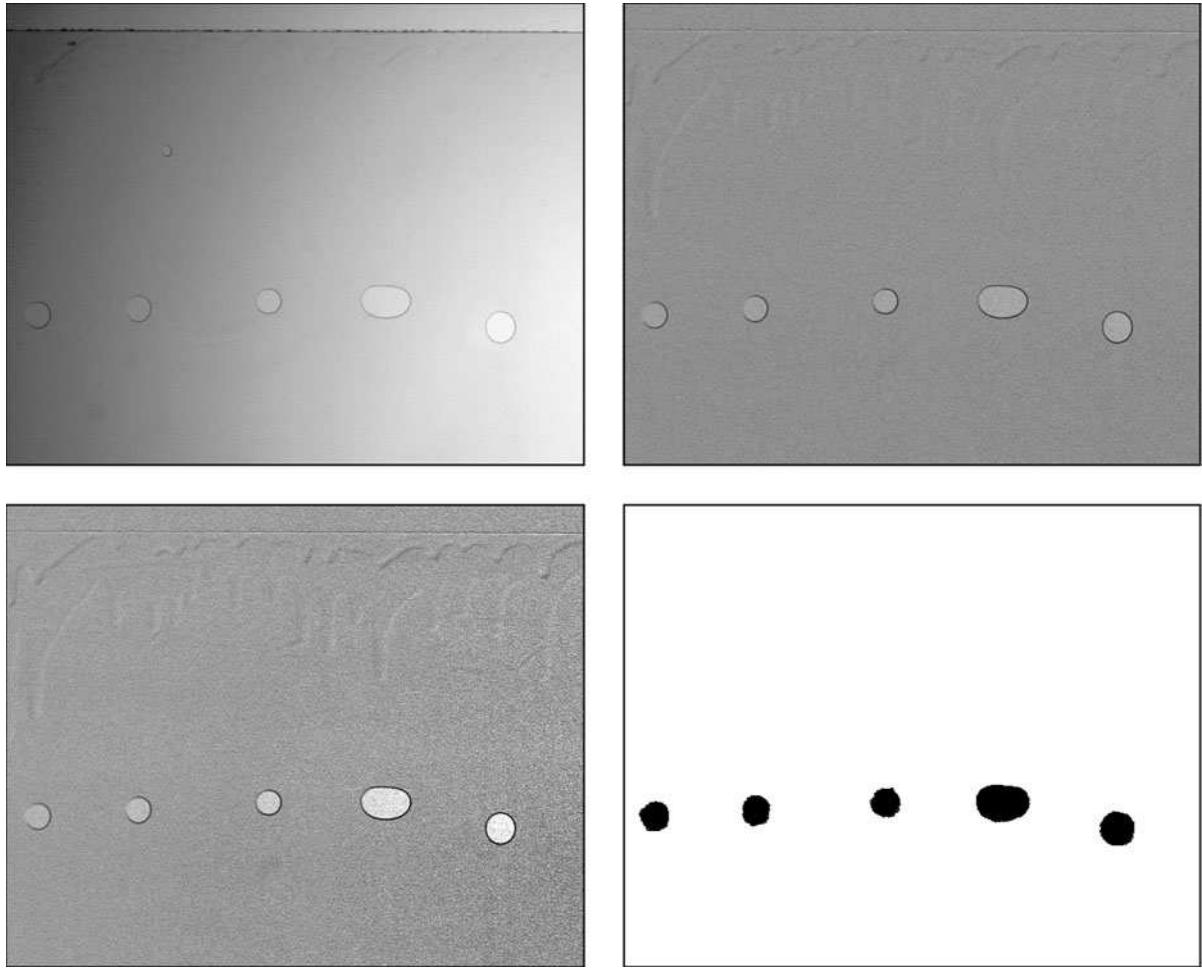


FIG. B.1 – Visualisation des différents traitements d'images. En haut à gauche, une image obtenue après enregistrement. En haut à droite, la même image en ayant soustrait l'image de fond. En bas à gauche, l'image originale après avoir divisé l'image de fond. En bas à droite, l'image une fois traitée en noir et blanc.

### B.1.2 Extraction de contours

Une fois nos images améliorées, il nous faut pouvoir extraire les contours des objets. La plupart des logiciels de traitements d'images ont des filtres de type déivateur qui mettent en évidence les différences d'intensité et donc les contours. Concrètement, ces filtres évaluent le gradient d'intensité lumineuse :  $\|\vec{\nabla} I\| = \sqrt{|\frac{\partial I}{\partial x}|^2 + |\frac{\partial I}{\partial y}|^2}$ .

Les images numériques sont composées de pixels, l'intensité lumineuse  $I$  est donc représentée par une matrice d'intensité ou l'élément  $I_{ij}$  représente l'intensité du pixel  $i, j$ .

On approxime donc les dérivées par des méthodes dites des différences finies. Les deux principaux filtres sont :

- Filtre de Roberts. Il évalue les gradients diagonaux en convoluant l'image par les matrices

$$\begin{array}{|c|c|} \hline -1 & 0 \\ \hline 0 & +1 \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & -1 \\ \hline +1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

puis en somme leurs valeurs absolues.

- Filtre de Sobel. Les gradients horizontaux et verticaux sont évalués en convoluant l'image par les matrices

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & -2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 0 & 2 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

la valeur du filtre est obtenu en prenant la racine carrée de la somme des gradients. Cependant, ces filtres ont pour inconvénient d'augmenter le bruit de l'image. De plus, ils ne sont pas isotropes et privilégident donc une composante sur l'image.

C'est pourquoi Philippe Marmottant [41] a créé un filtre dit *sigma*, plus respectueux de l'isotropie car défini sur l'écart-type des huit pixels voisins. La moyenne est calculée par la convolution de l'image avec la matrice

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Les écarts à la moyenne sont les convolutions de l'image avec les matrices

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} - \frac{1}{8} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} - \frac{1}{8} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \quad \text{etc...}$$

La moyenne de ces écarts à la moyenne donnent la valeur du filtre. La valeur un huitième devant la matrice moyenne sert à normaliser le résultat.

La figure B.1 donne un exemple d'image traitée servant à obtenir les contours. L'image originale est présentée en haut à gauche. L'image en noir et blanc est présentée en bas à droite. On reconnaît chaque goutte en noir sur un fond totalement blanc.

La figure B.2 donne un autre exemple d'extraction de contours dans le cas d'une bandlette connexe. L'image originale est située en haut tandis que l'image traitée en noir et blanc est située en-dessous.

### B.1.3 Echantillonnage

Une fois l'image traitée avec le filtre sigma, on extrait les contours en binarisant l'image. On choisit une valeur seuil de l'intensité pour laquelle tous les pixels ayant une intensité

inférieure sont représentés par du noir tandis que tous les pixels ayant une intensité supérieure sont représentés par des pixels blancs. On obtient alors une image en noir et blanc faisant ressortir les contours qui nous intéressent.

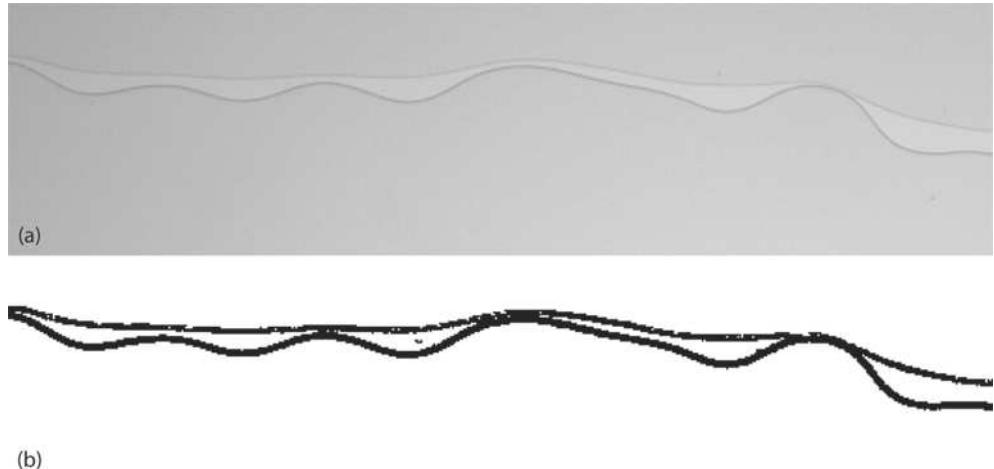


FIG. B.2 – (a) : Image brute obtenue lors d'une expérience. (b) : Image obtenue après traitements.

Un programme développé sous MatLab vient ensuite analyser chaque image en repérant la position de chaque pixel noir des interfaces. On scanne chaque ligne verticale en partant du haut et du bas de l'image pour repérer le premier pixel noir. On obtient ainsi pour chaque ligne la position exacte de l'interface supérieure et inférieure.

## B.2 Analyse

### B.2.1 Détermination des taux de croissance et des longueurs d'onde

Une fois que l'on a obtenu la position de chaque front on effectue une transformation de Fourier pour avoir le spectre de fréquence. On regarde alors le mode qui varie dans le temps. Ce mode nous renseigne sur la longueur d'onde sélectionnée, tandis que sa vitesse de croissance nous renseigne sur le taux de croissance.

La figure B.3 représente un spectre de fréquence après une transformation de Fourier d'une bandelette. Le graphe nous donne la répartition de puissance en fonction du nombre d'onde  $k$ . Le pic principal, ici accentué par un point, représente le mode sélectionné par l'instabilité. Le suivi de son amplitude au cours du temps nous donne accès au temps de croissance de l'instabilité. Le nombre d'onde  $k$  est une mesure directe de la longueur d'onde sélectionnée.

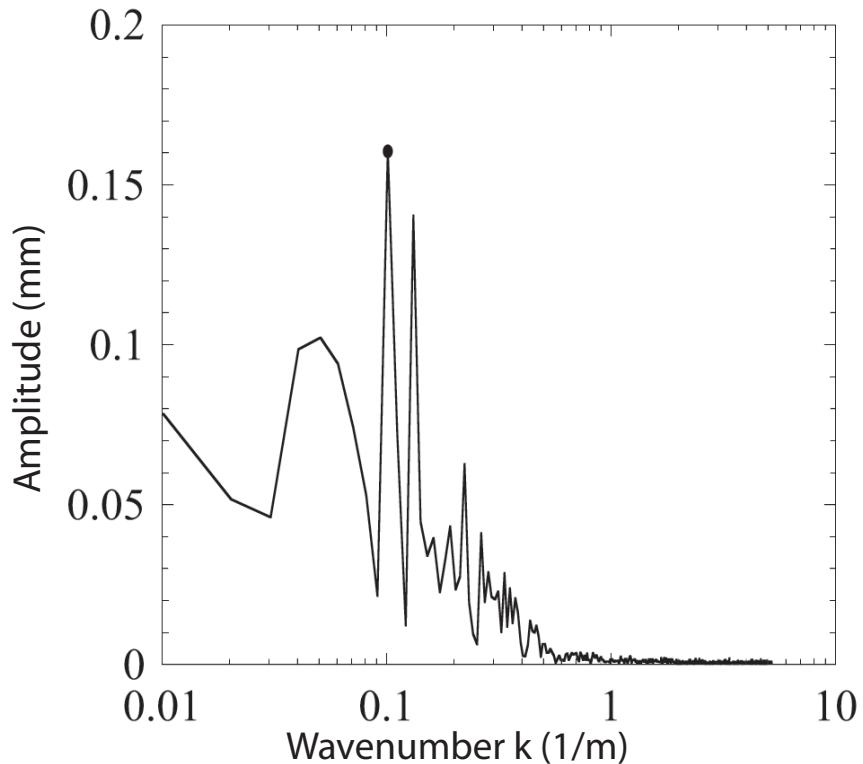


FIG. B.3 – Exemple de spectre de fréquence.

### B.2.2 Mesures des surfaces des gouttes

On effectue toujours le même traitement sur les images obtenues. On cherche à avoir une image en noir et blanc ne comportant que les objets qui nous intéressent.

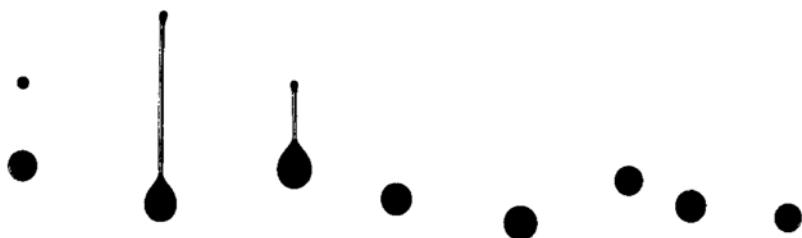


FIG. B.4 – Image de gouttes en noir et blanc obtenue après traitement.

On utilise ensuite la fonction de compteur de cellule proposée par le programme NIH Image pour obtenir la liste de tous les objets de pixels noirs contenus dans l'image. Cette liste comprend, entre autres, la position du centre de masse de l'objet et sa surface. On obtient ainsi une liste contenant le nombre et la surface de chaque goutte pour une expérience donnée.

Pour une même série d'expériences, on compile les résultats pour pouvoir travailler de manière statistique.



# Annexe C

## Instabilités induites par la gravité

### C.1 Contexte et motivations

On s'est aperçu au début de la seconde moitié du XX<sup>e</sup> siècle que les poches liquides de pétrole ne représentaient qu'une petite partie du gisement. La majeure partie étant infiltrée dans le sol entourant le gisement.

Certaines personnes ont eu alors l'idée d'injecter de l'eau dans le sol pour "pousser" le pétrole vers le lieu d'extraction. Cependant le résultat n'était pas celui escompté. On récupérait soit uniquement de l'eau, soit une émulsion d'eau et de pétrole.

Ce phénomène a d'abord intrigué les ingénieurs puis les chercheurs et MM. Saffman et Taylor en 1958 [52] en donnèrent une interprétation. Depuis, de nombreux travaux tant théoriques qu'expérimentaux ont été menés pour mieux appréhender le phénomène.

A partir de là une question intéressante nous est apparue de manière académique, à savoir : l'interface entre deux fluides immiscibles, de viscosités différentes chutant sous l'effet de la gravité dans un milieu poreux, est-elle instable ou non ? Il nous est apparu une condition d'instabilité légèrement modifiée. Dans le cas de l'instabilité de Saffman-Taylor classique, la condition fait intervenir les viscosités dynamiques et s'exprime ainsi :  $\eta_{pousseur} < \eta_{poussé}$ , alors que dans notre cas, elle fait intervenir les viscosités cinématiques et s'exprime alors :  $\nu_{pousseur} < \nu_{poussé}$ .

La connaissance de l'instabilité est primordiale pour pouvoir étudier la dynamique complète du système. En effet, durant les premiers instants, le système se déstabilise et forme des doigts. Phénomène illustré sur la figure C.1. Par la suite, certains de ces doigts se

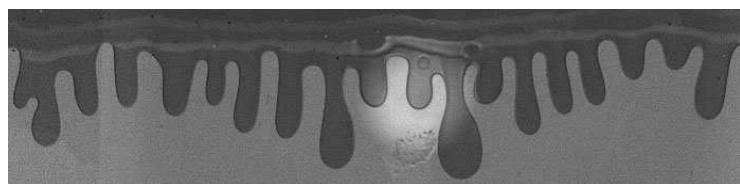


FIG. C.1 – Exemple de doigts produits par l'instabilité.

rompent, et forment alors des gouttes. Nous nous trouvons dans une situation de mélange. La dynamique de cette période est déterminée par l'instabilité initiale. Nous donnons sur la figure C.2 un exemple de gouttes formées dans la cellule.

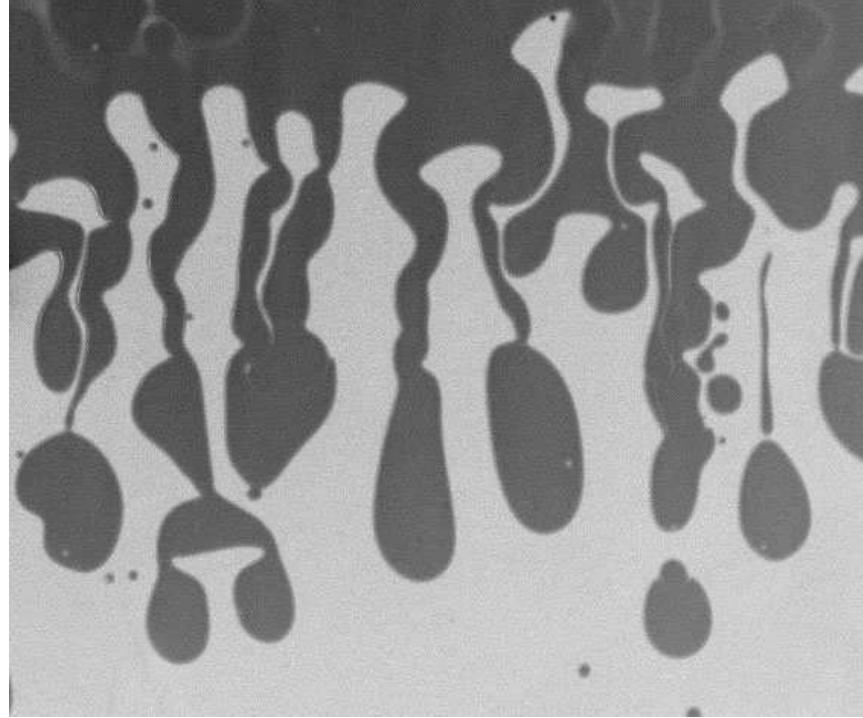


FIG. C.2 – Exemple d'une phase de mélange.

Nous avons ensuite commencé à étudier l'instabilité qui se développe lorsque nous faisons chuter une fine bandelette de liquide visqueux sous l'effet de son propre poids dans une cellule de Hele-Shaw. L'instabilité produite est du type Rayleigh-Taylor, son intérêt est qu'elle permet d'étudier les effets de la taille finie de la bandelette. Nous donnons sur la figure C.3 un exemple de bandelette au cours de la déstabilisation. Dans ce cas, la longueur

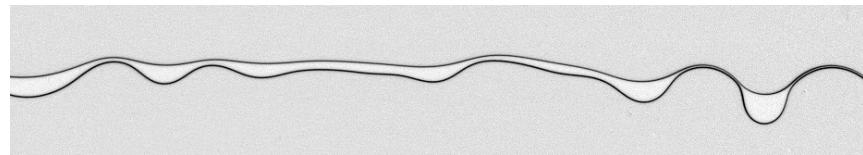


FIG. C.3 – Exemple d'une bandelette de fluide pendant l'instabilité.

d'onde observée est une fonction de la longueur capillaire, et de la taille de la bandelette.

## C.2 Vitesse de descente d'un fluide seul

### C.2.1 Résultats expérimentaux

Pour mesurer les vitesses de descente, nous avons fait une série d'expérience en laissant s'écouler dans une cellule de Hele-Shaw de l'huile silicone sous l'effet de son propre poids. Nous mesurons ensuite comment varie l'interface au cours du temps. Pour voir comment jouent les paramètres, nous avons fait varier l'épaisseur  $e$  de la cellule et la viscosité cinématique  $\nu$  de l'huile. Sur la figure C.4 nous avons représenté la variation de l'interface huile silicone - air en fonction du temps. Comme nous pouvons le remarquer, l'interface reste stable au cours du temps.

Nous avons ensuite mesuré sa position moyenne et le graphique C.5 montre cette variation en fonction du temps.

On voit clairement que la courbe théorique, obtenue d'après la relation C.12, approxime très bien les points expérimentaux. On remarque aussi que le fluide ne chute pas uniformément, on peut remarquer une légère courbure aux temps courts, signe d'une phase d'accélération. Nous avons fait cette même expérience pour deux épaisseurs différentes, et deux viscosités cinématiques différentes. Nous donnons dans le tableau C.1 les différents résultats obtenus.

Epaisseur $\times 10^{-3}$ m	Viscosité $\times 10^{-6}$ m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup>	Vitesse théorique $\times 10^{-3}$ m.s <sup>-1</sup>	Vitesse expérimentale $\times 10^{-3}$ m.s <sup>-1</sup>
0.75	20	22.99	21.09
0.375	20	5.74	5.97
0.75	50	9.19	9.14
0.375	50	2.29	2.10

TAB. C.1 – Résultats obtenus pour les vitesses de descente.

Sur le graphe C.6 nous avons explicité les dépendances des paramètres.

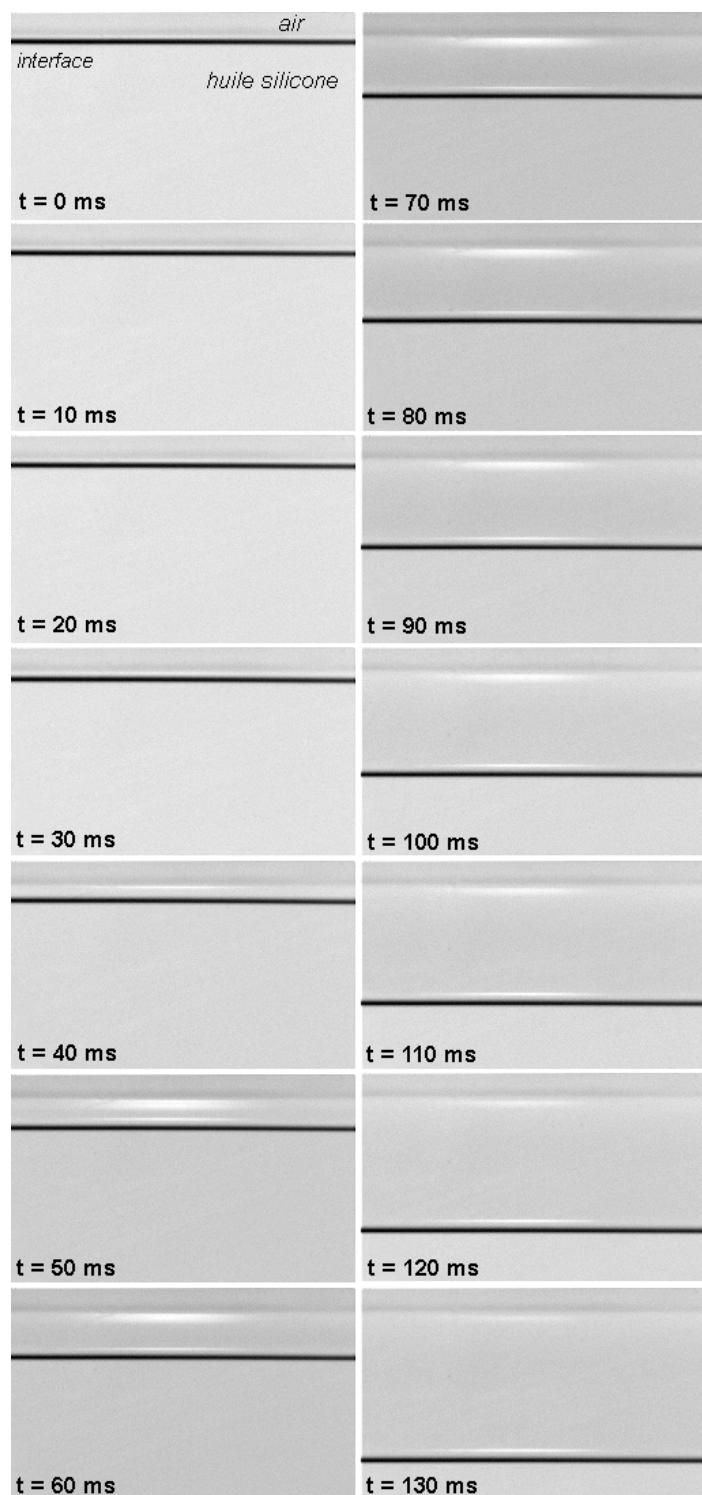


FIG. C.4 – Séquences d’images illustrant la descente stable de l’interface.

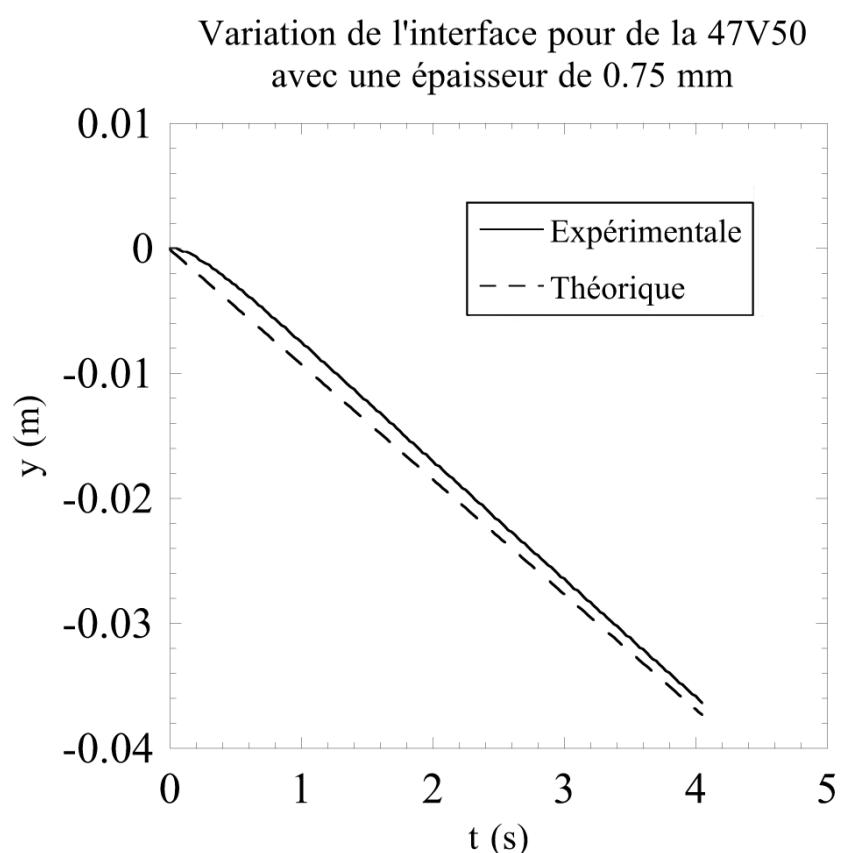


FIG. C.5 – Chute libre d'un liquide dans une cellule de Hele-Shaw.

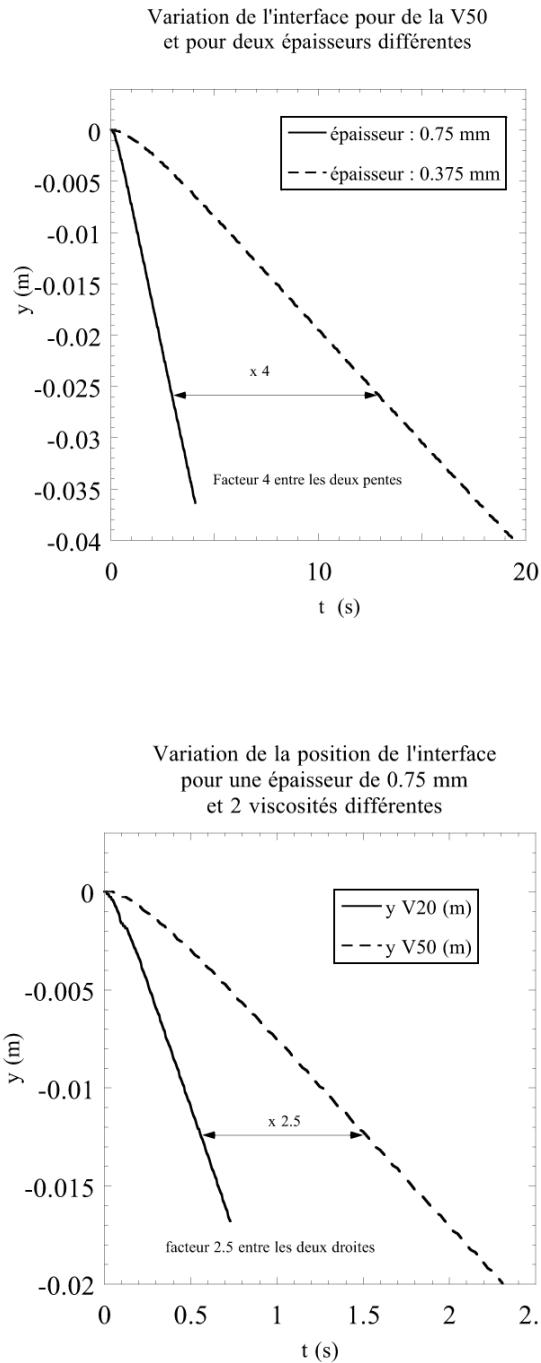


FIG. C.6 – Dépendance aux paramètres.

Reprendons tout d'abord l'expression de la vitesse de descente :

$$\bar{U} = -\frac{g e^2}{12 \nu} \quad (\text{C.1})$$

Si on multiplie l'épaisseur par un facteur deux, la vitesse débitante moyenne est multipliée par un facteur quatre. C'est bien ce que l'on observe sur la figure du haut du graphique C.6. Le rapport des pentes donne bien un facteur quatre, et la vitesse de chute est plus importante quand l'épaisseur est plus grande. De même si on multiplie la viscosité cinématique par un facteur  $\beta$ , on divise la vitesse débitante moyenne par ce même facteur  $\beta$ . Là aussi, on l'observe sur la figure du bas du graphique C.6. Le rapport des pentes est égale à  $\frac{5}{2}$  soit le rapport des viscosités, le fluide le moins visqueux chutant plus vite que le plus visqueux.

Intéressons nous à présent à la phase d'accélération. Les équations C.24 et C.26 nous renseignent sur les expressions de la vitesse pour les différents régimes. Nous pouvons nous donner une idée du temps pour lequel la transition s'effectue. Soit  $t_c$  ce temps. Au temps court, nous nous trouvons en régime de chute libre. La vitesse est donc proportionnelle à  $gt$ . Au temps long, la vitesse de descente est constante, le système est stationnaire. Cette dernière vaut  $\frac{ge^2}{\nu}$ . En mettant les deux expressions de la vitesse au même ordre de grandeur, nous obtenons une définition du temps  $t_c$  :

$$gt_c \sim \frac{ge^2}{\nu} \quad (\text{C.2})$$

soit :

$$t_c \sim \frac{e^2}{\nu} \quad (\text{C.3})$$

Nous pouvons donner une autre explication sur ce temps  $t_c$ . En effet, aux temps courts le fluide est en chute libre. Toutefois par adhérence aux parois, le fluide frotte sur ces dernières. Il y a formation d'une couche limite. Le temps  $t_c$  correspond au temps de diffusion de la vorticité dans l'écoulement, soit :

$$t_c \sim \frac{e^2}{\nu} \quad (\text{C.4})$$

Pour vérifier à la fois l'équation C.14 et le temps caractéristique que nous venons de calculer  $t_c$  :

$$t_c = \frac{e^2}{\nu} \quad (\text{C.5})$$

nous avons fait l'expérience suivante. Notre but étant de caractériser ce temps  $t_c$ , nous avons donc cherché à le rendre plus important. C'est pourquoi nous avons utilisé de l'huile silicone avec une viscosité de  $20 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  et une épaisseur  $e$  de 2.05 mm. L'expérience a été filmée à une vitesse de 5000 images par secondes.

Nous avons représenté sur le graphique C.7 les résultats dimensionnés. Les résultats expérimentaux sont symbolisés par des symboles ronds, la courbe théorique par une ligne. Nous remarquons que la courbe théorique rend bien compte des deux régimes : balistique et linéaire. Nous constatons qu'aux temps longs, nous avons la même pente. Le modèle est

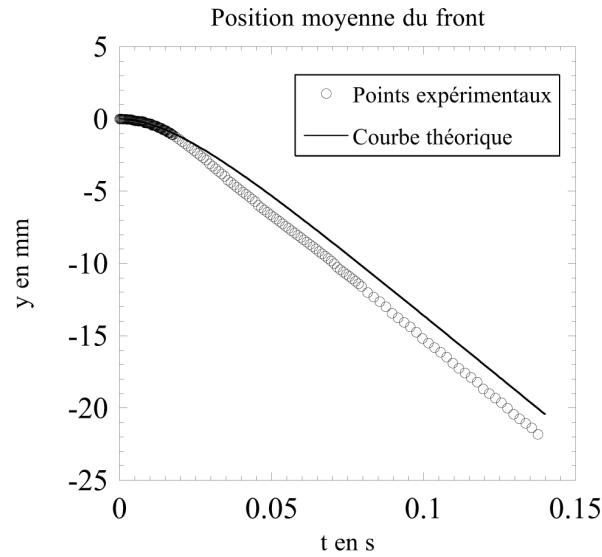


FIG. C.7 – Chute d'un fluide en prenant en compte les effets instationnaires.

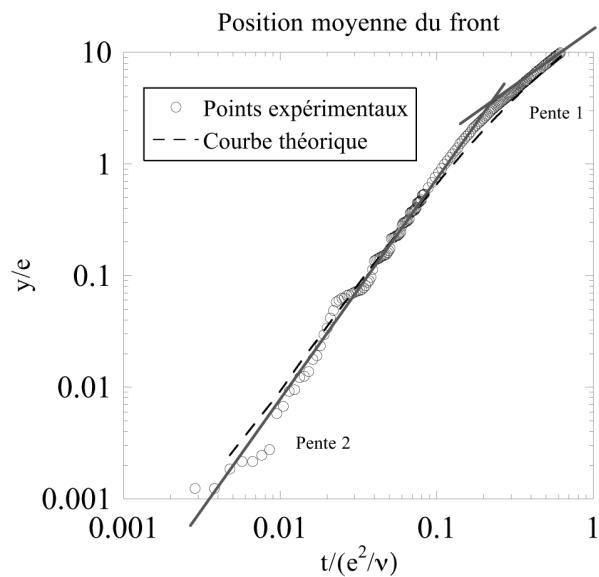


FIG. C.8 – Effets instationnaires en représentation log-log.

donc cohérent, cependant nous observons un courbure moins prononcée. Pour valider nos suppositions, nous avons ensuite adimensionné les distances par  $e$  et les temps par  $t_c$ . Nous montrons le résultat sur la figure C.8.

Nous avons choisi de montrer les résultats en représentation log-log pour chercher des lois de puissance. Les points expérimentaux sont symbolisés par des ronds, la courbe théorique par une ligne en pointillé. Dans les premiers temps, on observe une pente égale

à deux, ce qui représente un régime quadratique. En effet, si  $\log(y) \sim 2 \log(t)$  alors  $y \sim t^2$ . On se trouve alors bien en régime d'accélération. Aux temps longs, nous observons une pente égale à un. On se trouve dans une phase de descente à vitesse constante. Les points expérimentaux ainsi que la courbe théorique sont superposés, nous avons donc bien la même vitesse de descente. Nous pouvons toutefois remarquer que la courbure théorique est légèrement moins marquée. Ce qui se traduit sur le graphique C.7 par une pente théorique légèrement décalée par rapport à l'expérience. Intéressons nous à présent à l'emplacement de la courbure. Celle-ci s'étale un peu dans le temps, légèrement avant  $\frac{t}{t_c} = 1$ , mais le régime devient linéaire aux alentours de  $\frac{t}{t_c} = 1$ . Ceci nous prouve bien que  $t_c$  est bien un temps caractéristique du problème.

## C.2.2 Détermination théorique de la vitesse de chute

### Cas stationnaire

On se place dans la limite où la vitesse de chute est indépendante du temps, autrement dit, on ne prend pas en compte la phase d'accélération. La vitesse de descente s'exprime donc ainsi :

$$\vec{U}_z = U_z(x) \hat{z} \quad (\text{C.6})$$

Les équations de Navier-Stokes se réduisent à

$$\frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2} = \frac{g}{\nu} \quad (\text{C.7})$$

Avec  $\nu$  la viscosité cinématique. Cette équation différentielle admet comme solution :

$$U_z(x) = \frac{g}{2\nu} x^2 + A x + B \quad (\text{C.8})$$

En utilisant la condition de symétrie  $U_z(x) = U_z(-x)$  et la condition d'adhérence aux parois  $U_z(\pm \frac{e}{2}) = 0$  on obtient les relations suivantes :

$$\begin{cases} A = 0 \\ B = -\frac{ge^2}{8\nu} \end{cases} \quad (\text{C.9})$$

On obtient donc :

$$U_z(x) = \frac{ge^2}{8\nu} \left( \frac{4x^2}{e^2} - 1 \right) \quad (\text{C.10})$$

Cependant ce qui nous intéresse c'est la vitesse débitante moyenne, car c'est à cette vitesse que l'interface descend [7]. Pour cela il nous faut calculer l'intégrale suivante :

$$\bar{U} = \frac{1}{e} \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} U_z(x) dx \quad (\text{C.11})$$

Qui nous donne la relation :

$$\bar{U} = -\frac{ge^2}{12\nu} \quad (\text{C.12})$$

### Cas instationnaire

On prend en compte maintenant la phase d'accélération du fluide. Dans ce cas la vitesse de chute devient  $\vec{U}_z = U_z(x, t) \hat{z}$ . Les équations de Navier-Stokes se réduisent à

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -g + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (\text{C.13})$$

On remarque une certaine analogie entre ce problème et un problème de transport de chaleur entre deux parois solides avec un taux de production de chaleur interne constant en temps et en espace. Ce problème a déjà été traité [14], nous avons donc utilisé et adapté à notre problème, la solution trouvée dans un autre contexte par les auteurs. La solution de ce problème est donnée par :

$$U_z(x, t) = -\frac{g e^2}{2 \nu} \left\{ 1 - \frac{x^2}{e^2} - \frac{32}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \cos\left(\frac{(2n+1)\pi x}{e}\right) e^{-\frac{\nu(2n+1)^2 \pi^2 t}{e^2}} \right\} \quad (\text{C.14})$$

Nous donnons ici succinctement le calcul. L'équation de départ est la suivante :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -g + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (\text{C.15})$$

On adimensionne les variables par :

- $\zeta = \frac{2x}{e}$
- $\tau = \frac{4\nu t}{e^2}$
- $\mathcal{U} = \frac{4\nu U}{g e^2}$

Le système devient :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial \tau} = -1 + \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial \zeta^2} \quad (\text{C.16})$$

On effectue ensuite une transformée de Laplace :

$$\tilde{V}(\zeta, S) = \int_0^\infty e^{-S\tau} \mathcal{U}(\zeta, \tau) d\tau \quad (\text{C.17})$$

L'équation C.16 devient :

$$\begin{cases} S \tilde{V} - \mathcal{U}(\tau=0) = -\frac{1}{S} + \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \zeta^2} \\ \mathcal{U}(\tau=0) = 0 \end{cases} \quad (\text{C.18})$$

Ce qui se réduit à :

$$\frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \zeta^2} = S \tilde{V} + \frac{1}{S} \quad (\text{C.19})$$

On cherche donc des solutions sous la forme :

$$\tilde{V} = A e^{\alpha \zeta} + B e^{-\beta \zeta} + C \quad (\text{C.20})$$

En utilisant la condition de symétrie  $\tilde{V}(\zeta) = \tilde{V}(-\zeta)$  et la condition d'adhérence aux parois  $\tilde{V}(\pm 1) = 0$ , on obtient les relations suivantes :

$$\begin{cases} A = \frac{1}{S^2(e^{\sqrt{S}} + e^{-\sqrt{S}})} \\ B = A \\ C = -\frac{1}{S^2} \end{cases} \quad (\text{C.21})$$

Ce qui conduit à la solution :

$$\tilde{V}(\zeta, \tau) = \frac{1}{S^2} \left( \frac{e^{\sqrt{S}\zeta} + e^{-\sqrt{S}\zeta}}{e^{\sqrt{S}} + e^{-\sqrt{S}}} - 1 \right) \quad (\text{C.22})$$

la transformation inverse de cette équation est donnée par H.S. Carslaw et J.C. Jeager [14]. La solution obtenue est donné dans l'équation C.14.

En reprenant la définition de la transformé de Laplace, on remarque que les variations de  $S$  et  $\tau$  sont liées. En effet

- Si  $\tau \rightarrow 0$  alors pour que  $\tilde{V} \neq 0$  il est nécessaire que  $S \rightarrow +\infty$
- Si  $\tau \rightarrow +\infty$  alors pour que  $\tilde{V} \neq 0$  il est nécessaire que  $S \rightarrow 0$

Nous avons donc deux cas possibles. Examinons les brièvement.

1.  $(\tau \rightarrow 0, S \rightarrow +\infty)$

Dans ce cas on obtient :

$$\tilde{V}(\zeta, \tau) \approx -\frac{1}{S^2} \quad (\text{C.23})$$

Ce qui donne dans l'espace réel :

$$U \approx -g t \quad (\text{C.24})$$

2.  $(\tau \rightarrow +\infty, S \rightarrow 0)$

En effectuant un développement limité à l'ordre deux on trouve :

$$\tilde{V}(\zeta, \tau) \approx -\frac{1}{2 S^2} (1 - \zeta^2) \quad (\text{C.25})$$

Soit dans l'espace réel :

$$U \approx -\frac{g e^2}{8 \nu} \left( 1 - \frac{4 x^2}{e^2} \right) \quad (\text{C.26})$$

Donnons à présent une explication physique à ces deux limites. La première limite est au temps cours, elle nous donne la relation C.24. Elle correspond au cas où la viscosité n'intervient pas encore. Tout se passe comme si le fluide ne "voit" pas les parois. La seconde limite correspond au temps long, pour lesquels on se trouve en régime visqueux et où les effets inertIELS ne jouent plus. On remarque que la relation C.26 est quasiment la même que l'équation C.12.

### C.3 Instabilité de Saffman-taylor induite par la gravité

#### C.3.1 Description quantitative

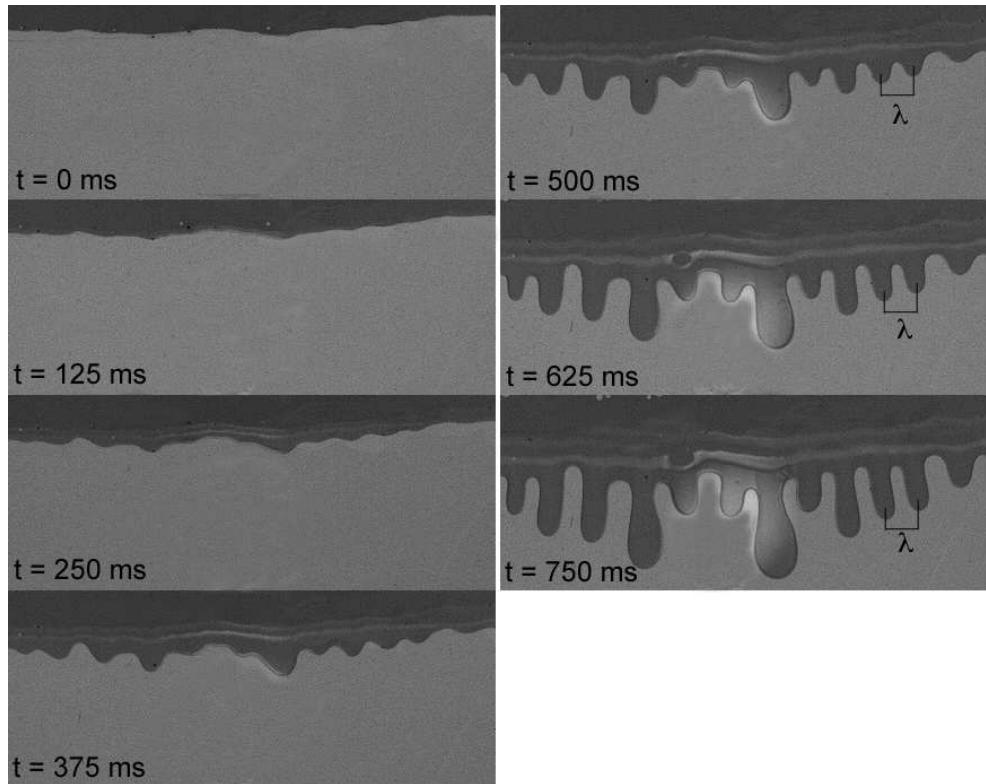


FIG. C.9 – Evolution au cours du temps de l'instabilité.

Sur la figure C.9 nous avons représenté une série d'images prise à différents intervalles de temps pour illustrer le phénomène de l'instabilité. Chaque photo ne représente qu'une petite partie de l'image totale. On voit très nettement le développement de l'instabilité. Tout d'abord on observe une corrugation de l'interface entre les deux fluides, puis une croissance sous forme de doigts. Nous avons représenté dans la colonne de droite, la distance entre deux doigts consécutifs. On remarque que cette longueur ne varie pas au cours du temps. Soit  $\lambda$  cette quantité, il s'agit de la longueur d'onde du mode sélectionné.

#### C.3.2 Sélection de mode

Nous avons vu qu'un des paramètres de contrôle est la hauteur respective des liquides. Soit  $\Psi$  ce paramètre :

$$\Psi = \frac{H}{L} = \frac{L - h}{L} \quad (\text{C.27})$$

avec  $L$  la hauteur totale de liquide,  $H$  la hauteur du fluide peu visqueux et  $h$  la hauteur de fluide visqueux. Le paramètre  $\Psi$  varie entre 0 et 1.

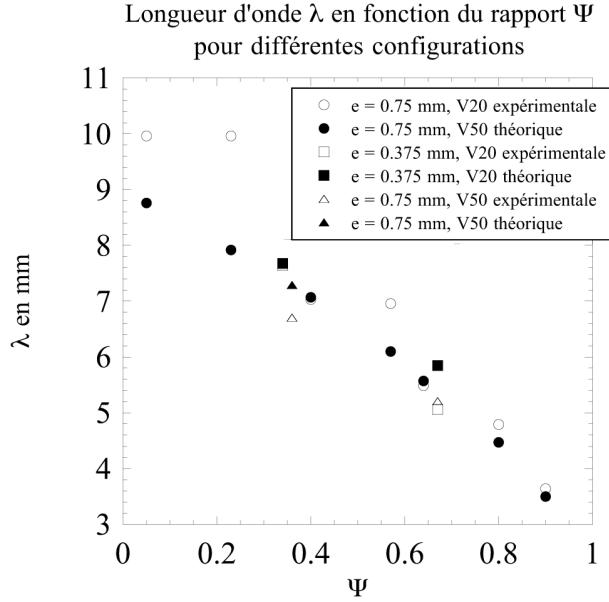


FIG. C.10 – Longueurs d'onde mesurées. En symboles blancs, nous avons représenté les valeurs mesurées et en noir, les longueurs d'onde du mode le plus amplifié.

Les résultats que nous avons obtenus pour la longueur d'onde sont représentés sur la figure C.10. On remarque que le mode mesuré n'est pas le mode le plus amplifié, sauf pour une expérience dans laquelle le paramètre  $\Psi$  vaut 0.8. Dans ce cas, c'est bien le mode le plus amplifié qui est observé. Nous pouvons constater que la longueur d'onde observé est environ le double de la longueur d'onde du mode le plus amplifié.

Nous pouvons expliquer ces observations en discutant sur la dynamique d'un doigt. Si chaque doigt se développe de manière indépendante, nous avons alors une croissance uniforme pour chacun des doigts. Le taux de croissance de l'instabilité est donné par la longueur d'onde du mode sélectionné. Nous pouvons voir un exemple sur la figure C.11.

Dans ce cas mono-mode, le mode sélectionné est le mode le plus amplifié. Si maintenant la dynamique d'un doigt est liée à l'existence de doigts voisins alors dans ce cas le mode sélectionné n'est plus mono-mode. MM. Saffman et Taylor ont en 1958 déjà observé la dynamique couplée des doigts [52]. Nous pouvons expliquer le mode que nous observons comme ceci : lorsqu'un doigt se développe il entraîne avec lui une certaine quantité de fluide, quantité qu'il prend à ses voisins les plus proches. Nous obtenons dans ce cas une dynamique bi-mode avec alternance de doigts "long" et de doigts "court". Nous donnons un exemple sur la figure C.12. Ces observations sont en accord avec les travaux de J. Fernandez *et al.* [31] qui observent aussi un mode sélectionné autre que le mode le plus amplifié. Le mode observé est environ deux fois plus grand.

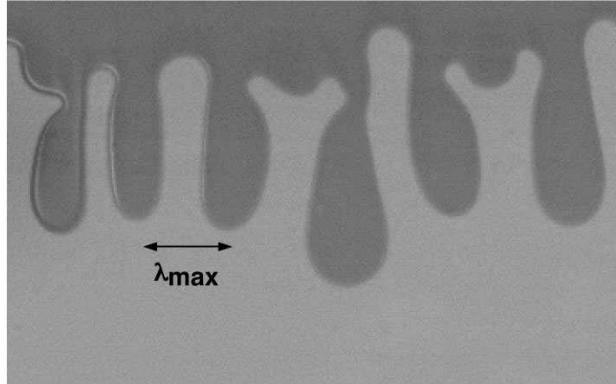


FIG. C.11 – Développement mono-mode de l’instabilité.

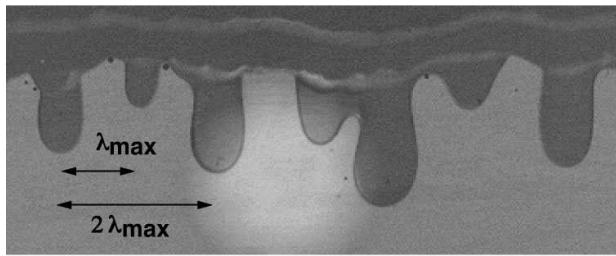


FIG. C.12 – Développement bi-mode de l’instabilité.

### C.3.3 Taux de croissance

Pour mesurer le taux de croissance, nous avons mesuré l’amplitude des déformations à travers le pic principal du spectre de puissance. Nous avons suivi son évolution dans le temps. Sur la figure C.13 nous avons représenté l’évolution temporelle du front, ainsi que celle de l’instabilité. Nous avons divisé les amplitudes de la déstabilisation  $\xi$  par le premier élément  $\xi_0$  détectable par notre programme d’analyse, car nous nous intéressons seulement à son évolution temporelle et non à sa dépendance avec d’autres paramètres. De plus, comme nous le verrons par la suite, ceci n’a aucune incidence sur le reste des résultats. On remarque que l’instabilité ne se déclenche pas dès que le fluide se met en mouvement. Il existe un temps pendant lequel l’interface ne se déstabilise pas, puis au-delà duquel l’instabilité débute. Pour tenter de quantifier ce temps, nous avons redessiné les mêmes résultats mais en représentation log-log, ce qui nous donne le graphe C.14.

On retrouve bien nos deux régimes pour l’évolution temporelle de l’interface : phase d’accélération puis phase à vitesse constante. On s’aperçoit que l’instabilité ne se déclenche que lorsque le système passe dans le régime visqueux. Or ceci est conforme avec le type d’instabilité qui nous intéresse. Dès que le fluide "se rend compte" de l’existence des parois, la viscosité entre en jeu, le système passe dans un régime linéaire visqueux, l’instabilité, au sens de Saffman-Taylor, peut alors se déclencher.

Nous avons donc un temps caractéristique  $\tau_i$  pour lequel l’instabilité commence. Ce

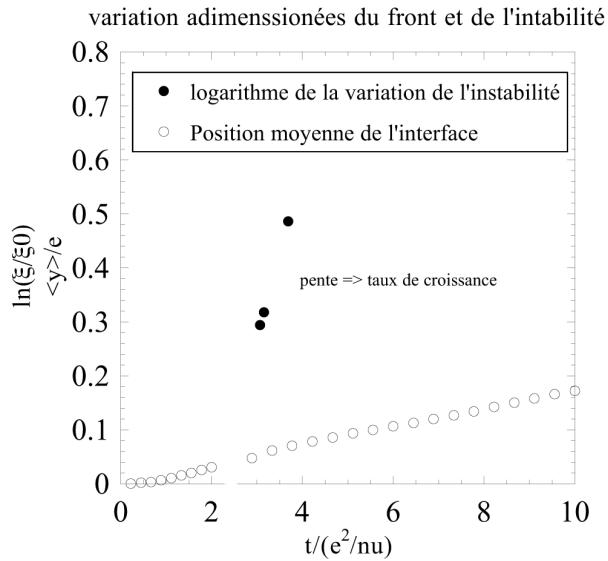


FIG. C.13 – Evolution au cours du temps de la déstabilisation.

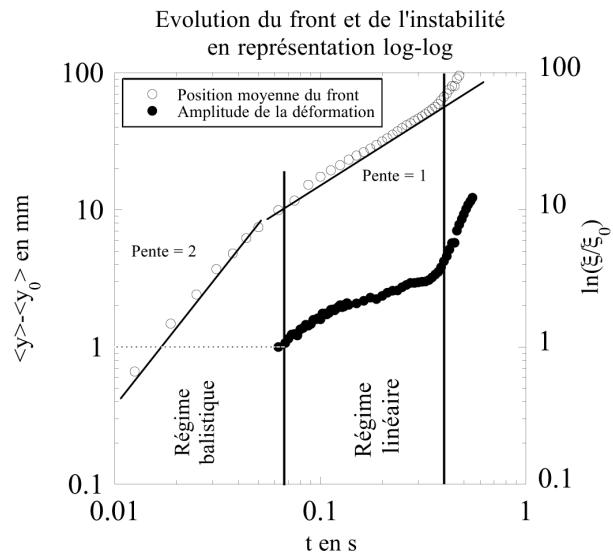


FIG. C.14 – Existence d'un temps fini pour le déclenchement de l'instabilité.

temps s'exprime ainsi :

$$\tau_i \sim \frac{e^2}{\nu} \quad (C.28)$$

Sur le graphique C.13, la variation de l'amplitude des déformations est représenté de manière logarithmique, autrement dit  $\ln(\frac{\xi}{\xi_0})$ . Les longueurs sont adimensionnées par l'épaisseur  $e$  de la cellule et les temps par  $\tau_i$ . On observe une évolution linéaire de l'instabilité,

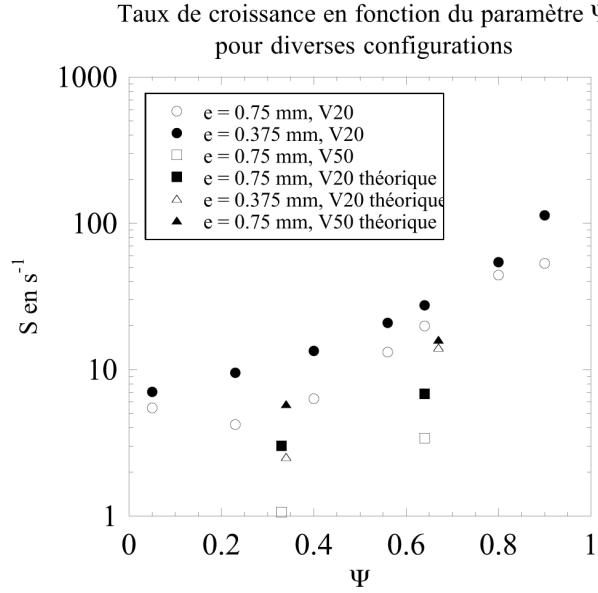


FIG. C.15 – Taux de croissance dimensionné. En symboles blancs, les taux de croissance mesurés et en noirs les valeurs théoriques d’après la longueur d’onde mesurée.

ce qui montre une croissance exponentielle durant les premiers instants. Notre théorie linéaire est donc applicable. La lecture de la pente nous renseigne directement sur le taux de croissance. En effet si  $\xi = \xi_0 e^{St}$  alors  $\ln\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right) = St$ .

Sur la figure C.15, nous avons représenté les différents taux de croissance obtenus et le taux de croissance théorique pour la longueur d’onde mesurée correspondante, dans diverses configurations. On constate une bonne prédition du taux de croissance, sauf pour des valeurs élevées de  $\Psi$ . Nous avons constaté que le taux de croissance mesuré était environ deux fois plus faible que le taux de croissance maximal. Dans les travaux de J. Fernandez *et al.* [31] le taux de croissance observé est lui aussi plus faible et environ deux fois plus petit.

## C.4 Théorie

Nous donnons ici un développement théorique pour caractériser l’instabilité.

### C.4.1 Etat de base

Nous faisons les hypothèses suivantes :

- $P(0) = P(L)$  : cellule ouverte
- Conservation du débit entre les phases :  $\int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{+\frac{\epsilon}{2}} v_1 dx = \int_{-\frac{\epsilon}{2}}^{+\frac{\epsilon}{2}} v_2 dx$
- Conservation des vitesses maximales entre les phases :  $v_1(0) = v_2(0)$

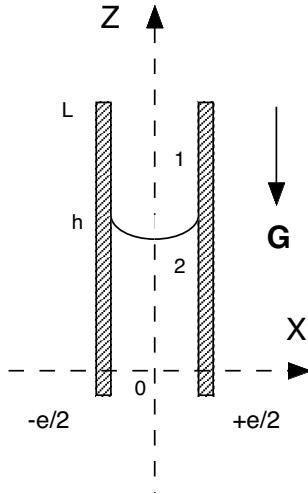


FIG. C.16 – Schéma en coupe de la cellule en présence de deux fluides.

– Condition d'adhérence aux parois :  $v_1(\pm \frac{e}{2}) = v_2(\pm \frac{e}{2}) = 0$

Le développement théorique de l'instabilité est tiré d'un cours dispensé par M. le Professeur Villermaux à l'Université de Provence dans le cadre d'un cours de Maîtrise de physique sur les instabilités hydrodynamiques [73].

On suppose le milieu 1 au dessus du milieu 2. Chaque milieu est caractérisé par une densité volumique  $\rho$ , une viscosité cinématique  $\nu$  et une pression  $P$ . Nous utiliserons les indices 1, 2 pour différencier chacun des deux milieux.

Les équations de Navier-Stokes se réduisent à :

$$0 = -\frac{1}{\rho_{1,2}} \frac{\partial P_{1,2}}{\partial z} - g + \nu_{1,2} \frac{\partial^2 v_{1,2}}{\partial x^2} \quad (\text{C.29})$$

La question qui se pose naturellement est de connaître la vitesse moyenne de descente, qui est aussi celle de l'interface [7].

$$v_0 = \frac{1}{e} \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} v \, dx \quad (\text{C.30})$$

### C.4.2 Vitesse moyenne de l'interface

Pour cela on intègre l'équation de Navier-Stokes pour chaque fluide sur sa hauteur correspondante :

$$\int_h^L \left( -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P_1}{\partial z} - g + \nu_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \right) dz = 0 = -\frac{1}{\rho_1} [P(L) - P(h)] + [-g + \nu_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}] (L - h) \quad (\text{C.31})$$

$$\int_0^h \left( -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial P_2}{\partial z} - g + \nu_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \right) dz = 0 = -\frac{1}{\rho_2} [P(h) - P(0)] + [-g + \nu_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2}] h \quad (\text{C.32})$$

En sommant ces deux expressions on obtient la relation qui suit :

$$[-\rho_1 g + \eta_1 \frac{\partial^2 v_1}{\partial z^2}](L - h) + [-\rho_2 g + \eta_2 \frac{\partial^2 v_2}{\partial z^2}] h = -\Delta P \quad (\text{C.33})$$

Avec  $\Delta P$  le saut de pression dû à l'interface courbée dans la direction  $x$ .  $-P_1(h) + P_2(h) = \Delta P = \frac{2\sigma}{e}$ . Exprimons maintenant les vitesses dans chaque fluide. On cherche des solutions sous la forme :  $v_{1,2} = A_{1,2} x^2 + B_{1,2}$ . Les profils de vitesse sont symétriques. En utilisant la condition d'adhérence, on obtient :

$$v_{1,2} = A_{1,2} \left( x^2 - \frac{e^2}{4} \right) \quad (\text{C.34})$$

En utilisant la condition de continuité des vitesses,  $v_1(0) = v_2(0)$ , on aboutit à la condition suivante :

$$A_1 = A_2 = A \quad (\text{C.35})$$

et en injectant ces deux dernières solutions dans l'équation C.33 on arrive à :

$$\rho_1 g (L - h) + \rho_2 g h - \Delta P = 2 A [\eta_1 (L - h) + \eta_2 h] \quad (\text{C.36})$$

Soit comme expression pour  $A$  :

$$A = \frac{1}{2} \frac{\rho_1 g (L - h) + \rho_2 g h - \Delta P}{\eta_1 (L - h) + \eta_2 h} \quad (\text{C.37})$$

La vitesse moyenne de descente  $v_0$  se calcule aisément et on obtient :

$$v_0(h) = -\frac{1}{3} A \frac{e^2}{4} \quad (\text{C.38})$$

### C.4.3 Stabilité

On a :

$$\begin{cases} \frac{\partial P_1}{\partial z} = -\rho_1 g + \eta_1 2 A \\ \frac{\partial P_2}{\partial z} = -\rho_2 g + \eta_2 2 A \end{cases} \quad (\text{C.39})$$

De plus comme on se trouve en régime poreux, c'est à dire avec un écoulement de type Darcy, on a aussi :

$$\begin{cases} \frac{\partial P_1}{\partial z} = -\rho_1 g - \alpha_1 v_0 \\ \frac{\partial P_2}{\partial z} = -\rho_2 g - \alpha_2 v_0 \end{cases} \text{ avec } v_0, \text{ la vitesse moyenne d'avancé du front} \quad (\text{C.40})$$

De ces équations, on en déduit le champs de pression de base :

$$\begin{cases} P_1 = (-\rho_1 g + \eta_1 2 A)(L - h) \\ P_2 = (-\rho_2 g + \eta_2 2 A)h \end{cases} \quad (\text{C.41})$$

et les coefficients de frottement  $\alpha$  :

$$\alpha_{1,2} = \frac{12 \eta_{1,2}}{e^2} \quad (\text{C.42})$$

Introduisons à présent les perturbations :

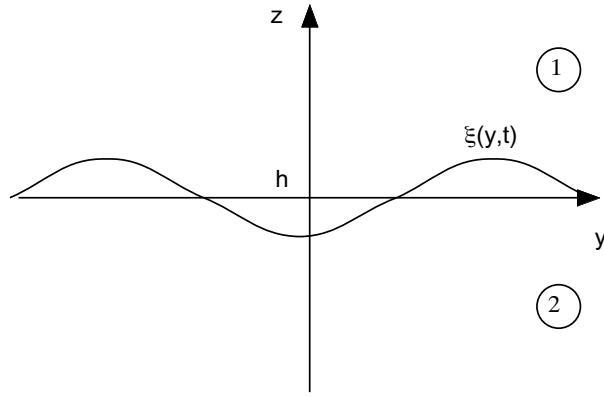


FIG. C.17 – Schéma de l'interface déstabilisée.

- $\xi \sim e^{iky+St}$
- $P = P_0 + \delta P e^{iky+St} e^{\pm kz}$  car  $\nabla^2 P = 0$ .
- $v_{1,2} = v_0 + \delta v_{1,2}$

Les équations du mouvement perturbées ont pour expression :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g - \alpha v \quad (\text{C.43})$$

Soit en développant et en simplifiant :

$$\frac{\partial \delta P}{\partial z} = -\alpha \delta v \quad (\text{C.44})$$

Or en utilisant la condition de continuité de l'interface, on a  $\delta v = \delta v_1 = \delta v_2 = S \xi$ , ce qui aboutit au résultat suivant :

$$\begin{cases} \delta P_1 = \frac{\alpha_1 S \xi}{k} \\ \delta P_2 = -\frac{\alpha_2 S \xi}{k} \end{cases} \quad (\text{C.45})$$

Pour éliminer les variables qui nous sont inconnues, on utilise la condition de raccord à l'interface :

$$P_1 - P_2 = \sigma \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} \quad (\text{C.46})$$

On obtient finalement le taux de croissance  $S$  de l'instabilité en fonction du mode :

$$S = \frac{k}{\alpha_1 + \alpha_2} \left( -(\rho_2 - \rho_1) g + 2 A (\eta_2 - \eta_1) - \sigma k^2 \right) \quad (\text{C.47})$$

On remarque que le premier terme est stabilisant si  $\rho_2 > \rho_1$ , le deuxième est déstabilisant si  $\eta_2 > \eta_1$  et que le troisième terme est toujours stabilisant.

#### C.4.4 Critère d'instabilité

Pour qu'il y ait instabilité, il faut que le terme à l'origine soit positif. Traçons pour cela le  $\frac{S}{k}$  en fonction de  $k$ . Nous voyons que le terme  $2A(\eta_2 - \eta_1) - (\rho_2 - \rho_1)$  correspond au terme à l'origine. Si ce dernier est positif, alors le taux de croissance est positif. Dans le cas contraire, le taux de croissance est négatif et le système est stable.

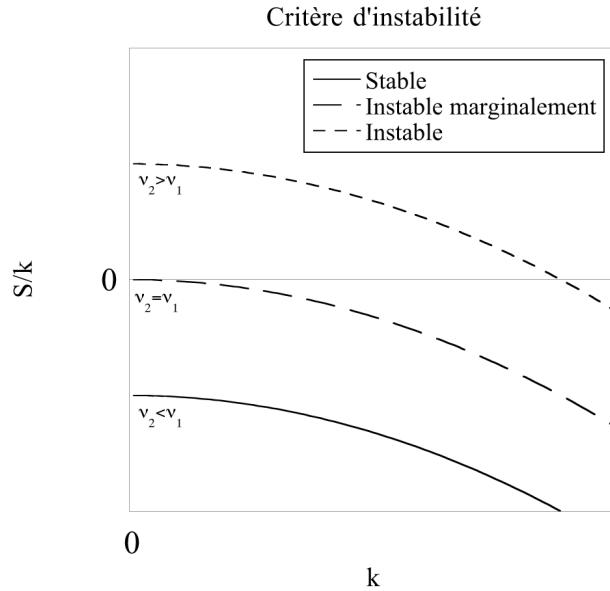


FIG. C.18 – Illustration de la condition d'instabilité.

d'où :

$$2A(\eta_2 - \eta_1) > (\rho_2 - \rho_1) \quad (\text{C.48})$$

soit en explicitant  $A$ , d'après l'équation C.37 :

$$\frac{\rho_1 g \Psi + \rho_2 g (1 - \Psi)}{\eta_1 \Psi + \eta_2 (1 - \Psi)} (\eta_2 - \eta_1) > (\rho_2 - \rho_1) g \quad (\text{C.49})$$

avec  $\Psi = \frac{H}{L}$ , la position relative du front.

La résolution de ce système d'inéquations conduit au critère suivant :

$$\nu_2 > \nu_1 \quad (\text{C.50})$$

Il est important de remarquer que ce critère est indépendant de  $\Psi$ .

#### C.4.5 Explication physique du phénomène

Nous allons donner ici une explication sur le phénomène observé. Tout d'abord, prenons l'exemple d'une couche d'huile chutant, seul, sous l'effet de son propre poids dans une cellule

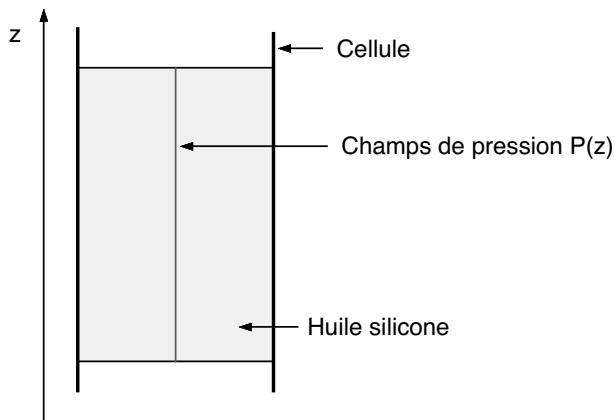


FIG. C.19 – Champs de pression pour un fluide seul.

de Hele-Shaw ouverte, c'est à dire pression identique dans le haut et le bas de la cellule. Nous indiquons sur la figure C.19 le champs de pression à l'intérieur du fluide.

Prenons maintenant l'exemple de deux fluides superposés dans ces mêmes conditions. Le dessin sur la figure C.20 représente le champs de pression pour  $\nu_2 > \nu_1$ . Cette fois

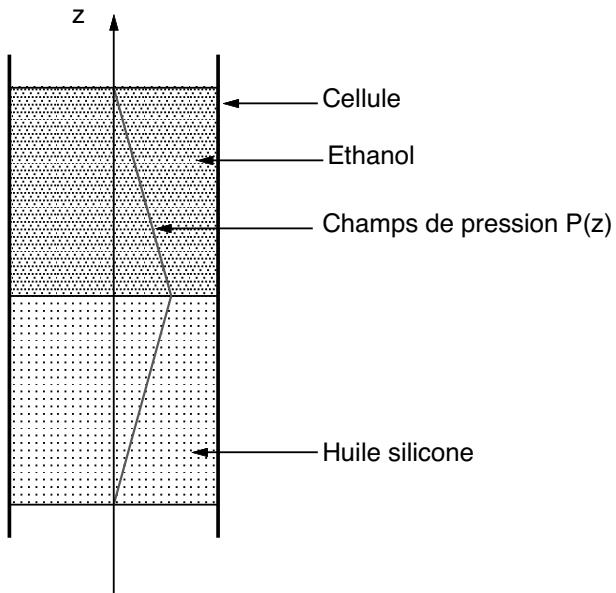


FIG. C.20 – Champs de pression dans le cas de deux fluides superposés.

il existe un gradient de pression à l'intérieur de chaque fluide. Pour que l'instabilité de Saffman-Taylor se déclenche, il faut que le fluide "poussé" ait un gradient de pression négatif de sorte que le fluide "pousseur" puisse explorer les zones de pression plus basse : c'est la condition de croissance des doigts.

### C.4.6 Taux de croissance maximal

Si le critère de l'instabilité est réalisé, alors le taux de croissance admet un maximum. Il n'est pas très difficile de montrer que la longueur d'onde pour laquelle  $S$  admet un maximum s'exprime comme suit :

$$\lambda_m = 2\pi\sqrt{3} \sqrt{\frac{\sigma}{2A(\eta_2 - \eta_1) - (\rho_2 - \rho_1)g}} \quad (\text{C.51})$$

et que le taux de croissance associé vaut :

$$S_m = \frac{2\sqrt{3}}{9} \frac{e^2}{(\eta_1 + \eta_2)\sqrt{\sigma}} \left( \frac{g(\rho_1\Psi + \rho_2(1 - \Psi))(\eta_2 - \eta_1)}{\eta_1\Psi + \eta_2(1 - \Psi)} - (\rho_2 - \rho_1)g \right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{C.52})$$

### C.4.7 Adimensionnement des résultats

Après avoir déterminé théoriquement les valeurs du taux de croissance et de la longueur d'onde du mode sélectionné, nous nous sommes intéressés à l'adimensionnement des résultats expérimentaux obtenus.

#### Longueur d'onde

Cherchons à expliciter les dépendances de la longueur d'onde en fonction des différents paramètres. Pour cela il nous faut reprendre l'expression de l'équation C.51 :

$$\lambda_m \sim \sqrt{\frac{\sigma}{2A(\eta_2 - \eta_1) - (\rho_2 - \rho_1)g}} \quad (\text{C.53})$$

Pour cela, cherchons les quantités dimensionnées que nous connaissons. Nous avons la vitesse de descente du front :

$$v_0 = \frac{ge^2}{12\nu_{eff}} = ge^2 \left( \frac{\rho_1\Psi + \rho_2(1 - \Psi)}{\eta_1\Psi + \eta_2(1 - \Psi)} \right) \quad (\text{C.54})$$

et la longueur d'onde de coupure de l'instabilité de Saffman-Taylor classique :

$$a_s = \sqrt{\frac{\sigma}{(\alpha_2 - \alpha_1)v_0}} = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma(\eta_1\Psi + \eta_2(1 - \Psi))}{g(\eta_2 - \eta_1)(\rho_1\Psi + \rho_2(1 - \Psi))}} \quad (\text{C.55})$$

Avec  $\nu_{eff}$  la viscosité efficace. Nous en donnons une définition dans l'équation C.60. En posant  $\rho = \frac{\rho_2}{\rho_1}$  et  $\eta = \frac{\eta_2}{\eta_1}$ , on aboutit à l'expression suivante :

$$\lambda_m = 2\pi\sqrt{3}a_s \left[ 1 - \frac{(\rho - 1)}{(\eta - 1)} \frac{(\Psi + \eta(1 - \Psi))}{(\Psi + \rho(1 - \Psi))} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{C.56})$$

Nous avons donc entrepris de représenter la longueur d'onde adimensionnée  $\lambda^* = \frac{\lambda_m}{a_s}$  en fonction du rapport  $\Psi$ . Les résultats sont présentés sur la figure C.21.

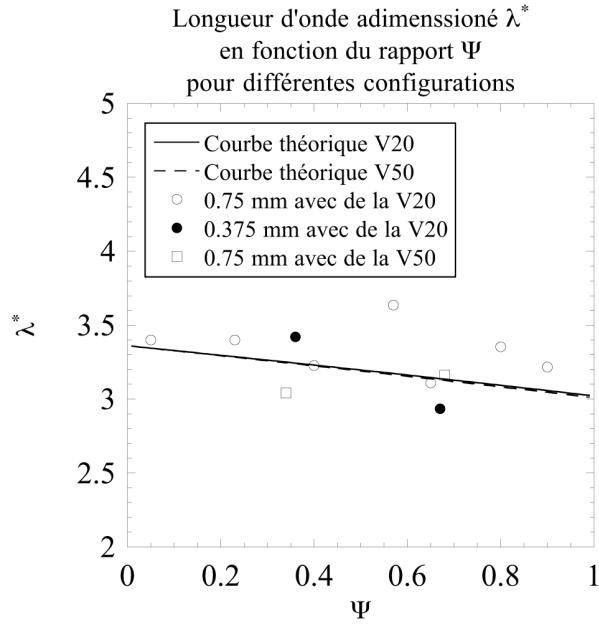


FIG. C.21 – Longueurs d'onde adimensionnées.

En trait plein, nous avons représenté les courbes théoriques simple et en trait pointillé les mêmes courbes théorique multiplié par un facteur 2. Nous constatons que tout nos points expérimentaux sont autour des courbes en pointillé, cela signifie donc que nous avons bien le double de la longueur d'onde du monde le plus amplifié. Insistons là encore sur la valeur qui à priori est marginale. Cette valeur correspond à une expérience dont le mode selectioné est le plus amplifié, ce point est donc à comparer avec les courbe théorique en trait plein. Nous pouvons voir, qu'elle est en bon accord avec elle.

Remarquons aussi la faible dépendance de la viscosité sur la longueur d'onde. Le faible écart entre les courbes théorique et l'incertitude de nos mesures ne permettent pas la séparation des cas.

### Taux de croissance

Cherchons à présent à expliciter la dépendance du taux de croissance avec les différents paramètres de contrôle. Pour cela reprenons l'expression du taux de croissance maximal donné dans l'équation C.52 :

$$S_m \sim \frac{e^2}{(\eta_1 + \eta_2) \sqrt{\sigma}} \left( \frac{g (\rho_1 \Psi + \rho_2 (1 - \Psi)) (\eta_2 - \eta_1)}{\eta_1 \Psi + \eta_2 (1 - \Psi)} - (\rho_2 - \rho_1) g \right)^{\frac{3}{2}} \quad (\text{C.57})$$

en utilisant l'expression de la vitesse de descente  $v_0$  et de la longueur d'onde de Saffman  $a_s$  (équation C.54 et C.55), on trouve après quelques arrangements :

$$S_m = \frac{4 \pi \sqrt{3}}{9} \frac{v_0}{a_s} \left( \frac{\eta - 1}{\rho - 1} \right) \left[ 1 - \frac{(\rho - 1)}{(\eta - 1)} \frac{(\Psi + \eta (1 - \Psi))}{(\Psi + \rho (1 - \Psi))} \right]^{\frac{3}{2}} \quad (\text{C.58})$$

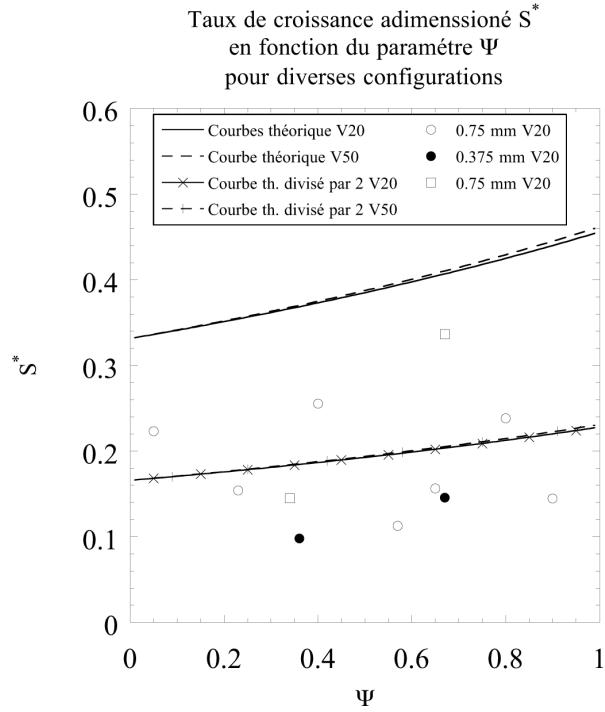


FIG. C.22 – Taux de croissance adimensionnés. Les symboles représentent nos mesures adimensionnées. Les lignes pleines symbolisent  $S_{max}$  adimensionné, et en pointillé sa valeur divisé par deux pour deux viscosité différentes.

Les résultats présentés sur la figure C.22 montrent le taux de croissance adimensionné en fonction du rapport  $\Psi$ . Les droites représentent les courbes théoriques pour les différentes configurations. Nous avons aussi représenté ces mêmes courbes divisées par un facteur car nous nous sommes apprécier que le taux de croissance observé correspondait à la moitié du taux de croissance maximal. Là aussi nous pouvons observer que les points expérimentaux restent regroupés autour des courbes théoriques divisées par un facteur 2, ce qui confirme nos premières constatations. Nous remarquons que l'effet de la viscosité est bien plus visible sur le taux de croissance que sur la longueur d'onde. Toutefois la grande incertitude sur nos mesures ne permettent pas à encore de distinguer les deux régimes.

## C.5 Universalité de l'instabilité

Maintenant que nous avons explicité les dépendances aux paramètres et trouvé un adimensionnement adéquat, nous voulons savoir si l'instabilité a un comportement universelle. Le résultat est présenté sur la figure C.23. Nous exprimons l'évolution de l'instabilité

en fonction du temps. Nous adimensionnons le temps comme suit :

$$S \left( t - \frac{e^2}{\nu_{eff}} \right) \quad (C.59)$$

car nous avons vu que l'instabilité se déclenche après un certain temps  $\tau_i$ . Or ce temps fait apparaître la viscosité cinématique. Dans notre problème nous avons deux fluides en présence, il s'agit donc d'une viscosité apparente qui s'exprime ainsi :

$$\nu_{eff} = \frac{\eta_1 \Psi + \eta_2 (1 - \Psi)}{\rho_1 \Psi + \rho_2 (1 - \Psi)} \quad (C.60)$$

Nous constatons que toutes les courbes sont centrées autour de zéro et ont la même pente. Ceci signifie que le temps  $\tau_i = \frac{e^2}{\nu_{eff}}$  est le bon temps pour caractériser le début de l'instabilité. En outre le fait que toutes les courbes ont les mêmes pentes prouve que la physique du problème dans ces unités est indépendante des conditions du système.

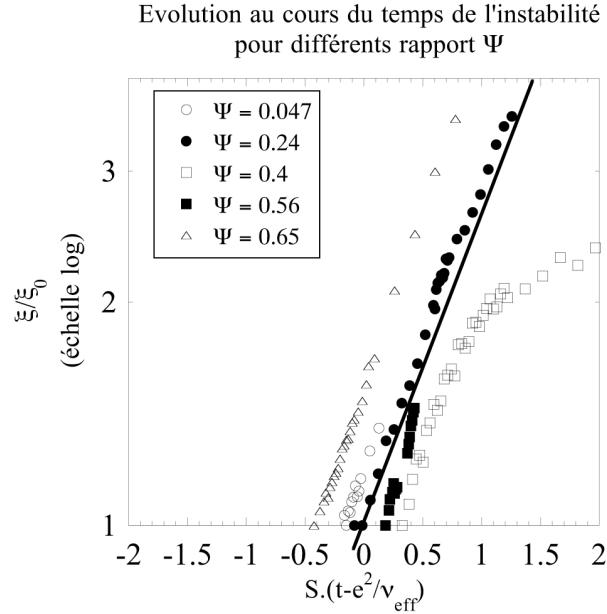


FIG. C.23 – Evolution au cours du temps de l'instabilité pour différentes valeurs de  $\Psi$ .



## Annexe D

### Tube de Pitot

Le tube de Pitot permet de mesurer la vitesse d'un écoulement en utilisant la loi de Bernoulli. Le tube de Pitot est représenté schématiquement sur la figure D.1 ; il se compose d'un tube de section circulaire dont l'extrémité est profilée. Deux trous sont percés dans le tube pour mesurer la pression d'une part sur le nez du tube et d'autre part sur le corps du tube. Les deux prises de pression sont reliées à un manomètre différentiel.

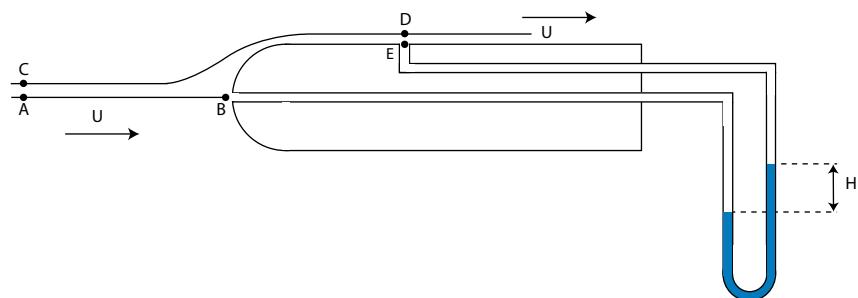


FIG. D.1 – Schéma de principe d'un tube de Pitot.

## D.1 Ecoulement laminaire

Nous supposons que l'écoulement loin du tube est uniforme avec une vitesse  $U$  et que l'axe du tube est parallèle à  $U$ . Pour des raisons de symétrie, il existe une ligne de courant confondu avec l'axe du tube qui se termine au point B. Ce point B est appelé point de stagnation, la vitesse du fluide est nulle, même dans l'hypothèse où le fluide est parfait. Appliquons la loi de Bernoulli entre le point A, situé loin en amont du tube et où la vitesse est égale à  $U$ , et le point B où la vitesse est nulle :

$$P_A - \rho_g g z_A + \rho_g \frac{U^2}{2} = P_B - \rho_g g z_B \quad (\text{D.1})$$

Or, ici  $z_A$  est égal à  $z_B$ , ce qui réduit l'égalité à :

$$P_A + \rho_g \frac{U^2}{2} = P_B \quad (\text{D.2})$$

La pression de stagnation au point B est supérieure à la pression qui règne au sein de l'écoulement. La différence est la quantité  $\rho_g \frac{U^2}{2}$  que l'on nomme *pression dynamique*. Autour du point A, l'écoulement n'est pas perturbé par le tube. Par conséquent, les lignes de courant sont parallèles. De plus, les pressions aux points A et C sont identiques (on néglige les effets de l'hydrostatique, car les différences de hauteur sont très faibles) :  $P_A = P_C$ . Comme l'extrémité du tube est profilé, l'écoulement est peu perturbé et donc les lignes de courant restent parallèles à l'écoulement. Nous pouvons donc appliquer de nouveau la loi de Bernoulli entre les points C et D :

$$P_C + \rho_g \frac{U^2}{2} = P_D + \rho_g \frac{U^2}{2} \quad (\text{D.3})$$

Le point E est situé sur le tube. Pour les mêmes raisons qu'entre les points A et C, les pressions en D et E sont identiques :  $P_D = P_E$ . Par conséquent le manomètre différentiel mesure la différence de pression entre les points B et E :

$$P_B - P_E = P_A + \rho_g \frac{U^2}{2} - P_D = P_A + \rho_g \frac{U^2}{2} - P_C = P_A + \rho_g \frac{U^2}{2} - P_A = \rho_g \frac{U^2}{2} \quad (\text{D.4})$$

d'où :

$$\Delta P = P_B - P_E = \rho_g \frac{U^2}{2} \quad (\text{D.5})$$

Le manomètre différentiel mesure une différence de pression qui est directement relié à la vitesse du fluide. En effet, on applique la loi de l'hydrostatique pour relier  $\Delta P$  avec la différence de hauteur  $H$  dans le tube en U.

$$\Delta P = \rho_l g H \quad (\text{D.6})$$

D'où une relation donnant  $U$  en fonction de  $H$  :

$$U = \sqrt{2 \frac{\rho_l}{\rho_g} g H} \quad (\text{D.7})$$

L'unité généralement utilisée pour des mesures dans l'air est le millimètre d'eau  $\text{mm}_{H_2O}$ . En prenant  $1000 \text{ kg.m}^{-3}$  pour la masse volumique de l'eau,  $1.2 \text{ kg.m}^{-3}$  pour la masse volumique de l'air,  $9.81 \text{ m.s}^{-2}$  pour  $g$  et en explicitant  $H$  en millimètre, on obtient la formule suivante :

$$U \approx 4.04 \sqrt{H} \quad (\text{D.8})$$

## D.2 Ecoulement turbulent

Une façon de modéliser un écoulement turbulent est de décomposer la vitesse instantanée en deux vitesses :

$$U = \bar{U} + U' \quad (\text{D.9})$$

Avec  $\bar{U}$  la vitesse moyenne de l'écoulement et  $U'$  une vitesse chaotique à moyenne nulle :  $\bar{U}' = 0$ .

La vitesse que l'on mesure avec le tube de Pitot est une moyenne du carré de la vitesse  $U^2$ . En décomposant la vitesse :

$$\bar{U}^2 = (\bar{U})^2 + 2\bar{U}\bar{U}' + \bar{U}'^2 \quad (\text{D.10})$$

Or, la moyenne d'un produit est égale au produit des moyennes :

$$\bar{U}\bar{U}' = \bar{U}\bar{U}' \quad (\text{D.11})$$

Or, par définition, la moyenne de la composante turbulente de la vitesse est nulle. Le terme croisé est donc nul. Nous obtenons alors comme mesure de la vitesse :

$$\bar{U}^2 = (\bar{U})^2 + \bar{U}'^2 = (\bar{U})^2 \left( 1 + \frac{\bar{U}'^2}{\bar{U}^2} \right) \quad (\text{D.12})$$

Le dernier terme est aussi appelé intensité turbulente.



# Bibliographie

- [1] D. A. Aboav. The arrangement of cells in a net. *Metallography*, (13) :43–58, 1980. [150](#), [170](#)
- [2] A. Antkoviak, N. Bremond, S. Le Dizès, and E. Villermaux. Short-term dynamics of a density interface following an impact. *J. Fluid Mech.*, 577 :241–250, 2007. [98](#)
- [3] S. Bakshi, I. V. Roisman, and C. Tropea. Investigations on the impact of a drop onto a small spherical target. *Phys. Fluids*, 19, 2007. [96](#)
- [4] C. W. J. Beenakker. Evolution of a two dimensional soap-film networks. *Phys. Rev. Lett.*, 57(19) :2454–2457, November 1986. [173](#)
- [5] C. W. J. Beenakker. Numerical simulation of diffusion-controlled droplet growth : dynamical correlation effects. *Phys. Rev. A*, 33(6), June 1986. [151](#)
- [6] C. W. J. Beenakker. Numerical simulation of a coarsening two-dimensional network. *Phys. Rev. A*, 37(5) :1697–1702, March 1988. [152](#)
- [7] D. Bensimon and al. Viscous flow in two dimensions. *Reviews of Modern Physics*, 58(4) :977–999, October 1986. [20](#), [203](#), [211](#)
- [8] W. A. Bentley. Studies of raindrops and raindrop phenomena. *Monthly Weather Review*, 32(10) :450–456, October 1904. [9](#), [60](#)
- [9] A. Bertozzi and M. P. Brenner. Linear stability and transient growth in driven contact lines. *Phys. Fluids*, 9(3) :530–539, March 1997. [16](#)
- [10] J. Bico and D. Quéré. Falling slugs. *J. Colloid Interface Sci.*, (243) :262–264, 2001. [19](#), [26](#)
- [11] N. Bremond. *Stabilité et atomisation des nappes liquides*. PhD thesis, Université de Provence - Aix-Marseille I, October 2003. [11](#)
- [12] N. Bremond and E. Villermaux. Bursting thin liquid film. *J. Fluid Mech.*, 524 :121–130, 2005. [11](#), [36](#), [40](#), [184](#)
- [13] F. P. Bretherton. The motion of long bubbles in tubes. *J. Fluid Mech.*, 10 :166–188, 1961. [23](#)

- [14] H.S. Carslaw and J.C. Jaeger. *Conduction of Heat in Solids*. Oxford Science Publication, 1986. [204](#), [205](#)
- [15] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. New York, Dover publication, 1961. [31](#)
- [16] W.-H. Chou and G. M. Faeth. Temporal properties of secondary drop breakup in the bag breakup regime. *Int. J. Multiphase Flow*, 24 :890–912, 1998. [60](#), [81](#)
- [17] W.-H. Chou, L.-P. Hsiang, and G. M. Faeth. Temporal properties of drop breakup in the shear breakup regime. *Int. J. Multiphase Flow*, 23(4) :651–669, 1997. [60](#)
- [18] C. Clanet and E. Villermaux. Life of a smooth liquid sheet. *J. Fluid Mech.*, 462 :307–340, 2002. [108](#)
- [19] F. E. C. Culick. Comments on a ruptured soap film. *J. Appl. Phys.*, 31 :1128, 1960. [104](#), [182](#)
- [20] Z. Dai and G. M. Faeth. Temporal properties of secondary drop breakup in the multimode breakup regime. *Int. J. Multiphase Flow*, 27 :217–236, 2001. [60](#)
- [21] H. Darcy. *Fontaine publique de la ville de Dijon*. Librairie des corps impériaux des Ponts et Chaussées et des Mines, 1856. [32](#)
- [22] M. de Icaza and A. Jiménez-Ceniceros. Statistical distribution functions in 2d foams. *J. Appl. Phys.*, 76(11) :7317–7321, December 1994. [152](#)
- [23] D. J. Durian, D. A. Weitz, and D. J. Pine. Scaling behavior in shaving cream. *Phys. Rev. A*, 44(12) :7902–7905, December 1991. [144](#), [148](#)
- [24] H. Flyvbjerg. Model for coarsening froths and foams. *Phys. Rev. E*, 47(6) :4037–4054, June 1993. [152](#), [172](#), [173](#)
- [25] V. E. Fradkov, L. S. Shindlerman, and D. G. Udler. Computer simulation of grain growth in two dimensions. *Scripta Met.*, 19 :1285–1290, 1985. [152](#), [172](#), [173](#)
- [26] J. A. Glazier. Coarsening in two-dimensional soap froth and the large-q potts model : a detailed comparison. *Philos. Mag. B*, 62(6) :615–645, 1990. [152](#), [172](#), [173](#)
- [27] J. A. Glazier, S. P. Gross, and J. Stavans. Dynamics of two-dimensional soap froths. *Phys. Rev. A*, 36(1) :306–312, July 1987. [144](#), [168](#), [173](#)
- [28] A. R. Hanson, E. G. Domich, and H. S. Adamst. Shock tube investigation of the breakup of drops by air blast. *The Physics of Fluids*, 6(8) :1070–1080, August 1963. [60](#), [68](#)
- [29] R. L. Hoffman. A study of the advancing interface. *J. Colloid Interface Sci.*, 50(2) :228–241, February 1975. [25](#)

- [30] A. E. Hosoi and L. Mahadevan. Axial insability of a free-surface front in a partially filled horizontal rotating cylinder. *Phys. Fluids*, 11(1) :97–106, January 1999. [16](#)
- [31] P. Petitjeans J. Fernandez, P. Kurowski and E. Meiburg. Density-driven unstable flows of miscible fluids in hele-shaw cell. *J. Fluid Mech.*, 451 :239–260, 2002. [207](#), [210](#)
- [32] Y. Jiang, C. M. Mombach, and J. A. Glazier. Grain growth from homogeneous initial conditions : anomalous grain growth and special scaling states. *Phys. Rev. E*, 52(4), October 1995. [172](#)
- [33] K. Kawasaki, T. Nagai, and K. Nakashima. Vertex models for two-dimensional grain growth. *Philos. Mag. B*, 60(3) :399–421, 1989. [152](#), [172](#)
- [34] J. B. Keller and I. Kolodner. Instability of liquid surfaces and the formation of drops. *J. Appl. Mech.*, 25(7) :918–921, July 1954. [184](#)
- [35] L. Kondic. Instabilities in gravity driven flow of thin fluid films. *SIAM Review*, 45(1) :95–115, 2003. [15](#), [16](#)
- [36] L. Kondic and J. Diez. instabilities in the flow of thin films on heterogeneous surfaces. *Phys. Fluids*, 16(9) :3341–3360, September 2004. [16](#)
- [37] P. Lenard. Rain. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 31 :62–73, 1905. Translated of "Über Regen" from the Meteorologische Zeitschrift, June 1904 by Dr. R. H. Scott. [60](#)
- [38] F. T. Lewis. The correlation between cell division and the shapes and sizes of prismatic cells in the epidermis of cucumis. *Anat. Rec.*, 38(3) :341–376, 1926. [172](#)
- [39] L. Limat. Instabilité d'un liquide suspendu sous un surplomb solide : influence de l'épaisseur de la couche. *C.R. Acad. Sci., série II*, 317 :563–568, 1993. [28](#), [184](#)
- [40] M. Marder. Soap-bubble growth. *Phys. Rev. A*, 36(1) :438–440, July 1987. [173](#)
- [41] P. Marmottant. *Atomisation d'un liquide par un courant gazeux*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 2001. [11](#), [133](#), [187](#), [190](#)
- [42] P. Marmottant and E. Villermaux. Fragmentation of stretched liquid ligaments. *Phys. Fluids*, 16(8) :2732–2741, August 2004. [54](#), [56](#)
- [43] P. Marmottant and E. Villermaux. On spray formation. *J. Fluid Mech.*, 498 :73–111, 2004. [133](#)
- [44] J. S. Marshall and W. McK. Palmer. The distribution of raindrops with size. *Journal of Meteorology*, 5 :165–166, August 1948. [60](#), [80](#), [88](#)
- [45] S. J. Mejía-Rosales, R. Gámez-Corrales, and B. I. I. Ruiz-García. Evolutin of a colloidal soap-froth structure. *Physica A*, 276 :30–49, 2000. [168](#), [173](#)

- [46] J. L. M. Poiseuille. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres ; i. influence de la pression sur la quantité de liquide qui traverse les tubes de très petits diamètres. *C.R. Acad. Sci.*, (11) :961–67, 1840. [19](#)
- [47] J. L. M. Poiseuille. Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides dans les tubes de très petits diamètres ; ii. influence de la longueur sur la quantité de liquide qui traverse les tubes de très petits diamètres ; iii. influence du diamètre sur la quantité de liquide qui traverse les tubes de très petits diamètres. *C.R. Acad. Sci.*, (11) :1041–48, 1840. [19](#)
- [48] A. A. Ranger and J. A. Nicholls. Aerodynamic shattering of liquid drops. *AIAA Journal*, 7(2) :285–290, 1969. [77](#)
- [49] L. Rayleigh. Investigation of the character of the equilibrium of an incompressible heavy fluid of variable density. *Proc. R. Soc. Lond.*, 14 :170–177, 1883. [11](#), [184](#)
- [50] N. Rivier. Structure of random cellular networks. *Philos. Mag. B*, 52(3) :795–819, 1985. [152](#)
- [51] A. Rozhkov, B. Prunet-Foch, and M. Vignes-Adler. Impact of water drops on small targets. *Phys. Fluids*, 14(10) :3485–3501, October 2002. [96](#), [110](#)
- [52] P. G. Saffman and Sir G. Taylor. The penetration of a fluid into a porous medium or hele-shaw cell containing a more viscous liquid. *Proc. R. Soc. London*, pages 245–312, 1958. [195](#), [207](#)
- [53] H. S. S. Hele Shaw. The flow of water. *Nature*, 58(1489) :34–36, May 1898. [17](#)
- [54] H. S. S. Hele Shaw. Investigation of the nature of surface resistance of water and of stream-line motion under certain experimental conditions. *Transaction of the Institution of Naval Architects*, pages 21–46, 1898. [17](#)
- [55] H. S. S. Hele Shaw. Experimental investigation of a thin film of viscous fluid. *Report of the 68th meeting of the British Association for the Advancement of Science*, page 136, 1899. [17](#)
- [56] C. S. Smith. Grain shapes and other metallurgical applications of topology. In *Metal interfaces*, pages 65–113. American Society for Metals, 1952. [148](#)
- [57] M. A. Spaid and G. M. Homsy. Stability of newtonian and viscoelastic dynamic contact lines. *Phys. Fluids*, 8(2) :460–478, February 1996. [16](#)
- [58] R. C. Srivastava. Size distribution of raindrops generated by their breakup and coalescence. *J. Atmos. Sci.*, 28 :410–415, April 1971. [60](#), [80](#)
- [59] J. Stavans. Temporal evolution of two-dimensional drained soap froths. *Phys. Rev. A*, 42(8) :5049–5051, october 1990. [144](#), [148](#), [152](#)

- [60] J. Stavans and J. A. Glazier. Soap froth revisited : Dynamic scaling in the two-dimensional froth. *Phys. Rev. Lett.*, 62(11) :1318–1321, March 1989. [144](#)
- [61] K. J. Stine, S. A. Rauseo, B. G. Moore, J. A. Wise, and C. M. Knobler. Evolution of foam structures in langmuir monolayers of pentadecanoic acid. *Phys. Rev. A*, (12), June 1990. [152](#), [172](#), [173](#)
- [62] W. Y. Tam. Cell movements in two-dimensional soap froth. *Physica A*, 288 :363–368, 2000. [144](#)
- [63] W. Y. Tam, K. M. Cheung, and K. Y. Szeto. Ancestral cells in two-dimensional soap froth. *Phys. Rev. E*, 57(6) :7354–7357, June 1998. [144](#)
- [64] W. Y. Tam, R. Zeitak, K. Y. Szeto, and J. Stavans. First-passage exponent in two-dimensional soap froth. *Phys. Rev. Lett.*, 78(8), February 1997. [144](#)
- [65] L. H. Tanner. the spreading of silicone oil drops on horizontal surfaces. *J. Phys. D : Appl. Phys.*, 12 :1473–1484, 1979. [21](#), [23](#), [25](#)
- [66] Taylor and Francis. *Handbook of Chemistry and Physics*, 86th ed. CRC Press, 2005–2006. [166](#)
- [67] G. I. Taylor. The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes. i. *Proc. R. Soc.*, 201(A) :192–196, 1950. [11](#), [184](#)
- [68] G. I. Taylor. The dynamics of liquid sheets of fluid. iii disintegration of fluid sheets. *Proc. R. Soc. lond.*, 253 :313–321, 1959b. [104](#), [182](#)
- [69] S. M. Troian, E. Herbolzheimer, S. A. Safran, and J. F. Joanny. Fingering instabilities of driven spreading films. *Europhys. Lett.*, 10(1) :25–30, September 1989. [16](#)
- [70] A. van Doorn and S. Hilgenfeldt. Measuring film thickness using bubble geometry. (*preprint*), 2006. [142](#)
- [71] N. Vandewalle and J. F. Lentz. Cascades of popping bubbles along air/foam interfaces. *Phys. Rev. E*, 64, 2001. [172](#)
- [72] I. F. Vasconcelos, I. Cantat, and J. A. Glazier. Dynamics and topological aspects of a reconstructed two-dimensional foam time series using potts model on a pinned lattice. *J. Comp. Phys.*, 192 :1–20, 2003. [152](#), [168](#)
- [73] E. Villermaux. Cours sur les instabilités en hydrodynamique, 2002. [211](#)
- [74] E. Villermaux, P. Marmottant, and J. Duplat. Ligament-mediated spray formation. *Phys. Rev. Lett.*, 92(7), February 2004. [54](#), [133](#)
- [75] J. von Neumann. In *Metal Interfaces*, page 108, Ohio, 1952. American Society for Metals. [162](#)

- [76] Denis Weaire and Stefan Hutzler. *The physics of foams*. Oxford, 1999. [140](#)
- [77] A. L. Yarin. Drop impact dynamics : splashing, spreading, receding, boucing... *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 38 :159–192, 2006. [95](#)



---

## Resumé

La déstabilisation et la fragmentation de systèmes liquides en couches minces se rencontrent fréquemment dans la nature, ainsi que dans des contextes industriels. Cette étude expérimentale entreprend de décrire, comprendre et prévoir les mécanismes des instabilités et de formation des fragments liquides.

Une première étude concerne la brisure d'une fine bandelette liquide chutant librement dans une cellule de Hele-Shaw. Les lignes de contact mobiles introduisent des pressions différentes au niveau des interfaces et établissent un gradient de pression dans le fluide, favorisant ainsi sa déstabilisation. Une analyse de stabilité linéaire prédit correctement les taux de croissance et montre l'existence d'un plateau sur la relation de dispersion.

Une seconde étude analyse la déformation et la brisure d'une goutte liquide au sein d'un jet gazeux. Nous montrons que la déformation se produit à partir d'un certain nombre de Weber critique et nous proposons un modèle sur la formation et le gonflement du sac qui s'en suit, également appelé *bag-breakup*.

Une troisième étude concerne l'impact d'une goutte sur un solide de taille comparable. Nous montrons que la goutte se déforme pour former une nappe liquide entourée d'un bourrelet. Nous montrons que l'extension de la nappe dépend du nombre de Weber contrairement à sa dynamique. Nous proposons également un modèle qui prédit correctement la taille de la nappe ainsi que la taille des fragments obtenus.

Une quatrième étude est dédiée au phénomène de vieillissement des mousses. Nous exposons un nouveau dispositif expérimental de soufflerie à mousse. Nous donnons une comparaison entre les systèmes expérimentaux classiques et notre dispositif. Nous montrant également une preuve expérimentale de la loi de von Neumann.

---

## Fluids fragmentation and coalescence

---

### Abstract

The destabilisation and fragmentation of liquid systems into thin layers frequently occur in many natural as well as industrial processes. This experimental study is devoted to the description, understanding and to the prediction of the mechanisms of instabilities and drop formation.

The first study deals with the fragmentation of a thin fluid layer which freely falls into a Hele-Shaw cell. Mobile contact angles induce different pressures at the interface level and then induce a pressure gradient within the fluid, which favours instability. A linear stability analysis correctly predicts the growth rates and shows the existence of a plateau in the dispersion relation.

The second one is an analysis of drop deformation and break-up within a jet flow. We show that deformation occurs for a particular critical Weber number. We offer a model for the description of the formation and of the ensuing growth of the bag, called *bag-breakup*.

The third study is about the impact of a drop on a solid of comparable size. We show that the drop gets deform into a liquid sheet surrounded by a rim. We show how the development of the liquid sheet depends on the critical Weber number contrary to its dynamical evolution. We offer a model which correctly predicts the sheet size as well as that of the resulting drops.

A fourth study is devoted to foam coarsening. We show a new experimental device of foam wind tunnel. We compare the traditional experimental devices with ours. We also show an experimental evidence of von Neumann's law.

---

### Spécialité

Systèmes complexes

---

### Mots-clés

atomisation, gouttes, instabilité en couches minces, mousses, mûrissement

---

**Institut de Recherche sur les Phénomènes Hors Equilibre**  
**BP 146, Technopôle de Château-Gombert 13384 MARSEILLE Cedex 13**