

## 3.2 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons le modèle mathématique qui décrit la dynamique de la croissance d'une biomasse de concentration  $X$  sur un substrat de concentration  $S$  en culture batch tout en tenant compte de l'accumulation des cellules non viables ( $X_d$ ). Le recyclage d'une partie des cellules mortes en substrat, en fonction du temps  $t$  est également considéré.

Nous faisons face à un modèle pour lequel nos paramètres ne sont pas identifiables à l'équilibre. Ainsi, on ne peut pas appliquer simplement les techniques classiques d'identification, qui exigent habituellement l'observabilité globale du système. En outre, nous comptons reconstruire les variables d'état non mesurées en ligne (concentrations des cellules viables et non viables), aussi bien que les paramètres. Pour cela, nous proposons un couplage de deux observateurs non linéaires en cascade avec différentes échelles de temps, fournissant une convergence pratique de l'erreur d'estimation.

$$\begin{cases} \dot{X} = \mu(S)X - mX, \\ \dot{X}_d = \delta mX, \\ \dot{S} = -\frac{\mu(S)}{Y}X + \lambda(1 - \delta)mX. \end{cases} \quad (3.1)$$

Il s'agit d'une extension du modèle de Monod. Le paramètre  $m > 0$  est le taux de mortalité que l'on suppose significatif lorsque  $\mu(S)$  prend de petites valeurs,  $\delta \in (0, 1)$  décrit la part des cellules mortes non éclatées,  $\lambda > 0$  est le facteur de recyclage,  $Y$  est le coefficient de rendement de la conversion de substrat en biomasse. D'un point de vue biologique, on suppose que  $\lambda$  est plus petit que le rendement de croissance :

$$H1. \frac{1}{Y} > \lambda.$$

On suppose que le taux de croissance  $\mu(\cdot)$  et le coefficient de rendement  $Y$  du modèle classique de Monod sont connus et que le but est d'identifier les paramètres  $m$ ,  $\delta$  et  $\lambda$ , et de reconstruire en ligne les variables d'état  $X$  et  $X_d$ , basé sur les observations en ligne de la concentration en substrat  $S$  et la biomasse totale  $B = X + X_d$ . Sans perte de généralité, on suppose que le taux de croissance  $\mu(\cdot)$  est une fonction vérifiant les hypothèses suivantes :

$$H2. \text{La fonction } \mu(\cdot) \text{ est régulière, croissante et vérifie } \mu(0) = 0.$$

Soit le changement de variables suivants :

$$s = S, x = \frac{X}{Y}, x_d = \frac{X_d}{Y}, a = (1 - \delta)m \quad \text{et} \quad k = \lambda Y.$$

le modèle s'écrit alors sous la forme simple suivante

$$\begin{cases} \dot{s} &= -\mu(s)x + kax, \\ \dot{x} &= \mu(s)x - mx, \\ \dot{x}_d &= mx - ax, \end{cases} \quad (3.2)$$

tout en observant le vecteur suivant

$$y = \begin{pmatrix} s \\ x + x_d \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

avec les conditions initiales connues suivantes

$$s(0) = s_0 > 0, \quad x_d(0) = 0 \quad \text{et} \quad x(0) = x_0 > 0.$$

Rappelons que notre but est de reconstruire les paramètres  $m$ ,  $a$  et  $k$  ainsi que les variables d'état  $x(\cdot)$  et  $x_d(\cdot)$ , sous l'hypothèse :

H3.  $m > a$  et  $k < 1$ .

De plus, on suppose que les bornes, à priori, des paramètres  $m, a$  et  $k$  sont connus c.à.d.

$$\exists (m^-, m^+, a^-, a^+, k^-, k^+) \in (\mathbb{R}_+^*)^6 \text{ connus tels que } (m, a, k) \in [m^-, m^+] \times [a^-, a^+] \times [k^-, k^+]. \quad (3.4)$$

Nous donnons deux propriétés concernant la positivité des solutions et l'existence d'une variété invariante :

**2 Proposition**  $\mathbb{R}_+^3$  et  $\Omega = \left\{ (s, x, x_d) \in \mathbb{R}_+^3 \mid s + x + \frac{(m - ka)}{(m - a)} x_d = s_0 + x_0 \right\}$  sont invariants par la dynamique (3.2)

**Preuve :** L'invariance de  $\mathbb{R}_+^3$  est garantie par le fait que :

$$s = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{s} = kax \geq 0,$$

$$x = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x} = 0,$$

$$x_d = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{x}_d = (m - a)x \geq 0.$$

Soit  $M = s + x + \frac{(m - ka)}{(m - a)}x_d$ , on obtient  $\dot{M} = 0$ , d'où l'invariance de l'ensemble  $\Omega$ . ■

$$\text{Soit } \bar{s} \text{ définit par } \bar{s} = \begin{cases} \mu^{-1}(m) & \text{si } \mu_{\max} > D, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

**3 Proposition** Les trajectoires de la dynamique (3.2) convergent asymptotiquement vers un point d'équilibre

$$E^* = \left( s^*, 0, \frac{m - a}{m - ka}(s_0 + x_0 - s^*) \right) \quad \text{avec } s^* \leq \min(s_0 + x_0, \bar{s})$$

**Preuve :** L'invariance de l'ensemble  $\Omega$  donnée dans la proposition 2 montre que les variables d'état sont bornées. De l'équation  $\dot{x}_d = (m - a)x$  avec  $m > a$ , et du fait que  $x_d$  est bornée, on en déduit que  $x(\cdot)$  doit converger vers 0.  $x_d(\cdot)$  est croissante et converge vers  $x_d^*$  tel que  $x_d^* \in [0, (s_0 + x_0)(m - a)/(m - ka)]$ . Ainsi, de l'invariance de l'ensemble  $\Omega$ ,  $s(\cdot)$  converge vers  $s^* \leq s_0 + x_0$ . Si  $s^*$  est tel que  $s^* > \bar{s}$ , alors de l'équation  $\dot{x} = (\mu(s) - m)x$ , on en déduit que  $x(\cdot)$  ne peut pas converger vers 0 d'où  $s^* \leq \bar{s}$ . ■

### 3.3 Conception d'un observateur pratique en cascade

On rappelle que notre but est de donner une estimation en ligne des paramètres et des variables non mesurés  $x, x_d$ , en se basant sur les mesures disponibles. On peut immédiatement voir que les paramètres  $(m, a, k)$  ne peuvent pas être reconstruits si le système est à l'équilibre. Néanmoins, en dérivant les sorties  $(y)$  :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= (-\mu(y_1) + ka)x, \\ \dot{y}_2 &= (\mu(y_1) - a)x, \\ \ddot{y}_1 &= (\mu(y_1) - m)\dot{y}_1 - \mu'(y_1)x\dot{y}_1, \\ \ddot{y}_2 &= (\mu(y_1) - m)\dot{y}_2 + \mu'(y_1)x\dot{y}_1. \end{cases}$$

on obtient explicitement les expressions des paramètres et des variables d'état non mesurées en fonctions des sorties et de leurs dérivées lorsqu'on n'est pas à l'équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{l} m = \mu(y_1) - \frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}, \\ x = \frac{\dot{y}_2 - (\mu(y_1) - m)\dot{y}_2}{\mu'(y_1)\dot{y}_1}, \\ x_d = y_2 - x, \\ a = \mu(y_1) - \frac{\dot{y}_2}{x}, \\ k = \frac{\mu(y_1)}{a} + \frac{\dot{y}_1}{ax}, \end{array} \right. \quad (3.5)$$

on en déduit l'observabilité du système.

En jouant sur la structure de la dynamique, on peut écrire notre dynamique sous une forme particulière de deux sous modèles en cascade :

- On commence par présenter un observateur pratique permettant la reconstruction des paramètres  $a$  et  $k$  en utilisant uniquement l'observation  $y_1$ , mais en effectuant un changement d'échelle de temps qui dépend de  $y_1$  et  $y_2$ .
- Puis on présente un second observateur permettant la reconstruction du paramètre  $m$  et des variables d'état  $x$  et  $x_d$  en utilisant les deux observations  $y_1$  et  $y_2$ , et la connaissance des paramètres  $a$  et  $k$ .
- Finalement, nous couplons les deux observateurs, le deuxième utilise les approximations de  $a$  et  $k$  estimées par le premier observateur.

Plus précisément, notre modèle est sous la forme

$$\dot{X} = F(X, P) \quad , \quad y = H(X)$$

où  $X$ ,  $P$  et  $y$  sont les vecteurs des variables d'états, des paramètres et des observations, de dimensions respectives 3, 3 et 2. Nous proposons une partition

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \quad , \quad P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dim X_1 = 1 \\ \dim X_2 = 2 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dim P_1 = 2 \\ \dim P_2 = 1 \end{array} \right.$$

tels que

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1(X_1) \\ H_2(X_2) \end{pmatrix}$$

et la dynamique est découplée comme suit

$$\begin{cases} \dot{X}_1 = \frac{1}{\frac{d\phi(y)}{dt}} F_1(X_1, P_1) \\ \dot{X}_2 = F_2(X_2, y_1, P_1, P_2) \end{cases}$$

avec  $\frac{d\phi(y)}{dt} > 0$ . De plus, les caractéristiques suivantes sont satisfaites :

- $(X_1, P_1)$  est observable pour la dynamique  $(F_1, H_1)$  (sans le terme  $\frac{d\phi(y)}{dt}$ ).
- $(X_2, P_2)$  est observable pour la dynamique  $(F_2, H_2)$  lorsque  $P_1$  est connu.

Ainsi, la considération de deux observateurs  $\hat{F}_1(\cdot)$  et  $\hat{F}_2(P_1, \cdot)$  pour les deux paires  $(X_1, P_1)$  et  $(X_2, P_2)$  respectivement, permettant la construction d'un observateur en cascade

$$\begin{cases} \frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \hat{X}_1 \\ \hat{P}_1 \end{pmatrix} = \hat{F}_1(\hat{X}_1, \hat{P}_1, y_1), \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \hat{X}_2 \\ \hat{P}_2 \end{pmatrix} = \hat{F}_2(\hat{P}_1, \hat{X}_2, \hat{P}_2, y_2) \end{cases}$$

avec  $\tau(t) = \phi(y(t)) - \phi(y(0))$ , qu'on le donne explicitement. Notons que le couplage des observateurs se fait par l'intermédiaire de  $\hat{P}_1$ , et que le terme  $\frac{d\phi(y)}{dt}$  nous empêche d'avoir une convergence asymptotique quand  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tau(t) < +\infty$ .

**1 Définition** On dit qu'un estimateur  $\hat{X}_\gamma(\cdot)$  d'un vecteur  $X(\cdot)$ , où  $\gamma$  est un paramètre, a une convergence exponentielle pratique s'il existe deux constantes positives  $K_1$  et  $K_2$  telles que pour tout  $\varepsilon > 0$  et  $\theta > 0$ , l'inégalité

$$\|\hat{X}_\gamma(t) - X(t)\| \leq \varepsilon + K_1 e^{-K_2 \theta t}, \quad \forall t \geq 0$$

est satisfaite pour  $\gamma \in \Gamma$ .

Pour toute la suite, on note par  $\text{sat}(l, u, \iota)$  l'opérateur de saturation  $\max(l, \min(u, \iota))$ .

### 3.3.1 Un premier observateur pratique

Considérons la nouvelle variable

$$\tau(t) = y_1(0) + y_2(0) - y_1(t) - y_2(t)$$

qui est mesurée en ligne. De la proposition 2, on en déduit que  $\tau(\cdot)$  est bornée. Comme

$$\frac{d\tau}{dt} = (1-k)ax(t) > 0, \quad \forall t \geq 0,$$

par conséquent,  $\tau(\cdot)$  est une fonction croissante vers

$$\bar{\tau} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \tau(t) < +\infty \quad (3.6)$$

et  $\tau(\cdot)$  définit un difféomorphisme de  $[0, +\infty)$  vers  $[0, \bar{\tau})$ . Ainsi la dynamique du variable  $s$  en temps  $\tau$  est découplée de la dynamique des autres variables d'état :

$$\frac{ds}{d\tau} = \alpha - \beta\mu(s)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des paramètres définis comme des combinaisons des paramètres inconnues  $a$  et  $k$  :

$$\alpha = \frac{k}{1-k}, \beta = \frac{1}{a(1-k)}.$$

De (3.4) il existe des constantes positives  $\alpha^-, \alpha^+, \beta^-$  et  $\beta^+$  telles que  $(\alpha, \beta) \in [\alpha^-, \alpha^+] \times [\beta^-, \beta^+]$ .

Considérons le vecteur d'état

$$\xi = \left[ s \quad \frac{ds}{d\tau} \quad \frac{d^2s}{d\tau^2} \right]^T,$$

qui vérifie la dynamique

$$\frac{d\xi}{d\tau} = A\xi + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \varphi(y_1, \xi) \end{pmatrix}$$

avec

$$y_1 = C\xi, \quad \varphi(y_1, \xi) = \frac{\xi_3^2}{\xi_2} + \xi_2 \xi_3 \frac{\mu''(y_1)}{\mu'(y_1)},$$

et la paire  $(A, C)$  est de forme canonique de type Brunovsky :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Les paramètres inconnues  $\alpha$  et  $\beta$  peuvent être ainsi exprimés en fonction de l'observation  $y_1$  et du vecteur d'état  $\xi$  :

$$\begin{cases} \alpha = l_\alpha(y_1, \xi) = \xi_2 - \frac{\xi_3 \mu(y_1)}{\xi_2 \mu'(y_1)}, \\ \beta = l_\beta(y_1, \xi) = -\frac{\xi_3}{\xi_2 \mu'(y_1)}. \end{cases}$$

Notons que les fonctions  $\varphi(y_1, \cdot)$ ,  $l_\alpha(y_1, \cdot)$  et  $l_\beta(y_1, \cdot)$  ne sont pas définies partout sur  $\mathbb{R}^3$ , mais comme le long des trajectoires de (3.2) on a  $\xi_3/\xi_2 = -\beta\mu'(y_1)$  et  $\xi_2 = \alpha - \beta\mu(y_1)$ , qui sont bornées et l'hypothèse H2 garantie le fait que  $\mu'(y_1)$  est toujours strictement positive, on peut, donc, considérer une extension globalement Lipschitzienne de ces fonctions loin des trajectoires du système, comme suit :

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}(y_1, \xi) = \xi_3 \left( h_1(y_1, \xi) + \frac{\mu''(y_1)}{\mu'(y_1)} h_2(y_1, \xi) \right), \\ \tilde{l}_\alpha(y_1, \xi) = \xi_2 - h_1(y_1, \xi) \frac{\mu(y_1)}{\mu'(y_1)}, \\ \tilde{l}_\beta(y_1, \xi) = -\frac{h_1(y_1, \xi)}{\mu'(y_1)} \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} h_1(y_1, \xi) = \text{sat} \left( -\beta^+ \mu'(y_1), -\beta^- \mu'(y_1), \frac{\xi_3}{\xi_2} \right), \\ h_2(y_1, \xi) = \text{sat} \left( \alpha^- - \beta^+ \mu(y_1), \alpha^+ - \beta^- \mu(y_1), \xi_2 \right). \end{cases}$$

Ainsi on peut construire un observateur pratique de la manière suivante.

**4 Proposition** Il existent deux constantes positives  $b_1 > 0$  et  $c_1 > 0$  telles que l'observateur

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\xi}}{d\tau} = A\hat{\xi} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\varphi}(y_1, \hat{\xi}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3\theta_1 \\ 3\theta_1^2 \\ \theta_1^3 \end{pmatrix} (\hat{\xi}_1 - y_1), \\ (\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = (\tilde{l}_\alpha(y_1, \hat{\xi}), \tilde{l}_\beta(y_1, \hat{\xi})), \end{cases} \quad (3.8)$$

assure la convergence

$$\max \left( |\hat{\alpha}(\tau) - \alpha|, |\hat{\beta}(\tau) - \beta| \right) \leq b_1 e^{-c_1 \theta_1 \tau} \|\hat{\xi}(0) - \xi(0)\| \quad (3.9)$$

pour tout  $\theta_1$  assez grand et  $\tau \in [0, \bar{\tau})$ .

**Preuve :** Considérons une trajectoire de la dynamique (3.2) et soit  $O_1 = \{y_1(t)\}_{t \geq 0}$ . La proposition 1, assure le fait que  $O_1$  est borné. Définissons  $K_{\theta_1} = - \begin{pmatrix} 3\theta_1 & \theta_1^2 & \theta_1^3 \end{pmatrix}^T$ . On vérifie facilement que  $K_{\theta_1} = -P_{\theta_1}^{-1}C^T$ , où  $P_{\theta_1}$  est la solution de l'équation algébrique suivante :

$$\theta_1 P_{\theta_1} + A^T P_{\theta_1} + P_{\theta_1} A = C^T C.$$

Considérons l'erreur  $e = \hat{\xi} - \xi$ . On a

$$\frac{de}{d\tau} = (A + K_{\theta_1} C)e + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\varphi}(y_1, \hat{\xi}) - \tilde{\varphi}(y_1, \xi) \end{pmatrix}$$

où  $\tilde{\varphi}(y_1, \cdot)$  est globalement Lipschitzienne sur  $\mathbb{R}^3$  uniformément en  $y_1 \in O_1$ . Le résultat de Gauthier et al. [37] assure l'existence de deux constantes positives  $c_1 > 0$  et  $q_1 > 0$  telles que

$$\|e(\tau)\| \leq q_1 e^{-c_1 \theta_1 \tau} \|e(0)\|$$

pour  $\theta_1$  assez grande.

Finalement, les fonctions  $\tilde{l}_\alpha(y_1, \cdot)$  et  $\tilde{l}_\beta(y_1, \cdot)$  sont aussi globalement Lipschitzienne sur  $\mathbb{R}^3$  uniformément en  $y_1 \in O_1$ , on obtient ainsi l'inégalité (3.9). ■

**1 Corollaire** L'estimation des paramètres  $a$  et  $k$  avec les mêmes propriétés de convergence que (3.9) est donnée par

$$\begin{cases} \hat{k}(\tau) = \text{sat} \left( k^-, k^+, \frac{\hat{\alpha}(\tau)}{1 + \hat{\alpha}(\tau)} \right), \\ \hat{a}(\tau) = \text{sat} \left( a^-, a^+, \frac{1 + \hat{\alpha}(\tau)}{\hat{\beta}(\tau)} \right). \end{cases}$$

Remarque. L'observateur (3.8) assure seulement une convergence pratique car  $\tau(t)$  ne tend pas vers  $+\infty$  lorsque le temps  $t$  tend vers l'infini.

Pour des valeurs grandes de  $x_0$ , on peut avoir  $\mu(t) > t$  pour des valeurs de  $t > 0$ . Comme notre observateur utilise les observations  $y_1$  jusqu'au le temps  $\tau$ , il doit, donc, être intégré sur  $[0, \min(\tau(t), t)]$  lorsque le temps actuel est  $t$ .

### 3.3.2 Un second observateur

Revenons maintenant en temps  $t$  et considérons la variable mesurée  $z = y_1 + y_2$ .

Lorsque les paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  sont connus, la dynamique du vecteur

$$\zeta = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \\ \ddot{z} \end{bmatrix}^T$$

peut être écrite comme suit :

$$\dot{\zeta} = A\zeta + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi(y_1, \zeta, \alpha, \beta) \end{pmatrix}$$

avec

$$z = C\zeta \quad \text{et} \quad \psi(y_1, \zeta, \alpha, \beta) = \frac{\zeta_3^2}{\zeta_2} + \zeta_2^2 \mu'(y_1)(\beta \mu(y_1) - \alpha).$$

Le paramètre  $m$  et la variable  $x(\cdot)$  peuvent être explicités en fonction de  $y_1$  et  $\zeta$  comme suit :

$$m = l_m(y_1, \zeta) = \mu(y_1) - \frac{\zeta_3}{\zeta_2}, \quad x = -\beta \zeta_2.$$

Les fonctions  $\psi(y_1, \cdot, \alpha, \beta)$  et  $l_m(y_1, \cdot)$  ne sont pas définies partout sur  $\mathbb{R}^3$  mais tout le long des trajectoires de la dynamique (3.2), on a  $\zeta_3/\zeta_2 = \mu(y_1) - m$  et  $\zeta_2 = -x/\beta$  et qui sont bornées. Ainsi on peut proposer des extensions, de ces fonctions, globalement Lipschitziennes par rapport à  $\zeta$  :

$$\begin{cases} \tilde{\psi}(y_1, \zeta, \alpha, \beta) = h_3(y_1, \zeta) \zeta_3 + \min(\zeta_2^2, z(0)^2/\beta^2) \mu'(y_1)(\beta \mu(y_1) - \alpha) \\ \tilde{l}_m(y_1, \zeta) = \mu(y_1) - h_3(y_1, \zeta) \end{cases} \quad (3.10)$$

avec

$$h_3(y_1, \zeta) = \text{sat}\left(\left(\mu(y_1) - m^+, \mu(y_1) - m^-, \frac{\zeta_3}{\zeta_2}\right)\right).$$

**5 Proposition** Lorsque  $\alpha$  et  $\beta$  sont connus, ils existent deux constantes positives  $b_2 > 0$  et  $c_2 > 0$  telles que l'observateur

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \hat{\zeta} = A\hat{\zeta} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\psi}(y_1, \hat{\zeta}, \alpha, \beta) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3\theta_2 \\ 3\theta_2^2 \\ \theta_2^3 \end{pmatrix} (\hat{\zeta}_1 - y_1 - y_2) \\ (\hat{m}, \hat{x}) = \left( \tilde{l}_m(y_1, \hat{\zeta}), -\beta \hat{\zeta}_2 \right) \end{cases} \quad (3.11)$$

garantit la convergence exponentielle

$$\max(|\hat{m}(t) - m|, |\hat{x}(t) - x(t)|) \leq b_2 e^{-c_2 \theta_2 t} \|\hat{\zeta}_2(0) - \zeta_2(0)\|$$

pour tout  $\theta_2$  assez grande et  $t \geq 0$ .

**Preuve :** Même preuve que celle de la proposition 4, une application des résultats de Gauthier et al. [37]. ■

### 3.3.3 Couplage des deux observateurs

Considérons maintenant le couplage des deux observateurs. L'observateur (3.11) utilise les estimations  $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$  données par le premier observateur (3.8). Cela nous ramène à l'étude de la robustesse du second observateur par rapport à l'incertitude des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ .

**6 Proposition** Considérons l'observateur (3.11) avec  $(\alpha, \beta)$  remplacées par  $(\tilde{\alpha}(\cdot), \tilde{\beta}(\cdot))$  telles que

$$(\tilde{\alpha}(t), \tilde{\beta}(t)) \in [\alpha^-, \alpha^+] \times [\beta^-, \beta^+], \quad \forall t \geq 0,$$

ainsi il existe des constantes positives  $\bar{b}_2$ ,  $\bar{c}_2$  et  $\bar{d}_2$  telles que pour tout  $\varepsilon > 0$  il existe  $\theta_2$  assez grande garantissant les inégalités suivantes :

$$\begin{cases} |\hat{m}(t) - m| \leq \varepsilon + \bar{b}_2 e^{-\bar{c}_2 t} \|\hat{\zeta}(0) - \zeta(0)\| \\ |\hat{x}(t) - x(t)| \leq \varepsilon + \bar{d}_2 |\tilde{\beta}(t) - \beta| + \bar{b}_2 e^{-\bar{c}_2 t} \|\hat{\zeta}(0) - \zeta(0)\| \end{cases} \quad (3.12)$$

pour tout  $t \geq 0$ .

**Preuve :** Comme dans la preuve de la proposition 4, on fixe une condition initiale du système (3.2) et considérons l'ensemble borné  $O_1 = \{y_1(t)\}_{t \geq 0}$ . La dynamique de l'erreur  $e = \hat{\zeta} - \zeta$  est donnée par :

$$\dot{e} = (A + K_{\theta_2} C)e + (\tilde{\psi}(y_1, \hat{\zeta}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) - \tilde{\psi}(y_1, \zeta, \alpha, \beta))v$$

où  $(A, C)$  est la forme canonique de type Brunovsky (3.7),  $v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$  et  $K_{\theta_2} = -P_{\theta_2}^{-1} C^T$  avec

$$P_{\theta_2} = \begin{pmatrix} \theta_2^{-1} & -\theta_2^{-2} & \theta_2^{-3} \\ -\theta_2^{-2} & 2\theta_2^{-3} & -3\theta_2^{-4} \\ \theta_2^{-3} & -3\theta_2^{-4} & 6\theta_2^{-5} \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

solution de l'équation algébrique

$$\theta_2 P_{\theta_2} + A^T P_{\theta_2} + P_{\theta_2} A = C^T C. \quad (3.14)$$

Considérons maintenant  $V(t) = \|e(t)\|_{P_{\theta_2}}^2 = e^T(t)P_{\theta_2}e(t)$ . En utilisant (3.14), on a

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -\theta_2 e^T P_{\theta_2} e - e^T C^T C e + 2\delta e^T P_{\theta_2} v \\ &\leq -\theta_2 \|e\|_{P_{\theta_2}}^2 + 2\delta \|e\|_{P_{\theta_2}} \|v\|_{P_{\theta_2}}\end{aligned}\quad (3.15)$$

où  $\delta = |\tilde{\psi}(y_1, \hat{\zeta}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) - \tilde{\psi}(y_1, \zeta, \alpha, \beta)|$ .

En utilisant (3.13), vérifie facilement que  $\|v\|_{P_{\theta_2}} = \sqrt{6}\theta^{-5/2}$ . De l'expression (3.10) et du fait que la fonction  $\zeta \mapsto \tilde{\psi}(y_1, \zeta, \alpha, \beta)$  est globalement Lipschitzienne uniformément en  $y_1 \in O_1$ , on en déduit l'existence de deux constantes positives  $c$  et  $L$  telles que

$$\begin{aligned}\delta &\leq |\tilde{\psi}(y_1, \hat{\zeta}, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) - \tilde{\psi}(y_1, \hat{\zeta}, \alpha, \beta)| \\ &\quad + |\tilde{\psi}(y_1, \hat{\zeta}, \alpha, \beta) - \tilde{\psi}(y_1, \zeta, \alpha, \beta)| \\ &\leq \tilde{\psi}(y_1, \hat{\zeta}, \alpha^-, \beta^+) - \tilde{\psi}(y_1, \hat{\zeta}, \alpha^+, \beta^-) + L\|e\| \\ &\leq c + L\|e\|\end{aligned}\quad (3.16)$$

Notons qu'on a  $\|e\|_{P_{\theta_2}} = \theta_2 \|\tilde{e}\|_{P_1}$  avec  $\tilde{e}_i = \theta_2^{-i} e_i$  et  $\|\tilde{e}\|^2 \geq \theta_2^{-6} \|e\|^2$  pour tout  $\theta_2 \geq 1$ . Les normes  $\|\cdot\|_{P_1}$  et  $\|\cdot\|$  sont équivalentes, d'où l'existence d'une constante positive  $\eta > 0$  telle que  $\|\tilde{e}\|_{P_1} \geq \eta \|\tilde{e}\|$ , et on en déduit l'inégalité

$$\|e\|_{P_{\theta_2}} \geq \eta \theta_2^{-5/2} \|e\|. \quad (3.17)$$

Finalement, rassemblant (3.15), (3.16) et (3.17), on peut écrire

$$\frac{d}{dt} \|e\|_{P_{\theta_2}} \leq \left( -\frac{\theta_2}{2} + \frac{\sqrt{6}L}{\eta} \right) \|e\|_{P_{\theta_2}} + \sqrt{6}\theta_2^{-5/2} c.$$

Pour  $\theta_2$  assez grande, on a  $-\theta_2/2 + \sqrt{6}L/\eta < 0$  et par suite, en utilisant de nouveau (3.17), on obtient

$$\frac{d}{dt} \|e\| \leq \left( -\frac{\theta_2}{2} + \frac{\sqrt{6}L}{\eta} \right) \|e\| + \frac{\sqrt{6}}{\eta} c$$

à partir de laquelle on en déduit la convergence exponentielle de l'erreur  $e$  dans n'importe quel voisinage de 0 dès que  $\theta_2$  est assez grande.

La continuité Lipschitzienne de la fonction  $l_m(\cdot)$  par rapport à  $\zeta$  uniformément en  $y_1 \in O_1$  assure la première inégalité de (3.12).

Pour l'estimation de  $x(\cdot)$ , on a l'inégalité

$$|\hat{x} - x| = |\hat{\beta} \hat{\zeta}_2 - \beta \zeta_2| \leq |\hat{\beta} - \beta| |\zeta_2| + \beta^+ |\hat{\zeta}_2 - \zeta_2|$$

ce qui donne la deuxième estimation de (3.12) puisque la composante  $\zeta_2$  est bornée. ■

**2 Corollaire** Pour tout temps  $t > 0$ , l'observateur couplé

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\xi}}{ds_1} = A\hat{\xi} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\varphi}(y_1, \hat{\xi}) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3\theta_1 \\ 3\theta_1^2 \\ \theta_1^3 \end{pmatrix} (\hat{\xi}_1 - y_1) \\ \frac{d\hat{\zeta}}{ds_2} = A\hat{\zeta} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{\psi}(y_1, \hat{\zeta}, \hat{\alpha}(s_2), \hat{\beta}(s_2)) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3\theta_2 \\ 3\theta_2^2 \\ \theta_2^3 \end{pmatrix} (\hat{\zeta}_1 - y_1 - y_2) \end{cases}$$

intégré pour  $s_1 \in [0, \min(t, \tau(t))]$  et  $s_2 \in [0, t]$ , avec

$$\begin{cases} \tau(t) = y_1(0) - y_1(t) + y_2(0) - y_2(t), \\ \hat{\alpha}(s_2) = \text{sat}(\alpha^-, \alpha^+, \tilde{l}_\alpha(y_1(\min(s_2, \tau(t))), \hat{\xi}(\min(s_2, \tau(t))))), \\ \hat{\beta}(s_2) = \text{sat}(\beta^-, \beta^+, \tilde{l}_\beta(y_1(\min(s_2, \tau(t))), \hat{\xi}(\min(s_2, \tau(t))))), \end{cases}$$

fourni les estimations

$$\begin{cases} \hat{m}(t) = \tilde{l}_m(y_1(t), \hat{\zeta}(t)), \\ (\hat{x}(t), \hat{x}_d(t)) = (-\hat{\beta}(t)\hat{\zeta}_2(t), y_2(t) + \hat{\beta}(t)\hat{\zeta}_2(t)). \end{cases}$$

La convergence pratique de l'estimateur est exponentielle, dès que  $\theta_1$  et  $\theta_2$  sont assez grandes.

### 3.4 Simulations numériques

Considérons un taux de croissance de type Monod (2.2) avec les paramètres  $\mu_{\max} = 1$  et  $K_s = 100$  et fixons les conditions initiales  $s(0) = 50$ ,  $x(0) = 1$ ,  $x_d(0) = 0$ . Les paramètres à reconstruire ainsi que leur bornes sont donnés dans le tableau suivant :

Ces paramètres nous assurent une croissance à une vitesse raisonnable ( $s(0)$  a une valeur de  $K_s/2$ ), et la valeur de  $\bar{\tau}$  n'est pas très petite. Pour un interval de temps  $0 \leq t \leq t_{\max} = 80$ , le nouveau axe de temps est, à peu près,  $0 \leq \tau \leq \tau_{\max} \simeq 37.22$  (voir Figure 3.1). Pour le premier observateur, on choisit un gain  $\theta_1 = 3$  qui donne une petite erreur sur les estimations de  $\alpha$  et  $\beta$  à l'instant  $\tau_{\max}$  (voir Figures 3.3).

paramètre	$\delta$	k	m
valeur	0.2	0.2	0.1
bornes	[0.1, 0.3]	[0.1, 0.3]	[0.05, 0.2]

TAB. 3.1 – Les paramètres et leurs bornes

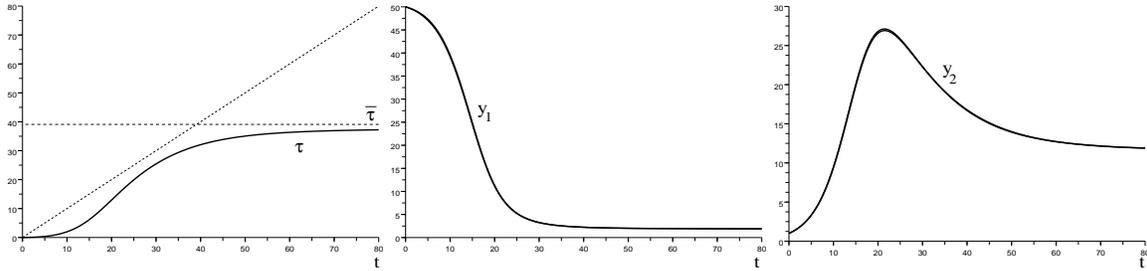


FIG. 3.1 – Graphes de la fonction  $\tau$  et des observations  $y_1$  et  $y_2$ .

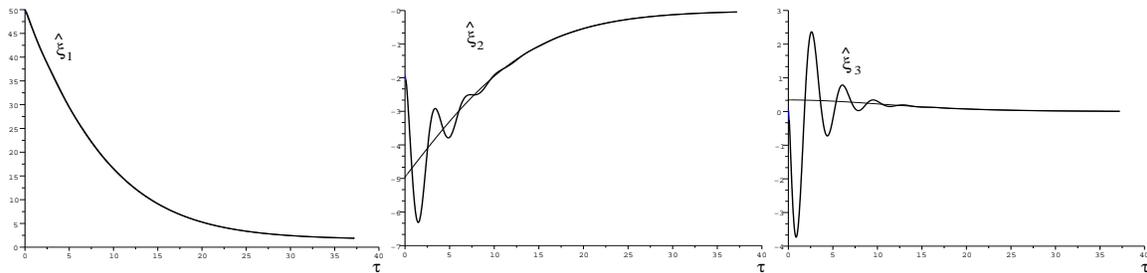


FIG. 3.2 – Les variables  $\hat{\xi}$  du premier observateur en temps  $\tau$ .

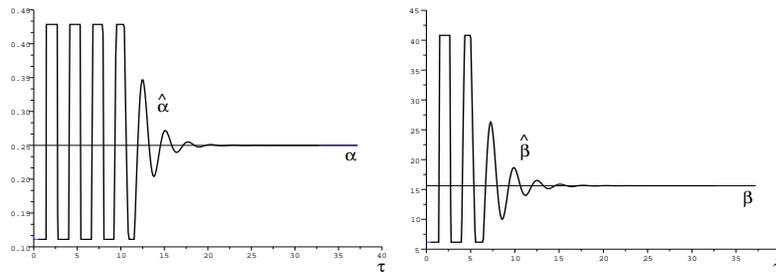


FIG. 3.3 – Estimation des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ .

Ces estimations sont utilisées, en ligne, par le second observateur, avec un gain  $\theta_2 = 2$ . Sur les Figures 3.5, on voit bien que l'erreur d'estimation est petite si l'erreur d'estimation donnée par le premier observateur est petite elle aussi.

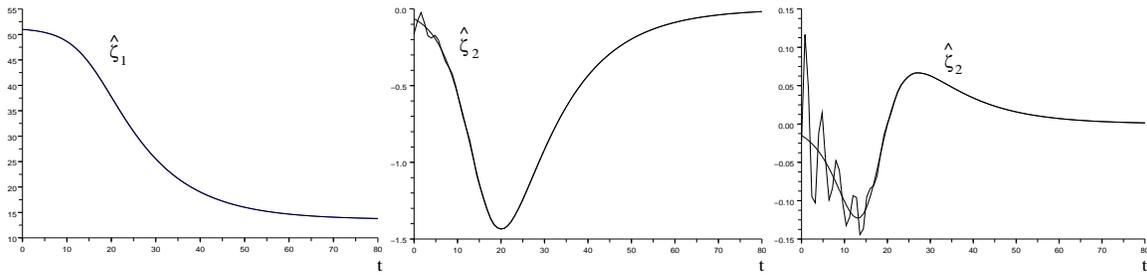


FIG. 3.4 – Les variables  $\hat{\zeta}$  du second observateur en temps  $t$ .

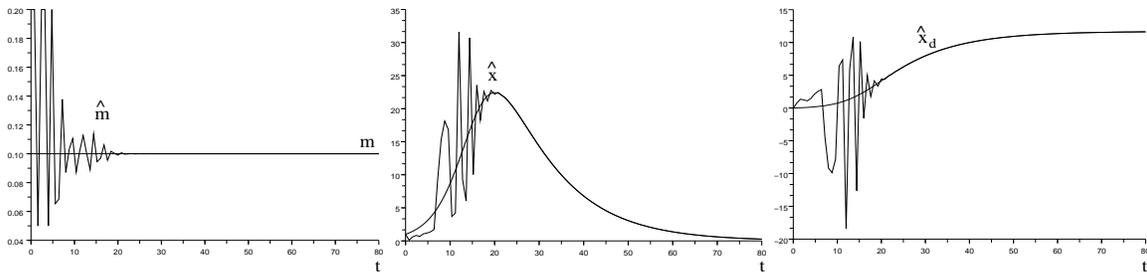


FIG. 3.5 – Estimation du paramètre  $m$  et des variables d'état  $x$  et  $x_d$ .

Les simulations sont refaites en ajoutant du bruit sur les observations  $y_1$  et  $y_2$  (voir Figures 3.6 et 3.7).

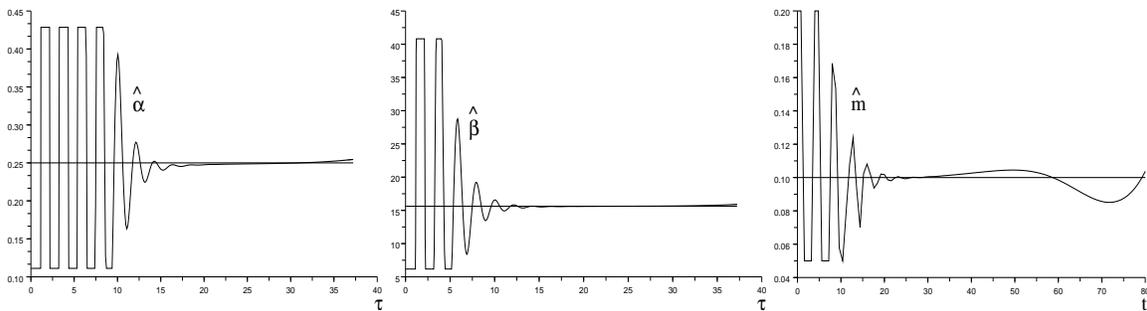


FIG. 3.6 – Estimation des paramètres  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $m$  pour des données bruitées.

En présence de bruit à basse fréquence (ce qui peut être le cas des applications biologiques), on obtient une bonne robustesse pour les estimations des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  et des variables d'état  $x$  et  $x_d$ . L'estimation du paramètre  $m$  est plus affectée par le bruit. Ceci peut être expliqué par la structure de l'équation (3.5) : l'estimation de  $m$  est reliée au dérivées secondes des deux observations  $y_1$  et  $y_2$ , et par

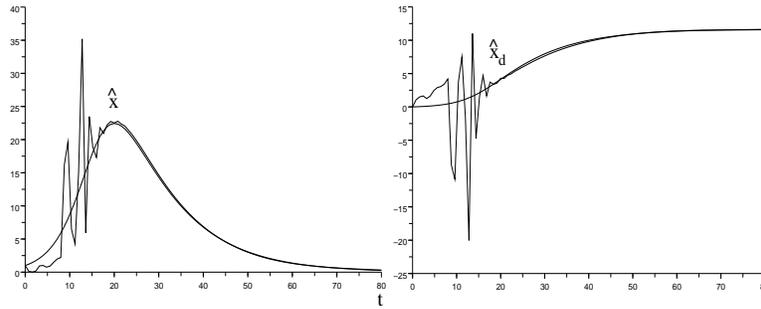


FIG. 3.7 – Estimation des variables d'état  $x$  et  $x_d$  en présence de bruit.

*suite plus sensible au bruits sur les observations.*

### 3.5 Conclusion

*L'extension du modèle de Monod avec un compartiment additionnel pour les cellules mortes et un terme de recyclage de substrat n'est pas identifiable en considérant les observations de la concentration en substrat et de la biomasse totale. Néanmoins, nous avons prouvé que le modèle peut être écrit sous une forme particulière cascade, en considérant deux échelles de temps.*

*Cette décomposition permet la conception, séparément, de deux observateurs, puis les coupler ensemble en cascade. Le premier est à échelle de temps bornée, expliquant pourquoi le système n'est pas identifiable à l'équilibre, alors que le second est à échelle de temps non bornée. Cette construction fournit une convergence pratique des observateurs couplés.*

*Les deux observateurs sont à grand-gain inspirés de [37] avec une construction explicite de l'extension Lipschitzienne de la dynamique (cf. [78]). D'autres choix d'observateurs pourraient avoir été faits et appliqués à cette structure particulière. Une telle décomposition pourrait être appliquée à d'autres systèmes qui sont pas identifiables ou pas observable à l'équilibre.*