Synthèse de l'analyse des pages « Logique » des manuels de Seconde

Dans tous les manuels analysés, de 1969 comme de 2010, l'étude des notions de logique comporte des considérations sur le langage. Mais les fonctions assignées à la logique ne sont pas partout les mêmes, et dépendent des préconisations des différents programmes. En 1969, l'enjeu était la construction d'un langage mathématique qui devait permettre à la fois de donner des outils d'analyse du monde réel, mais aussi de diminuer les inégalités dues à une meilleure maîtrise de la langue française dans certains milieux. La logique mathématique était alors clairement utilisée comme référence pour la maîtrise de ce langage mathématique. En 2009, il n'y a plus cet enjeu, le travail sur le langage est plutôt décrit comme un travail sur la maîtrise de la langue française qui aurait des usages particuliers en mathématiques, mais sans langage formalisé faisant référence.

Dans la constitution des systèmes logiques étudiés dans la première partie de cette thèse, ce travail sur le langage est un préalable au discours sur le raisonnement. C'est en partie le cas en 1969, au moins dans *Queysanne-Revuz* et *Aleph 0* qui associent schémas de raisonnement et calcul propositionnel (lien avec des lois logiques justifiées par les tables de vérité pour le premier, lien avec des tautologies admises comme théorèmes pour le deuxième). Dans les manuels de 2010, les types de raisonnement sont seulement listés, sans réelle justification de leur validité (pour le raisonnement par contraposée, plusieurs manuels mentionnent l'équivalence entre une implication et sa contraposée, mais sans justification). L'aspect technique est davantage mis en avant, et la logique n'est pas invoquée comme théorie justifiant la technique. Par exemple, les manuels de 2010 parlent tous de contre-exemple, mais un seul d'entre eux justifie la validité du raisonnement par contre-exemple en faisant le lien avec le fait que la négation d'une proposition universelle est une proposition existentielle.

Les manuels de 1969 semblent tous suivre une même ligne directrice [12] : logique mathématique et langage des ensembles sont la référence (ce qui est explicite dans le commentaire de 1970 qui accompagne le programme de 1969), les notions sont traitées comme des objets, dont les manuels donnent des définitions et des propriétés. Il ne s'agit pas pour autant de proposer un cours de logique mathématique, et les trois manuels étudiés sont d'ailleurs plus ou moins proches du vocabulaire et des notations de la logique mathématique. Le plus rigoureux dans ce domaine est *Queysanne-Revuz*, dont le propos est clair du point de vue de la logique, et articulé avec l'activité mathématique. A. Revuz est un mathématicien très impliqué dans la réforme des mathématiques modernes, et il n'est pas étonnant que ces pages du manuel qu'il co-écrit semblent être le fruit d'une réelle réflexion sur le enjeux d'un tel enseignement au lycée. *Lespinard* reste également assez proche de la logique mathématique, mais avec moins de recul sur celle-ci et sur son articulation avec

12. J'ai étudié moins de manuels pour 1969, mais je ne pense pas que ce biais joue de manière significative sur les résultats.

le reste de l'activité mathématique. Par exemple, ces deux manuels proposent des implications à prémisse fausse entre des propositions qui n'ont pas de lien sémantique entre elles. Mais *Queysanne-Revuz* les commente en disant que « dans la définition de l'implication logique, considérée seule, il n'y a aucune idée de déduction », délimitant bien ici le connecteur IMPLIQUE, alors que *Lespinard* conclut « on dit en logique que du faux on peut déduire n'importe quoi », confondant ainsi implication et déduction. *Aleph 0* est plus éloigné de la logique mathématique, mais elle est quand même présente comme référence explicite (par exemple ce manuel donne certaines tautologies liées au raisonnement). Dans ces trois manuels de 1969, les notions de logique sont donc présentes dans leur dimension outil et dans leur dimension objet. Ces deux dimensions sont articulées à travers des commentaires sur l'activité mathématique s'appuyant sur la logique mathématique.

Dans les manuels de 2010, la logique mathématique est beaucoup moins une référence. La présentation des notions est faite de façon beaucoup moins formalisée (en accord avec les mises en garde du programme et du document ressource), et le vocabulaire utilisé est beaucoup moins précis. Les notions ne sont pas définies, et sont même parfois mal délimitées : nous retrouvons dans plusieurs manuels l'absence des notions de proposition et de variable, l'absence de propositions ouvertes (comportant des variables libres) dans les exemples, l'assimilation entre *si A alors B* et *A donc B*, la non-distinction entre quantification et quantificateurs. Et de façon plus ponctuelle, certains manuels disent des choses qui ne sont pas correctes du point de vue de la logique mathématique : « “le triangle ABC est rectangle et isocèle” est une conjonction d'“être rectangle” **et** “isocèle” » (voir page 230), « “9 est impair et il n'est pas premier” est la négation de “Tout entier impair est premier” » (voir page 254). Par ailleurs, la dimension syntaxique est beaucoup moins présente dans les manuels de 2010. Ceci est cohérent avec le fait que le travail sur un langage spécifique n'est pas un objectif, et avec la volonté de ne pas être trop formel. Dans les manuels de 2010, conformément à la demande du programme, la dimension outil des notions de logique est ainsi mise en avant et la dimension objet est pratiquement absente.

En l'absence d'une référence qui aurait agi comme ligne directrice, les manuels de 2010 ont fait des choix très divers de présentation des notions de logique. Je vais maintenant compléter cette étude par l'analyse des tâches proposées, qui permet de voir quelle utilisation de ces notions est attendue et comment elles sont travaillées.

6.2 Analyse des exercices dans 5 manuels de 2010

Je commencerai l'analyse des tâches sur des notions de logique proposées dans les manuels de Seconde de 2010 par un point de vue global, en regardant la place accordée à des exercices sur des notions de logique dans l'ensemble des exercices proposés. Puisqu'un axe fort du programme est que le travail sur les notions de logique se fasse tout au long de l'étude des autres chapitres, je détaille cette étude par grands domaines du programme.

Je proposerai ensuite une analyse plus fine en termes de types de tâche répartis par notion de logique.

Je me suis limitée à 5 manuels, qui présentent une certaine diversité quant aux choix faits pour la présentation des notions de logique, et qui sont les plus utilisés dans les classes (je me réfère notamment pour cette affirmation au questionnaire du chapitre 7).

6.2.1 Résultats généraux

Nombre d'exercices par partie du programme

Pour ces résultats, l'unité de comptage est l'exercice. Je n'ai retenu que les exercices identifiés « logique » par un logo. Certains exercices sont ainsi identifiés dans un manuel et pas dans un autre, mais dans la mesure où je cherche plutôt à voir quelles sont les intentions des auteurs, cela me paraît cohérent de ne retenir que ce qui est identifié « logique ». Puis j'ai regardé quelle proportion du nombre total d'exercices cela représentait. Je propose les résultats par grands domaines du programme : Fonctions, Statistique et probabilités, Géométrie, puis sur l'ensemble de ces trois domaines.

Le manuel *Math'x* propose une page d'exercices à la suite de ses pages « Raisonnement logique » et le manuel *Repères* insère des exercices dans ses pages « Logique ». Je n'ai pas inclus ces exercices dans la répartition par grands domaines du programme, j'ai souhaité avoir des statistiques identiques pour les 5 manuels. J'indique par contre combien il y a de tels exercices dans la dernière ligne du tableau ci-après.

	Transmath	Math'x	Hyperbole	Repères	Déclic
Nombre d'exercices identifiés « logique » dans la partie *Fonctions*	13	19	24	18	7
(en pourcent du nombre total d'exercices dans cette partie)	(3,1 %)	(3 %)	(5, 4 %)	(5,2 %)	(1,4 %)
Pourcentage d'exercices identifiés « logique » dans la partie *Fonctions* par rapport au nombre total d'exercices identifiés « logique »	52 %	61,3 %	72,7 %	60 %	70 %
(pourcentage d'exercices dans la partie *Fonctions* par rapport au nombre total d'exercices dans le manuel)	(48,7 %)	(47,7 %)	(47,7 %)	(44,3%)	(52,5 %)
Nombre d'exercices identifiés « logique » dans la partie *Statistiques et probabilités*	4	4	6	3	1
(en pourcent du nombre total d'exercices dans cette partie)	(2,4 %)	(1,8 %)	(3,6 %)	(1,9 %)	(0,8 %)
Pourcentage d'exercices identifiés « logique » dans la partie *Statistiques et probabilités* par rapport au nombre total d'exercices identifiés « logique »	16 %	12,9 %	18,2 %	10 %	10 %
(pourcentage d'exercices dans la partie *Statistiques et probabilités* par rapport au nombre total d'exercices dans le manuel)	(19,2 %)	(16,9 %)	(17,6 %)	(19,7 %)	(13,5 %)
Nombre d'exercices identifiés « logique » dans la partie *Géométrie*	8	8	3	9	2
(en pourcent du nombre total d'exercices dans cette partie)	(2,9 %)	(1,7 %)	(0,9 %)	(3,2 %)	(0,6 %)
Pourcentage d'exercices identifiés « logique » dans la partie *Géométrie* par rapport au nombre total d'exercices identifiés « logique »	32 %	25,8 %	9,1 %	30 %	20 %
(pourcentage d'exercices dans la partie *Géométrie* par rapport au nombre total d'exercices dans le manuel)	(32, 1 %)	(35,4 %)	(34,7 %)	(36 %)	(33,9 %)
Nombre total d'exercices identifiés « logique »	25	31	33	30	10
(en pourcent du nombre total d'exercices)	2,9%	2,3%	3,5%	3,8%	1%
Nombre d'exercices dans les pages consacrées aux notions de logique		14		24	

Déclic, qui ne propose qu'une page *Notations et logique*, propose nettement moins d'exercices que les autres. Les résultats pour les 4 autres manuels sont assez similaires.

Par ailleurs, tous ces manuels proposent des exercices identifiés « logique » dans les trois grands domaines du programme. Mais sachant que la partie *Fonctions* représente à peu près la moitié des exercices proposés dans les manuels, nous pouvons voir qu'elle est sur-investie pour les exercices sur les notions de logique.

Nombre d'exercices par notion de logique

Pour ces résultats, l'unités de comptage est l'exercice, mais un même exercice peut traiter de plusieurs notions.

	Propositions	Connecteurs ET et OU	Négation	Implication	Quantificateurs	Il faut, il suffit, CN, CS	équivalence	Types de raisonnement	Reformulation	Non classé
Transmath	0	1	4	11	4	0	0	1	6	0
Math'x (dans chapitre)	0	2	5	9	10	2	3	1	2	3
Math'x (dans pages spéciales)	1	2	1	7	2	1	0	0	2	0
Hyperbole	1	3	3	13	9	2	1	1	0	2
Repères (dans chapitres)	1	2	1	7	6	1	4	9	0	2
Repères (dans pages spéciales)	0	2	2	9	2	1	2	5	0	2
Déclic	0	0	0	3	5	0	0	2	0	0

Ces résultats nous montrent que la notion d'implication est beaucoup plus objet d'exercices que les autres notions (surtout si on lui associe les exercices sur *il faut/il suffit, condition suffisante/condition nécessaire* et sur l'équivalence). Cela correspond à sa place centrale dans l'activité mathématique, à la fois dans la formulation des théorèmes et dans le raisonnement.

Les quantificateurs sont également l'objet d'un nombre important d'exercices, contrairement aux connecteurs ET et OU et à la négation.

Ces résultats globaux doivent être affinés par une étude des type de tâche proposés, et je vais maintenant dénombrer ces tâches en prenant comme unité de comptage la question d'un exercice.

6.2.2 Types de tâches sur les notions de logique

Dans cette section, je présente pour chaque notion de logique la liste des types de tâches relevés dans les 5 manuels. J'illustrerai certains de ces types de tâches en présentant certains exercices et en mettant en évidence les propriétés logiques sous-jacentes à leur résolution. Bien sûr, l'explicitation de ces propriétés n'est absolument pas nécessaire pour la résolution des exercices, et dans le travail en classe avec les élèves, c'est plutôt au contraire la résolution de l'exercice qui permet de mettre en évidence les propriétés logiques. Ces propriétés sont formulées ici de façon très formalisée, loin de moi l'idée de suggérer de les énoncer telles quelles avec des élèves.

Les résultats numériques du comptage par type de tâches, avec la question comme unité d'analyse, sont donnés en fin de section.

Type de tâches 0 : sur les propositions élémentaires

Je ne répertorie ici que les types de tâches qui concernent les propositions élémentaires, puisque dès qu'une proposition contient des connecteurs ou des quantificateurs, je l'ai prise en compte avec les types de tâches sur ces notions. Je n'ai relevé finalement qu'un type de tâches : dire si une proposition élémentaire est vraie ou fausse, par exemple dans l'exercice 39 page 113 de *Repères* :

39 Vrai ou faux et pourquoi ? Logique

Soit la fonction homographique définie par :

$$h(x) = 1 + \frac{3}{x-2}.$$

On note $\mathscr{E}$ son ensemble de définition.

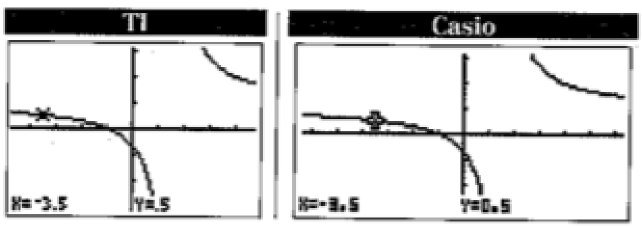
Pour chacune des questions suivantes, répondre par vrai ou faux, en justifiant chacune de vos réponses.

a. $\mathscr{E} =]-\infty\,;-2[\cup]-2\,;+\infty[$.

b. Pour tout nombre réel x de $\mathscr{E}$: $h(x) = \dfrac{x-5}{x-2}$.

c. h est une fonction homographique.

d. Suivant sa calculatrice, on obtient comme courbe représentative :



e. Le nombre 1 n'admet aucun antécédent par la fonction h.

f. h est décroissante sur $]-\infty\,;2[$.

g. h est décroissante sur $]2\,;+\infty[$.

h. h est décroissante sur $]-\infty\,;2[\cup]2\,;+\infty[$.

FIGURE 6.26 – Exercice du manuel Repères sur les propositions élémentaires

Dans cet exercice, je compte 7 occurrences de ce type de tâches (pas la question b). En effet, les propositions sont exprimées sous forme de propositions élémentaires (dans la question d la formulation de la proposition est à la charge de l'élève), même si des connecteurs et quantificateurs apparaîtraient dans une reformulation mettant au jour leur structure logique.

On peut trouver ce type d'exercice dans plusieurs autres manuels, mais sans le logo « logique ». Ainsi, même si j'ai compté ces questions dans un type de tâches sur des propositions élémentaires, il ne semble pas que ce soit l'objectif logique visé ici.

Type de tâches 1 : sur les connecteurs ET et OU

1.1 Donner des valeurs vérifiant une proposition ouverte comportant une conjonction ou une disjonction.

1.2 Donner toutes les valeurs vérifiant une proposition ouverte comportant une conjonction ou une disjonction.

1.3 Dire si une valeur vérifie une proposition ouverte comportant une conjonction ou une disjonction.

1.4 Compléter avec le connecteur ET ou le connecteur OU de manière à ce que la proposition soit vraie.

1.5 Déduire la valeur de vérité d'une de ses composantes de la valeur de vérité d'une conjonction ou d'une disjonction.

La différence entre les type de tâches 1.1 et 1.2 consiste dans le caractère exhaustif ou non. Par exemple, la question 3.a de l'exercice 56 page 43 de *Transmath* :

> n est un entier naturel pair *et* multiple de 3.
> Donnez cinq valeurs possibles pour n.

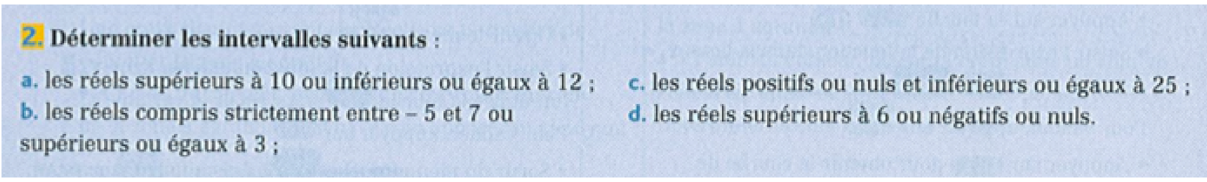
est du type 1.1. Alors que la question a de l'exercice 1 page 355 de *Math'x* :

> Donner les entiers de 0 à 20 qui sont :
> pairs ET multiples de 5

est de type 1.2. Dans l'exemple donné, l'ensemble des valeurs à tester est fini. On pourrait aussi imaginer ce même type de tâches avec des variables astreintes à un ensemble infini. Il faudrait alors faire une démonstration pour justifier que seules certaines valeurs vérifient la proposition, valeurs dont on peut donner la liste si elles sont en nombre fini, où que l'on peut caractériser dans le cas contraire. Par exemple, *Queysanne-Revuz* proposait l'exercice suivant :

> L'énoncé suivant est-il vrai ou faux ? (on pourra discuter selon les valeurs attribuées aux variables) :
> " $x + y$ et $x - y$ sont tous les deux pairs (x et y sont des entiers) "

Les types de tâches 1.1, 1.2, 1.3 concernent aussi les propositions ouvertes et la notion d'élément satisfaisant une proposition. Le type de tâches le plus présent est 1.2 avec des exercices sur les intervalles, comme l'exercice 3.2 page 17 de *Repères* :



2. Déterminer les intervalles suivants :

a. les réels supérieurs à 10 ou inférieurs ou égaux à 12 ;

b. les réels compris strictement entre – 5 et 7 ou supérieurs ou égaux à 3 ;

c. les réels positifs ou nuls et inférieurs ou égaux à 25 ;

d. les réels supérieurs à 6 ou négatifs ou nuls.

FIGURE 6.27 – Exercice du manuel Repères sur les connecteurs ET et OU (1)

Ces exercices sur les intervalles, dont la plupart ne sont pas identifiés « logique », sont pourtant l'occasion de travailler sur les connecteurs ET et OU en lien avec intersection et réunion. Ils permettent un jeu de cadres entre le cadre discursif des propositions formulées avec les connecteurs ET et OU, le cadre graphique de la représentation sur une droite graduée, et le cadre ensembliste de la représentation sous forme d'intervalle, ou de réunion d'intervalles. Mais de tels exercices peuvent mettre en jeu d'autres propriétés logiques, que j'ai répertoriées dans les commentaires du tableau ci-dessous :

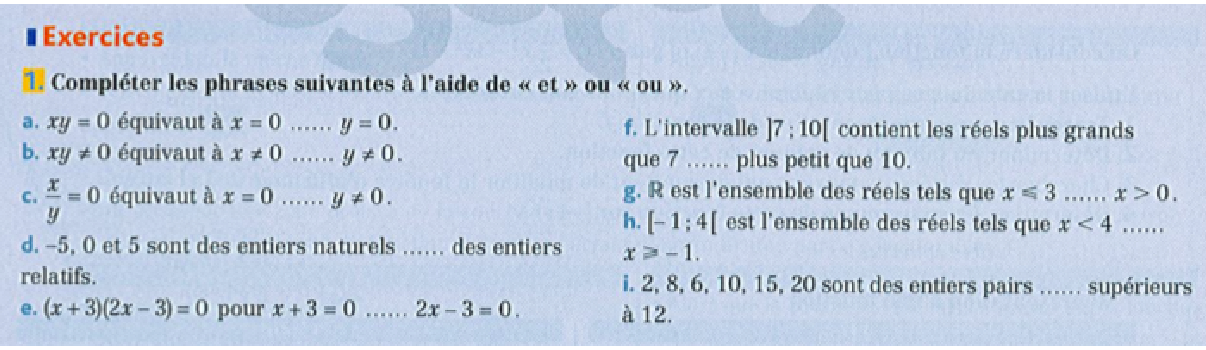
	$x < a$ ET $x < b$	$x < a$ OU $x < b$	$x < a$ ET $x > b$	$x < a$ OU $x > b$	$x > a$ ET $x > b$	$x > a$ OU $x > b$	$x > a$ ET $x < b$	$x > a$ OU $x < b$
$a < b$	(*) $x \in]-\infty, a[$	(**) $x \in]-\infty, b[$	(***) Pas possible	$x \in]-\infty, a[\cup]b, +\infty[$	$x \in]b, +\infty[$	$x \in]a, +\infty[$	$x \in]a, b[$	Tous les réels
$a > b$	$x \in]-\infty, b[$	$x \in]-\infty, a[$	$x \in]b, a[$	(****) Tous les réels	$x \in]a, +\infty[$	$x \in]b, +\infty[$	pas possible	$x \in]-\infty, b[\cup]a, +\infty[$

Du point de vue logique, on peut faire les commentaires suivants :

Dans toute la suite, A désigne la proposition $x < a$, B la proposition $x < b$ et B' la proposition $x > b$.

– Par exemple dans le cas (*), il s'agit d'une proposition de la forme (A ET B) dans le cas particulier où la proposition ($A \Rightarrow B$) est vraie. La proposition (A ET B) est alors logiquement équivalente à A. Une autre façon de dire cela est que la proposition (($A \Rightarrow B$) $\Rightarrow$ ((A ET B) $\Leftrightarrow A$)) est une tautologie.
– De la même manière, dans le cas (**), il s'agit d'une proposition de la forme (A OU B) dans le cas particulier où la proposition ($A \Rightarrow B$) est vraie. La proposition (A OU B) est alors logiquement équivalente à B. Une autre manière de dire cela est de dire que la proposition (($A \Rightarrow B$) $\Rightarrow$ ((A OU B) $\Leftrightarrow B$)) est une tautologie.
– Le cas (***) “ Pas possible ” correspond à une proposition de la forme (A ET B') dans le cas particulier où les propositions A et B' sont contradictoires, c'est-à-dire ne peuvent être vraies en même temps.
– Le cas (****) “ Tous les réels ” correspond à une proposition de la forme (A OU B') dans le cas particulier où la proposition (NON $B' \Rightarrow A$) est vraie. La proposition (A OU B') est alors vraie. Une autre façon de dire cela est que la proposition ((NON $B' \Rightarrow A$) $\Rightarrow$ (A OU B')) est une tautologie.

L'exercice 3.1 page 17 de *Repères* propose le type de tâches 1.4 :



Exercices

1. **Compléter les phrases suivantes à l'aide de « et » ou « ou ».**

a. $xy = 0$ équivaut à $x = 0$ ...... $y = 0$.

b. $xy \neq 0$ équivaut à $x \neq 0$ ...... $y \neq 0$.

c. $\frac{x}{y} = 0$ équivaut à $x = 0$ ...... $y \neq 0$.

d. -5, 0 et 5 sont des entiers naturels ...... des entiers relatifs.

e. $(x+3)(2x-3) = 0$ pour $x + 3 = 0$ ...... $2x - 3 = 0$.

f. L'intervalle $]7\,;10[$ contient les réels plus grands que 7 ...... plus petit que 10.

g. $\mathbb{R}$ est l'ensemble des réels tels que $x \leqslant 3$ ...... $x > 0$.

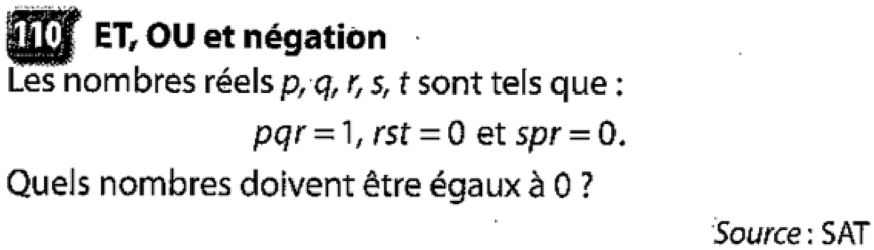
h. $[-1\,;4[$ est l'ensemble des réels tels que $x < 4$ ...... $x \geqslant -1$.

i. 2, 8, 6, 10, 15, 20 sont des entiers pairs ...... supérieurs à 12.

FIGURE 6.28 – Exercice du manuel Repères sur les connecteurs ET et OU (2)

Remarquons d'abord, et ceci est valable pour tous les exercices où il faut compléter une proposition, que les manuels ne demandent jamais de compléter de manière à ce que la proposition soit vraie, ce qui est bien sûr implicitement attendu ! Par ailleurs, quand il s'agit de compléter une proposition de la forme $A \dots B$, si le connecteur ET convient, alors le connecteur OU conviendra aussi (car $[(A \text{ ET } B) \Rightarrow (A \text{ OU } B)]$ est une tautologie), mais cela peut poser problème aux élèves d'envisager les deux réponses possibles (nous avons déjà évoqué ce cas à propos d'un exercice de *Indice*, voir page 120). Il n'y a pas cette difficulté dans l'exercice ci-dessus, car les propositions sont de la forme $(A \dots B) \Leftrightarrow C$, et un seul connecteur convient. Notons cependant un problème dans la question c : la proposition « $x = 0 \dots y \neq 0$ » a un sens pour des variables x et y astreintes à $\mathbb{R}$, ce qui n'est pas le cas de la proposition « $\frac{x}{y} = 0$ ». Il est alors abusif d'utiliser le terme « équivaut à » [13].

Enfin, le type de tâches 1.5 a été rencontré seulement dans l'exercice 110 page 99 de *Math'x* :



110 **ET, OU et négation**

Les nombres réels p, q, r, s, t sont tels que :

$$pqr = 1,\ rst = 0 \text{ et } spr = 0.$$

Quels nombres doivent être égaux à 0 ?

Source : SAT

FIGURE 6.29 – Exercice du manuel Math'x sur les connecteurs ET et OU

Cet exercice est le seul où il faut faire des déductions à partir des valeurs de vérité d'une conjonction ou d'une disjonction et de certaines de ses composantes. Donnons un exemple

13. Ce problème se rencontre également dans la résolution d'équations comportant une fraction rationnelle, comme par exemple $\frac{x+5}{x-1} = 0$. Il n'est pas correct d'écrire que cela équivaut à $x + 5 = 0$ et $x - 1 \neq 0$. Il convient plutôt d'écrire que, pour tout $x \neq 1$, $\frac{x+5}{x-1} = 0$ équivaut à $x + 5 = 0$.

de résolution où le travail sur les connecteurs ET et OU est volontairement souligné :

> Du fait que la conjonction de trois propositions est vraie, je déduis que chaque proposition est vraie [14].
>
> De la première égalité, je déduis $pr \neq 0$ ET $q \neq 0$.
>
> De la troisième égalité je déduis $s = 0$ OU $pr = 0$.
>
> Puisque $s = 0$ OU $pr = 0$, et $pr \neq 0$, on doit avoir $s = 0$ (de (A OU B) et de $NON\,A$ je peux déduire B).
>
> On a alors $rst = 0$ quelle que soit la valeur de t.
>
> Donc, seul s doit être égal à 0, p, q, r ne doivent pas être égaux à 0, et peu importe pour t.

Les déductions telles que celle donnée dans la résolution ci-dessus ne sont mentionnées dans aucun manuel (ni de 1969, ni de 2010), elles sont sans doute supposées intuitivement évidentes. Ceci appuie également le constat que la notion de règle de déduction est moins familière aux mathématiciens que le langage des prédicats.

Type de tâches 2 : sur la négation

2.1 Formuler la négation d'une proposition élémentaire.

2.2 Formuler la négation d'une conjonction ou d'une disjonction.

2.3 Formuler la négation d'une proposition quantifiée.

2.4 Formuler la négation d'une implication.

14. Je ne pense pas qu'il soit pertinent de souligner cette première étape avec des élèves à qui elle paraîtra tout-à-fait évidente.

Nous avons vu dans l'analyse des pages logiques que peu de manuels de 2010 donnaient des règles sur la formation de la négation d'une proposition. Elles sont pourtant nécessaires pour ces types de tâches. Ainsi, dans l'exercice 36 page 71 de *Hyperbole*, ces règles sont rappelées en préambule :

36 Négation, et, ou, si ... alors ... Logique

A et B désignent des phrases.
• La négation de la phrase « A **ou** B » est « non A **et** non B ».
• La négation de la phrase « A **et** B » est « non A **ou** non B ».
• La négation de la phrase « si A, alors B » est « A et non B ».

Par exemple, la négation de « $x < 3$ ou $x > 7$ » est « $x \geqslant 3$ et $x \leqslant 7$ » c'est-à-dire « $3 \leqslant x \leqslant 7$ ».
Écrire la négation de chaque phrase.
a) Tout entier naturel est pair ou impair.
b) Si ABCD est un losange, alors ABCD est un parallélogramme.
c) Si $x^2 = 1$, alors $x = 1$ ou $x = -1$.
d) (AB) $\perp$ (CD) et AB = CD.

FIGURE 6.30 – Exercice du manuel Hyperbole sur la négation

Mais ces règles sont données sans aucune justification. Et surtout, la première proposition contient une quantification universelle explicite (c'est donc une tâche qui est à la fois de type 2.2 et de type 2.3), et aucune règle n'est donnée pour la négation des propositions quantifiées ! Il en va de même pour les deux propositions en *si..., alors...* qui sont implicitement universellement quantifiées (la correction proposée par le manuel est bien une proposition existentielle).

Type de tâches 3 : sur l'implication

3.1 Dire si une implication est vraie ou fausse.

3.2 Compléter la prémisse ou la conclusion d'une implication avec des propositions données de manière à ce qu'elle soit vraie.

3.3 Former des implications vraies à partir de différentes propositions données.

3.4 Démontrer une implication.

3.5 Dire si une inférence à partir d'une implication vraie est valide ou non.

3.6 Dire si une valeur est un contre-exemple ou non pour une implication.

3.7 Dire si on a entre deux propositions seulement une implication ou une équivalence.

3.8 Pour un couple (P, Q) de propositions, dire si chacune des propositions $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow P$, et $Q \Leftrightarrow P$ est vraie ou fausse.

3.9 Dire si une équivalence est vraie ou fausse.

3.10 Compléter une équivalence (l'une des deux propositions est fixée) avec des propositions données de manière à ce qu'elle soit vraie.

3.11 Former des équivalences vraies à partir de différentes propositions données.

3.12 Démontrer une équivalence.

3.13 Écrire la réciproque d'une implication.

3.14 Dire si la réciproque d'une implication est vraie ou fausse.

3.15 Écrire la contraposée d'une implication.

3.16 Dire si on utilise dans un raisonnement une implication ou sa contraposée.

3.17 Énoncer une implication, une équivalence avec les expressions « il faut », « il suffit », « il faut et il suffit ».

3.18 Compléter avec « il faut », « il suffit » de manière à ce que la proposition soit vraie.

3.19 Énoncer une implication avec les expressions « condition nécessaire, condition suffisante. »

3.20 Dire si une proposition est une condition suffisante, une condition nécessaire pour une proposition donnée.

3.21 Proposer une condition suffisante, une condition nécessaire pour une proposition donnée.

3.22 Identifier dans une implication quelle est la condition suffisante, la condition nécessaire.

La liste est longue et correspond finalement plus à une variété de présentation qu'à une différence importante entre les techniques de résolutions des tâches. Je vais faire ressortir cela en donnant des exemples d'exercices proposés pour les types de tâches 3.1 à 3.6. Notons que dans tous ces exercices, les implications sont très rarement explicitement universellement quantifiées.

Ainsi, les types de tâches 3.1, 3.2, 3.3 correspondent finalement à la même activité, montrer qu'une implication est vraie ou fausse (il n'est pas toujours clairement indiqué dans les énoncés des exercices à quel point il faut justifier). Les exemples ci-après illustrent les différences entre ces trois types de tâches :
– pour la tâche 3.1 : exercice 73 page 123 de *Math'x* :

73 Vrai ou faux ?

(A) Si $x \geqslant -1$ alors $x^2 \geqslant 1$. (B) Si $x^2 \leqslant 1$ alors $x \leqslant -1$.

(C) Si $x \geqslant 1$ alors $\frac{1}{x} \leqslant 1$. (D) Si $\frac{1}{x} \leqslant 1$ alors $x \geqslant 1$.

FIGURE 6.31 – Exercice du manuel Math'x sur l'implication (1)

– pour la tâche 3.2 : exercice 51 page 53 question b de *Hyperbole* :

b) Voici six propositions :

A $a^2 = b^2$ B $a = b$

C $a = -b$ D $(a+b)(a-b) = 0$

E $a = b$ **ou** $a = -b$ F $a = 0$ **ou** $b = 0$

Dans chaque cas, recopier et compléter par le nom de l'une de ces propositions :

- la proposition A implique la proposition … ;
- la proposition … implique la proposition A ;
- les propositions … et … sont équivalentes.

FIGURE 6.32 – Exercice du manuel Hyperbole sur l'implication

– pour la tâche 3.3 : exercice 53 page 145 de *Math'x* :

53 Si…alors, si et seulement si, et, ou ?

Rédiger le plus de propriétés possibles avec deux des trois propositions données.

1. $a \times b = 0$ $a = 0$ OU $b = 0$ $a < 0$ ET $b = 0$

2. $a \times b \neq 0$ $a \neq 0$ OU $b \neq 0$ $a \neq 0$ ET $b \neq 0$

3. $\frac{a}{b} < 0$ $a < 0$ OU $b > 0$ $a < 0$ ET $b > 0$

FIGURE 6.33 – Exercice du manuel Math'x sur l'implication (2)

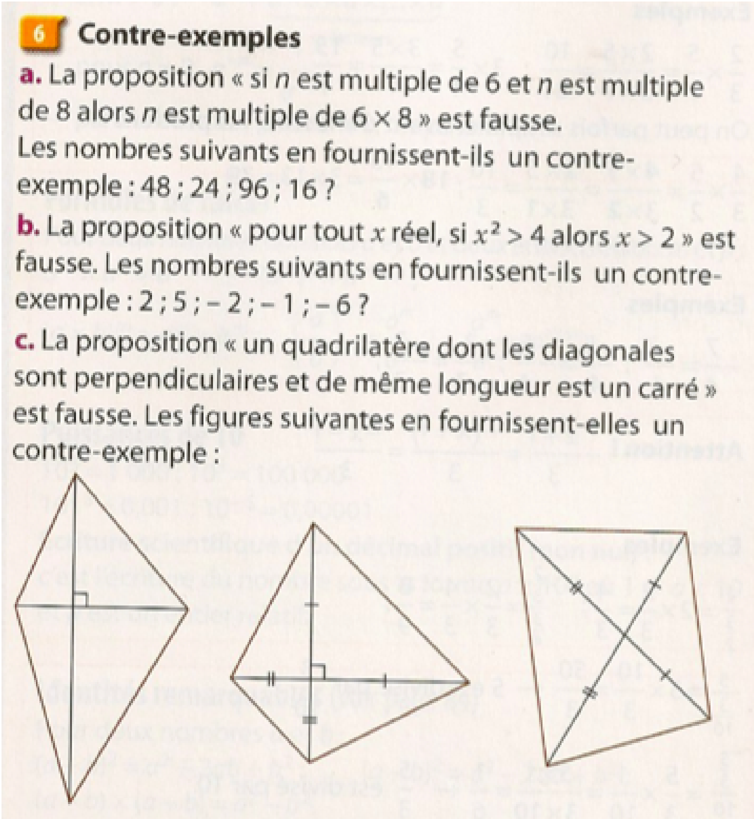
Notons que cet exercice permet d'illustrer les propriétés logiques $[(A \text{ ET } B) \Rightarrow (A \text{ OU } B)]$, et $[(A \text{ ET } B) \Rightarrow (A \text{ OU } C)]$.

Le type de tâches 3.4 est assez rare. Nous le retrouvons par exemple dans la question 1.a de l'exercice 43 page 255 de *Hyperbole* où il est demandé de démontrer que la proposition « si $A \subset B$, alors $p(A) \geqslant p(B)$ » est vraie. Comme nous l'avons déjà vu, dans un tel exercice, l'élève a à sa charge de poser les hypothèses, c'est-à-dire de se placer dans un monde où $A \subset B$ est vrai, ce qui est une difficulté pour des élèves de Seconde.

Le type de tâches 3.5 se retrouve uniquement dans des exercices inspirés de l'exercice *Les cosmonautes* proposé dans les document ressource (voir page 208), contextualisé éventuellement différemment, mais toujours dans un contexte de vie courante [15].

15. Le document ressource propose également un tel type de tâches dans un contexte mathématique, mais je ne l'ai pas retrouvé dans un tel contexte dans les manuels.

J'ai trouvé le type de tâches 3.6 uniquement dans l'exercice 6 page 355 de *Math'x* :



6 Contre-exemples

a. La proposition « si n est multiple de 6 et n est multiple de 8 alors n est multiple de 6×8 » est fausse.
Les nombres suivants en fournissent-ils un contre-exemple : 48 ; 24 ; 96 ; 16 ?

b. La proposition « pour tout x réel, si $x^2 > 4$ alors $x > 2$ » est fausse. Les nombres suivants en fournissent-ils un contre-exemple : 2 ; 5 ; – 2 ; – 1 ; – 6 ?

c. La proposition « un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires et de même longueur est un carré » est fausse. Les figures suivantes en fournissent-elles un contre-exemple :

Figure 6.34 – Exercice du manuel Math'x sur l'implication (3)

Cet exercice permet de travailler sur la définition donnée dans ce manuel d'un contre-exemple : « pour montrer que “si A alors B ” est fausse, on montre que l'on peut avoir à la fois la proposition A vraie ET la proposition B fausse. Un exemple qui permet de démontrer qu'une proposition conditionnelle est fausse s'appelle un contre-exemple ». Ce type de tâches peut être une première étape dans le travail sur le contre-exemple, préalable à la production d'un contre-exemple pour montrer qu'une implication est fausse.

Type de tâches 4 : sur les quantificateurs

4.1 Dire si une proposition quantifiée est vraie ou fausse.

4.2 Compléter avec un quantificateur de manière à ce que la proposition soit vraie.

Comme pour les connecteurs ET et OU, les propositions qui peuvent être complétées avec un quantificateur universel peuvent aussi l'être avec un quantificateur existentiel. Mais la demande implicite est de compléter avec le quantificateur qui donne le plus d'information. Expliciter pourquoi pour certaines propositions on peut compléter avec « il existe » et pas avec « pour tout » est un travail supplémentaire intéressant qui met en jeu la négation. L'exercice 55 page 145 de *Math'x* est l'un des rares de ce type où il n'est pas demandé de choisir entre les deux quantificateurs [16] :

55 « Pour tout x » ou « il existe un x » ?

Peut-on ajouter « pour tout x » devant ces propositions ?
Et « il existe un x tel que » ?

a. $2x+3>4x-5$ **b.** $x^2 \geqslant 0$
c. $x^2 < x+3$ **d.** $x^2 > -3$
e. $x^2+2>0$ **f.** $x^2 \geqslant x-2$

FIGURE 6.35 – Exercice du manuel Math'x sur les quantificateurs (1)

L'essentiel des exercices sur les quantificateurs est dans les parties du programme *Fonctions* et *Statistiques et probabilités*, et les variables quantifiées sont essentiellement astreintes à des ensembles de nombres. Seul *Math'x* propose deux exercices sur les quantificateurs en géométrie, dans le chapitre sur les équations de droites, les exercices 77 et 78 page 307 :

77 Négation et quantificateurs

1. Ces phrases sont-elles vraies ou fausses ?
(A) Pour tout point $M(x\,;y)$, $y=3x-5$.
(B) Il existe au moins un point $M(x\,;y)$ tel que $y=3x-5$.
(C) Il existe au moins un point $M(x\,;y)$ tel que $y\neq 3x-5$.
2. Quelle est la négation de la proposition (A) ?

78 Des quantificateurs

On considère l'égalité $(x+y)^2=x^2+y^2$.
1. Est-elle vraie pour tous réels x et y ?
2. Est-elle fausse pour tous réels x et y ?
3. Montrer que l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $(x+y)^2=x^2+y^2$ est formé de deux droites.

FIGURE 6.36 – Exercices du manuel Math'x sur les quantificateurs (2)

Ici aussi les variables sont astreintes à $\mathbb{R}$ (on peut tout à fait se passer du point M dans l'exercice 77).

16. Notons ici que le domaine auquel les variables sont astreintes n'est pas précisé !

Il y a tout de même des exercices où les propositions quantifiées portent sur des objets autres que numériques, mais dans ce cas la quantification ne porte pas sur une variable, elle est formulée dans le langage courant :

– de manière explicite comme dans l'exercice 63 page 187 de *Hyperbole* :

63 Quantificateur universel

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse.

a) Dans un repère, tous les points appartenant à la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \dfrac{3x^2 - 2x}{x}$ appartiennent à la droite d d'équation $y = 3x - 2$.

b) Dans un repère, tous les points appartenant à la droite d d'équation $y = 3x - 2$ appartiennent à la courbe $\mathscr{C}$ d'équation $y = \dfrac{3x^2 - 2x}{x}$.

Figure 6.37 – Exercice du manuel Hyperbole sur les quantificateurs

– de manière implicite comme dans l'exercice 76 page 75 de *Math'x* :

76 Vrai ou Faux ?

1. Une fonction strictement décroissante sur $[-5\,;\,1]$ et strictement croissante sur $[1\,;\,4]$ admet son minimum en 1.

2. Une fonction strictement croissante sur $[-5\,;\,1]$ et strictement décroissante sur $[1\,;\,4]$ admet son minimum en -5.

Figure 6.38 – Exercice du manuel Math'x sur les quantificateurs (3)

Dans ces exercices, les quantifications sont relativisées (voir page 146), ce qui complique la tâche car il faut bien distinguer la propriété qui caractérise les éléments auxquels on s'intéresse, et la propriété que l'on veut montrer ou infirmer pour ces éléments.

Type de tâches 5 : sur les types de raisonnement

5.1 Faire un raisonnement direct.

5.2 Faire un raisonnement par l'absurde.

5.3 Faire un raisonnement par contraposée.

5.4 Faire un raisonnement par disjonction des cas.

5.5 Montrer qu'une proposition universelle est fausse à l'aide d'un contre-exemple.

5.6 Identifier un type de raisonnement.

5.7 Compléter une démonstration.

5.8 Compléter par « donc » ou par « car. »

Le type de raisonnement à faire est généralement indiqué dans l'exercice.

Hyperbole propose dans chaque chapitre une rubrique *Raisonner, démontrer* mais je n'ai pas pris en compte les exercices y figurant dans l'analyse car ils se distinguent en fait des autres exercices essentiellement parce qu'ils ne nécessitent pas seulement une application directe d'un résultat du cours.

La plupart des exercices sur les types de raisonnement se trouvent dans *Repères*, qui propose notamment en exercice identifié « logique » des démonstrations à compléter, comme l'exercice 22 page 110 :

22 Démonstration à trous ! Logique

1. Compléter la démonstration suivante en expliquant son but :

« Quelle que soit la valeur du nombre réel x, le nombre $(x-5)^2$ est toujours ...... ou ...... à ..., avec $(x-5)^2 = 0$ si, et seulement si, ...

Donc le nombre $2(x-5)^2$ est toujours ...... ou ...... à ..., avec $2(x-5)^2 = 0$ si, et seulement si, ...

Finalement, le nombre $2(x-5)^2+8$ est toujours ...... ou ...... à ..., avec $2(x-5)^2+8 = ...$ si, et seulement si, ...

Conclusion : Pour tout nombre réel x, le nombre $2(x-5)^2+8$ est ...... ou ...... à ... . Cela traduit le fait que la fonction f admet un ...... sur $\mathbb{R}$, qui vaut ..., atteint en ... . »

2. De quelle fonction f, polynôme de degré 2, parle-t-on ? Donner son expression développée.

FIGURE 6.39 – Exercice du manuel Repères sur les types de raisonnement

Des exercices se trouvent aussi dans les autres manuels mais sans être identifiés « logique ».

Le type de tâches 5.1 se distingue du type de tâches 3.4 (montrer une implication) en ceci que l'exercice prend à sa charge de poser les hypothèses. Par exemple, dans l'exercice 65 page 237 de *Déclic* :

65 Logique

1. *ABC* est un triangle isocèle en *A*. Démontrer qu'il a deux médianes de même longueur.*

2. Réciproquement, démontrer que si un triangle a deux médianes de même longueur, alors il est isocèle.

*** Conseil**

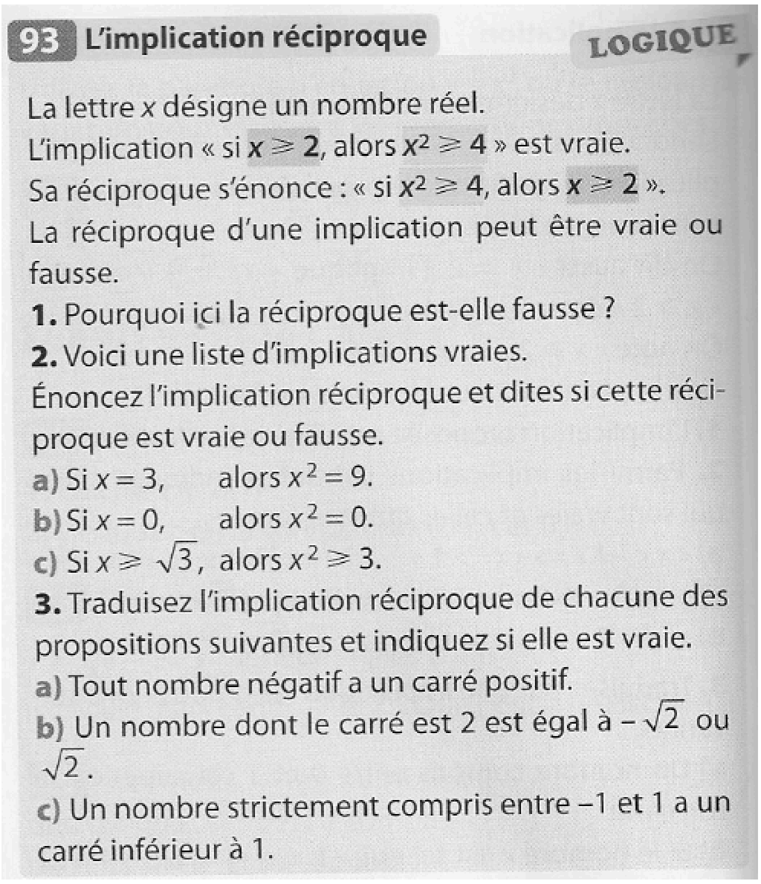
On peut utiliser un repère orthonormé d'origine I, milieu de [BC].

FIGURE 6.40 – Exercice du manuel Déclic sur les types de raisonnement

La première question est du type 5.1, la deuxième du type 3.4.

Type de tâches 6 : sur la reformulation

Seuls *Transmath* et *Math'x* proposent des exercices dont la reformulation est un objectif. Regardons par exemple la question 3 de l'exercice 93 page 84 de *Transmath* :



93 L'implication réciproque LOGIQUE

La lettre x désigne un nombre réel.
L'implication « si $x \geqslant 2$, alors $x^2 \geqslant 4$ » est vraie.
Sa réciproque s'énonce : « si $x^2 \geqslant 4$, alors $x \geqslant 2$ ».
La réciproque d'une implication peut être vraie ou fausse.

1. Pourquoi ici la réciproque est-elle fausse ?

2. Voici une liste d'implications vraies.
Énoncez l'implication réciproque et dites si cette réciproque est vraie ou fausse.

a) Si $x = 3$, alors $x^2 = 9$.
b) Si $x = 0$, alors $x^2 = 0$.
c) Si $x \geqslant \sqrt{3}$, alors $x^2 \geqslant 3$.

3. Traduisez l'implication réciproque de chacune des propositions suivantes et indiquez si elle est vraie.

a) Tout nombre négatif a un carré positif.
b) Un nombre dont le carré est 2 est égal à $-\sqrt{2}$ ou $\sqrt{2}$.
c) Un nombre strictement compris entre -1 et 1 a un carré inférieur à 1.

FIGURE 6.41 – Exercice du manuel Transmath sur la reformulation (1)

Dans cette question 3, les propositions ne sont pas données sous forme d'implications. La consigne « traduisez » est ambiguë : est-ce que cela veut dire qu'il faut d'abord écrire les propositions sous forme d'implication avant d'énoncer la réciproque (notion qui n'est *a priori* définie que pour une proposition de la forme *si…, alors…*) ou au contraire qu'il faut formuler la réciproque sans passer par la forme *si…, alors…* ? Quoiqu'il en soit, un tel exercice permet de mettre en jeu beaucoup de reformulations, s'appuyant même éventuellement sur des propriétés logiques : par exemple, la proposition 3b est de la forme « $\forall x \in \mathbb{R}, \Big(x^2 = 2 \Rightarrow (x = \sqrt{2} \text{ OU } x = -\sqrt{2})\Big)$ », sa réciproque est alors « $\forall x, \Big((x = \sqrt{2} \text{ OU } x = -\sqrt{2}) \Rightarrow x^2 = 2\Big)$ », équivalente à « $\forall x, \Big((x = \sqrt{2} \Rightarrow x^2 = 2) \text{ ET } (x = -\sqrt{2} \Rightarrow x^2 = 2)\Big)$ », équivalente à la formulation en langage courant : « $-\sqrt{2}$ a pour carré 2 et $\sqrt{2}$ a pour carré 2 »

Hormis ces reformulations d'implications implicites, ce manuel propose aussi des reformulations qui consistent à reconnaître des termes définis dans le cours dans des propositions dans lesquelles les quantifications sont explicites, comme par exemple dans l'exercice 59 page 201 :

59 **« Pour tout », « il existe »** LOGIQUE

d et *d′* sont deux droites. Pour chacune des propositions suivantes, que peut-on en déduire pour ces deux droites ?

P1 Il existe deux points A et B distincts appartenant à *d* et *d′*.

P2 Il existe un unique point A appartenant à *d* et *d′*.

P3 Pour tout point A de *d*, A n'appartient pas à *d′*.

FIGURE 6.42 – Exercice du manuel Transmath sur la reformulation (2)

Dans *Transmath* et *Math'x* sont proposées des tâches de reformulation consistant à traduire en langage ensembliste des propositions exprimées en langage courant, et réciproquement. Par exemple les questions 2b et 2c de l'exercice 49 page 213 de *Math'x* :

2. Désormais, E désigne l'ensemble des européens, A le sous-ensemble des artistes et B celui des Belges. Xavier est un élément de E, noté x.

a. Écrire en langage courant (français) :
• $x \in A \cup B$ • $x \in \overline{A}$ • $x \in \overline{A} \cap B$

b. Écrire en langage formel (comme ci-dessus) :
• Xavier est artiste, mais n'est pas belge ;
• Xavier n'est ni artiste, ni belge ;
• Xavier n'est pas belge ou il est artiste.

c. En s'aidant des diagrammes de la question 1, donner la négation des phrases suivantes :
• Xavier est artiste ou belge ;
• Xavier est belge mais n'est pas artiste.

FIGURE 6.43 – Exercice du manuel Math'x sur la reformulation

6.2.3 Synthèse de l'analyse des exercices des manuels de 2010

Les tableaux ci-après récapitulent les données chiffrées en ce qui concerne les types de tâches sur les notions de logique proposées dans 5 manuels de Seconde publiés en 2010. Nous pouvons en tirer les observations suivantes :

– Il y a des disparités entre les manuels, que ce soit au niveau de la répartition des activités selon les différentes notions, ou au niveau des tâches proposées.
– Les exercices de type Vrai/Faux sur des implications (type de tâches 3.1) ou sur des propositions quantifiées (type de tâches 4.1) sont largement plus nombreux que les autres types de tâches. Notons par ailleurs que pour les implications, quand celles-ci sont vraies, la tâche consiste la plupart du temps à seulement repérer une propriété vue en cours. Nous avons vu que les exercices comportant des propositions quantifiées

se trouvaient essentiellement dans des chapitres où les variables sont astreintes à des ensembles de nombres.

– L'implication est de loin la notion qui est l'objet du plus grand nombre d'exercices. Le type de tâches largement privilégié est l'exercice Vrai/Faux. Sont très présentes également les tâches sur la vérité ou non de la réciproque, de l'équivalence, qui sont aussi du type Vrai/Faux.
– Les notions de proposition et de variable, dont nous avons souligné le rôle essentiel, ne sont l'objet de pratiquement aucune activité. Les tâches de reformulation sont, sauf rare exception, absentes des manuels.

Répartition des exercices par notion de logique (en pourcentage du nombre total d'exercices estampillés « logique »)

	Propositions	Connecteurs ET et OU	Négation	Implication	Équivalence	Il faut, il suffit condition suffisante, nécessaire	Quantificateurs	Types de raisonnement	Reformulation	non classé
Transmath	0	1,8	11	46,8	3,7	0	14,7	1,8	18,3	1, 8
Math'x	0,58	4	8,1	28,9	9,2	13,3	13,3	0,6	10,4	11,6
Hyperbole	1,7	1,7	4,3	37,6	6	6,8	27,3	0,8	0	13,7
Repères	2,9	7,8	2,9	27,7	8,7	1,6	17	17,4	0	14
Déclic	0	0	0	25	0	0	55,6	19,4	0	0
Total	1,5	4,4	5,6	32,6	7,1	5,2	19,5	7,8	5,6	10,6

Tableau par type de tâches par manuel

	0.1	0.2	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	2.1	2.2	2.3	2.4	4.1	4.2	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	5.8	6	I
Transmath	0	0	1	0	1	0	0	4	1	7	0	16	0	1	1	0	0	0	0	0	0	20	2
Math'x	0	1	0	3	3	0	1	4	7	3	0	13	10	0	1	0	0	0	0	0	0	18	20
Hyperbole	2	0	0	2	0	0	0	0	2	2	1	29	3	0	1	0	0	0	0	0	0	0	16
Repères	7	0	0	4	0	15	0	1	2	4	0	7	34	3	2	2	1	4	6	12	12	0	34
Déclic	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	20	0	3	0	0	0	4	0	0	0	0	0
Total	9	1	1	9	4	15	1	9	12	16	1	85	47	7	5	2	1	8	6	12	12	38	72

	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8	3.9	3.10	3.11	3.12	3.13	3.14	3.15	3.16	3.17	3.18	3.19	3.20	3.21	3.22
Transmath	11	0	0	0	0	0	4	0	4	0	0	0	15	17	3	1	0	0	0	0	0	0
Math'x	22	0	11	0	4	3	0	9	0	0	6	1	1	5	4	0	11	7	5	0	0	0
Hyperbole	22	7	5	1	3	0	4	6	0	1	0	0	0	2	0	0	0	0	0	6	2	0
Repères	34	0	0	1	5	0	14	14	2	0	0	5	5	5	3	0	0	0	0	0	0	4
Déclic	8	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Total	97	7	16	3	12	3	22	29	6	1	6	6	21	29	10	1	11	7	5	6	2	4

Conclusion de l'analyse du savoir à enseigner

Dans les premières parties de cette thèse, je me suis intéressée à la partie externe de la transposition didactique des notions de logique au lycée, du *savoir savant* au *savoir à enseigner*. Nous avons vu une adaptation nécessaire du schéma classique de transposition : il ne s'agit pas directement de la transposition d'un savoir savant que serait la logique mathématique, mais de la transposition de connaissances à l'œuvre dans l'activité mathématique, ce que j'ai appelé *la logique des mathématiques*. J'ai alors proposé de rajouter dans le processus de transposition un *savoir de référence* intermédiaire entre le savoir savant et le savoir à enseigner. Mais un tel savoir de référence n'existe pas actuellement dans la communauté de l'enseignement des mathématiques. J'ai donc constitué une référence pour la suite de mon étude didactique, qui aborde les notions de logique de plusieurs points de vue, montrant ainsi toute la complexité de ces notions et de leur enseignement.

Dans cette troisième partie, j'ai cherché à voir comment cette complexité se retrouvait dans les textes produits pour l'enseignement de notions de logique.

Les notions de logique présentes dans les programmes et les manuels

La logique est présente dans le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 1969, elle est l'objet d'un enseignement explicite jusqu'en 1981, pendant la période des mathématiques modernes. Elle est ensuite exclue des programmes jusqu'à un discret retour en 1999, plus marqué en 2009. Des notions de logique en tant que telles ne sont ainsi présentes que de 1969 à 1981 et depuis 2009, dans les programmes et dans les manuels.

Une différence importante distingue les deux époques en ce qui concerne la liste des notions présentes : dans les instructions accompagnant le programme de 1970, la notion de proposition est présentée avant toute autre, comme étant « un élément de base du raisonnement », et la notion de variable est également présente (il est question de « propositions dépendant d'une variable », c'est-à-dire dans lesquelles la variable est parlante, et de « propositions qui ont une valeur de vérité indépendante de la variable x », c'est-à-dire dans lesquelles la variable est muette [17]). Ces deux notions sont absentes du programme de 2009 et du document ressource l'accompagnant. Cette différence marque bien la volonté affichée pendant la période des mathématiques modernes d'un lien fort entre logique et langage. Au contraire, l'absence de ces notions dans les programmes et les manuels actuels est un frein à un travail sur les notions de logique associé au langage. Les connecteurs et les quantificateurs sont présents dans les deux périodes, avec des approches différentes quant à la formalisation que je préciserai ultérieurement.

Pour ce qui est des exercices mettant en jeu ces notions dans les manuels actuels, nous avons vu qu'ils étaient proposés dans des domaines mathématiques variés, même si la partie *Fonctions* du programme est plus investie, notamment avec des exercices de type Vrai/Faux sur des propositions quantifiées (ce qui s'explique par le fait que la majorité des quantifications explicitement présentes dans les manuels portent sur des variables astreintes à des ensembles de nombres). Les manuels jouent ainsi le jeu de la logique présente partout, notamment en proposant (et en étiquetant du logo « logique ») plusieurs exercices Vrai/Faux, et quitte à ce que certains exercices paraissent quelque peu artificiels.

Finalité de l'enseignement de notions de logique : équilibre entre langage et raisonnement

Dans tous les programmes étudiés, la maîtrise du raisonnement et de l'expression est un objectif affiché de l'enseignement des mathématiques. Mais depuis 1981, il n'est pas relié à la logique mathématique. Durant la période des mathématiques modernes, comme depuis 2009, il est bien précisé cependant que l'enseignement de notions de logique n'est pas un but en soi, mais doit être fait de manière transversale. Entre 1969 et 1981, il y a un chapitre à part sur les notions de logique, mais dans le but d'un réinvestissement dans tous les autres chapitres. Depuis 2009, l'enseignement des notions de logique doit se faire au fil de l'étude des autres notions du programme.

Durant la période des mathématiques modernes, comme je l'ai déjà souligné à propos des notions de proposition et de variable, la logique est plus fortement associée le langage. Elle participe à l'apprentissage du langage mathématique, dont l'aspect formel est vu comme bénéfique pour la conceptualisation.

Dans le programme de 2009, le travail sur le raisonnement est davantage mis en avant. Il n'est pas question d'un langage mathématique spécifique, mais plutôt de précisions nécessaires sur l'utilisation de la langue courante en mathématiques. Nous retrouvons alors différents positionnements dans les manuels. Par exemple à propos des connecteurs

17. Seul ce deuxième terme est utilisé dans le document.

ET et OU, j'ai distingué une *approche propositionnelle*, dans laquelle il est question des propositions (A OU B) et (A ET B) et de leur vérité selon les vérités de A et de B, d'une *approche naturelle* qui se contente de préciser l'usage en mathématique (notamment pour le « ou » qui y est inclusif). La plupart des manuels proposent cependant quelques exercices sur les connecteurs ET et OU où il faut statuer sur la valeur de vérité d'une conjonction ou d'une disjonction. La technique à utiliser (regarder la valeur de vérité des composantes) n'est donnée en tant que telle dans aucun manuel. Dans le cas de l'approche propositionnelle, la présentation des connecteurs justifie la technique, dans le cas de l'approche naturelle, on ne trouve que des exemples de mise en œuvre de cette technique.

Niveau de formalisation des notions de logique

Durant la période des mathématiques modernes, la logique mathématique est clairement une référence pour l'enseignement de notions de logique. Les instructions accompagnant le programme de 1969 proposent quelque chose qui se rapproche d'un rapide cours de logique mathématique à destination des enseignants. Cependant, les manuels ne sont pas tous aussi proches de cette référence, nous avons vu par exemple que seuls deux des trois manuels de 1969 étudiés proposaient les tables de vérité des connecteurs. Les aspects syntaxique et sémantique des notions de logique sont présents, des propriétés sont données qui permettent une manipulation formelle des énoncés mathématiques. Notons que dans cette période, le langage utilisé en classe de mathématiques au lycée est beaucoup plus formalisé qu'aujourd'hui. Il y a alors un réinvestissement naturel du travail sur les notions de logique à travers la compréhension et l'utilisation des énoncés.

Dans le programme et le document ressource de 2009, le discours sur les notions de logique reste en grande partie informel, et le document ressource, pourtant à destination des enseignants, ne propose aucun élément théorique. Cette absence de référence dans le programme se ressent dans les manuels actuels : le discours est assez différent d'un manuel à l'autre, il reste également en partie informel, et les notions de logique y sont même parfois malmenées [18]. Une conséquence immédiate de la défiance affichée vis-à-vis de la formalisation des notions est l'absence quasi totale de leur aspect syntaxique.

Prise en compte des points sensibles

Dans les instructions accompagnant le programme de 1969, plusieurs éléments de la complexité épistémologique des notions de logique sont présents : distinction entre variable parlante et variable muette, aspect d'opérateur sur les propositions des connecteurs, distinction entre implication entre propositions et implication universellement quantifiée…

18. On trouvera en annexe H page 533 plusieurs exercices qui posent de sérieux problèmes.

Cependant, la présentation des notions reste très centrée sur leur approche à partir de la logique mathématique. Les points sensibles concernant l'expression de ces notions dans le discours ne sont pas soulignés (ce qui s'explique par le fait qu'il y a l'idée d'un langage mathématique spécifique, les difficultés liées à l'utilisation de la langue courante sont alors censées disparaître), et il n'y a pas de proposition d'activités pour les élèves.

À l'inverse, le document ressource accompagnant le programme de 2009 propose plusieurs activités pour les élèves, aborde plusieurs confusions possibles entre langage mathématique et langage courant (principe du maximum d'information, passage d'un « et » à un « ou » dans la reformulation d'une proposition, implications entendues comme des équivalences...), mais ne donne pas d'éléments théoriques expliquant ces confusions. Certains de ces éléments sont repris dans les manuels, mais ceux-ci font également des confusions malheureuses (par exemple entre *si... alors* et *donc*, entre et-propositionnel et et-couple...).

Vers la formation des enseignants

Nous pourrions résumer très rapidement les résultats précédents en décrivant la situation actuelle en quelques mots : à un savoir de référence absent s'ajoute un savoir à enseigner imprécis. Il semble alors que les professeurs de lycée d'aujourd'hui pourraient légitimement se sentir en difficulté pour proposer à leurs élèves un enseignement de notions de logique permettant d'atteindre les objectifs du programme. Une suite naturelle au travail que j'ai déjà mené jusqu'ici pourrait être d'aller voir ce qu'il en est vraiment, en se donnant les moyens d'analyser le savoir enseigné, et de comprendre les pratiques des professeurs. Ce n'est pas le chemin que j'ai suivi. J'ai effectivement choisi de rester « en dehors de la classe », et de poursuivre la réflexion en m'intéressant aux questions de formation. Dans ce contexte particulièrement complexe en ce qui concerne les notions de logique, la formation des enseignants est d'autant plus importante. Or, je rappelle que la logique mathématique est absente de la plupart des cursus universitaires de mathématiques. De plus, l'enseignement de notions de logique n'était plus explicitement au programme entre 1981 et 2009, et nous pouvons supposer que les difficultés des élèves relevant de la logique étaient peu étudiées dans la formation des enseignants. Puisque depuis 2009 les programmes mentionnent de nouveau des notions de logique, il est légitime de se poser la question de ce qu'il est possible de proposer dans le cadre de la formation.