

# État de l'art

## Sommaire

1.1	Systèmes linéaires . . . . .	7
1.2	Systèmes non linéaires . . . . .	10
1.3	Observabilité des systèmes non linéaires . . . . .	11
1.4	Observateurs pour les systèmes dynamiques . . . . .	14
1.5	Systèmes dynamiques à retard (TDS : Time-delay systems) . . . . .	15
1.6	Observation des systèmes à retard . . . . .	18
1.7	Systèmes complexes . . . . .	21
1.8	Conclusion . . . . .	23

Dans ce chapitre, un petit rappel sur les systèmes dynamiques complexes est présenté. Notons qu'un système complexe est généralement une combinaison de plusieurs classes de systèmes dynamiques.

## Systèmes linéaires

Un système linéaire, au sens de l'automatique, est un processus physique pouvant être décrit par des équations linéaires différentielles, respectant le principe de superposition, c'est-à-dire que la combinaison linéaire des variables de ce système donne une autre variable appartenant à ce même système. Les systèmes linéaires se caractérisent par deux propriétés principales : la proportionnalité et l'additivité.

Les systèmes linéaires ont été longtemps étudiés dans le cas stationnaire. Grâce aux travaux de [BELLMAN, 1957; PONTRYAGIN et al., 1962] et surtout de [KALMAN, 1959, 1963] dans les années 1960, les automaticiens ont depuis privilégié la représentation d'état. Ainsi, tout système dynamique linéaire continu (ou discret) régi par un ensemble d'équations différentielles peut être représenté par les équations matricielles suivantes :

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t)$$

où  $x(t)$  représente le vecteur des états,  $y(t)$  la sortie et  $u(t)$  la commande.

Cette classe de systèmes dynamiques semble a priori très restreinte mais permet d'étudier un grand nombre de systèmes que l'on peut rencontrer dans la vie courante. Elle permet d'obtenir un compromis entre la complexité de modélisation et la simplicité des études. Des techniques de linéarisation permettent d'obtenir des modèles linéaires simplifiés qui donnent des résultats plutôt satisfaisants localement. Mais, pour des raisons de performances et de robustesses, il est souvent souhaitable de travailler sur des systèmes non linéaires et ceci malgré leur complexité.

### 1.1.1 Observabilité des systèmes linéaires

Pour un système donné, et pour des raisons techniques ou économiques (construction, positionnement et coût des capteurs), il n'est pas possible en général d'accéder à la totalité des composantes du vecteur d'état par des dispositifs de mesure. Or, dans beaucoup de cas, la commande d'un système nécessite de s'assurer de la connaissance à chaque instant de ce vecteur d'état. La solution consiste alors en la synthèse d'un observateur, grâce auquel, si le système est observable, il est possible d'estimer tout ou une partie de l'état par l'intermédiaire des grandeurs connues du système.

Pour stabiliser les systèmes linéaires, on considère souvent des bouclages de la forme :

$$u(t) = Fx(t) \tag{1.1}$$

Ce type de bouclage nécessite donc la connaissance de tout l'état (c'est-à-dire, la mesure de tout l'état). On est alors conduit à chercher les conditions qui permettent de calculer le vecteur d'état  $x(t)$  pour  $t \in [0, T]$  à partir des données «mesurables» du système, c'est-à-dire les matrices  $A, B, C$ , l'entrée  $u(t)$  sur l'intervalle  $[0, T]$  et la réponse fournie par la sortie  $y(t)$  sur l'intervalle  $[0, T]$ . Une façon possible de formaliser tout cela est de procéder comme suit.

Considérons la classe de systèmes linéaires suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \tag{1.2}$$

où  $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^p$ .

**Définition 1.1.** *Le système (1.2) est observable si pour tout  $T > 0$ , il existe une fonctionnelle  $\Omega$  telle que*

$$\Omega(T, u_{[0,T]}, y_{[0,T]}) = x(T), T > 0. \tag{1.3}$$

où  $u_{[0,T]}$  et  $y_{[0,T]}$  désignent respectivement l'ensemble des valeurs de  $u$  et  $y$  sur l'intervalle  $[0, T]$ .

Comme  $x(t)$  est une fonction continue, on a  $\lim_{t \rightarrow 0^+} x(t) = x_0$ . Ainsi, un système observable permet de retrouver un voisinage de l'état initial à partir de la connaissance des entrées et des sorties sur un intervalle de temps quelconque.

Supposons que le système (1.2) soit initialisé en  $x(0) = x_1$  puis en  $x(0) = x_2$  en lui appliquant une entrée identique dans les deux cas. A l'état initial  $x_1$  (resp.  $x_2$ ) va correspondre une trajectoire de la sortie  $y_1(t)$  (resp.  $y_2(t)$ ).

$$\begin{aligned} y_1(t) &= C \left[ e^{At} x_1 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \right], \\ y_2(t) &= C \left[ e^{At} x_2 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau \right] \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ainsi, on obtient

$$y_1(t) - y_2(t) = C e^{At} [x_1 - x_2] \quad (1.5)$$

Par conséquent, la différence entre l'évolution des sorties du système, auquel on applique la même entrée, ne dépend que des conditions initiales du système.

**Définition 1.2.** Deux états initiaux  $x(0) = x_1$  et  $x(0) = x_2$ , sont dits indistinguables si pour tout  $t > 0$ , les sorties correspondantes  $y_1(t)$  et  $y_2(t)$  sont identiques quelle que soit l'entrée  $u$  du système.

La proposition suivante nous donne le lien entre les états indistinguables et l'observabilité :

**Proposition 1.1.** Si le système (1.2) a deux états initiaux indistinguables alors il n'est pas observable.

Pour ces systèmes linéaires, l'observabilité ne dépend pas de l'entrée, mais seulement du couple  $(C, A)$  et dispose de la caractérisation suivante.

**Lemme 1.1.** Soient  $x_1$  et  $x_2$  deux états indistinguables du système linéaire (1.2), alors

$$x_1 - x_2 \in \bigcap_{t \geq 0} \text{Ker} [C e^{At}] \quad (1.6)$$

**Lemme 1.2.** On a l'égalité

$$\bigcap_{t \geq 0} \text{Ker} [C e^{At}] = \bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Ker} C A^k \quad (1.7)$$

**Lemme 1.3.** Si deux états initiaux  $x_1$  et  $x_2$  vérifient

$$x_1 - x_2 \in \bigcap_{k=0}^{n-1} \text{Ker} C A^k \quad (1.8)$$

alors ils sont indistinguables pour le système (1.2) et le système n'est pas observable.

**Théorème 1.1.** [KALMAN, 1960] Une condition nécessaire et suffisante d'observabilité pour (1.2) est :

$$\text{rang}[C^T, (CA)^T, \dots, (CA^{n-1})^T]^T = n. \quad (1.9)$$



### 1.1.2 Observateur pour les systèmes linéaires à temps invariant

Un observateur d'état a été introduit dans les années soixante par [LUENBERGER, 1966] pour les systèmes linéaires continus. Dans [KALMAN, 1960], l'auteur a formulé un observateur en considérant un système linéaire déterministe ou stochastique. Avec l'observateur de Luenberger ou de Kalman, il suffit de choisir un gain  $L$  telle que la matrice  $(A - LC)$  soit une matrice dont les valeurs propres sont toutes à parties réelles strictement négatives dans le cas continu ou possèdent un module strictement inférieur à 1 dans le cas discret (matrice de Hurwitz). Les deux observateurs diffèrent par la façon de calculer le gain de retour  $L$  :

- on utilise la technique de placement de pôles pour l'observateur de Luenberger ;
- pour le filtre de Kalman, on résout une équation de Riccati en minimisant la matrice de covariance de l'erreur d'estimation et de perturbation.

**Théorème 1.2.** [LUENBERGER, 1971](*Observateur de Luenberger*) Si le système (1.2) est observable, alors pour tout ensemble de valeurs propres  $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ , il existe une matrice de gain  $L$  telle que l'ensemble des valeurs propres de la matrice  $A - LC$  soit l'ensemble  $\Lambda$ . Si tous les éléments de  $\Lambda$  sont choisis à partie réelle strictement négative, alors le système suivant

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + L(y - C\hat{x})$$

est un observateur asymptotique pour (1.2). Soit  $e = x - \hat{x}$  l'erreur entre la valeur réelle et la valeur estimée du système. Alors :

$$\dot{e} = (A - LC)e$$

et la vitesse de convergence asymptotique peut être choisie en plaçant judicieusement les valeurs propres de  $(A - LC)$ .

## 1.2 Systèmes non linéaires

La définition la plus simple d'un système non linéaire est un système qui n'est pas linéaire, c'est-à-dire qui ne respecte pas les propriétés d'un système linéaire. Les conditions de proportionnalité et d'additivité ne s'appliquent plus aux systèmes non linéaires. Cette définition explique la complexité et la diversité des systèmes non linéaires et des méthodes qui s'y appliquent. Il n'existe pas une théorie générale pour ces types de systèmes, mais on peut trouver plusieurs méthodes qui sont adaptées à certaines classes de systèmes non linéaires. La forme la plus utilisée pour la représentation des systèmes non linéaires est la suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(x(t), u(t), t) \quad \forall t \geq 0 \\ y(t) &= h(x(t), u(t), t) \end{cases} \quad (1.10)$$

où le vecteur d'état  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , le vecteur de commande  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ , le vecteur des sorties  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  et le réel positif  $t$  représente le temps. La fonction  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction non linéaire. Une solution  $x(t)$  au système (1.10) correspond également à une courbe de l'espace d'état, quand  $t$  varie de 0 à  $\infty$ , et est appelé une trajectoire d'état [LABIT, 2002].

## 1.3 Observabilité des systèmes non linéaires

### 1.3.1 Définitions

Dans ce chapitre, les systèmes considérés sont de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ y = h(x) \end{cases}, \quad (1.11)$$

où  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{X}$  représente le vecteur état,  $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $u = (u_1, \dots, u_m) \in \mathcal{U}$  le vecteur entrée,  $\mathcal{U}$  (ensemble des entrées admissibles)  $\subset \mathbb{R}^m$  et  $y \in \mathcal{Y}$ , le vecteur sortie,  $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^p$ .  $\mathcal{X}$  est une variété différentiable ou un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

$f, g_1, \dots, g_m$  et  $h$  sont des fonctions supposées suffisamment continues et dérivables sur  $\mathcal{X}$  (par exemple analytiques ou  $C^\infty$ ).

**Définition 1.3.** Deux états  $x_1$  et  $x_2$  sont dits **non distinguables** (noté  $x_1 \mathcal{I} x_2$ ) si pour tout instant  $t \geq 0$  et pour toute entrée admissible  $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{U}$  :

$$y(t, 0, x_1, u) = y(t, 0, x_2, u), \quad (1.12)$$

où  $y(t, 0, x_i, u) = h(x(t, 0, x_i, u))$  est la sortie de (1.11) pour l'entrée  $u$  et l'état initial  $x_i$ .

**Définition 1.4.** Le système est dit **observable** si :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{X}, x_1 \neq x_2, \quad x_1 \mathcal{I} x_2 \Rightarrow x_1 = x_2, \quad (1.13)$$

i.e il existe une entrée admissible  $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{U}$  et un instant  $t_1 \geq 0$  tels que

$$y(t_1, 0, x_1, u) \neq y(t_1, 0, x_2, u). \quad (1.14)$$

$x_1$  et  $x_2$  sont dits **distinguables**.

**Définition 1.5.** (observabilité locale)

Le système (1.11) est **localement observable** en  $x_1$  s'il existe un voisinage  $\mathcal{V}(x_1)$  de  $x_1$  tel que pour tout  $x_2$  de  $\mathcal{V}(x_1)$ ,  $x_1$  et  $x_2$  sont distinguables.

Le système est **localement observable** s'il est localement observable en tout  $x_1 \in \mathcal{X}$ .

L'observabilité d'un système peut également se définir en utilisant la notion d'indices d'observabilité, dont nous aurons besoin par la suite

**Définition 1.6.** [KRENER et al., 1983] Soit le système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ y = h(x) \end{cases}, \quad (1.15)$$

dit localement observable au point  $x_0$  s'il existe un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $x_0$  et un  $p$ -uplet d'entiers  $(\mu_1, \dots, \mu_p)$  tels que

i-)  $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_p \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^p \mu_i = n$ .

ii-) Après un réordonnement des fonctions  $h_i$  en chaque point  $x \in \mathcal{U}$ , les  $n$  vecteurs

$\{L_f^{j-1}(dh_i) : i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, \mu_i\}$  sont linéairement indépendants.

iii-) S'il existe d'autres entiers naturels  $l_1, \dots, l_p$  satisfaisant (i) et tels qu'après un éventuel réordonnement des  $h_i$ , les  $n$  vecteurs  $\{L_f^{j-1}(dh_i) : i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, l_i\}$  sont linéairement indépendants alors  $(l_1, \dots, l_p) \geq (\mu_1, \dots, \mu_p)$  (dans l'ordre lexicographique, c'est-à-dire  $[(l_1 > \mu_1)$  ou  $(l_1 = \mu_1$  and  $l_2 > \mu_2)$  ou... ou  $(l_1 = \mu_1, \dots, l_p = \mu_p)]$ ). Les entiers  $(\mu_1, \dots, \mu_p)$  sont appelés indices d'observabilité au point  $x_0$ .

**Remarque 1.1.** Contrairement au cas linéaire, la commande joue un rôle important : en général, on pourra trouver des commandes pour lesquelles des états ne seront pas distinguables. Toutefois le système pourra être observable s'il existe d'autres commandes qui les distinguent.

Considérons, par exemple, le système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 u \\ \dot{x}_2 = 0 \\ y = x_1 \end{cases}. \quad (1.16)$$

Ce système est bien observable pour toute commande  $u \neq 0$ . En particulier pour l'entrée  $u(t) \equiv 1$ , on obtient un système linéaire observable. Cependant, on peut remarquer que l'entrée nulle ne distingue pas les états  $x$  et  $\bar{x}$  tels que  $x_1 = \bar{x}_1$  et  $x_2 \neq \bar{x}_2$ .

Cette remarque nous amène au fait important que l'observabilité d'un système non linéaire n'est pas suffisante pour la synthèse d'un observateur mais qu'il faut également prendre en compte le problème des entrées. L'étude de leurs propriétés s'avère donc primordiale et une classe d'entrées intéressantes est celle pour lesquelles il n'existe pas de paire indistinguable.

**Définition 1.7.** Une entrée  $u$  est dite universelle sur  $[0, t]$  si pour tout couple d'états initiaux distincts  $x_1 \neq x_2$ , il existe un temps  $t_1$  tel que

$$y(t_1, 0, x_1, u) \neq y(t_1, 0, x_2, u). \quad (1.17)$$

Si  $u$  est universelle sur  $\mathbb{R}^+$ , elle est dite universelle.

Une entrée non universelle est appelée *entrée singulière*. On peut trouver dans la littérature [BORNARD et al., 1988] la définition d'entrées régulièrement persistantes, qui sont des entrées "suffisamment" universelles pour la synthèse d'observateur.

**Définition 1.8.** Le système (1.11) est dit **uniformément observable** si :  $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{X}, x_1 \neq x_2$ , et

$\forall u \in U$

$$y(t, 0, x_1, u) \neq y(t, 0, x_2, u). \quad (1.18)$$

Ceci signifie que toute entrée de ce système est universelle.

Le système (1.11) est uniformément observable, localement en  $x_0$ , si (1.11) restreint à un voisinage  $\mathcal{V}(x_0)$  de  $x_0$  est uniformément observable.

Le résultat fondamental suivant, prouvé dans [GAUTHIER et al., 1981] et [GAUTHIER et al., 1991], caractérise ces systèmes dans le cas monosortie, affine en l'entrée. On considère donc un système de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u, & x \in \mathcal{X}, u \in \mathbb{R} \\ y = h(x), & y \in \mathbb{R} \end{cases}. \quad (1.19)$$

**Théorème 1.3.** (i) Si le système (1.19) est uniformément localement observable alors sur un ouvert dense (i.e. presque partout)  $\mathcal{X}'$  de  $\mathcal{X}$ , il existe un système de coordonnées tel qu'il s'écrive sous la forme canonique suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \tilde{g}_1(x_1)u \\ \dot{x}_2 = x_3 + \tilde{g}_2(x_1, x_2)u \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + \tilde{g}_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})u \\ \dot{x}_n = f(x_1, \dots, x_n) + \tilde{g}_n(x_1, \dots, x_n)u \\ y = x_1 \end{cases}, \quad (1.20)$$

(ii) Si (1.19) admet, localement en  $x_0$ , après difféomorphisme, la forme (1.20), alors il est uniformément localement observable en  $x_0$ .  $\diamond$

**Remarque 1.2.** Le difféomorphisme permettant de transformer (1.19) en (1.20) est

$$\phi(x) = (h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x))^T, \quad (1.21)$$

avec  $h_1(x) = h(x)$  et  $h_i(x) = L_f^{i-1}h(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Remarque 1.3.** Ce résultat a été étendu au cas multi-sorties dans [BORNARD et al., 1991a] et au cas non-affine mono-sortie dans [GAUTHIER et al., 1994].

### 1.3.2 Condition d'observabilité d'un système non linéaire

L'objectif est de donner ici pour les systèmes non linéaires, un résultat analogue à celui énoncé par Kalman pour les systèmes linéaires décrits au (1.2).

**Définition 1.9.** La *dérivation de Lie*, notée  $L_f h$ , d'une fonction  $h$  le long d'un champ de vecteurs  $f$  est donnée par :

$$L_f h(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h}{\partial x_i}(x) f_i(x). \quad (1.22)$$

**Définition 1.10.** On appelle *espace d'observation* du système (1.11), noté  $O$ , le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel engendré par  $h_1, h_2, \dots, h_p$  et toutes les dérivations de Lie successives

$$L_{X_1} L_{X_2} \dots L_{X_k} h_j, \quad j \in [1, \dots, p], k = 1, 2, \dots,$$

avec  $X_i, i \in [1, k]$  à prendre dans  $\{f, g_1, g_2, \dots, g_m\}$ .

L'espace d'observation  $O$  définit la codistribution d'observabilité  $dO$

$$dO(x) = \text{Vect} \{dH(x)/H \in O\}, \quad x \in \mathcal{X}.$$

La codistribution  $dO$  est involutive car elle est engendrée par des formes linéaires exactes.

Le principal théorème concernant l'observabilité locale est le suivant :

**Théorème 1.4.** [HERMANN et al., 1977] Soit  $dO$  la codistribution d'observabilité associée au système (1.11). Si

$$\dim(dO(x)) = n,$$

le système est localement observable au point  $x$ . ◇

**Définition 1.11.** On dit que le système est localement observable si cette condition est vérifiée pour tout  $x$  appartenant à  $\mathcal{X}$ .

**Exemple 1.1.** Reprenons le système (1.16). On a :  $O = \text{Vect}\{x_1, x_2\}$  et  $\dim(dO(x)) = 2$  pour tout  $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  et  $u \in \mathbb{R}^*$ . Le système est donc observable pour tout  $u \neq 0$ .

Le théorème précédent donne une condition suffisante d'observabilité locale. Le corollaire suivant donne une condition nécessaire.

**Corollaire 1.1.** [HERMANN et al., 1977] Si (1.11) est localement observable,  $\dim(dO(x)) = n$  pour  $x$  appartenant à un ouvert dense de  $\mathcal{X}$ , i.e presque partout. □

Il existe d'autres techniques d'observation des systèmes non linéaires dans la littérature. On pourra citer, par exemple, la linéarisation par injection de la sortie [GARCÍA-RAMÍREZ et al., 2016] qui transforme le système dynamique localement observable en sa forme normale d'observabilité [TAMI et al., 2013; TAMI et al., 2016; ZHENG et al., 2007; ZHENG et al., 2005, 2009].

## 1.4 Observateurs pour les systèmes dynamiques

Plusieurs types d'observateurs ont été proposés dans la littérature pour estimer les états des systèmes dynamiques.

- **Observateur basé sur l'approche de Lyapunov :** L'idée est d'appuyer la synthèse de l'observateur sur une fonction de Lyapunov associée à la dynamique de l'erreur. Ce type d'observateur de forme quadratique est basé sur la théorie de la stabilité de Lyapunov [BANKS, 1981; THAU, 1973].



- **Observateur grand gain** : Ce type d'observateur utilise un gain suffisamment grand dans la fonction de correction pour éliminer les non linéarités et accélérer plus ou moins la convergence de l'observateur [BORNARD et al., 1991b; NICOSIA et al., 1989; OH et al., 1997].
- **Observateur numérique** : Introduit dans [DIOF et al., 1994], ce type d'observateur propose une dérivation numérique des sorties en les approchant par des polynômes qui ensuite reconstruit tous les états du système.
- **Approche de la platitude** : Ces observateurs introduits dans [FLIESS et al., 1995], utilisent la propriété de platitude du système pour la reconstruction des états.
- **Observateur par modes glissants** : [UTKIN, 1978] L'idée de ce type d'observateur est de stabiliser la dynamique de l'erreur d'estimation sur une surface correspondant à une erreur nulle. Le terme de la correction est la fonction *sign*, qui peut être assimilée à l'utilisation d'un gain infini permettant d'écraser la non linéarité sur la dynamique de l'erreur et d'établir en même temps la convergence de l'erreur d'observation en temps fini [BARBOT et al., 1996; LEVANT, 2001; UTKIN, 1992].
- **Approche par optimisation** : Plusieurs observateurs ont été obtenus par la minimisation de critère en formulant le problème d'observateur comme un problème d'optimisation [GRIZZLE et al., 1990; ZIMMER, 1994].
- **Observateurs adaptatifs** : Ce sont des algorithmes récursifs pour l'estimation conjointe de l'état et des paramètres d'un système dynamique. Cet observateur a été proposé dans [ZHANG et al., 2001] où la mise à jour des paramètres s'inspire de l'algorithme des moindres carrés avec un facteur d'oubli. Il a été aussi utilisé dans [ZHANG, 2002] pour les systèmes multi-entrées/multi-sorties avec une adaptation des paramètres de type gradient.

## 1.5 Systèmes dynamiques à retard (TDS : Time-delay systems)

Le retard selon [XIA et al., 2009] est la propriété d'un système physique pour lequel la réponse à une action impliquée est retardée dans son effet. Les systèmes à retard sont aussi appelés des systèmes héréditaires ou encore des systèmes décrits par des équations différentielles aux différences, et représentent une classe de systèmes de dimension infinie largement rencontrée lors de la modélisation de phénomènes de transport et de propagation de matière, d'énergie ou d'information [CHIASSON et al., 2007; FARKH, 2011]. Même si parfois le procédé même ne contient pas de retards, les capteurs, les actionneurs et aussi les temps de calcul peuvent engendrer des retards non négligeables [MAHMOUD, 2000; NICULESCU, 2001]. La dynamique des systèmes à retards dépend non seulement des valeurs actuelles de ses états mais aussi des valeurs passées des états et/ou des commandes sur un certain horizon temporel. On peut donc considérer que les états du système sont des fonctions définies sur un intervalle de temps égal au retard. Ce type de système peut alors être modélisé dans un espace fonctionnel de dimension infinie [NICULESCU, 2001].

Il existe principalement trois façons de représenter les systèmes à retard [KOLMANOVSKII et al., 1999a] :

1. **Systèmes de dimension infinie** : la classe de système à retard est considérée comme faisant partie d'une classe de systèmes plus large. Cette classe de système de dimension infinie est décrite par des équations différentielles. Cependant, cette approche nécessite la généralisation de certaines propriétés de dimension finie à des cas de dimension infinie, tels que les concepts de commandabilité, de stabilisabilité, d'observabilité et de détectabilité [CURTAIN et al., 1978; KOLMANOVSKII et al., 1999c].
2. **Equations différentielles sur les espaces fonctionnels (EDF)** : le système à retard peut être considéré comme évoluant dans un espace à dimension finie ou dans un espace de fonctions. Le premier utilise la finitude de l'espace vectoriel pour analyser le comportement du système, tandis que le second reflète le caractère de dimension infinie du système [HALE et al., 1993]. Bien que la méthode de traitement des problèmes de dimension infinie à l'aide d'outils de dimension finie ait son avantage, les résultats obtenus sont conservateurs.
3. **Equations différentielles sur des anneaux d'opérateurs** : l'EDF associée est exprimée sous la forme d'une équation différentielle vectorielle définie sur un anneau d'opérateurs. Bien que cette méthode ait été appliquée avec succès pour résoudre certains problèmes intéressants de commandes tels que le découplage, le rejet de perturbations [SENAME, 2001], moins de contributions ont été consacrées aux problèmes d'observation. Néanmoins, certains résultats importants ont été fournis pour le problème de conception d'observateur [LEE et al., 1981a; POURBOGHRAT et al., 1986]. Considérons un système à temps continu avec des retards :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^N A_i x(t - i\tau) \quad (1.23)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur des états, la matrice  $A_i$  est une matrice réelle de dimension appropriée,  $\tau \in \mathbb{R}^+$  représente le retard et  $N$  représente le retard maximal dans des états. Le système (1.23) peut aussi être représenté par l'équation différentielle linéaire suivante avec des coefficients sur un module :

$$\dot{x}(t) = A(\delta)x(t) \quad (1.24)$$

où  $\delta$  est l'opérateur de retard défini pour toute fonction continue  $f(t)$  par

$$\delta f(t) = f(t - \tau)$$

et  $A$  est une matrice polynômiale d'élément  $\delta$  et donnée par  $\sum_{i=0}^N \delta^i A_i$ .

Chaque méthode a ses propres avantages et inconvénients en fonction du problème à traiter. Dans cette thèse, nous allons utiliser la troisième méthode pour traiter notre problème.

Un bref aperçu de certaines propriétés de base des systèmes à retard est présenté dans ce qui suit.

### 1.5.1 Quelques types de retards

La façon de traiter les systèmes à retard diffère selon le type de retard. Il est donc important de présenter les différentes catégories de retards que l'on peut rencontrer dans la littérature :

- **Discret ou ponctuel** : De toute évidence, les systèmes à retard unique ne suffisent pas toujours pour décrire les systèmes réels et la représentation des systèmes peut impliquer de nombreux retards. Nous présentons ci-après une forme de système à retards discrets qui a été largement utilisé :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^n A_i x(t - \tau_i)$$

Différentes conditions de stabilité et de stabilisabilité pour les systèmes à retards ponctuels ont été développées au fil des ans, telles que [DAROUACH et al., 1999; HE et al., 2011; KOLMANOVSKII et al., 1999b; MICHIELS et al., 2005]. Sur la base de la relation entre les retards, on peut distinguer deux types de retards discrets ou ponctuels : les retards commensurables (proportionnels) et les retards incommensurables.

- Commensurable :  $\tau_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \mathbb{N}$  sont commensurables si  $\tau_i/\tau_j$  est rationnel, ce qui correspond à trouver un retard minimal  $\tau$  tel que  $\tau_i = i\tau$ , alors avec une réorganisation appropriée des indices, le système devient comme suit :

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^n A_i x(t - i\tau)$$

Cette classe est considérée comme très conservatrice. Le problème de stabilité de cette classe peut être traité de la même manière que dans le cas d'un retard unique, car l'équation caractéristique associée au système aura les mêmes propriétés algébriques [Nic01a]. Différents résultats liés à ce type de retard ont été présentés dans [ДАТКО, 1998; LOUISELL, 1995]. Une méthode permettant de calculer un intervalle de temps tel que le système considéré soit stable pour tous les retards de cet intervalle calculé a été présentée dans [CHEN et al., 2012].

- Incommensurable : les retards  $\tau_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$  sont des paramètres indépendants. Différentes idées ont été proposées pour traiter ce type de retard, par exemple un changement de coordonnées tel que tous les termes de délai, dans les nouvelles coordonnées, dans la description du système soient associés à la sortie uniquement [Hou et al., 2002]. Une corrélation dynamique causale pour résoudre le problème de la stabilisation d'une classe de systèmes à retards différentiels neutres avec plusieurs retards ponctuels fixes et non proportionnels a été discutée dans [EMRE et al., 1984]. La condition de transformation du modèle de descripteur a été exploitée pour traiter les systèmes ayant deux retards dans [FRIDMAN et al., 2002], puis une condition améliorée qui accepte les retards avec des limites inférieures différentes de zéro a été présentée dans [HE et al., 2006].

- **Retard variable dans le temps** : pouvant appartenir à différentes catégories :
  - Retard borné :  $0 < \tau_1 \leq \tau(t) \leq \tau_2$ . Ce type de retard est fréquemment traité dans la littérature et implique des critères indépendants du retard [BASKER et al., 1999; BOUKAS, 2007; CHEN et al., 2006; KASZKUREWICZ et al., 1993; SEURET et al., 2007; XUE et al., 2004].
  - Retards bornés dérivés :  $\dot{\tau}(t) \leq \mu < 1$ . Cette condition signifie que  $f(t) = t - \tau(t)$  est monotone. Généralement, ce type de retard est associé au précédent pour obtenir un retard dépendant [CAO et al., 1998; LIEN, 2007; PENG et al., 2009; SOUZA et al., 1999]
  - Retards variables arbitraires : dans ce cas, le retard  $\tau$  et sa dérivée  $\dot{\tau}$  ne sont pas liés.
- **Retard distribué** :  $\int_{t-\tau}^t x(s)ds$ . Ce type de retards a été traité dans de nombreux documents, par exemple, la conception d'observateur pour les systèmes non linéaires [GERMANI et al., 2005], la stabilité des systèmes neutres linéaires [HAN, 2003], la stabilisation robuste pour les systèmes neutres incertains [CHEN et al., 2007] et le contrôle robuste [FRIDMAN et al., 2009; ZHENG et al., 2002].
- **Retard dépendant de l'état** : le retard est présenté comme une fonction de l'état du système [BRIAT et al., 2010; MURPHY, 2001].

## 1.6 Observation des systèmes à retard

À la différence des systèmes différentielles ordinaires (EDO), le problème de l'observabilité des systèmes à retard (TDS :Time-Delay Systems) dépend principalement de la nature du système considéré, ce qui a motivé de nombreuses définitions (approximative, spectrale, faible, forte, point à point et absolue). Selon [CHEN, 1984], l'observabilité pour les systèmes EDO linéaires est équivalente à l'assignabilité arbitraire des valeurs propres de l'observateur. Cependant, la généralisation de cette propriété n'est pas nécessaire pour les équations différentielles à retard (EDR). La relation entre l'affectation de valeurs propres et l'observabilité reste une question en suspens malgré les nombreuses activités de recherche consacrées à ce problème.

### 1.6.1 Quelques définitions

Contrairement aux équations différentielles ordinaires, il faut prendre en considération une infinité de points appartenant à l'intervalle  $[-\tau, 0]$  pour les EDR, c'est-à-dire qu'il est nécessaire de spécifier une condition initiale de la forme  $x(t) = \varpi(t)$  pour tout  $t \in [-\tau, 0]$ , où  $\varpi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue.

Soit l'équation fonctionnelle suivante [YEGANEFAR, 2006]

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= f(t, x_t), t \geq t_0 \\ x_{t_0} &= \varpi_0 \in \mathcal{C} \end{cases} \quad (1.25)$$

où  $x$  est une fonction définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\dot{x}$  est la dérivée de  $x$  par rapport au temps  $t$ ,  $x_t$  et  $\varpi_0$  sont des fonctions de l'ensemble  $\mathcal{C}$  défini dans  $\mathbb{R}^n$  et  $f$  est une "fonction de fonction" dite

fonctionnelle comme il est précisé dans [YEGANEFAR, 2006]. On définit  $x_{t_0} = \omega_0$  comme étant les fonctions initiales à l'instant  $t_0$ . Considérons l'espace  $\mathcal{L}^2(-\tau, 0; \mathbb{R}^n)$  de tous les plans  $\mathcal{I}(-\tau, 0) \rightarrow \mathbb{R}^n$  qui sont intégrables au carré dans  $\mathcal{I}(-\tau, 0)$  doté de la semi-norme :

$$\|y\|_{\mathcal{M}^2} = \left[ |y(0)|_{\mathbb{R}^n}^2 + \int_{-\tau}^0 |y(\alpha)|_{\mathbb{R}^n}^2 d\alpha \right]^{\frac{1}{2}}$$

L'espace quotient de  $\mathcal{L}^2(-\tau, 0; \mathbb{R}^n)$  par le sous-espace linéaire de tout  $y$  tel que  $\|y\|_{\mathcal{M}^2} = 0$  est un espace de Hilbert isométriquement isomorphe à l'espace produit  $\mathbb{R}^n \times \mathcal{L}^2(-\tau, 0; \mathbb{R}^n)$ . Il sera désigné par  $\mathcal{M}^2(-\tau, 0; \mathbb{R}^n)$  et sa norme par  $\|\cdot\|_{\mathcal{M}^2}$ .

$$\begin{aligned} \kappa : \mathcal{M}^2([-\tau, 0]; \mathbb{R}^n) &\rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}^2(-\tau, 0; \mathbb{R}^n); \\ \kappa(h) &= (h^0 = x(0), h^1 = x(\alpha)) \end{aligned}$$

Soit  $Y$  un espace de Hilbert que l'on pourrait qualifier d'espace d'observation. Nous pouvons observer le plan  $x(\cdot; h; u)$  avec un observateur  $Z \in \mathcal{L}^\infty([0, T]; \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, Y))$ ; l'observation à l'instant  $t$  est définie par

$$z(t; h; u) = Z(t)x(t; h; u)$$

On peut aussi observer le plan  $\tilde{x}(t; h, u) = x(t+\alpha; h, u)$  avec  $\mathcal{M}^2$ -observateur  $\tilde{Z} \in \mathcal{L}^\infty([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{M}^2, Y))$

$$\tilde{z}(t; h, u) = \tilde{Z}(t)\tilde{x}(t; h, u)$$

Les définitions non triviales suivantes sont les plus importantes de l'observabilité des systèmes à retards. De toute évidence, chaque définition conduit à différentes caractéristiques de l'observation des états :

**Définition 1.12.** (*Observabilité*) [DELFOUR et al., 1972] Le système (1.25) est observable sur  $[0, T]$  si pour tout  $h \in \mathcal{M}^2(-\tau, 0]$  et  $u \in \mathcal{L}^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ , le point  $h^0 \in \mathbb{R}^n$  peut être déterminé de manière unique à partir de la connaissance de  $u$ ,  $h^1$  et du plan d'observation  $z(\cdot; h; u)$ .

**Définition 1.13.** (*Observabilité forte*) [DELFOUR et al., 1972] Le système (1.25) est fortement observable sur  $[0, T]$  si pour tout  $h \in \mathcal{M}^2(-\tau, 0]$  et  $u \in \mathcal{L}^2(0, t; \mathbb{R}^m)$ , l'état  $h$  peut être déterminé de manière unique à partir de la connaissance de  $u$  et du plan d'observation  $z(\cdot; h; u)$ .

**Définition 1.14.** ( *$\mathcal{M}^2$ -observabilité*) [DELFOUR et al., 1972] Le système (1.25) est  $\mathcal{M}^2$ -observable sur  $[0, T]$  si pour tout  $h \in \mathcal{M}^2(-\tau, 0]$  et  $u \in \mathcal{L}^2(0, t; \mathbb{R}^m)$ , l'état  $h$  peut être déterminé de manière unique à partir de la connaissance de  $u$  et du plan d'observation  $\tilde{z}(\cdot; h; u)$ .

**Remarque 1.4.** *Observabilité forte  $\Rightarrow \mathcal{M}^2$  observabilité et observabilité*

**Définition 1.15.** (*F-observabilité*) [OLBROT, 1981] Soit  $F$  une classe de fonctions initiales pour le système (1.25). Le système (1.25) est  $F$ -observable sur  $[0, T]$  (respectivement  $F$ -observable) si et seulement si

$x_0(\cdot) \in F$  et la sortie  $y(t) = 0$  pour tout  $t \in [0, T]$  (respectivement, pour tout  $t \geq 0$ ) implique que  $x(t) = 0$  pour tout  $t \geq 0$ .

**Définition 1.16.** (*F-observabilité finale*) [OLBROT, 1981] Le système (1.25) est finalement *F-observable* si et seulement si pour toute fonction initiale continue  $x_0(\cdot) \in F$  et  $y(t) = 0$  pour tout  $t \in [0, T]$  implique  $x(T) = 0$ .

Notons que *F-observabilité* sur  $[0, T]$  implique une *F-observabilité finale* sur  $[0, T]$ .

**Définition 1.17.** (*Observabilité en temps infini*) [OLBROT, 1981] Le système (1.25) est considéré comme étant observable en temps infini si et seulement si pour toute fonction initiale continue  $x_0(\cdot)$ , la condition  $x(t) = 0$  pour tout  $t \geq 0$  implique que pour un certain  $t_1 \geq 0$  l'identité  $x(t) = 0$  pour tout  $t \geq t_1$  est valable.

**Définition 1.18.** (*Observabilité ponctuelle*) [DELFOUR et al., 1972] Le système (1.25) est observable point par point (ou, de manière équivalente, sur  $[0, T]$ ) si le point initial  $x_0$  peut être déterminé uniquement à partir de la connaissance des entrées  $u(t)$ ,  $\phi(t)$  et de la sortie  $y(t)$ .

## 1.6.2 Aperçu de quelques travaux existants sur l'observabilité des TDS

L'analyse de l'observation pour les systèmes à retard (TDS) remonte approximativement aux années 1980 [LEE et al., 1981b; OLBROT, 1981; RABAH, 1995; SALAMON, 1980]. La principale difficulté de l'analyse de l'observabilité d'un TDS vient du fait que son état est de dimension infinie, ce qui est en fait une collection d'informations qui contient l'historique du système. Cette caractéristique peut expliquer pourquoi la condition initiale d'un TDS est normalement une fonction. Pour les systèmes dynamiques sans retard, l'observabilité peut se caractériser par l'estimation de la condition initiale, ce qui est en fait équivalent à la reconstructibilité de l'état. De même, on peut aussi caractériser l'observabilité pour les TDS linéaires par cette propriété et, l'observabilité initiale a été proposé dans [OLBROT, 1977]. Cette définition est utile lorsque l'objectif principal est d'estimer la valeur initiale (passée) de l'état. Si la condition initiale  $x(t)$  pour  $t < 0$  est nulle ou est égale à une fonction connue et que  $x(0) \in \mathbb{R}^n$  est arbitrairement inconnue, l'observabilité initiale devient  $\mathbb{R}^n$ -observabilité [GABASOV et al., 1972]. Cette notion est utile si l'objectif est d'estimer la perturbation instantanée. Dans la littérature, pour les systèmes linéaires avec retard, la notion d'observabilité pour la condition initiale n'est pas équivalente à la reconstructibilité de la trajectoire du système [LEE et al., 1981b]. Plus précisément, pour les systèmes sans retard, la connaissance de la condition initiale est équivalente à connaître l'état final. Cependant, pour les TDS, la connaissance des conditions initiales est seulement suffisante, mais pas nécessaire pour estimer la trajectoire finale de l'état. Bien que l'extension de l'observabilité aux systèmes linéaires à retard à partir des systèmes linéaires sans retard est aussi équivalente à l'estimation de la condition initiale, il n'est en fait pas très utile car, dans la pratique, l'objet le plus important est d'estimer la trajectoire de l'état à tout moment et non la condition initiale. De ce fait, d'autres concepts d'observabilité liés à la reconstructibilité de la trajectoire des états ont été introduits. Sachant que la reconstruction des états peut être en temps fini ou en temps infini (asymptotique, lorsque le temps tend vers l'infini), deux définitions différentes sur l'observabilité sont proposées dans [OLBROT, 1981] : observable

en temps fini et observable en temps infini (asymptotique, comme la détectabilité). En outre, il existe également deux concepts d'observabilité définis en utilisant la méthode d'un algorithme algébrique formel, appelés observabilité faible et observabilité forte [SENAME, 2001]. En effet, le système étudié est fortement observable (c'est-à-dire observable sur l'anneau polynômial) si la matrice d'observabilité avec l'opérateur de retard est inversible à gauche sur l'anneau polynômial. On dit qu'il est faiblement observable (c'est-à-dire observable sur l'ensemble des réels) si sa matrice d'observabilité est inversible à gauche sur  $\mathbb{R}$ . Ces quatre dernières définitions d'observabilité servent uniquement à estimer la trajectoire des états. Par souci de simplicité et de commodité (cohérence pour l'observabilité pour d'autres types de systèmes), nous utiliserons le mot «état» lors du traitement des systèmes à retard dans ce manuscrit, ce qui désignera la trajectoire finale de l'état de dimension infinie du système étudié. Pour les TDS linéaires, divers aspects du problème d'observabilité ont été abordés dans la littérature. Différentes méthodes ont donc été utilisées telles que l'approche analytique fonctionnelle [BHAT et al., 1976] ou l'approche algébrique (anneau polynômial, forme de Smith, forme de Hermite ...) [BREWER et al., 1986; FLIESS et al., 1998; SONTAG, 1976]. En utilisant l'algèbre abstraite avec anneau polynômial pour un système à retard, les matrices ne sont plus constantes, mais sont formées par des polynômes d'opérateur de retard. En raison de la similitude, nous pouvons toujours suivre les mêmes idées pour que le LTI (algorithme de Molinari, condition de type Hautus) pour en déduire des conditions d'observabilité nécessaires et suffisantes pour les systèmes à retard. Pour les systèmes non linéaires à retard, la théorie des anneaux non commutatifs a été proposée pour la première fois dans [MOOG et al., 2000] pour résoudre le problème de découplage des perturbations. Ensuite, le problème d'observabilité a été étudié dans [XIA et al., 2002] pour les systèmes non linéaires à retard avec des entrées connues. Le système non linéaire à retard avec des entrées inconnues a été étudié dans [ZHENG et al., 2011a] en utilisant la même approche. Des observateurs associés pour certaines classes de systèmes à retards peuvent être trouvés dans [CONTE et al., 2003; DAROUACH, 2006; FATTOUH et al., 1999; FU et al., 2004; SENAME, 2001] et les références qui y figurent. D'autres résultats récents obtenus sur l'observation des systèmes à retard sont présentés dans [BEJARANO et al., 2017a,b; CALIFANO et al., 2011; KADER et al., 2018].

## 1.7 Systèmes complexes

L'analyse et la maîtrise de comportements complexes en réseaux, constitué d'un grand nombre de systèmes dynamiques, fait l'objet de beaucoup d'attention de la part de nombreux chercheurs et dans différents domaines : Voir [NEWMAN, 2006] pour un aperçu du travail dans le domaine des problèmes de complexité générale liés à la dynamique des réseaux, [WU, 2007] pour des contributions en synchronisation des réseaux complexes et les travaux de [KUMAR et al., 2005; REN et al., 2007] pour leurs contributions en commande coopérative. Un autre domaine de recherche connexe est le contrôle de systèmes spatialement invariants, où les systèmes fonctionnant sur un réseau spécifique sont traités comme des systèmes de dimension infinie. D'autres résultats concernant des travaux sur les systèmes en réseau sont présentés dans [BAMIEH et al., 2002;

D'ANDREA et al., 2003; LANGBORT et al., 2004; VOULGARIS et al., 2003]. La principale caractéristique des réseaux de systèmes dynamiques est leur complexité, la structure topologique et les forces de couplage variables dans le temps. La théorie des graphes algébriques a été largement utilisée dans une variété de travaux de recherche traitant de tels systèmes [FAX et al., 2004; JI et al., 2007; KUMAR et al., 2005; SILM et al., 2017; WANG et al., 2003; WU et al., 2007], où les interconnexions sont représentées sous forme de graphique.

La représentation des systèmes dynamiques en réseau mérite le titre de réseaux complexes pour les raisons suivantes :

- il existe des propriétés qui résultent de l'organisation topologique globale du système ;
- leurs structures topologiques ne peuvent être décrites trivialement comme dans le cas de graphiques aléatoires ou réguliers.

Les réseaux complexes peuvent être classés en fonction de la nature des interactions parmi les entités formant les nœuds du réseau. Voici quelques exemples de ces classes :

- Liaison physique : des paires de nœuds sont physiquement connectées par un lien tangible, tel qu'un câble, une route, une veine, etc. Les exemples sont : Internet, réseaux de routes ou rues urbaines, réseaux vasculaires, etc.
- Interactions physiques : les liens entre les paires de nœuds représentent les interactions qui sont déterminés par une force physique. Exemples : réseaux de résidus de protéines, réseaux d'interaction protéine-protéine, etc.
- Proximité géographique : les nœuds représentent les régions d'une surface et leurs connexions sont déterminés par leur proximité géographique. Les exemples sont : pays sur une carte, réseaux de paysage, etc.
- Échange de masse / énergie : les liens reliant des paires de nœuds indiquent que l'énergie ou la masse a été transférée d'un nœud à un autre. Les exemples sont : réseaux de réaction, réseaux métaboliques, réseaux alimentaires, réseaux commerciaux, etc.
- Liens sociaux : les liens représentent tout type de relation sociale entre nœuds. Les exemples sont : amitié, collaboration, etc.
- Liens conceptuels : les liens indiquent les relations conceptuelles entre des paires de nœuds. Exemples : dictionnaires, réseaux de citation, etc.

Dans le cadre de notre étude, le problème de l'identification de la topologie des réseaux de systèmes dynamiques est envisagé de sorte à être similaire aux problèmes de l'identification des paramètres [ZHANG et al., 2015]. Dans la littérature, des résultats sur l'identification des paramètres existent pour certaines classes de systèmes dynamique [BOUTAT et al., 2006; WANG et al., 2009; XIA et al., 2002; ZHENG et al., 2011b, 2013]. Notons que, dans la suite, par l'expression "**Estimation**", on entend l'observation simultanée des états avec l'identification des paramètres inconnus du système.

En prenant en compte les entrées inconnues, les réseaux de systèmes dynamiques deviennent beaucoup plus complexes à étudier. Les entrées inconnues peuvent être des bruits, des perturbations, ou des phénomènes extérieurs qui peuvent subvenir et dont on ignore les dynamiques.



La problématique des entrées inconnues s'avère très importante en pratique. En effet elle apparaît dans de nombreuses applications. Parmi elle, on peut citer :

- les applications en robustesse où les entrées inconnues représentent les perturbations [FLOQUET et al., 2006a; FRIDMAN et al., 2007];
- les applications en cryptographie où l'entrée inconnue représente le message [FEKI, 2003];
- les applications en sécurité des systèmes pour la détection de défauts [CHEN et al., 2008; FLOQUET et al., 2004].

Dans la littérature et de part leur importance, on peut trouver de nombreux autres résultats sur les systèmes à entrées inconnues [BARBOT et al., 2007; BEJARANO et al., 2013; FLOQUET et al., 2006b, 2007, 2013].

## 1.8 Conclusion

Dans ce chapitre, quelques définitions et principes importants concernant les systèmes dynamiques en général ont été présentés et certaines méthodes existantes concernant l'observabilité ont été résumées. En outre, quelques rappels et définitions de l'observabilité dans le cas des systèmes non linéaires et à retards ont été aussi présentés.



## **Partie I**

# **Observation et identification des systèmes complexes linéaires**



# Estimation pour les systèmes linéaires

## Sommaire

2.1	Introduction . . . . .	27
2.2	Formulation du problème . . . . .	27
2.3	Estimateur en temps fini . . . . .	30
2.4	Exemple illustratif . . . . .	39
2.5	Conclusion . . . . .	43

## 2.1 Introduction

Les systèmes linéaires sont largement étudiés dans la littérature. Ils représentent une modélisation mathématique simplifiée des systèmes réels et permettent d’obtenir des résultats plus ou moins satisfaisants en matière de performance et de robustesse. Ces systèmes a priori simples si on les étudie séparément deviennent beaucoup plus complexes si on les met en réseau tout en supposant que chaque système linéaire a une interaction avec les autres systèmes présents dans son environnement.

L’objectif principal du travail présenté dans ce chapitre étant d’identifier la topologie d’un réseau de systèmes dynamiques linéaires, il consiste donc à estimer les paramètres inconnus des interconnexions du réseau considéré. Un réseau de systèmes dynamiques peut être modélisé de différentes manières. Dans notre cas, les considérations faites sont présentées dans la section suivante.

## 2.2 Formulation du problème

Pour atteindre notre objectif, considérons un réseau de  $k$  systèmes dynamiques linéaires ( $k \in \mathbb{N}, k \geq 2$ ). Supposons que les interconnexions entre les systèmes dynamiques sont réalisées par des coefficients paramétriques constants mais inconnus, comme le montre la figure 2.1.

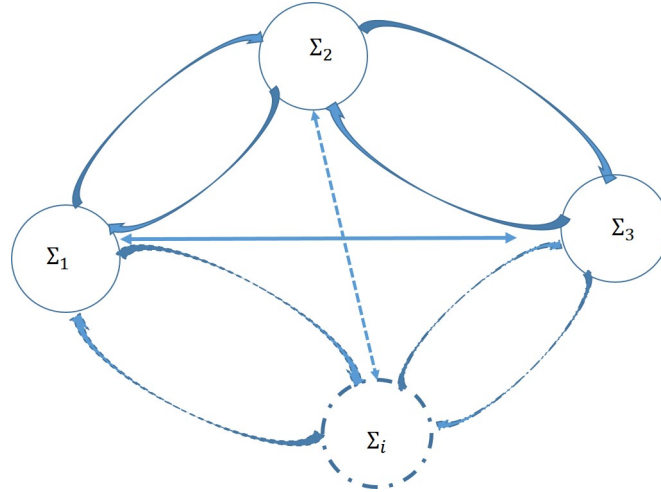


FIGURE 2.1 – Exemple de topologie d'un réseau de systèmes dynamiques

On suppose que chaque système dynamique linéaire  $\Sigma_i$  pour  $1 \leq i \leq k$  impliqué dans le réseau est de la forme suivante :

$$\Sigma_i : \begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_i x_i(t) + B_i u_i(t) + \sum_{j=1}^{q_i} \varphi_{i,j}(y_j(t)) \theta_{i,j} \\ y_i(t) = C_i x_i(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

où le vecteur  $x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$  représente l'état du système  $\Sigma_i$ , le vecteur  $u_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$  représente les entrées et le vecteur  $y_i(t) \in \mathbb{R}^{p_i}$  représente les sorties mesurables. Le vecteur des paramètres inconnus  $\theta_i = (\theta_{i,1}, \dots, \theta_{i,q_i})^T$  représente le vecteur des coefficients **constants mais inconnus** des interconnexions entre les systèmes dynamiques du réseau considéré.

Le vecteur des fonctions  $\varphi_{i,j}(y_j(t)) = (\varphi_{i,j}^1(y_j(t)), \dots, \varphi_{i,j}^{n_i}(y_j(t)))^T \in \mathbb{R}^{n_i}$  représente les informations qu'un sous système  $\Sigma_j$  injecte dans le sous système  $\Sigma_i$  via la connexion réalisé par  $\theta_i$ . Donc, la matrice des fonctions  $\varphi_i(y(t)) = (\varphi_{i,1}^T(y_1(t)), \dots, \varphi_{i,q_i}^T(y_{q_i}(t)))^T \in \mathbb{R}^{n_i \times q_i}$  représente l'ensemble des informations injectées par le réseau dans le sous système  $\Sigma_i$ . Pour simplifier notre étude, définissons  $n = \sum_{i=1}^k n_i$ ,  $m = \sum_{i=1}^k m_i$ ,  $p = \sum_{i=1}^k p_i$  et  $q = \sum_{i=1}^k q_i$  tels que

$$\begin{aligned} x(t) &= (x_1^T(t), \dots, x_k^T(t))^T \in \mathbb{R}^n \\ u(t) &= (u_1^T(t), \dots, u_k^T(t))^T \in \mathbb{R}^m \\ y(t) &= (y_1^T(t), \dots, y_k^T(t))^T \in \mathbb{R}^p \\ \theta &= (\theta_1^T, \dots, \theta_k^T)^T \in \mathbb{R}^q \end{aligned}$$

Nous pouvons réécrire la dynamique globale du réseau sous la forme compacte suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + \varphi(y(t))\theta \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

où les matrices  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $\varphi(y(t))$  ont la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & A_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & B_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m},$$

$$\text{et } C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & C_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & C_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad \text{et } \varphi(y(t)) = \begin{pmatrix} \varphi_1(y(t)) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi_2(y(t)) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \varphi_k(y(t)) \end{pmatrix}.$$

$\varphi(y(t))$  est une matrice de fonctions et est de dimension appropriée.

Notons que si toutes les connexions sont réalisées et que tous les éléments de  $\theta$  sont non nuls, alors la dimension de  $\theta$  est obtenue comme suit :  $q = k(k-1)$ . Dans le cadre de notre étude, l'identification topologique s'apparente à l'identification des paramètres  $\theta$  du réseau.

Dans nos travaux, on suppose que la connexion entre les systèmes dynamiques d'un même réseau prend le sens suivant :

- On suppose que les coefficients de connexions entre les systèmes sont constants par morceaux ;
- Si  $\theta_{i,j} = 0$ , cela signifie qu'il n'existe pas de connexion entre les deux systèmes concernés  $\Sigma_i$  et  $\Sigma_j$ . Dans le cas contraire,  $\theta_{i,j} \neq 0$ .
- Si  $\theta_{i,j}$  change soudainement d'une constante non nulle à zéro, cela signifie que la connexion entre les deux systèmes connectés est perdue ;
- Si  $\theta_{i,j}$  change brusquement de zéro à une constante non nulle, cela signifie que la connexion est rétablie ;
- Si  $\theta_{i,j}$  change soudainement d'une constante non nulle à une autre non nulle, cela signifie que le poids de la connexion a été modifié.

On suppose que l'ensemble du réseau est observable, c'est-à-dire que le couple  $(A, C)$  est observable. De manière équivalente, il existe un gain matriciel  $K$  tel que  $A - KC$  soit stable. Cela n'implique pas que pour chaque sous système dynamique du réseau  $\Sigma_i$ , il existe un gain matriciel  $L_i$  tel que  $A_i - L_i C_i$  soit stable ;

Nous supposons également que la topologie du réseau est identifiable, et cette condition peut être garantie par l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 2.1.** Pour  $\varphi(y(t)) \in \mathbb{R}^{n \times q}$  défini dans (2.2), on suppose que pour tout  $t > 0$ ,

$$q \leq n \text{ et rang } \varphi(y(t)) = q.$$

En se basant sur l'Hypothèse 2.1 ci-dessus, l'objectif de cette investigation est de concevoir un observateur capable d'estimer en temps fini les états  $x$  et les paramètres  $\theta$  du système (2.2). Ceci sera détaillé dans la section suivante.

### 2.3 Estimateur en temps fini

Dans cette section, nous allons présenter une nouvelle approche pour concevoir un observateur impulsif (convergeant en un temps fini donné en faisant un saut pour atteindre la valeur exacte) pour l'estimation simultanée et en temps fini des états et des paramètres du système (2.2). Cette approche est basée sur la technique proposée dans [ENGEL et al., 2002] et ensuite utilisée dans [RAFF et al., 2007]. Pour cela, considérons le changement de coordonnées suivant :

$$z(t) = x(t) - \Gamma(t)\theta \quad (2.3)$$

où  $z(t)$  représente le nouveau vecteur d'état dans le nouveau repère et  $\Gamma(t)$  est une matrice variable dans le temps qui sera définie ci-après. Pour le système (2.2), choisissons une matrice  $K$  telle que  $(A - KC)$  du réseau (2.2) soit stable, alors en dérivant l'équation (2.3) nous avons

$$\dot{z}(t) = \dot{x}(t) - \dot{\Gamma}(t)\theta = Ax(t) + Bu(t) + \varphi(y(t))\theta - \dot{\Gamma}(t)\theta$$

Ensuite, en introduisant le gain matriciel  $K$  dans la relation précédente, on obtient l'égalité suivante

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + \varphi(y(t))\theta - \dot{\Gamma}(t)\theta - KCx(t) + Ky(t) \\ &= (A - KC)x(t) + Bu(t) + \varphi(y(t))\theta - \dot{\Gamma}(t)\theta + Ky(t) \end{aligned}$$

Maintenant, en remplaçant  $x(t)$  par  $z(t) + \Gamma(t)\theta$ , on a

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= (A - KC)(z(t) + \Gamma(t)\theta) + Bu(t) + \varphi(y(t))\theta - \dot{\Gamma}(t)\theta + Ky(t) \\ &= (A - KC)z(t) + Bu(t) + Ky(t) - \dot{\Gamma}(t)\theta + [(A - KC)\Gamma(t) + \varphi(y(t))]\theta \end{aligned}$$

En définissant  $\dot{\Gamma}(t)$  comme étant la solution de l'équation différentielle suivante

$$\dot{\Gamma}(t) = (A - KC)\Gamma(t) + \varphi(y(t)) \quad (2.4)$$

avec  $\Gamma(0) = 0$ , puis en remplaçant  $\dot{\Gamma}(t)$  dans  $\dot{z}(t)$ , on obtient

$$\dot{z}(t) = (A - KC)z(t) + Bu(t) + Ky(t) \quad (2.5)$$

Notons que le système déduit (2.5) ne dépend que de la commande  $u(t)$  et de la sortie  $y(t)$ , avec une matrice linéaire stable  $(A - KC)$ . Cela signifie que l'état  $z(t)$  de (2.5) est détectable. Nous pouvons donc facilement concevoir un observateur pour estimer asymptotiquement  $z(t)$ .

Dans ce qui suit, on se propose de concevoir un ensemble de tels observateurs asymptotiques



pour obtenir une estimation impulsive en temps fini des états et des paramètres inconnus. Pour y parvenir, considérons encore le système (2.2), pour toute connexion topologique possible  $q \in \mathbb{N}$  avec  $q \leq n(n-1)$ , et choisissons aussi un entier naturel  $v \in \mathbb{N}$  tel que  $v \geq \frac{q}{n} + 2$  (dans notre cas,  $v \geq 3$  puisque  $q \leq n$ ).

**Remarque 2.1.** L'entier naturel  $v$  est choisi de sorte à obtenir rang  $\Omega(t, h) = 2n + q$  où  $\Omega(t, h)$  est défini dans (2.8).

Avec un tel entier  $v$ , nous allons concevoir  $v$ -fois l'observateur asymptotique de type (2.5) avec différents gains matriciels  $K_i$  pour  $1 \leq i \leq v$  (les matrices  $K_i$  sont choisies telles que les  $A - K_i C$  soient stable), ce qui conduit à  $v$  changements de coordonnées suivants :

$$\begin{cases} z_1(t) = x(t) - \Gamma_1(t)\theta \\ z_2(t) = x(t) - \Gamma_2(t)\theta \\ \vdots = \vdots \\ z_v(t) = x(t) - \Gamma_v(t)\theta \end{cases} \quad (2.6)$$

où  $z_i(t) \in \mathbb{R}^n$  et  $\Gamma_i(t) \in \mathbb{R}^{n \times q}$  (pour  $1 \leq i \leq v$ ) sont déterminés comme suit :

$$\begin{cases} \dot{\Gamma}_1(t) = (A - K_1 C)\Gamma_1(t) + \varphi(y(t)) \\ \dot{\Gamma}_2(t) = (A - K_2 C)\Gamma_2(t) + \varphi(y(t)) \\ \vdots = \vdots \\ \dot{\Gamma}_v(t) = (A - K_v C)\Gamma_v(t) + \varphi(y(t)) \end{cases} \quad (2.7)$$

Les gains  $K_i$  sont choisis de sorte que  $(A - K_i C)$  soient des matrices de Hurwitz. Ces paramètres génèrent  $v$  systèmes transformés de la forme (2.5), c'est à dire

$$\dot{z}_i(t) = (A - K_i C)z_i(t) + Bu(t) + K_i y(t), \text{ pour } i = 1, \dots, v$$

Pour chaque système de la forme ci-dessus, nous pouvons concevoir les observateurs asymptotiques suivants

$$\dot{\hat{z}}_i(t) = (A - K_i C)\hat{z}_i(t) + Bu(t) + K_i y(t)$$

Pour plus de simplicité, notons  $F_i = A - K_i C$  pour  $1 \leq i \leq v$ , et définissons la matrice  $\Omega(t, h) \in \mathbb{R}^{vn \times (2n+q)}$  comme suit :

$$\Omega(t, h) = \begin{bmatrix} -I & \int_{t-h}^t e^{F_1(t-h)} \varphi(y(s)) ds & e^{F_1 h} \\ -I & \int_{t-h}^t e^{F_2(t-h)} \varphi(y(s)) ds & e^{F_2 h} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -I & \int_{t-h}^t e^{F_v(t-h)} \varphi(y(s)) ds & e^{F_v h} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

où  $h$  représente un retard constant (décalage de durée constante) et positif qui peut être librement choisi.

Dans la suite, nous allons montrer grâce aux 3 lemmes suivants que  $\text{rang } \Omega(t, h) = 2n + q$ . Pour cela, notons  $\Delta F_{i,j} = F_i - F_j$  et  $\lambda_k\{\Delta F_{i,j}\}$ ,  $k = 1, \dots, n$  comme étant les valeurs propres de  $\Delta F_{i,j}$ . Soit  $V$  la matrice des vecteurs propres associés aux valeurs propres de  $\Delta F_{i,j}$ .

**Lemme 2.1.** *On peut toujours trouver des matrices  $K_i$  et  $K_j$ ,  $i, j \in \{1, \dots, v\}$ ,  $i \neq j$  telles que  $F_i, F_j$  soient stables, que les valeurs propres de  $F_i, F_j$  ne soient pas multiples et que  $\text{rang}(e^{F_i h} - e^{F_j h}) = n$ .*

*Preuve.* Soit  $K_i$  un gain matriciel choisi tel que  $F_i = (A - K_i C)$  soit stable (toutes les valeurs propres sont à partie réelle négative) et que les valeurs propres de  $F_i$  ne soient pas multiples. Il existe donc une matrice  $\mathcal{P}$  des vecteurs propres de  $F_i$  correspondant aux valeurs propres de  $F_i$  telle que

$$\mathcal{P}^{-1}(A - K_i C)\mathcal{P} = \mathcal{P}^{-1}F_i\mathcal{P} = \text{diag}(\lambda_1\{F_i\}, \dots, \lambda_n\{F_i\}) = \Lambda_i$$

Soit  $K_j$  une matrice telle que  $F_j = A - K_j C = F_i - \alpha_{i,j}I$  avec  $\alpha_{i,j} \in \mathbb{N}^*$ . Notons que  $\alpha_{i,j}$  peut être choisi de façon arbitraire, ainsi on peut obtenir différentes matrices diagonales. On a :

$$\mathcal{P}^{-1}F_j\mathcal{P} = \mathcal{P}F_i\mathcal{P} - \alpha_{i,j}I = \text{diag}\{\lambda_1\{F_i\} - \alpha_{i,j}, \dots, \lambda_n\{F_i\} - \alpha_{i,j}\} = \Lambda_j \quad (2.9)$$

Ensuite, on obtient

$$e^{F_j h} - e^{F_i h} = \mathcal{P}^{-1}(e^{\Lambda_j h} - e^{\Lambda_i h})\mathcal{P}.$$

Les matrices  $\Lambda_i$  et  $\Lambda_j$  étant des matrices diagonales (donc commutative), on a :

$$\begin{aligned} \text{rang}(e^{F_j h} - e^{F_i h}) &= \text{rang}(\mathcal{P}^{-1}(e^{\Lambda_j h} - e^{\Lambda_i h})\mathcal{P}) \\ &= \text{rang}(\mathcal{P}^{-1}[(I - e^{\Lambda_i h - \Lambda_j h})e^{\Lambda_j h}]\mathcal{P}) \\ &= \text{rang}(\mathcal{P}^{-1}(I - e^{\Lambda_i h - \Lambda_j h})\mathcal{P}) \\ \text{rang}(e^{F_j h} - e^{F_i h}) &= \text{rang}(I - e^{\Lambda_{i,j} h}) \text{ avec } \Lambda_{i,j} = \Lambda_i - \Lambda_j \end{aligned}$$

Notons que

$$\begin{aligned} \Lambda_{i,j} &= \Lambda_i - \Lambda_j \\ &= \text{diag}\{\lambda_1\{F_i\}, \dots, \lambda_n\{F_i\}\} - \text{diag}\{\lambda_1\{F_i\} - \alpha_{i,j}, \dots, \lambda_n\{F_i\} - \alpha_{i,j}\} \\ &= \text{diag}\{\alpha_{i,j}, \dots, \alpha_{i,j}\} \end{aligned}$$

Donc, pour tout  $\alpha_{i,j} \in \mathbb{N}^+$ ,  $\text{rang}(e^{F_j h} - e^{F_i h}) = n$ . ■

Soient  $\lambda\{F_i\}$ ,  $\lambda\{F_j\}$  et  $\lambda\{F_l\}$  les valeurs propres respectives de  $F_i$ ,  $F_j$  et  $F_l$ . On a :

$$\begin{aligned}\lambda\{F_i\} &= \text{diag}\{\lambda_1\{F_i\}, \dots, \lambda_n\{F_i\}\} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}, \\ \lambda\{F_j\} &= \text{diag}\{\lambda_1 - \alpha_{i,j}, \dots, \lambda_n - \alpha_{i,j}\} \text{ et} \\ \lambda\{F_l\} &= \text{diag}\{\lambda_1 - \alpha_{i,l}, \dots, \lambda_n - \alpha_{i,l}\} \text{ où } \alpha_{i,l} = 2\alpha_{i,j}.\end{aligned}$$

Soient  $\Delta\lambda_k\{\Delta F_{i,j}\} = \lambda_k\{F_j\} - \lambda_k\{F_i\}$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$  et  $\Delta\lambda_k\{\Delta F_{j,l}\} = \lambda_k\{F_l\} - \lambda_k\{F_j\}$ . On peut choisir  $F_i$ ,  $F_j$  et  $F_l$  telles que  $\Delta\lambda_k\{\Delta F_{i,j}\} = \Delta\lambda_k\{\Delta F_{j,l}\} = \alpha_{i,j}$ . Le lemme suivant sera nécessaire dans suite de la démonstration.

**Lemme 2.2.** *Pour tout  $t \geq h$ , si l'Hypothèse 2.1 est satisfaite, alors*

$$\text{rang} \int_{t-h}^t \zeta(t,s) \varphi(y(s)) ds = q$$

avec  $\zeta(t,s) = e^{\mathcal{F}(t,\lambda,h,s)}$  où les valeurs propres de  $\mathcal{F}$  sont données par :

$$\lambda\{\mathcal{F}\} = \text{diag} \left\{ \dots, \frac{e^{\lambda_r(h+t-s)}(e^{-(t-s)} - e^{-h})(e^{-(t-s)} - 1)}{e^{(2\lambda_r-1)h}(e^{-h} - 1)}, \dots \right\}$$

et  $\lambda_r$  représente la  $r$ -ième valeur propre de  $F_i$ . La procédure d'obtention de  $\zeta(t,s)$  (et donc de  $\mathcal{F}$ ) est donnée ci après dans la preuve du Lemme 2.3.

Notons que  $\zeta(t,s)$  est une matrice inversible sur  $\mathbb{R}$  pour tout  $t \neq s$  et  $t \neq h+s$ .

*Preuve.* Considérons  $\varphi(y(t)) \in \mathbb{R}^{n \times q}$  défini dans (2.2) avec  $q < n$ . Si l'Hypothèse 2.1 est satisfaite, alors toutes les colonnes de  $\varphi(y(t))$  sont indépendantes. On ne peut donc pas trouver un vecteur non nul  $H = [h_1, \dots, h_q]^T$  tel que

$$\varphi(y(t))H = 0.$$

Cela équivaut à dire que pour tout  $\zeta(t,s) \neq 0$ ,  $\nexists H \neq 0$  tel que  $\zeta(t,s)\varphi(y(s))H = 0$ , ce qui implique que  $\nexists H \neq 0$  tel que

$$\int_{t-h}^t \zeta(s)\varphi(y(s))H ds = 0.$$

Or,

$$\zeta(t,s) = e^{\mathcal{F}(t,\lambda,h,s)} = \mathcal{P}^{-1} \text{diag} \left\{ \dots, \frac{e^{\lambda_r(h+t-s)}(e^{-(t-s)} - e^{-h})(e^{-(t-s)} - 1)}{e^{(2\lambda_r-1)h}(e^{-h} - 1)}, \dots \right\} \mathcal{P}.$$

Donc  $\zeta(t,s)$  est inversible si son déterminant est non nul, c'est-à-dire si  $t \neq s$  et  $t \neq h+s$ .

Pour tout  $t \neq h$ ,

$$\begin{aligned} \int_{t-h}^t \zeta(t,s)\varphi(y(s))Hds &= \int_{t-h}^{(t-h)^+} \zeta(t,s)\varphi(y(s))Hds + \int_{(t-h)^+}^{t^-} \zeta(t,s)\varphi(y(s))Hds + \int_{t^-}^t \zeta(t,s)\varphi(y(s))Hds \\ &= \int_{(t-h)^+}^{t^-} \zeta(t,s)\varphi(y(s))Hds. \end{aligned}$$

Cette décomposition de l'intégrale est nécessaire pour éliminer les extrémités où  $\zeta(t,s)$  est nul. Les matrices  $F_i$ ,  $F_j$  et  $F_l$  peuvent donc être choisies de telle sorte que pour tout  $\zeta(t,s)$ ,

$$\int_{t-h}^t \zeta(t,s)\varphi(y(s))Hds = \int_{t-h}^t \zeta(t,s)\varphi(y(s))dsH = \int_{(t-h)^+}^{t^-} \zeta(t,s)\varphi(y(s))dsH.$$

Alors  $\nexists H \neq 0$  tel que  $\int_{t-h}^t \zeta(t,s)\varphi(y(s))dsH = 0$ . D'où,

$$\text{rang} \int_{t-h}^t \zeta(t,s)\varphi(y(s))ds = q$$

pour tout  $t \geq h$ . ■

Le lemme suivant peut alors être déduit du Lemme 2.1 et du Lemme 2.2.

**Lemme 2.3.** *Si l'Hypothèse 2.1 est satisfaite, alors  $\text{rang} \Omega(t,h) = 2n + q$  pour tout  $t \geq h$ .*

*Preuve.* Pour la matrice  $\Omega(t,h)$  définie dans (2.8), choisissons les lignes  $i, j, l \in \{1, \dots, v\}$  telles que  $\alpha_{i,l} = 2\alpha_{i,j}$ . Par des opérations sur les lignes  $i, j$  et  $l$  de la matrice  $\Omega(t,h)$ , on peut écrire

$$\text{rang} \Omega(t,h) = \text{rang} \begin{bmatrix} -I & e^{F_i h} & \int_{t-h}^t e^{F_i(t-s)}\varphi(y(s))ds \\ 0 & e^{F_j h} - e^{F_i h} & P_{i,j} \\ 0 & e^{F_l h} - e^{F_j h} & P_{j,l} \\ -I & e^{F_{\alpha_1} h} & \int_{t-h}^t e^{F_{\alpha_1}(t-s)}\varphi(y(s))ds \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -I & e^{F_{\alpha_r} h} & \int_{t-h}^t e^{F_{\alpha_r}(t-s)}\varphi(y(s))ds \end{bmatrix},$$

où  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \neq \{i, j, l\}$  avec  $P_{i,j} = \int_{t-h}^t [e^{F_j(t-s)} - e^{F_i(t-s)}]\varphi(y(s))ds$  et  $P_{j,l} = \int_{t-h}^t [e^{F_l(t-s)} - e^{F_j(t-s)}]\varphi(y(s))ds$ . En se référant au Lemme 2.1, on a :

$$\text{rang} \Omega(t,h) = \text{rang} \begin{bmatrix} -I & e^{F_i h} & \int_{t-h}^t e^{F_i(t-s)}\varphi(y(s))ds \\ 0 & I & [e^{F_j h} - e^{F_i h}]^{-1} P_{i,j} \\ 0 & I & [e^{F_l h} - e^{F_j h}]^{-1} P_{j,l} \\ -I & e^{F_{\alpha_1} h} & \int_{t-h}^t e^{F_{\alpha_1}(t-s)}\varphi(y(s))ds \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -I & e^{F_{\alpha_r} h} & \int_{t-h}^t e^{F_{\alpha_r}(t-s)}\varphi(y(s))ds \end{bmatrix}$$

$$\text{rang}\Omega(t, h) = \text{rang} \begin{bmatrix} -I & e^{F_i h} & \int_{t-h}^t e^{F_i(t-s)} \varphi(y(s)) ds \\ 0 & I & [e^{F_j h} - e^{F_i h}]^{-1} P_{i,j} \\ 0 & 0 & Q \\ -I & e^{F_{\alpha_1} h} & \int_{t-h}^t e^{F_{\alpha_1}(t-s)} \varphi(y(s)) ds \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -I & e^{F_{\alpha_r} h} & \int_{t-h}^t e^{F_{\alpha_r}(t-s)} \varphi(y(s)) ds \end{bmatrix}$$

avec  $Q = [e^{F_i h} - e^{F_j h}]^{-1} P_{j,i} - [e^{F_j h} - e^{F_i h}]^{-1} P_{i,j}$ . La matrice  $\Omega(t, h)$  est donc de rang plein dans le sens des colonnes pour tout  $t \geq h$  si et seulement si  $\text{rang } Q = q$ . On a :

$$Q = [e^{F_i h} - e^{F_j h}]^{-1} \int_{t-h}^t [e^{F_i(t-s)} - e^{F_j(t-s)}] \varphi(y(s)) ds - [e^{F_j h} - e^{F_i h}]^{-1} \int_{t-h}^t [e^{F_j(t-s)} - e^{F_i(t-s)}] \varphi(y(s)) ds.$$

Soit  $Q = Q_1 - Q_2$  avec :

$$Q_1 = [e^{F_i h} - e^{F_j h}]^{-1} \int_{t-h}^t [e^{F_i(t-s)} - e^{F_j(t-s)}] \varphi(y(s)) ds \text{ et } Q_2 = [e^{F_j h} - e^{F_i h}]^{-1} \int_{t-h}^t [e^{F_j(t-s)} - e^{F_i(t-s)}] \varphi(y(s)) ds.$$

En se basant sur la preuve du Lemme 2.1, on a :

$$\begin{aligned} Q_2 &= \mathcal{P}^{-1} [e^{\Lambda_j h} - e^{\Lambda_i h}]^{-1} \mathcal{P} \int_{t-h}^t \mathcal{P}^{-1} [e^{\Lambda_j(t-s)} - e^{\Lambda_i(t-s)}] \mathcal{P} \varphi(y(s)) ds \\ &= \int_{t-h}^t \mathcal{P}^{-1} [e^{\Lambda_j h} - e^{\Lambda_i h}]^{-1} [e^{\Lambda_j(t-s)} - e^{\Lambda_i(t-s)}] \mathcal{P} \varphi(y(s)) ds \\ Q_2 &= \int_{t-h}^t \mathcal{P}^{-1} \text{diag} \left\{ \dots, \frac{e^{(\lambda_r - \alpha_{i,j})(t-s)} - e^{\lambda_r(t-s)}}{e^{(\lambda_r - \alpha_{i,j})h} - e^{\lambda_r h}}, \dots \right\} \mathcal{P} \varphi(y(s)) ds \end{aligned}$$

Par analogie, on a :

$$Q_1 = \int_{t-h}^t \mathcal{P}^{-1} \text{diag} \left\{ \dots, \frac{e^{(\lambda_r - 2\alpha_{i,j})(t-s)} - e^{(\lambda_r - \alpha_{i,j})(t-s)}}{e^{(\lambda_r - 2\alpha_{i,j})h} - e^{(\lambda_r - \alpha_{i,j})h}}, \dots \right\} \mathcal{P} \varphi(y(s)) ds$$

Donc,

$$Q = \int_{t-h}^t \mathcal{P}^{-1} \text{diag} \left\{ \dots, \frac{e^{(\lambda_r - 2\alpha_{i,j})(t-s)} - e^{(\lambda_r - \alpha_{i,j})(t-s)}}{e^{(\lambda_r - 2\alpha_{i,j})h} - e^{(\lambda_r - \alpha_{i,j})h}} - \frac{e^{(\lambda_r - \alpha_{i,j})(t-s)} - e^{\lambda_r(t-s)}}{e^{(\lambda_r - \alpha_{i,j})h} - e^{\lambda_r h}}, \dots \right\} \mathcal{P} \varphi(y(s)) ds$$

En choisissant par exemple  $\alpha_{i,j} = 1$ , on a :

$$\begin{aligned} Q &= \int_{t-h}^t \mathcal{P}^{-1} \text{diag} \left\{ \dots, \frac{e^{\lambda_r(h+t-s)}(e^{-(t-s)} - e^{-h})(e^{-(t-s)} - 1)}{e^{(2\lambda_r - 1)h}(e^{-h} - 1)}, \dots \right\} \mathcal{P} \varphi(y(s)) ds \\ &= \int_{t-h}^t \zeta(t, s) \varphi(y(t)) ds \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\text{rang } Q = \text{rang} \int_{t-h}^t \zeta(t,s) \varphi(y(t)) ds$$

En se basant sur les Lemmes 2.1 et 2.2, si l'Hypothèse 2.1 est satisfaite, alors  $\text{rang } Q = q$ . Donc,  $\text{rang } \Omega(t,h) = 2n + q$  pour tout  $t \geq h$ . ■

Étant donné qu'ici, nous supposons que les paramètres sont constants par intervalle, un mécanisme de détection de l'instant de commutation doit être introduit. Inspiré par la technique de détection résiduelle des fautes, nous introduisons un résidu similaire à l'erreur d'estimation de la sortie  $R(t,T)$  qui est calculée sur un intervalle  $T > h$  comme suit :

$$R(t,T) = \begin{cases} 0, \forall t < T \\ \int_{t-T}^t (y(s) - C\hat{x}(s))^T (y(s) - C\hat{x}(s)) ds, \forall t \geq T \end{cases} \quad (2.10)$$

où  $y(t)$  représente le vecteur des sorties du système (2.2) et  $\hat{x}(t)$  représente l'estimation du vecteur d'état  $x(t)$  et qui sera défini ci-après dans (2.12).

Le résidu ci-dessus nous permet maintenant de définir la variable  $T_\theta$  suivante :

$$T_\theta = \begin{cases} 0 & \forall t < T \\ t & \forall t \geq T \text{ si } R = 0 \\ T_{\theta_i} & \forall t \geq T \text{ si } R > 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

où  $T_{\theta_i}$  est l' $i$ -ème instant de changement de topologie.

La variable définie  $T_\theta$  peut être interprétée comme suit. Premièrement, on l'initialise à 0 à  $t = 0$ . Ensuite elle est égale à  $t$  si le résidu  $R(t,T) = 0$ , c'est à dire si l'estimation est exacte. Dans d'autres cas,  $T_\theta$  sera fixé comme une constante non nulle lorsque l'estimation n'est pas correcte (en raison de la commutation de la topologie). Nous pouvons maintenant énoncer le théorème suivant.

**Théorème 2.1.** *Supposons que l'Hypothèse 2.1 est satisfaite, alors le système décrit par les dynamiques suivantes :*

$$\begin{cases} \dot{\hat{z}}_i(t) = F_i \hat{z}_i(t) + Bu(t) + K_i y(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x} + Bu(t) + \varphi(y)\hat{\theta} \\ \dot{\hat{\theta}}(t) = 0 \end{cases} \quad \text{pour } t \neq T_\theta + h, \quad (2.12)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{\theta} \\ \hat{x}(t-h) \end{bmatrix} = [\Omega(t,h)]_L^{-1} \hat{Z}(t,h) \text{ si } t = T_\theta + h$$

où  $[\Omega(t,h)]_L^{-1}$  est l'inverse à gauche de  $\Omega(t,h)$  défini dans (2.8),  $T_\theta$  est défini dans (2.11), et

$$\hat{Z}(t, h) = \begin{bmatrix} e^{F_1 h} \hat{z}_1(t-h) - \hat{z}_1 \\ e^{F_2 h} \hat{z}_2(t-h) - \hat{z}_2 \\ \vdots \\ e^{F_v h} \hat{z}_v(t-h) - \hat{z}_v \end{bmatrix},$$

est un observateur en temps fini pour le système (2.2).  $\diamond$

*Preuve.* Après l'introduction de  $v$  changements de coordonnées  $z_i = x_i - \Gamma_i \theta$ , le système (2.2) peut être mis sous la forme suivante

$$\dot{z}_i(t) = F_i z_i(t) + Bu + K_i y, \text{ pour } 1 \leq i \leq v$$

pour lequel l'on peut concevoir les  $v$  observateurs asymptotiques suivants

$$\dot{\hat{z}}_i(t) = F_i \hat{z}_i(t) + Bu + K_i y, \text{ for } 1 \leq i \leq v$$

où  $F_i = (A - K_i C)$  pour  $i = 1, \dots, v$  sont stables. Les erreurs d'estimation de  $z_i$  sont données par  $\varepsilon_{z_i} = \hat{z}_i(t) - z_i(t) = \hat{z}_i(t) - x_i(t) + \Gamma_i \theta$  telles que

$$\dot{\varepsilon}_{z_i} = F_i \varepsilon_{z_i} \quad (2.13)$$

qui converge cependant vers zéro pour  $t \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire de manière asymptotique.

Pour obtenir une convergence en temps fini, un retard constant  $h$  est introduit avec lequel nous obtenons l'égalité suivante à partir de (2.13) :

$$\hat{z}_i(t) - x(t) + \Gamma_i(t)\theta = e^{F_i h} [\hat{z}_i(t-h) - x(t-h) + \Gamma_i(t-h)\theta] \quad (2.14)$$

De plus, à partir de la dynamique de  $\Gamma_i$  définie dans (2.7) et des dynamiques de l'observateur (2.12), on a :

$$\begin{aligned} \hat{z}_i(t) &= e^{F_i h} z_i(t-h) + \int_{t-h}^t e^{F_i(t-s)} [Bu(s) + K_i y(s)] ds; \\ \hat{x}(t) &= e^{F_i h} \hat{x}(t-h) + \int_{t-h}^t e^{F_i(t-s)} [Bu(s) + \varphi(y(s))\theta] ds; \\ \Gamma_i(t) &= e^{F_i h} \Gamma_i(t-h) + \int_{t-h}^t e^{F_i(t-s)} \varphi(y(s)) ds. \end{aligned}$$

En substituant les équations précédentes dans (2.14), on obtient

$$\hat{Z}(t, h) = \Omega(t, h) \begin{bmatrix} x(t) \\ \theta \\ x(t-h) \end{bmatrix},$$

où

$$\hat{Z}(t, h) = \begin{bmatrix} e^{F_1 h} \hat{z}_1(t-h) - \hat{z}_1(t) \\ e^{F_2 h} \hat{z}_2(t-h) - \hat{z}_2(t) \\ \vdots \\ e^{F_v h} \hat{z}_v(t-h) - \hat{z}_v(t) \end{bmatrix} \text{ et } \Omega(t, h) = \begin{bmatrix} -I & \Gamma_1(t) - e^{F_1 h} \Gamma_1(t-h) & e^{F_1 h} \\ -I & \Gamma_2(t) - e^{F_2 h} \Gamma_2(t-h) & e^{F_2 h} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -I & \Gamma_v(t) - e^{F_v h} \Gamma_v(t-h) & e^{F_v h} \end{bmatrix}.$$

Par conséquent, on peut conclure que l'estimation exacte peut être obtenue comme suit :

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \theta \\ x(t-h) \end{bmatrix} = [\Omega(t, h)]_L^{-1} \hat{Z}(t, h) \quad (2.15)$$

à condition que  $\Omega(t, h)$  soit de rang plein par colonne.

Le mécanisme d'impulsion introduit dans (2.12) a pour but de déterminer quand une telle estimation exacte (2.15) peut être effectuée en prenant en compte le fait que les paramètres sont constants par intervalles et donc changent dans le temps.

Initialement, nous avons  $R(t, T) = 0$  pour  $t < T$  où  $T$  avec  $T > h$  est l'intervalle de temps pour calculer l'erreur d'estimation résiduelle  $R(t, T)$  défini dans (2.10). Ainsi, selon la définition de la variable de commutation  $T_\theta$  définie dans (2.11), nous obtenons  $T_\theta = 0$ . Cela signifie que l'observateur (2.12) est initialisé car il existe une topologie inconnue (paramètres) à identifier. Par conséquent, en raison de l'Hypothèse 2.1, lorsque  $t = T_\theta + h$ , nous pouvons obtenir l'estimation exacte via (2.15).

Après le comportement impulsif à  $t = T_\theta + h$ , nous avons  $\hat{x} = x$  et  $\hat{\theta} = \theta$ . Selon la dynamique de l'observateur (2.12), nous pouvons conclure que  $\hat{\theta}$  sera égal à la valeur exacte de  $\theta$  et que  $\hat{x}$  sera égale à la valeur exacte de  $x$  (puisque  $\hat{x}$  et  $x$  ont maintenant la même structure dynamique avec exactement la même valeur à  $t = T_\theta + h$ ). En conséquence, le résidu  $R(t, T) = 0$  jusqu'à ce que la topologie soit modifiée. Dans ce cas,  $T_\theta = t$  selon (2.11), et le mécanisme d'impulsion ne sera pas activé (puisque'il nécessite  $t = T_\theta + h = t + h$  qui n'est pas réalisable) si aucune commutation de topologie ne se produit.

Lorsqu'il se produit un changement soudain de la topologie, la valeur de  $\theta$  sera modifiée, et donc  $\hat{\theta}$  n'est plus égal à la nouvelle valeur de  $\theta$ , ce qui fait que  $\hat{x}$  diverge par rapport à la valeur réelle de  $x$ , produisant un résidu  $R(t, T) > 0$ . Cette valeur coïncide avec l'instant de commutation de la topologie et sera stockée sous la forme d'une valeur constante  $T_\theta$  selon la relation (2.11). Ensuite, le mécanisme impulsif sera réactivé lorsque  $t = T_\theta + h$ , ce qui donnera à nouveau l'estimation exacte de  $x$  et de  $\theta$  en temps fini.

Par conséquent, nous pouvons conclure que le système (2.12) est un observateur qui nous permet d'obtenir une estimation simultanée en temps fini de l'état  $x$  et des paramètres inconnus  $\theta$  qui sont constants par intervalles dans le réseau considéré (2.2). ■

**Remarque 2.2.** Soit  $T_{\theta_i}$ ,  $i = 1, \dots, q$  la durée minimale des intervalles sur lesquelles le paramètre  $\theta_i$  est constante. Le retard  $h$  doit être choisi de sorte que  $h < \min\{T_{\theta_1}, \dots, T_{\theta_q}\}$ .



## 2.4 Exemple illustratif

Pour illustrer les résultats de l'observateur proposé, considérons le réseau de systèmes dynamiques interconnectés comme le montre la figure suivante :

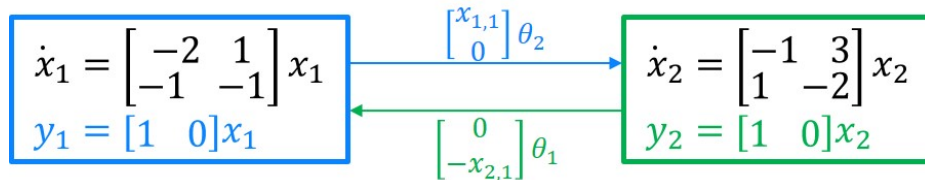


FIGURE 2.2 – Réseau formé par 2 systèmes dynamiques linéaires

Le modèle de l'ensemble du réseau est décrit par la forme compacte suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \varphi(y)\theta \\ y = Cx \end{cases} \quad (2.16)$$

où  $A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}$  et  $\varphi(y) = \begin{bmatrix} \varphi_1(y) & 0 \\ 0 & \varphi_2(y) \end{bmatrix}$  avec  $A_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ,  $C_1 = C_2 = [1 \ 0]$ ,  $\varphi_1(y) = \begin{bmatrix} 0 \\ -y_{2,1} \end{bmatrix}$  et  $\varphi_2(y) = \begin{bmatrix} y_{1,1} \\ 0 \end{bmatrix}$ . La topologie du réseau dans le temps est donnée par les paramètres comme suit

$$\theta = \begin{cases} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}^T & \text{pour } t \leq 5s \\ \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^T & \text{pour } t > 5s \end{cases}$$

Alors, pour le réseau global, on a :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \varphi(y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -y_{2,1} & 0 \\ 0 & y_{1,1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour la suite, choisissons  $v = 5$  qui satisfait la relation  $q \leq n(v - 2)$ . Ensuite, en choisissant les pôles suivants qui satisfont les conditions données sur les  $F_i$  dans les Lemmes 2.1, 2.2 et 2.3 :

$$\begin{aligned} p1 &= [-3, -4, -5, -6], & p2 &= [-6, -8 - 10, -12], \\ p3 &= [-9 - 12 - 15, -18], & p4 &= [-12, -16, -20, -24], \\ p5 &= [-15, -20, -25, -30], \end{aligned}$$

on obtient les gains matriciels

$$K_1 = \begin{bmatrix} 5.0657 & -0.3156 \\ 7.2201 & -1.0358 \\ -0.4094 & 6.9343 \\ -0.3492 & 3.6159 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} 16.6928 & -1.1299 \\ 73.5395 & -9.0523 \\ -1.0040 & 13.3072 \\ -2.3417 & 12.3844 \end{bmatrix}, K_3 = \begin{bmatrix} 25.7693 & -2.5730 \\ 170.6510 & -32.2386 \\ -2.2816 & 22.2307 \\ -8.7082 & 36.0398 \end{bmatrix},$$

$$K_4 = \begin{bmatrix} 34.6028 & -3.8729 \\ 303.3851 & -66.0186 \\ -3.4686 & 31.3972 \\ -18.4081 & 73.7401 \end{bmatrix}, \text{ et } K_5 = \begin{bmatrix} 43.4724 & -5.0280 \\ 474.4554 & -108.4241 \\ -4.5417 & 40.5276 \\ -30.8796 & 124.6735 \end{bmatrix}$$

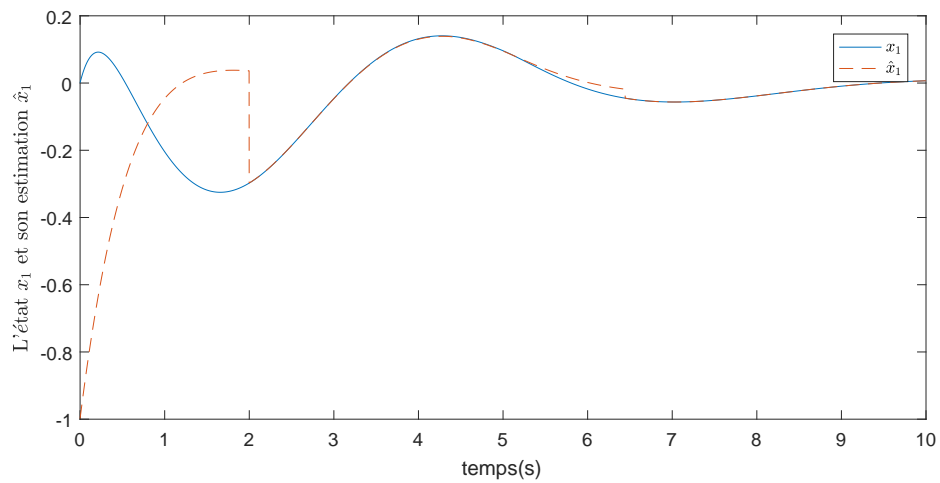
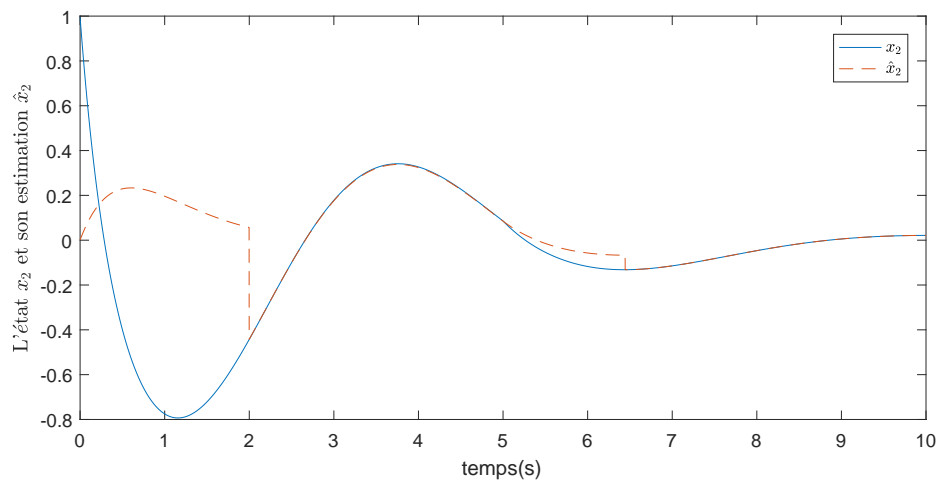
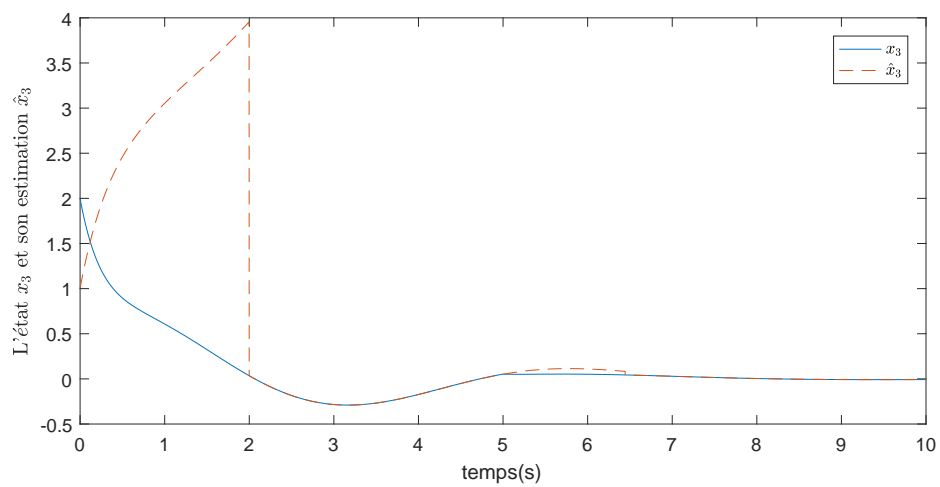
tels que  $F_i = A - K_i C$  pour  $1 \leq i \leq 5$  soient stables. Ce qui nous donne par la suite

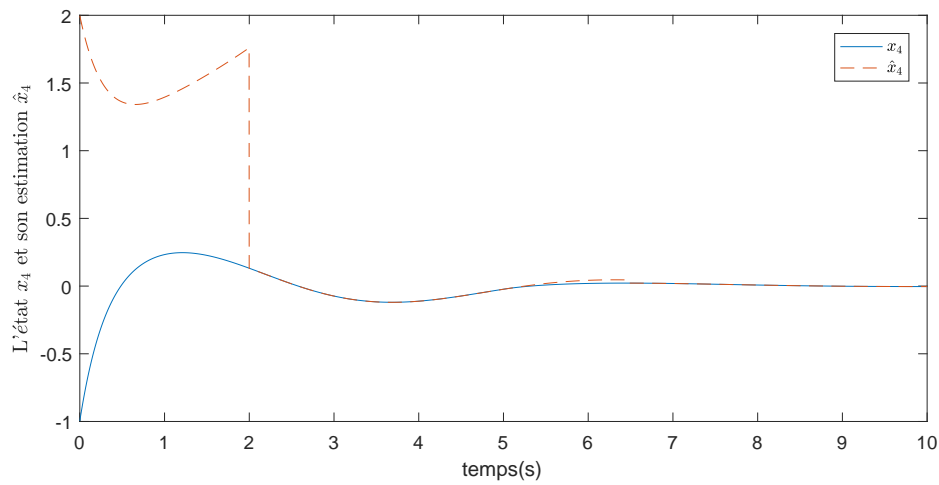
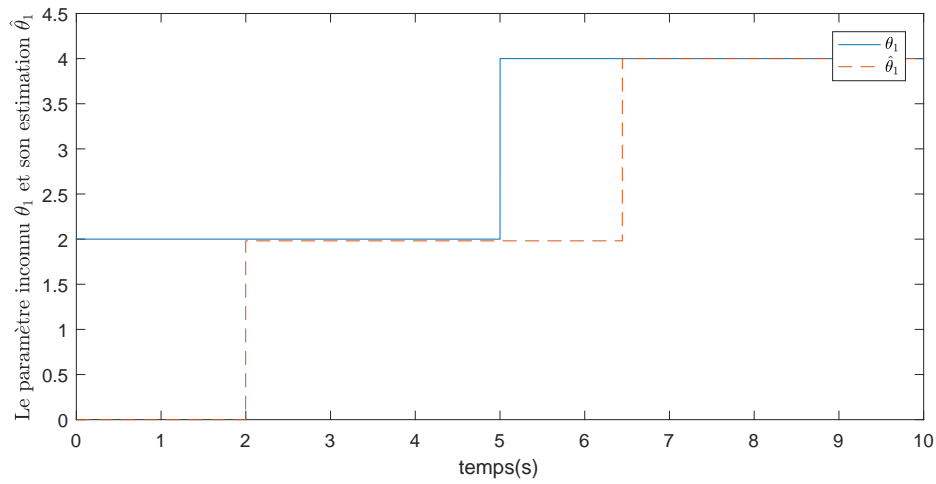
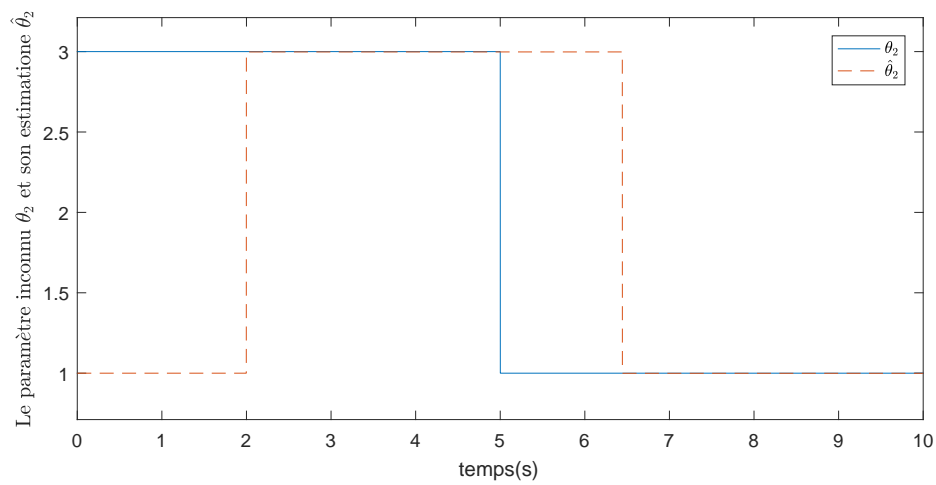
$$F_1 = \begin{bmatrix} -7.0657 & 1 & 0.3156 & 0 \\ -8.2201 & -1 & 1.0358 & 0 \\ 0.4094 & 0 & -7.9343 & 3 \\ 0.3492 & 0 & -2.6159 & -2 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} -18.6928 & 1 & 1.1299 & 0 \\ -74.5395 & -1 & 9.0523 & 0 \\ 1.0040 & 0 & -14.3072 & 3 \\ 2.3417 & 0 & -11.3844 & -2 \end{bmatrix},$$

$$F_3 = \begin{bmatrix} -27.7693 & 1 & 2.5730 & 0 \\ -171.6510 & -1 & 32.2386 & 0 \\ 2.2816 & 0 & -23.2307 & 3 \\ 8.7082 & 0 & -35.0398 & -2 \end{bmatrix}, F_4 = \begin{bmatrix} 36.6028 & 1 & 3.8729 & 0 \\ -304.3851 & -1 & 66.0186 & 0 \\ 3.4686 & 0 & -32.3972 & 3 \\ 18.4081 & 0 & -72.7401 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\text{et } F_5 = \begin{bmatrix} -45.4724 & 1 & 5.0280 & 0 \\ -475.4554 & -1 & 108.4241 & 0 \\ 4.5417 & 0 & -41.5276 & 3 \\ 30.8796 & 0 & -123.6735 & -2 \end{bmatrix}.$$

Pour la simulation, on choisit  $h = 1s < 5s$ . On a vérifié que la matrice  $\Omega(t, h) \in \mathbb{R}^{20 \times 10}$  est de rang plein. Les Figures 2.3, 2.4, 2.5 et 2.6 montrent les états du système (2.16) et leurs estimations. Les résultats des estimations des paramètres inconnus sont présentés dans les Figures 2.7 et 2.8. On peut donc noter que les estimations convergent en temps fini pour tous les états et les paramètres inconnus du système considéré. A l'instant  $t = 5s$  où la topologie du réseau a changé, on remarque un décrochage des estimations des états qui divergent. Ce qui active le mécanisme d'impulsion qui fait converger à nouveau les états estimés en un temps fini.

FIGURE 2.3 – L'état  $x_1$  et son état estimé  $\hat{x}_1$ .FIGURE 2.4 – L'état  $x_2$  et son état estimé  $\hat{x}_2$ .FIGURE 2.5 – L'état  $x_3$  et son état estimé  $\hat{x}_3$ .

FIGURE 2.6 – L'état  $x_4$  et son état estimé  $\hat{x}_4$ .FIGURE 2.7 – Paramètre  $\theta_1$  et son estimation  $\hat{\theta}_1$ .FIGURE 2.8 – Paramètre  $\theta_2$  et son estimation  $\hat{\theta}_2$ .

## 2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, une nouvelle méthode pour concevoir un observateur à temps fini pour l'estimation simultanée des états et des paramètres est proposée. La technique proposée consiste à superposer plusieurs observateurs asymptotiques de même type mais avec différentes vitesses de convergence. Des conditions suffisantes sont données pour garantir la convergence en temps fini de l'observateur proposé. Un exemple numérique a été donné pour illustrer l'efficacité de la méthode proposée. Ces résultats ont été obtenus pour un réseau de systèmes linéaires avec des paramètres d'interconnexion inconnus mais constants par intervalle. Dans la suite de nos travaux de recherche, nous allons exploiter les résultats obtenus dans ce chapitre afin de les adapter aux réseaux de systèmes linéaires avec retard puis avec des entrées inconnues et un peu plus tard aux réseaux de systèmes non linéaires à retards aussi et avec des entrées inconnues.