Les raisonnements

Sommaire

Dans le chapitre précédent, j'ai proposé une présentation des notions de logique qui sont des éléments constitutifs du langage : proposition, variable, connecteur, quantificateur. Afin de constituer une référence pour la réflexion sur l'enseignement de ces notions au lycée, j'ai combiné trois points de vue : celui de la logique mathématique, celui des pratiques langagières des mathématiciens, celui de la didactique des mathématiques.

Bien sûr, une référence pour l'enseignement de notions de logique au lycée ne peut pas s'arrêter là. Si j'ai affirmé ma volonté de réhabiliter dans cette thèse le pilier langage de la logique, et si j'ai suivi, en commençant par présenter les notions de logique en lien avec le langage, la même démarche que les auteurs des systèmes logiques étudiés dans le premier chapitre, il n'en reste pas moins que le but de la logique est d'assurer la validité des raisonnements, et qu'il n'est pas question de faire l'impasse sur ces derniers. Ce chapitre est ainsi consacré aux raisonnements. Il est cependant beaucoup moins détaillé que le précédent. En particulier, je ne présente pas de résultats de travaux didactiques sur le raisonnement (qui sont très nombreux, je renvoie aux actes de la 19$^{\text{ème}}$ étude ICMI, *Proof and Proving in mathematics education* (Hanna & De Villiers, 2011) qui constituent une synthèse récente et riche des recherches sur le sujet).

Je présente d'abord deux approches de la formalisation des démonstrations : le système axiomatique de Hilbert et Ackermann et la déduction naturelle de Gentzen, dont j'explique le fonctionnement pour les démonstrations dans le calcul des propositions.

De la même façon que dans le chapitre précédent, l'implication est l'objet d'un paragraphe spécifique : j'y reviens sur la distinction entre implication et déduction, entre vérité et validité (voir page 37 dans le premier chapitre), sur les deux règles du *modus ponens* et du *modus tollens*, inégalement institutionnalisées dans la classe de mathématiques, sur la différence entre le *démonstrateur* d'une implication (souvent le professeur, en tout cas au lycée) et l'*utilisateur* d'une implication (souvent l'élève).

J'aborde ensuite les quantificateurs en faisant le lien entre les règles d'introduction et d'élimination de la déduction naturelle et les pratiques langagières relatives aux variables dans les démonstrations courantes.

Je termine par un rapide examen des types de raisonnement présents dans les programmes : raisonnement par contre-exemple, raisonnement par contraposée, raisonnement par l'absurde, raisonnement par disjonction des cas, raisonnement par récurrence. La logique mathématique fournit une justification de leur validité, et permet d'expliquer quelques difficultés qui leur sont liées.

4.1 Formalisation des démonstrations

Formaliser les démonstrations revient à définir mathématiquement la notion de « être démontrable », avec des critères purement syntaxiques. Nous retrouvons l'idée de ramener le raisonnement à un calcul sur des signes qui était déjà le but de Leibniz (voir section 1.2.2 dans la première partie). Bien sûr, on veut que cette idée de démontrabilité préserve la vérité, c'est-à-dire que si la proposition B est démontrable à partir d'une proposition A, alors lorsque A est vraie, B est vraie [1]. La première formalisation achevée est celle de Frege (voir la section 1.3.2 dans la première partie). Elle repose sur le principe suivant : on se donne un ensemble d'axiomes logiques et des règles permettant d'en déduire d'autres « lois logiques ». Dans un tel système axiomatique, une démonstration formelle est une suite finie de propositions (écrites dans une langue formelle) telle que chaque proposition est soit un axiome, soit obtenue par l'application d'une règle de déduction à partir de propositions qui se trouvent précédemment dans la suite. La dernière proposition est la proposition à démontrer. Cette approche est ensuite développée par Whitehead et Russell, puis par Hilbert.

G. Gentzen n'est pas satisfait par de tels systèmes axiomatiques, et il veut « édifier un formalisme qui reflète le plus exactement possible les raisonnements logiques qui sont réellement utilisés dans les démonstrations mathématiques » (Gentzen, 1955, p. 17). Il propose alors un système qu'il appelle *la déduction naturelle* et dans lequel il n'y a pas d'axiomes : « la déduction naturelle ne part pas, en général, de propositions logiques fondamentales, mais d'hypothèses, auxquelles viennent se rattacher des déductions logiques. Grâce à une déduction ultérieure, le résultat est alors rendu indépendant des hypothèses [2] » (Gentzen, 1955, p. 19). Dans le système qu'il propose, les règles régissent le comportement des connecteurs et des quantificateurs. Elles sont de deux types : les règles d'introduction et les règles d'élimination.

Dans la suite, je vais présenter le système de Hilbert et Ackermann (exposé dans *Grundzüge der theoretischen Logik*, 1928) pour le calcul des propositions et la déduction naturelle de Gentzen (exposée dans *Recherches sur la déduction logique*, 1934) pour le calcul des propositions et des prédicats.

On peut trouver une présentation relativement simple (parfois d'ailleurs un peu trop simplifiée) de ces deux systèmes dans le livre *Logique et raisonnement* de M. Freund (Freund, 2011), et une présentation plus approfondie dans *Logique. Méthodes pour l'informatique fondamentale* de P. Gochet et P. Gribomont (Gochet & Gribomont, 1990).

1. J'utilise ici un vocabulaire, et notamment une notion de vérité, très informels. Ceci peut être précisé avec les notions de conséquence sémantique et conséquence syntaxique (voir annexe A page 453), et le théorème de complétude (voir annexe A page 453).

2. Nous verrons une illustration de ce principe avec la règle d'introduction de l'implication page 158.

Comme dans le chapitre précédent, le but ici n'est pas de faire une présentation théorique, mais de mettre ces systèmes formels en relation avec les pratiques, notamment langagières, utilisées en mathématiques pour la rédaction des démonstrations.

J'utiliserai dans ce qui suit les symboles $\wedge$, $\vee$ et $\neg$ respectivement pour les connecteurs ET, OU et NON.

4.2 Preuves dans le calcul des propositions

Je rappelle que le calcul des propositions est l'étude des propositions formées à partir de variables propositionnelles et des connecteurs.

Dans un système axiomatique, on isole dans ces propositions un sous-ensemble d'*axiomes*, qui sont des tautologies [3]. À partir de ces axiomes et de *règles d'inférence*, on démontre des *théorèmes*.

La déduction naturelle cherche à être plus proche du raisonnement naturel. Elle ne fonctionne qu'avec des règles, mais qui sont de nature plus générale que celles que l'on utilise dans les systèmes à la Hilbert, qui n'agissent que sur des propositions : les règles de la déduction naturelle agissent sur les démonstrations.

Une démonstration est un objet que l'on peut voir comme un texte composé de propositions et de règles, mais il n'est pas nécessaire de définir explicitement cet objet. Le tout est de savoir qu'une démonstration possède des hypothèses : une suite finie de propositions, et une conclusion : une seule proposition. Une règle de déduction permet de construire une nouvelle démonstration à partir d'autres démonstrations. Une règle prend ainsi en argument des démonstrations, que l'on peut voir comme des textes déjà écrits, en ne tenant compte que de la conclusion et des hypothèses de ces démonstrations. C'est à partir de ces démonstrations que la règle permet de poursuivre en produisant une nouvelle démonstration, avec toujours une nouvelle conclusion, et éventuellement une modification de la liste des hypothèses.

On indique dans ce qui suit comment représenter graphiquement une démonstration : cette représentation donne à voir les règles qui ont permis, à partir des démonstrations élémentaires, d'arriver à la démonstration.

La démonstration la plus simple possible est celle qui est constituée d'une seule proposition A : celle-ci est à la fois hypothèse et conclusion. C'est la démonstration de A sous hypothèse A, la démonstration la plus élémentaire que l'on puisse imaginer. De telles démonstrations sont trop élémentaires pour être explicites dans les démonstrations « réelles »

3. Propositions toujours vraies, quelles que soient les valeurs de vérité des variables propositionnelles qui y sont présentes.

des mathématiques. Toutes les démonstrations sont constituées de ces démonstrations élémentaires combinées à l'aide de règles.

Les règles les plus simples n'agissent que sur les conclusions des démonstrations. On les représente habituellement de la façon suivante : une suite finie de propositions, qui sont les conclusions des démonstrations en argument, séparées par un trait horizontal d'une autre proposition, qui est la conclusion de la nouvelle démonstration :

$$\frac{H_1, H_2}{C}$$

On pourra lire cette règle de plusieurs façons :
– pour prouver C il suffit de prouver H_1 et de prouver H_2 ;
– si j'ai prouvé H_1 et H_2 alors j'ai prouvé C ;
Et on pourra dire quand on utilise cette règle : « on a H_1, on a H_2, on a donc C ».

Dans ce cas particulier les hypothèses de la nouvelle démonstration sont inchangées, au sens ou ce sont les mêmes s'il n'y a qu'un argument, la mise bout à bout des deux suites d'hypothèses s'il y en a deux, etc.

Pour chaque connecteur ou quantificateur on donne une règle dite d'introduction, qui donne la facon « standard » de prouver une formule construite avec ce connecteur ou quantificateur, et une règle dite d'élimination qui donne la facon « standard » d'utiliser une telle formule. Voyons l'exemple simple des règles de la conjonction :
– règle d'introduction de la conjonction :

$$\frac{P, \quad Q}{P \wedge Q}$$

Elle affirme que pour prouver $P \wedge Q$ il suffit de prouver P et de prouver Q.
– règles d'élimination de la conjonction :

à droite	à gauche
$\frac{P \wedge Q}{Q}$	$\frac{P \wedge Q}{P}$

Elles affirment que si l'on a prouvé $P \wedge Q$, on a prouvé P et on a prouvé Q.
La règle d'élimination de l'implication est encore de la même nature, et est tout à fait analogue à la règle du *modus ponens* des systèmes à la Hilbert :

$$\frac{P, P \Rightarrow Q}{Q}$$

Par contre la règle d'introduction de l'implication est de nature plus générale, car elle agit également sur les hypothèses de la démonstration en argument [4]. C'est la représentation de la règle de démonstration usuelle « pour montrer $P \Rightarrow Q$, il suffit de montrer Q sous hypothèse P ».

4. Cette règle correspond à un lemme que l'on a besoin de démontrer quand on manipule les systèmes à la Hilbert, appelé « lemme de déduction ».

La règle d'introduction de l'implication prend donc comme argument une démonstration de Q qui peut utiliser P parmi ses hypothèses [5], et renvoie une démonstration de $P \Rightarrow Q$ dans laquelle l'hypothèse P a été « déchargée », c'est-à-dire quelle ne fait plus partie de celles-ci dans la nouvelle démonstration [6].

On la représente de la façon suivante :

$$\dfrac{\begin{matrix}[P] \\ \vdots \\ Q\end{matrix}}{P \Rightarrow Q}$$

Les occurrences de l'hypothèse déchargée sont mises entre crochets. Par exemple :

$$\dfrac{[P]}{P \Rightarrow P} \qquad \dfrac{\dfrac{[P \wedge Q]}{P}}{(P \wedge Q) \Rightarrow P} \qquad \dfrac{\dfrac{[P] \quad [P]}{P \wedge P}}{P \Rightarrow (P \wedge P)}$$

Les tableaux ci-après donnent les schémas d'axiomes ou les règles régissant les connecteurs. Le symbole $\perp$ représente une proposition particulière appelée à être sémantiquement toujours fausse. Les lettres majuscules désignent des propositions [7].

5. Cette hypothèse peut être utilisée plusieurs fois, mais peut aussi ne pas être réellement utilisée.

6. Il est tout à fait licite de ne décharger que certaines des occurrences de l'hypothèse P, ou de décharger une hypothèse qui n'est pas utilisée.

7. Je m'écarte légèrement du système originel de Hilbert et Ackermann dans lequel les axiomes étaient donnés avec des variables propositionnelles et dans lequel la *règle de substitution* (si X est un théorème, toute proposition obtenue en substituant des propositions Y_1, Y_2, $\ldots Y_n$ à des variables propositionnelles p_1, p_2, $\ldots p_n$ de X est également un théorème) permettait de remplacer dans les axiomes ou dans les théorèmes les variables propositionnelles par des propositions arbitraires, ce qui est prévu d'emblée dans la présentation que je propose.

Axiomes du système de Hilbert et Ackermann	Règle de déduction du système de Gentzen
$(P \land Q) \Rightarrow P$ $(P \land Q) \Rightarrow Q$ $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((P \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow (Q \land R)))$	élimination à gauche de $\land$: $\dfrac{P \land Q}{P}$ élimination à droite de $\land$: $\dfrac{P \land Q}{Q}$ introduction de $\land$: $\dfrac{P, \quad Q}{P \land Q}$
$P \Rightarrow (P \lor Q)$ $Q \Rightarrow (P \lor Q)$ $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow ((P \lor Q) \Rightarrow R))$	introduction à gauche de $\lor$: $\dfrac{P}{P \lor Q}$ introduction à droite de $\lor$: $\dfrac{Q}{P \lor Q}$ élimination de $\lor$: $\dfrac{P \lor Q, \quad \begin{matrix}[P]\\ M\end{matrix}, \quad \begin{matrix}[Q]\\ M\end{matrix}}{M}$
$P \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ $(P \Rightarrow (P \Rightarrow Q)) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$ $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$	introduction de $\Rightarrow$: $\dfrac{\begin{matrix}[P]\\ Q\end{matrix}}{P \Rightarrow Q}$ élimination de $\Rightarrow$: $\dfrac{P, \quad P \Rightarrow Q}{Q}$

Axiomes du système de Hilbert et Ackermann	Règle de déduction du système de Gentzen
$(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$ $(P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$ $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow P) \Rightarrow (P \Leftrightarrow Q))$	
$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ $P \Rightarrow \neg\neg P$ $\neg\neg P \Rightarrow P$	introduction de ¬ : $\dfrac{\begin{matrix}[P]\\ \bot\end{matrix}}{\neg P}$ élimination de ¬ : $\dfrac{P, \quad \neg P}{\bot}$
	élimination de l'absurde : $\dfrac{\bot}{P}$ réduction à l'absurde : $\dfrac{\begin{matrix}[\neg P]\\ \bot\end{matrix}}{P}$

Gentzen reformule en ces termes la règle d'élimination de l'absurde : « si la proposition fausse est valable, toute proposition, quelle qu'elle soit, est valable » (Gentzen, 1955, p. 25). La maxime « le faux implique n'importe quoi », déjà évoquée page 132, peut aussi être un raccourci imprudent associé à cette règle de déduction. Il est alors essentiel de ne pas penser qu'elle dit que du fait qu'une proposition soit fausse je peux déduire que n'importe quelle proposition est vraie (la possibilité d'une telle déduction serait très gênante puisqu'il existe évidemment des propositions fausses).

Les axiomes du système de Hilbert et Ackermann sont accompagnés de la règle de déduction suivante :

Règle de détachement : De P et de $P \Rightarrow Q$ on dérive Q.

Cette règle de détachement (ou *modus ponens*) est le pendant de la règle d'élimination de $\Rightarrow$.

Je me propose d'illustrer le fonctionnement de ces deux systèmes en donnant les démonstrations de la commutativité du connecteur ET (il s'agit donc de prouver que la proposition (P ET Q) $\Rightarrow$ (Q ET P) est un théorème, c'est-à-dire démontrable sans hypothèse) :

– Dans le système de Hilbert-Ackermann, la démonstration se présente sous forme d'une suite de propositions :
  (1) $((P \wedge Q) \Rightarrow Q) \Rightarrow (((P \wedge Q) \Rightarrow P) \Rightarrow ((P \wedge Q) \Rightarrow (Q \wedge P)))$
  Substitution de $(P \wedge Q)$ à P, et de P à R dans le troisième axiome
  (2) $(P \wedge Q) \Rightarrow Q$ *Deuxième axiome*
  (3) $((P \wedge Q) \Rightarrow P) \Rightarrow ((P \wedge Q) \Rightarrow (Q \wedge P))$ *Détachement à partir de* (1) *et* (2)
  (4) $(P \wedge Q) \Rightarrow P$ *Premier axiome*
  (5) $(P \wedge Q) \Rightarrow (Q \wedge P)$ *Détachement à partir de* (3) *et* (4)
  Il ne figure dans la suite que des axiomes et des propositions obtenues par application des règles à ces axiomes ou à d'autres propositions de la suite. Le résultat obtenu est donc un théorème.
– En déduction naturelle, la démonstration se présente sous forme d'un arbre :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]}{B}\,\wedge\text{e} \qquad \dfrac{[A \wedge B]}{A}\,\wedge\text{e}}{B \wedge A}\,\wedge\text{i}}{(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)}\,\Rightarrow\text{i}$$

  L'hypothèse $A \wedge B$ est déchargée par l'application de la règle d'introduction de $\Rightarrow$ ($\Rightarrow$ i), la conclusion est donc démontrée sans aucune hypothèse, c'est un théorème.
  La démonstration peut se lire :
  de $A \wedge B$ on déduit B ($\wedge$e),
  de $A \wedge B$ on déduit A ($\wedge$e).
  De B et de A on déduit $B \wedge A$ ($\wedge$i).
  Comme de $A \wedge B$ on a déduit $B \wedge A$, on a $(A \wedge B) \Rightarrow (B \wedge A)$ ($\Rightarrow$i).

4.3 Implication et déduction

Il est essentiel en mathématiques de ne pas confondre implication et déduction, c'est-à-dire de ne pas confondre $A \Rightarrow B$ et (A donc B). $A \Rightarrow B$ est une proposition. Elle peut être vraie ou fausse, ce renseignement ne nous est pas donné par la proposition elle-même mais par son assertion ou son infirmation. De plus, savoir qu'elle est vraie ne nous donne aucun renseignement sur la valeur de vérité de A ni sur celle de B puisque plusieurs distributions de valeurs de vérité rendent $A \Rightarrow B$ vraie. (A donc B) n'est pas une proposition, on ne peut pas lui accorder de valeur de vérité [8]. Cette phrase se situe au niveau *épimathématique*. Affirmer (A donc B), c'est affirmer trois choses :
- que A est vraie
- que B est vraie
- qu'on peut déduire le deuxième renseignement du premier (souvent parce que l'on sait que $A \Rightarrow B$ est vraie).

On voit ici que la troisième affirmation n'est pas l'affirmation de la vérité d'une proposition, mais l'affirmation de la validité d'un raisonnement (voir distinction page 37). Bien sûr, une grande partie des « donc » écrits ou prononcés en mathématiques sont reliés à l'implication car ils marquent une utilisation de la règle du *modus ponens*.

Savoir que $A \Rightarrow B$ est vraie nous permet de faire une déduction dans un autre cas que celui où l'on sait que A est vraie : celui où l'on sait que B est faux. On peut alors déduire que A est faux. Cette inférence correspond au *modus tollens* : de $P \Rightarrow Q$ et de $\neg Q$ je peux déduire $\neg P$. Dans les systèmes de déduction de Hilbert et Ackermann et de Gentzen, il n'y a pas de règles de déduction correspondant au *modus tollens* parce que c'est inutile : on peut facilement dériver une telle règle des axiomes et de la règle de détachement dans le premier cas, des autres règles dans le second cas. Les éléments premiers de ces systèmes sont choisis de façon à être en nombre minimal (de ce point de vue, le système de Hilbert et Ackermann peut être amélioré en choisissant d'autres axiomes qui permettent d'en prendre moins). Il aurait ainsi été redondant de prendre une règle correspondant au *modus ponens* et une règle correspondant au *modus tollens*.

Ces deux règles de déduction sont couramment mises en œuvre dans l'activité mathématique, et l'on peut se demander, d'un point de vue didactique, s'il est pertinent ou non de les faire vivre toutes les deux dans la classe. V. Durand-Guerrier cite certains travaux de psychologie cognitive qui montrent que les enfants sont capables d'utiliser la règle du

8. On n'est pas forcément gêné de dire que *A donc B* est vrai dans un cas où c'est pertinent de dire *A donc B*, par exemple « 12 est un multiple de 4 donc 12 est pair ». Mais que dire alors de « 14 est un multiple de 4 donc 14 est pair », où la déduction "est un multiple de 4 donc est pair" est correcte, mais appliquée à une proposition fausse, la conclusion étant pourtant vraie ? De « 13 est un multiple de 4 donc 13 est pair », qui se différencie du cas précédent car la conclusion est également fausse ? De « 12 est pair donc 12 est un multiple de 4 », où hypothèse et conclusion sont vraies, mais la déduction "est pair donc est un multiple de 4" est incorrecte ? On voit bien que chacune de ces phrases pose des problèmes différents (vérité de l'hypothèse, vérité de la conclusion, validité de l'inférence), et que les qualificatifs vrai/faux n'y sont pas adaptés.

modus tollens dès l'âge de huit ans et soutient qu'elle est « constitutive, au même titre que le *modus ponens*, de l'articulation entre les définitions syntaxiques et sémantiques de l'implication » (Durand-Guerrier, 2005, p. 58). Les élèves sont cependant beaucoup plus souvent en situation d'application du *modus ponens*, et souvent le raisonnement déductif est réduit à la règle « si A alors B, or A, donc B ». Je fais l'hypothèse que cette idée qu'une implication vraie permet de faire des déductions dans deux cas (et qu'une équivalence vraie permet de faire des déductions dans quatre cas !) n'est pas présente dans la classe de mathématiques, et je suis en accord avec V. Durand-Guerrier sur le fait que cela est dommageable à la compréhension de la notion d'implication.

Regardons maintenant ce que doit faire la personne (dans l'enseignement secondaire, c'est presque toujours le professeur) qui *démontre* $A \Rightarrow B$. Elle doit d'abord se placer dans certaines conditions, à savoir se placer sous hypothèse A, et sous cette hypothèse démontrer B. Que doit faire la personne (le plus souvent c'est la tâche principale de l'élève du secondaire) qui *utilise* la proposition $A \Rightarrow B$? Vérifier qu'elle se trouve bien dans le cas où l'hypothèse A est satisfaite (parfois cela n'est pas directement visible, elle doit reconnaître qu'elle est dans un cas où une certaine hypothèse A' est vérifiée, ce qui lui permet de déduire que l'hypothèse A est vérifiée), puis déduire B, en vertu du *modus ponens*, parce qu'elle a à sa disposition le théorème « si A alors B ». Le jeu à jouer est presque toujours le même, qui fait dire aux élèves, connaissant le théorème « si A alors B », que « pour démontrer B il faut A ». Un seul petit pas sépare cette formulation de « pour B il faut A », qui est une autre manière de dire $B \Rightarrow A$ alors que c'est de $A \Rightarrow B$ qu'il s'agit. Contrairement à la personne qui l'utilise, la personne qui doit démontrer $A \Rightarrow B$ a ainsi à sa charge de « planter le décor », ce qui est une difficulté non négligeable pour les élèves. Cette dissymétrie se voit dans les règles de la déduction naturelle, puisqu'il y a dans la règle d'introduction de $\Rightarrow$ une hypothèse déchargée.

Je reviens encore une fois sur l'expression « le faux implique n'importe quoi » (déjà commentée page 132 et page 161). Pour prouver la proposition « P implique Q », nous devons faire une démonstration dans laquelle nous prenons P comme hypothèse et nous arrivons à la conclusion Q. Aussi, nous disons parfois « P implique Q » pour signifier que nous connaissons une telle démonstration, ou en tout cas que nous savons qu'elle existe. La maxime « le faux implique n'importe quoi » peut alors être entendue comme « à partir d'une proposition fausse A, je peux trouver une démonstration de n'importe quelle proposition B ». C'est bien sûr toujours possible en réduisant la démonstration à une application de la règle d'élimination de l'absurde, mais ça n'est généralement pas à une telle démonstration que l'on pense !

4.4 Introduction et élimination des quantificateurs

Après avoir donné des modélisations des démonstrations dans le calcul des propositions, nous allons nous placer dans le calcul des prédicats, car les mathématiques ne se réduisent pas au calcul propositionnel, et regarder les règles qui régissent le fonctionnement des quantificateurs. Je me contenterai de donner les règles d'introduction et d'élimination en déduction naturelle, c'est ce qui me semble le plus proche de la pratique mathématique, et cela m'est suffisant pour la commenter.

Le quantificateur universel

La règle de déduction correspondant à l'introduction de ∀ est la suivante [9] :

$$\frac{P[a/x]}{\forall x\, P[x]}$$

la variable a devant satisfaire à la condition suivante : elle ne doit pas apparaître comme variable libre dans $P[x]$ ni dans aucune des hypothèses dont P dépend (c'est-à-dire d'éventuelles propositions précédant P dans la démonstration, et intervenant dans la démonstration de P). Ce qu'on traduit parfois par « a doit être tout à fait quelconque ».

Cette règle affirme que pour prouver $\forall x\, P[x]$, il suffit de prouver $P[a]$, ce qui peut paraître surprenant, et donner l'impression que l'on prouve une proposition universelle en prenant un exemple particulier. Elle correspond pourtant effectivement à ce que l'on fait dans la pratique : pour montrer $\forall x\, P[x]$, on montre $P[a]$ pour un élément a du domaine auquel la variable x est astreinte et sur lequel on ne fait aucune hypothèse particulière (on parle parfois d'*élément générique*, remarquons que ça n'est pas tant l'élément qui est générique que l'usage qui en est fait). Le fait de n'avoir fait aucune hypothèse particulière sur l'élément a est bien sûr essentiel pour pouvoir « généraliser » ce qui a été prouvé pour cet élément. La plupart du temps, on utilise même le même nom pour la variable quantifiée universellement et pour l'élément qu'on se donne pour faire la démonstration c'est-à-dire que pour montrer $\forall x\, P[x]$ on considère un élément que l'on nomme x.

Dans la pratique, il n'est pas si fréquent qu'une tâche soit proposée sous la forme « montrer que pour tout réel x, $P[x]$ » [10]. On utilise plus souvent une formulation telle que « soit x un réel, montrer $P[x]$ », ou « considérons un réel x. Montrer $P[x]$ ». L'utilisation de « soit », ou « considérons » sert à introduire la variable a de la règle d'introduction, et à signaler une quantification universelle (il s'agit de ce que F. Rakotovoavy appelle une PUD, voir page 146). Mais depuis l'abandon des mathématiques modernes, une volonté de simplifier le discours mathématique est perceptible dans les manuels, et de telles expressions sont moins présentes. La tendance actuelle est plutôt de proposer ces tâches sous la forme suivante : « x est un réel. Montrer $P[x]$ ». Ici, plus aucun terme ne marque

9. $P[a/x]$ désigne le résultat de la substitution, dans la proposition P, de la variable a à toutes les occurrences libres de la variable x.

10. Exception faite des démonstrations par récurrence qui sont la plupart du temps présentées sous la forme « montrer que pour tout entier n, $P[n]$ ».

le rôle de présentation et de quantification universelle de variable de la phrase « x est un réel ». Il n'est alors pas facile pour les élèves de comprendre qu'ils ont en fait montré une proposition universelle, d'autant plus qu'il est rare que nos démonstrations se concluent par « nous avons montré que pour tout x, $P[x]$ », c'est-à-dire que l'application de la règle d'introduction du quantificateur universel reste généralement implicite. Par ailleurs, il arrive également que la proposition universelle à démontrer ne comporte aucune variable (par exemple « Le carré d'un entier pair est pair »). Dans ce cas, l'introduction d'une variable est à la charge du démonstrateur, étape qui peut également être une difficulté pour les élèves.

La règle de déduction correspondant à l'élimination de $\forall$ est la suivante :

$$\frac{\forall x\, P[x]}{P[a/x]}$$

Elle affirme que si on a prouvé $\forall x\, P[x]$, alors on a prouvé $P[a]$ pour n'importe quel élément a de l'ensemble auquel la variable x est astreinte (a peut être une expression plus complexe qui désigne un objet mathématique, mais alors cette expression ne doit pas comporter de variable libre qui deviendrait liée dans la proposition $P[a]$).

Il nous arrive très fréquemment en mathématiques (c'est d'ailleurs la déduction emblématique dans l'enseignement secondaire) d'utiliser conjointement l'élimination de $\Rightarrow$ et l'élimination de $\forall$, c'est-à-dire qu'on fait la déduction suivante :

$$\frac{\forall x\, (P[x] \Rightarrow Q[x]) \quad P[a]}{Q[a]}$$

Le quantificateur existentiel

La règle de déduction correspondant à l' introduction de $\exists$ est la suivante :

$$\frac{P[a]}{\exists x\, P[x]}$$

Elle affirme que pour prouver $\exists x\, P[x]$, il suffit de prouver $P[a]$ pour un élément a de l'ensemble auquel la variable x est astreinte. De même que dans la règle d'élimination de $\forall$, a peut être un nom d'objet particulier ou une variable.

On peut repérer la tendance suivante chez les élèves ou étudiants qui ont à démontrer qu'une proposition « il existe x dans E tel que $P[x]$ » est vraie : quand tous les éléments d'un sous-ensemble E' de E vérifient P, plutôt que d'exhiber une valeur particulière pour prouver que « il existe x dans E tel que $P[x]$ » est vraie, ils disent que c'est vrai pour tous les éléments de E'. Par exemple, s'ils ont à démontrer qu'il existe un réel x tel que $x^2 < x$, ils pourraient dire que tous les réels de l'intervalle $]0, 1[$ conviennent, plutôt que de dire seulement que c'est vrai pour une certaine valeur de cet intervalle. On pourrait dire que plutôt que de donner un exemple, ils donnent toute une classe d'exemples. Cela est cohérent avec la démarche de recherche pour prouver un énoncé de la forme $\exists x\, P[x]$: si il n'y a pas une valeur immédiate vérifiant P, il faut essayer de trouver des caractéristiques d'un élément qui convienne, ce qui amène souvent non pas à un seul exemple mais à plusieurs. Et s'il y a alors plusieurs valeurs qui conviennent, pourquoi en privilégier une ? Finalement, dans la démarche de recherche, on va parfois au-delà de la seule question de la vérité ou non, on cherche les éléments qui vérifient la propriété, soit en les listant, soit en les caractérisant.

La règle de déduction correspondant à l'élimination de $\exists$ est la suivante :

$$\frac{\exists x\, P[x] \qquad \begin{matrix}[P[a]]\\ Q\end{matrix}}{Q}$$

Là aussi il y a une condition sur la variable a : elle ne doit apparaître comme variable libre ni dans P, ni dans Q.

Cette règle affirme que si on a prouvé $\exists x\, P[x]$, et qu'on a prouvé Q sous l'hypothèse $P[a]$, alors on a prouvé Q.

Par exemple, dans la démonstration de « tout entier pair a un carré pair », on considère un entier n pair, c'est-à-dire pour lequel *il existe un entier* k *tel que* $n = 2k$, on montre ensuite que de $n = 2k$ on peut déduire n^2 *est pair*, et alors, de n *est pair*, on peut déduire n^2 *est pair*. Notons que, dans la manière de rédiger les démonstrations, on ne sépare pas les deux parties que sont affirmer $\exists x\, P[x]$ d'une part et montrer que de $P[a]$ on peut déduire Q d'autre part. En fait, quand on affirme *il existe un entier* k *tel que* $n = 2k$, on continue généralement la démonstration en faisant comme si effectivement l'hypothèse $n = 2k$ était vérifiée, c'est-à-dire qu'en plus d'avoir affirmé *il existe un entier* k *tel que* $n = 2k$, on a nommé k un élément vérifiant $n = 2k$, et dans la suite on travaille sous cette hypothèse. La plupart du temps, cela ne pose pas de problème, mais il faut que la variable utilisée ne soit pas déjà introduite dans la démonstration, ce qui est parfois le cas quand on utilise deux fois successives une même proposition existentielle (voir le paragraphe sur l'utilisation des propositions existentielles dans la section 3.6.3 page 149).

4.5 Divers types de raisonnement

4.5.1 Le raisonnement par contre-exemple

Le raisonnement par contre-exemple est utilisé pour montrer qu'une proposition universelle est fausse. Il a acquis dans la culture mathématique scolaire une place particulière : on parle volontiers de la « technique du contre-exemple », et moins souvent de la « technique de l'exemple » pour montrer qu'une proposition existentielle est vraie.

Pourtant, ces deux technique ne sont en fait qu'une seule : un contre-exemple est un élément a d'un ensemble E qui permet d'infirmer une proposition de la forme « pour tout $x \in E$, $P[x]$ » parce $P[a]$ est faux. C'est donc en fait un élément pour lequel $\neg P[a]$ est vraie, ce qui prouve que la proposition « il existe $x \in E$ tel que $\neg P[x]$ » est vraie. a est en fait un exemple pour la négation de la proposition à infirmer. Les deux techniques sont unies par le jeu de la négation. Nous verrons que dans les manuels actuels, ce lien n'est pas fait. Ce serait pourtant une bonne occasion de montrer l'aspect généralisateur de la logique.

4.5.2 Raisonnement par l'absurde et raisonnement par contraposée

Le « raisonnement par l'absurde » consiste à adopter la démarche suivante : pour prouver P, on suppose $\neg P$, et on arrive à une contradiction. On a alors prouvé que $\neg P$ est impossible, ce qui prouve P.

Le « raisonnement par contraposée » diffère déjà du raisonnement par l'absurde par le fait qu'il ne peut s'appliquer que quand la proposition à montrer est une implication $P \Rightarrow Q$. On va en fait montrer la proposition équivalente $\neg Q \Rightarrow \neg P$. On fait alors l'hypothèse $\neg Q$, et on montre $\neg P$.

Pour montrer une implication $P \Rightarrow Q$ par l'absurde, il faut faire l'hypothèse $\neg(P \Rightarrow Q)$ [11], c'est-à-dire $P \wedge \neg Q$, et arriver à une contradiction. Cette contradiction est parfois que l'on montre $\neg P$, qui est en contradiction avec l'hypothèse P. Mais parfois, seule l'hypothèse $\neg Q$ a été utilisée pour arriver à la conclusion $\neg P$. Dans ce cas, ce raisonnement par l'absurde peut se ramener plus simplement à un raisonnement par contraposée.

On appelle aussi parfois raisonnement par contraposée ce qui est en fait une application du *modus tollens* : si A alors B, or NON B donc NON A.

4.5.3 Raisonnement par disjonction des cas

Pour montrer $P \Rightarrow Q$ en utilisant un raisonnement par disjonction des cas, nous commençons par trouver des propositions P_1, P_2,..., P_n telles que P soit équivalente à la disjonction $P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_n$ [12]. Nous montrons alors chaque implication $P_i \Rightarrow Q$, c'est-à-dire que nous montrons ($P_1 \Rightarrow Q$ ET $P_2 \Rightarrow Q$ ET ... ET $P_n \Rightarrow Q$). Nous pouvons alors conclure $P \Rightarrow Q$. Le raisonnement par disjonction des cas correspond à la règle d'élimination de $\vee$ présentée page 160, mais nous voyons mieux cette double intervention d'une disjonction et d'une conjonction en l'associant à la tautologie suivante :

$$((P \Rightarrow Q) \wedge (P' \Rightarrow Q)) \Leftrightarrow ((P \vee P') \Rightarrow Q)$$

11. En fait, on commence souvent par se placer sous l'hypothèse P puisque l'on doit démontrer une implication, puis on suppose $\neg Q$.

12. Il n'est pas nécessaire que les différents cas soient « disjoints » (pour prouver une propriété des nombres réels, on peut regarder le cas des réels positifs, et le cas des réels négatifs, peu importe que 0 soit examiné deux fois)

4.5.4 Raisonnement par récurrence

Le raisonnement par récurrence se distingue des autres types de raisonnement présentés jusqu'alors dans la mesure où il ne s'applique qu'à des propositions relatives aux entiers naturels. On trouve généralement le principe du raisonnement par récurrence énoncé comme suit : Soit $P[n]$ une propriété portant sur des entiers.

Si :

1. *Initialisation* : la propriété P est vraie pour un certain entier n_0
2. *Hérédité* : la propriété P est héréditaire à partir du rang n_0, c'est-à-dire que pour tout $k \geqslant n_0$, $(P[k] \Rightarrow P[k+1])$

Alors la propriété P est vraie pour tout entier supérieur ou égal à n_0, c'est-à-dire que pour tout $n \geqslant n_0$, $P[n]$

Autrement dit, la proposition suivante est vraie quelle que soit la proposition P et l'entier n_0 :

$$\Big(P[n_0] \text{ ET pour tout } k \geqslant n_0,\ (P[k] \Rightarrow P[k+1])\Big) \Rightarrow \text{pour tout } n \geqslant n_0,\ P[n]$$

On trouve parfois l'hérédité introduite par « on suppose que la propriété $P[n]$ est vraie pour un entier n quelconque ». Cette formulation est tout à fait ambiguë et peut être interprétée comme « pour tout n, $P[n]$ ». On ne voit alors plus très bien ce qu'il y a à montrer ! Il est ainsi essentiel pour maîtriser le raisonnement par récurrence de distinguer l'étape d'hérédité dans laquelle on montre « pour tout $k \geqslant n_0$, $(P[k] \Rightarrow P[k+1]$ »), de la conclusion finale « pour tout $n \geqslant n_0$, $P[n]$ ». Ne pas utiliser la même variable, comme c'est fait ici, peut aider à faire cette distinction.

On trouve parfois dans des copies d'élèves l'étape d'hérédité introduite par l'hypothèse « supposons que pour tout n $P[n]$, montrons $P[n+1]$ ». La première remarque sur cette formulation est d'ordre syntaxique : dans la proposition « pour tout n $P[n]$ », la variable n est muette, l'hypothèse faite ne porte pas sur un objet qui s'appelle n. Or, dans la proposition $P[n+1]$, la variable n est parlante, mais on ne sait pas qui est n, aucune hypothèse n'a été faite sur cet élément. Cependant, il n'est pas nécessaire de savoir qui est n pour pouvoir conclure à la vérité de $P[n+1]$ à partir de l'hypothèse « pour tout n $P[n]$ »... Le problème syntaxique se retrouve dans une formulation telle que « supposons qu'il existe n tel que $P[n]$, montrons $P[n+1]$ ».

4.6 Synthèse de l'étude des raisonnements

La façon dont les mathématiciens rédigent leurs démonstrations est relativement éloignée de la modélisation qu'en propose la logique mathématique, que ce soit par des systèmes axiomatiques où les démonstrations formelles sont des suites de propositions, ou par la déduction naturelle où les démonstrations formelles ont une structure arborescente. Une difficulté pour les élèves et les étudiants est alors de distinguer dans un texte de démonstration les propositions mathématiques qui concernent les objets mathématiques, et les parties du texte qui permettent de suivre le cheminement du raisonnement, par exemple les introductions de variables, ou la justification d'une inférence permettant de déduire une nouvelle proposition à partir des propositions posées en hypothèses ou déjà démontrées. La confusion entre implication et déduction relève de ce type de difficulté. « si A alors B » est une proposition mathématique, et l'affirmation de sa vérité ne dit rien de la vérité des propositions A et B. Au contraire, « A donc B » n'est pas une proposition mathématique, et cette phrase ne s'utilise que dans un contexte où les propositions A et B sont vraies (la vérité de A fait partie des hypothèses ou a été préalablement démontrée, la vérité de B se déduit de celle de A).

La référence à la logique mathématique permet d'éclairer certains points complexes liés aux différents types de raisonnement : différence entre raisonnement par l'absurde et raisonnement par contraposée, lien entre exemple et contre-exemple, intervention d'un « et » et d'un « ou » dans le raisonnement par disjonction des cas, gestion de la quantification universelle dans l'étape d'hérédité dans un raisonnement par récurrence.

Conclusion sur la référence pour l'enseignement de notions de logique

L'objet de cette deuxième partie de la thèse était de constituer une référence pour la réflexion sur l'enseignement de notions de logique. J'ai adopté pour la constitution de cette référence une approche à partir de trois points de vue (celui de la logique mathématique, celui des pratiques langagières, celui de la didactique des mathématiques), qui la rend opérationnelle pour la suite de mon étude didactique.

J'ai montré qu'il était pertinent de s'appuyer sur la logique mathématique pour cette référence, tout en l'associant à l'analyse du discours mathématique (comme a pu le proposer D. Lacombe), et à l'analyse didactique (comme le font déjà plusieurs chercheurs déjà cités). La logique mathématique est à la fois :

- une théorie de référence qui propose des définitions des notions de logique et en donne des propriétés. En proposant une approche des notions à partir de la logique mathématique, la référence constituée permet de vérifier que ce qui en est dit est en adéquation avec elle, que ces notions soient définies ou non dans la classe de mathématiques. Par ailleurs, la logique mathématique permet de bien distinguer les aspects syntaxique et sémantique des notions de logique. L'aspect syntaxique permet un travail plus formel d'analyse et de manipulation des propositions, l'aspect sémantique permet l'interprétation des propositions dans un domaine mathématique, et l'établissement de vérités sur les éléments de ce domaine. Là encore, la logique mathématique souligne un aspect important des notions de logique.
- Un modèle pour l'analyse du discours mathématique et l'interprétation des pratiques langagières. J'ai souligné dans la référence constituée certains implicites dans des expressions couramment utilisées en mathématique, notamment dans l'expression de la quantification. La distinction quantification/quantificateur permet de bien rendre compte de ces implicites : à une proposition dans laquelle la quantification est implicite, ou marquée par des termes de la langue courante indiquant la quantité, correspond une proposition dans laquelle la quantification est exprimée par des quantificateurs. J'ai également souligné certaines ambiguïtés de mots de la langue courante fréquemment

utilisés en mathématiques : par exemple, tous les « et » ne correspondent pas à un connecteur ET, tous les « si » ne correspondent pas à une implication. La référence constituée a ainsi permis de mettre au jour un certains nombres de points sensibles reliés à l'expression des notions de logique dans le discours mathématique, et à l'utilisation de la langue courante.

– Une référence pour l'étude didactique et l'interprétation des difficultés des élèves. J'ai par exemple souligné dans la référence constituée les malentendus dus à la pratique de quantification universelle implicite des implications, la confusion entre négation et contraire, les erreurs dues à l'intervention du principe du maximum d'information.

Les études épistémologique et didactique de la première partie de la thèse ont montré la complexité des notions de logique, tant du point de vue de ce qu'elles sont en tant qu'objet, que du point de vue de leur utilisation comme outil dans l'activité mathématique. Nous pouvions alors faire l'hypothèse de difficultés concernant l'enseignement de ces notions. La référence constituée permet de regarder plus précisément certains points sensibles.

Dans la partie suivante, je reprends le fil conducteur proposé par la Théorie Anthropologique du Didactique pour l'étude de la transposition. La référence constituée, à défaut d'être un *savoir de référence* partagé par la communauté, est une référence pour l'étude du *savoir à enseigner* que je vais maintenant proposer, à travers l'analyse des programmes et des manuels. En plus des questions classiques sur ce savoir à enseigner (quels sont les choix faits par les rédacteurs des programmes, des manuels ? où vivent les notions de logique et pour quoi ?), je serai attentive à la façon dont sont pris en compte les points sensibles mis au jour (par exemple différence entre *et-propositionnel* et *et-couple*, complexité de la notion d'implication et confusion entre *si A alors B* et *A donc B*...).