

CHAPITRE 2

SURFACES D'ÉCOULEMENT PLASTIQUE DE MONOCRISTAUX CUBIQUES CENTRES

(Cas du glissement sur les systèmes $\{110\} \langle 111 \rangle$ et $\{112\} \langle 111 \rangle$)

Comme nous l'avons rappelé dans le chapitre précédent, les phénomènes de textures et d'anisotropie plastique des matériaux métalliques sont liés aux propriétés plastiques des grains qui les constituent. Ces propriétés dépendent essentiellement de la forme et la composition de la surface d'écoulement plastique du monocristal. De nombreuses études se sont attachées à caractériser de telles surfaces :

- celle des métaux c.f.c. dans le cas de τ_c identiques (Bishop et Hill, 1951),
- celle des métaux c.c. pour un glissement équiprobable sur $\{110\}$ et $\{112\}$ (Schmitt et Raphanel, 1986),
- celles des métaux h.c. en fonction du rapport des paramètres de maille c/a et également des cissions critiques (Tome et Kochs, 1985).

Il nous a donc semblé intéressant d'étudier la surface d'écoulement plastique de cristaux cubiques centrés pour le glissement sur les plans $\{110\}$ et $\{112\}$ comme une fonction du rapport des cissions résolues critiques de ces 2 systèmes. Un travail préliminaire a été réalisé par Chin (1972) afin d'établir les rapports des cissions résolues critiques pour les 3 types de comportement, à savoir : le glissement sur $\{110\} \langle 111 \rangle$, le glissement mixte et le glissement sur $\{112\} \langle 111 \rangle$ uniquement. De plus, récemment, Schmitt et Raphanel (1986) ont décrit, à partir d'une approche en "pencil glide", cette surface d'écoulement pour une cission résolue critique identique sur les plans $\{110\}$ et $\{112\}$.

Dans ce chapitre, nous caractérisons de façon plus complète cette surface pour le glissement mixte et nous étudions également sa validité en fonction des valeurs du rapport des cissions résolues critiques permettant le glissement à la fois sur les plans $\{110\}$ et $\{112\}$.

2.1 NOTATION ET SYSTEMES DE GLISSEMENT

Il s'agit maintenant de définir l'espace des contraintes et des vitesses de déformation ainsi que la notation des systèmes de glissement que nous allons utiliser pour décrire cette surface d'écoulement.

Généralement, la contrainte σ est définie par un tenseur symétrique (3 x 3), mais comme nous supposons que la pression hydrostatique n'a pas d'influence sur la déformation plastique, nous utilisons le déviateur des contraintes S pour lequel seulement 5 composantes sont indépendantes. Nous avons adopté cette hypothèse pour la simplicité, bien que dans certains cas et, notamment à basse température, la pression hydrostatique peut avoir une influence sur les propriétés d'écoulement des cristaux cubiques centrés (Christian, 1970) à travers les effets de la contrainte normale sur la cission résolue critique. De même, le tenseur symétrique (3 x 3) des vitesses de déformation $\dot{\epsilon}$ se réduit à 5 composantes indépendantes, puisque le volume reste constant durant la déformation plastique dans le cas d'un cristal incompressible.

Pour caractériser les contraintes et les vitesses de déformation, une notation vectorielle à 5 dimensions, (Lequeu, Gilormini, Montheillet, Bacroix et Jonas, 1987) sera utilisée :

$$\vec{S} = \left(\frac{S_{22} - S_{11}}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} S_{33}, \sqrt{2} S_{23}, \sqrt{2} S_{31}, \sqrt{2} S_{12} \right) \quad (2.1)$$

$$\vec{\dot{\epsilon}} = \left(\frac{\dot{\epsilon}_{22} - \dot{\epsilon}_{11}}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} \dot{\epsilon}_{33}, \sqrt{2} \dot{\epsilon}_{23}, \sqrt{2} \dot{\epsilon}_{31}, \sqrt{2} \dot{\epsilon}_{12} \right)$$

De même, pour les facteurs généralisés de Schmid d'un système de glissement k , m_{ij}^k , généralement exprimés comme suit :

$$m_{ij}^k = 1/2 (b_i^k n_j^k + b_j^k n_i^k) \quad (2.2)$$

Direction de glissement \vec{b}	$[1\ 1\ \bar{1}]$			$[1\ \bar{1}\ \bar{1}]$			$[1\ \bar{1}\ 1]$			$[1\ 1\ 1]$		
Plan de glissement \vec{n}	$(0\ 1\ 1)$	$(1\ 0\ 1)$	$(1\ \bar{1}\ 0)$	$(0\ 1\ \bar{1})$	$(1\ 0\ 1)$	$(1\ 1\ 0)$	$(0\ 1\ 1)$	$(1\ 0\ \bar{1})$	$(1\ 1\ 0)$	$(0\ 1\ \bar{1})$	$(1\ 0\ \bar{1})$	$(1\ \bar{1}\ 0)$
n^{os} (\vec{b}) $(-\vec{b})$	1 13	2 14	3 15	4 16	5 17	6 18	7 19	8 20	9 21	10 22	11 23	12 24
Plan de glissement \vec{n}'	$(2\ \bar{1}\ 1)$	$(\bar{1}\ 2\ 1)$	$(\bar{1}\ \bar{1}\ \bar{2})$	$(2\ 1\ 1)$	$(\bar{1}\ \bar{2}\ 1)$	$(\bar{1}\ 1\ \bar{2})$	$(2\ 1\ \bar{1})$	$(\bar{1}\ \bar{2}\ \bar{1})$	$(\bar{1}\ 1\ 2)$	$(2\ \bar{1}\ \bar{1})$	$(\bar{1}\ 2\ \bar{1})$	$(\bar{1}\ \bar{1}\ 2)$
n^{os} (\vec{b}) $(-\vec{b})$	1' 13'	2' 14'	3' 15'	4' 16'	5' 17'	6' 18'	7' 19'	8' 20'	9' 21'	10' 22'	11' 23'	12' 24'

Tableau 2.1 Notation pour les systèmes de glissement $\{110\}\langle 111\rangle$ et $\{112\}\langle 111\rangle$.

où \vec{n}^k et \vec{b}^k sont les vecteurs unitaires normal au plan de glissement et parallèle à la direction de glissement du système k,

la notation vectorielle à 5 composantes est adaptée.

$$\vec{m}^k = \left(\frac{m_{22}^k - m_{11}^k}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}} m_{33}^k, \sqrt{2} m_{23}^k, \sqrt{2} m_{31}^k, \sqrt{2} m_{12}^k \right) \quad (2.3)$$

Cette notation a l'avantage de présenter avec la notation tensorielle des expressions similaires pour le taux de travail plastique par unité de volume (\dot{W}), et pour la cission résolue sur le système k (τ^k).

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \vec{S} \vec{\dot{\epsilon}} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 S_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \\ \tau^k &= \vec{m}^k \vec{S} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 m_{ij}^k S_{ij} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Les systèmes de glissement possibles $\{110\}\langle 111 \rangle$ et $\{112\}\langle 111 \rangle$ sont au nombre de 48, ce qui correspond à un glissement sur 3 plans $\{110\}$ et 3 plans $\{112\}$ le long de chacune des 8 directions $\langle 111 \rangle$ (c'est-à-dire 4 directions $\langle 111 \rangle$ plus leurs opposées). La classification adoptée pour les systèmes $\{110\}$ est celle proposée par Kocks, Canova et Jonas (1983), les systèmes sont regroupés selon leur direction de glissement (Tableau 2.1) et numérotés de 1 à 24. La numérotation de 1' à 24' des systèmes $\{112\}$ (Tableau 2.1) est en relation avec celle adoptée pour les systèmes $\{110\}$. En effet, pour chaque direction de glissement $\langle 111 \rangle$, chacun des 3 plans $\{112\}$ associé porte le numéro du plan $\{110\}$ qui lui est perpendiculaire. Donc, pour chaque système (\vec{b}, \vec{n}) de glissement sur $\{110\}$, il y a un système (\vec{b}', \vec{n}') de glissement sur $\{112\}$ tel que :

$$\vec{n}' = \pm \vec{n} \times \vec{b} \quad (2.5)$$

Cette numérotation présentée au tableau 2.1 est réalisée de telle sorte que les systèmes $\{112\}$ numérotés :

- de 1' à 12' sont orientés pour le glissement dans le sens maillage,
- de 13' et 24' dans le sens anti-maillage.



Comme nous l'avons déjà souligné, l'absence de symétrie des systèmes $\{112\} \langle 111 \rangle$ conduit à un comportement plastique asymétrique, à savoir que le glissement dans le sens maclage est parfois plus facile que dans le sens anti-maclage (Guiu, 1969). Pour la simplicité, cette asymétrie du glissement ne sera pas prise en compte lors de la construction de la surface d'écoulement, bien qu'en principe ces effets asymétriques peuvent y être incorporés.

2.2 DEFINITION D'UNE SURFACE D'ECOULEMENT PLASTIQUE

En conséquence, la surface d'écoulement est définie dans un espace des contraintes à 5 dimensions et comprend tous les états possibles de contrainte provoquant l'écoulement plastique. Cette déformation plastique se produit dans un cristal quand la cission résolue sur au moins un des systèmes de glissement atteint une valeur critique τ_c qu'elle ne peut dépasser (Schmid et Boas, 1935). Pour le système k , cette condition s'exprime comme suit :

$$\tau_c^k = \vec{m}^k \cdot \vec{S} \quad (2.6)$$

Cette équation définit, dans l'espace des contraintes à 5 dimensions, un hyperplan dont la normale porte le vecteur \vec{m}^k et dont la distance à l'origine est $\sqrt{2} \tau_c^k$.

Pour une déformation complètement imposée, aucune des 5 composantes du déviateur n'est connue, et donc 5 systèmes de glissement indépendants sont nécessaires pour accommoder la déformation (Von Mises, 1928). Les différents états possibles de contrainte sont obtenus en considérant toutes les intersections d'hyperplans correspondant à 5 systèmes de glissement indépendants. Ceci définit un ensemble de points dans l'espace des contraintes à 5 dimensions. De plus, un état de contrainte réel doit être tel que la cission résolue sur chaque système est inférieure ou égale à sa valeur critique en vertu de la loi de Schmid. La surface d'écoulement se compose alors uniquement des points d'intersections ou sommets qui appartiennent à l'enveloppe intérieure des hyperplans. Ces sommets sont reliés les uns aux autres par des éléments géométriques, appelés arêtes qui sont d'ordre 1, 2, 3 ou 4. L'ordre attribué à une arête correspond au nombre de systèmes de glissement indépendants qui lui est associé. Les arêtes d'ordre 1 sont donc les facettes de cette surface d'écoulement, c'est-à-dire les hyperplans correspondant à un système. Les arêtes d'ordre 2, 3 et 4 représentent respectivement des volumes (3D), des plans (2D) et des droites (1D) dans cet espace des

N°		Coordonnées des sommets (en unités τ_c)					\vec{S} \vec{S} (en unités τ_c)	Systèmes de glissement associés	Groupe de base [nombre de quintuplets de systèmes indépendants]
Pos	Neg	S1	S2	S3	S4	S5			
1	29	$-\sqrt{3}$	-1	0	0	0	2	2 3 5 6 8 9 11 12	A [32]
2	30	$\sqrt{3}$	-1	0	0	0		1 10 15 16 18 19 21 24	
3	31	0	2	0	0	0		4 7 13 14 17 20 22 23	
4	32	0	0	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	3	1 2 7 9 17 18	B [6]
5	33	0	0	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$		1 7 11 12 15 20	
6	34	0	0	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$		2 3 4 10 17 24	
7	35	0	0	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$		8 9 16 18 22 23	
8	36	0	0	$2\sqrt{3}$	0	0	$2\sqrt{3}$	2 3 8 9 17 18 23 24	C [32]
9	37	0	0	0	$2\sqrt{3}$	0		1 7 9 12 15 16 18 22	
10	38	0	0	0	0	$2\sqrt{3}$		1 2 4 7 10 11 17 20	
11	39	$-\sqrt{3}/2$	-1/2	0	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{7}$	1 2 7 9 11 12	D [4]
12	40	$-\sqrt{3}/2$	-1/2	0	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$		3 5 6 8 13 19	
13	41	$-\sqrt{3}/2$	-1/2	0	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$		5 8 9 12 16 22	
14	42	$-\sqrt{3}/2$	-1/2	0	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$		2 3 4 6 10 11	
15	43	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$		1 2 10 17 18 24	
16	44	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$-\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}$		5 14 15 16 19 21	
17	45	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$		1 10 11 15 20 21	
18	46	$\sqrt{3}/2$	-1/2	$\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}$		8 16 18 19 23 24	
19	47	0	1	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	0		7 9 17 18 22 23	
20	48	0	1	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	0		4 6 13 14 20 21	
21	49	0	1	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	0		3 4 13 17 23 24	
22	50	0	1	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	0		7 12 14 15 20 22	
23	51	$\sqrt{3}/2$	-3/2	$\sqrt{3}$	0	0	$\sqrt{6}$	1 2 8 10 16 18 19 24	E [36]
24	52	$\sqrt{3}/2$	-3/2	$-\sqrt{3}$	0	0		1 5 10 11 15 16 19 21	
25	53	$\sqrt{3}/2$	3/2	0	$\sqrt{3}$	0		7 14 15 17 18 20 22 23	
26	54	$\sqrt{3}/2$	3/2	0	$-\sqrt{3}$	0		4 13 14 17 20 21 23 24	
27	55	$-\sqrt{3}$	0	0	0	$\sqrt{3}$		2 3 4 6 7 9 11 12	
28	56	$-\sqrt{3}$	0	0	0	$-\sqrt{3}$		3 5 6 8 9 12 13 22	

Tableau 2.2 Sommets de la surface d'écoulement pour le glissement sur les systèmes $\{110\}\langle 111 \rangle$: polyèdre critique P.

contraintes à 5 dimensions où chacun de ces éléments géométriques est défini par les sommets environnants.

En raison de sa structure géométrique, cette surface d'écoulement plastique est également appelée "polyèdre critique". Par la suite, les polyèdres décrivant les surfaces d'écoulement pour le glissement sur un seul type de systèmes seront appelés :

- P pour les 24 systèmes $\{110\}\langle 111 \rangle$ de cission résolue critique τ_c ,
- P' pour les 24 systèmes $\{112\}\langle 111 \rangle$ de cission résolue critique τ'_c .

Le terme "polyèdre mixte" P_m quant à lui désignera la surface d'écoulement pour laquelle les 2 types de glissement sont possibles.

2.3 TABULATION DES POLYEDRES CRITIQUES CORRESPONDANT A UN MODE DE GLISSEMENT UNIQUE

Depuis le travail de Bishop et Hill (1951, 1953), la surface d'écoulement plastique pour les monocristaux cubiques à faces centrées est bien connue pour le glissement sur les systèmes $\{111\}\langle 110 \rangle$. Par dualité, elle est identique à la surface d'écoulement plastique des monocristaux cubiques centrés glissant sur $\{110\}\langle 111 \rangle$. Ce polyèdre critique P se compose de 56 sommets répartis par les opérations de symétrie cubique en 5 groupes irréductibles. Parmi ces groupes, 3 comprennent les sommets à 8 systèmes activables et les 2 autres ceux à 6 (Tableau 2.2). Les caractéristiques de cette surface d'écoulement ont été tabulées par Bishop (1953) et plus récemment par Kocks et al. (1983) de façon plus complète.

La surface d'écoulement pour le glissement restreint aux seuls systèmes $\{112\}\langle 111 \rangle$ a été calculée par Hosford et Chin (1969). Ce polyèdre est défini dans notre notation au tableau 2.3, il comporte 90 sommets répartis en 5 groupes irréductibles dont 2 se composent des sommets à 8 systèmes activables et 3 à 5 systèmes.

Les sommets de ces 2 polyèdres critiques P et P' sont présentés, respectivement, aux tableaux 2.2 et 2.3, et sont caractérisés par :

N°		Coordonnées des sommets (en unités τ_c)					\vec{S}	Systèmes de glissement associés	Groupe de base [nombre de quintuplets de systèmes indépendants]		
Pos	Neg	S1	S2	S3	S4	S5	(en unités τ_c)				
1'	46'	2	0	0	0	0	2	2' 5' 8' 11' 13' 16' 19' 22'	A' [56]		
2'	47'	1	$\sqrt{3}$	0	0	0		3' 6' 9' 12' 13' 16' 19' 22'			
3'	48'	1	$-\sqrt{3}$	0	0	0		2' 5' 8' 11' 15' 18' 21' 24'			
4'	49'	5/4	$5/4\sqrt{3}$	-1/2	1	1	$\sqrt{13/3}$	2' 9' 13' 16' 19'	B' [1]		
5'	50'	5/4	$5/4\sqrt{3}$	1/2	-1	1		6' 11' 16' 19' 22'			
6'	51'	5/4	$5/4\sqrt{3}$	1/2	1	-1		5' 12' 13' 16' 22'			
7'	52'	5/4	$5/4\sqrt{3}$	-1/2	-1	-1		3' 8' 13' 19' 22'			
8'	53'	-5/4	$5/4\sqrt{3}$	-1	1/2	1		9' 10' 17' 20' 23'			
9'	54'	-5/4	$5/4\sqrt{3}$	1	-1/2	1		1' 6' 14' 17' 20'			
10'	55'	-5/4	$5/4\sqrt{3}$	1	1/2	-1		7' 12' 14' 20' 23'			
11'	56'	-5/4	$5/4\sqrt{3}$	-1	-1/2	-1		3' 4' 14' 17' 23'			
12'	57'	0	$-5/2\sqrt{3}$	-1	1	1/2		2' 10' 15' 18' 24'			
13'	58'	0	$-5/2\sqrt{3}$	1	-1	1/2		1' 11' 15' 21' 24'			
14'	59'	0	$-5/2\sqrt{3}$	1	1	-1/2		5' 7' 15' 18' 21'			
15'	60'	0	$-5/2\sqrt{3}$	-1	-1	-1/2		4' 8' 18' 21' 24'			
16'	61'	-1/4	$-1/4\sqrt{3}$	-1/2	2	2		$\sqrt{25/3}$		2' 9' 10' 15' 20'	C' [1]
17'	62'	-1/4	$-1/4\sqrt{3}$	1/2	-2	2				1' 6' 11' 17' 24'	
18'	63'	-1/4	$-1/4\sqrt{3}$	1/2	2	-2				5' 7' 12' 18' 23'	
19'	64'	-1/4	$-1/4\sqrt{3}$	-1/2	-2	-2	3' 4' 8' 14' 21'				
20'	65'	1/4	$-1/4\sqrt{3}$	-2	1/2	2	2' 9' 10' 19' 24'				
21'	66'	1/4	$-1/4\sqrt{3}$	2	-1/2	2	1' 6' 11' 15' 16'				
22'	67'	1/4	$-1/4\sqrt{3}$	2	1/2	-2	5' 7' 12' 21' 22'				
23'	68'	1/4	$-1/4\sqrt{3}$	-2	-1/2	-2	3' 4' 8' 13' 18'				
24'	69'	0	$1/2\sqrt{3}$	-2	2	1/2	2' 9' 10' 13' 23'				
25'	70'	0	$1/2\sqrt{3}$	2	-2	1/2	1' 6' 11' 14' 22'				
26'	71'	0	$1/2\sqrt{3}$	2	2	-1/2	5' 7' 12' 16' 20'				
27'	72'	0	$1/2\sqrt{3}$	-2	-2	-1/2	3' 4' 8' 17' 19'				
28'	73'	1/4	$1/4\sqrt{3}$	-5/2	1	1	$\sqrt{25/3}$	2' 9' 10' 13' 19'	D' [1]		
29'	74'	1/4	$1/4\sqrt{3}$	5/2	-1	1		1' 6' 11' 16' 22'			
30'	75'	1/4	$1/4\sqrt{3}$	5/2	1	-1		5' 7' 12' 16' 22'			
31'	76'	1/4	$1/4\sqrt{3}$	-5/2	-1	-1		3' 4' 8' 13' 19'			
32'	77'	-1/4	$1/4\sqrt{3}$	-1	5/2	1		2' 9' 10' 20' 23'			
33'	78'	-1/4	$1/4\sqrt{3}$	1	-5/2	1		1' 6' 11' 14' 17'			
34'	79'	-1/4	$1/4\sqrt{3}$	1	5/2	-1		5' 7' 12' 20' 23'			
35'	80'	-1/4	$1/4\sqrt{3}$	-1	-5/2	-1		3' 4' 8' 14' 17'			
36'	81'	0	$-1/2\sqrt{3}$	-1	1	5/2		2' 9' 10' 15' 24'			
37'	82'	0	$-1/2\sqrt{3}$	1	-1	5/2		1' 6' 11' 15' 24'			
38'	83'	0	$-1/2\sqrt{3}$	1	1	-5/2		5' 7' 12' 18' 21'			
39'	84'	0	$-1/2\sqrt{3}$	-1	-1	-5/2		3' 4' 8' 18' 21'			
40'	85'	1/2	$-\sqrt{3}/2$	3	0	0	$\sqrt{10}$	1' 5' 7' 11' 15' 16' 21' 22'	E' [56]		
41'	86'	1/2	$-\sqrt{3}/2$	-3	0	0		2' 4' 8' 10' 13' 18' 19' 24'			
42'	87'	1/2	$\sqrt{3}/2$	0	3	0		2' 5' 9' 12' 13' 16' 20' 23'			
43'	88'	1/2	$\sqrt{3}/2$	0	-3	0		3' 6' 8' 11' 14' 17' 19' 22'			
44'	89'	1	0	0	0	3		2' 6' 9' 11' 15' 16' 19' 24'			
45'	90'	1	0	0	0	-3		3' 5' 8' 12' 13' 18' 21' 22'			

Tableau 2.3 Sommets de la surface d'écoulement pour le glissement sur les systèmes $\{112\}\langle 111 \rangle$: polyèdre critique P'.

- leurs coordonnées S_i dans l'espace des contraintes utilisé,
- par leur norme $\|\vec{S}\|$,
- les systèmes de glissement qui leur sont associés.

Ces tableaux précisent également le nombre de quintuplets de systèmes de glissement indépendants pour chaque groupe irréductible, comme cela avait été déterminé précédemment par Bacroix, Jonas, Montheillet et Skalli (1986) pour le polyèdre P.

2.4 CONSTRUCTION DU POLYEDRE MIXTE

2.4.1 Détermination de l'intervalle d'existence du polyèdre mixte en fonction du rapport des cissions critiques ξ

Nous normalisons le vecteur contrainte \vec{S} par la cission résolue critique τ_c des systèmes $\{110\}\langle 111\rangle$. De ce fait, la cission résolue critique des systèmes de glissement est égale à

$$\tau_c' / \tau_c = \xi \quad \begin{array}{l} \text{sur } \{110\}\langle 111\rangle \\ \text{sur } \{112\}\langle 111\rangle \end{array} \quad (2.7)$$

Ce paramètre ξ est appelé rapport des cissions résolues critiques pour le mode de glissement $\{110\}+\{112\}$.

Nous allons maintenant déterminer pour quelle gamme de valeurs du rapport ξ , le polyèdre mixte P_m existe. En effet, lorsque le paramètre ξ augmente, la cission résolue critique du mode $\{112\}$ devient supérieure à celle du glissement sur $\{110\}$ et pour une limite supérieure de ξ , le glissement $\{112\}$ devient impossible. Géométriquement, augmenter ξ revient à dilater le polyèdre P' ; la limite supérieure de ξ est atteinte lorsque le polyèdre P' englobe totalement le polyèdre P. A ce moment, le glissement se produit sur les systèmes constituant l'enveloppe intérieure des hyperplans, c'est-à-dire uniquement sur $\{110\}\langle 111\rangle$. Inversement, diminuer ξ revient à contracter le polyèdre P' , la limite inférieure de ξ est atteinte lorsque le polyèdre P' est totalement inscrit dans le polyèdre P, le glissement a alors lieu uniquement sur les systèmes $\{112\}\langle 111\rangle$.

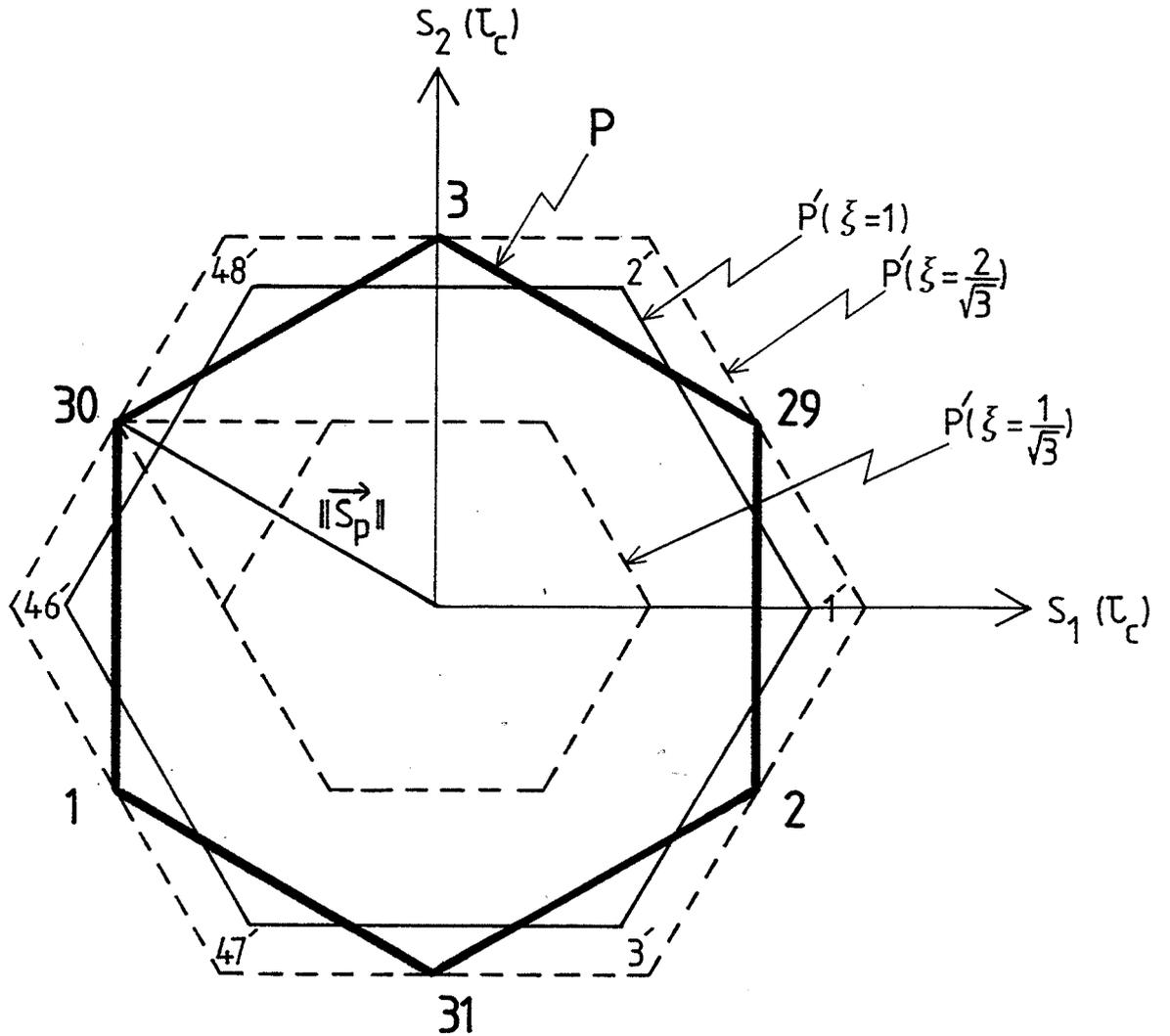


Figure 2.1 Dans le plan II (S_1, S_2) , la section du polyèdre P est un hexagone régulier (traits gras) défini par les sommets du type A : 1 - 2 - 3 - 29 - 30 - 31. La section dans ce même plan du polyèdre P' est également un hexagone régulier (traits fins), mais tourné de 30° et défini par les sommets du type A' : 1' - 2' - 3' - 46' - 47' - 48'. En faisant varier ξ , on constate que les 2 seules valeurs de ξ pour lesquelles un sommet de P (30, par exemple) se situe sur une facette de P' sont $1/\sqrt{3}$ et $2/\sqrt{3}$ (traits fins discontinus). Mais seule la valeur $2/\sqrt{3}$ de ξ représente le cas où le sommet du groupe A appartient à l'enveloppe intérieure de P' et constitue donc la borne supérieure.

Pour déterminer numériquement la borne supérieure du rapport des cissons résolues critiques ξ , nous considérons le cas limite où un sommet du polyèdre de Bishop et Hill appartient à une facette du polyèdre P' . Comme chaque polyèdre est constitué de 5 groupes irréductibles de sommets et de 24 hyperplans, le problème se réduit à calculer, pour un sommet de chaque groupe, la valeur de ξ pour laquelle ce sommet de P appartient à une facette de P' (Fig. 2.1). Cette condition s'exprime comme suit :

$$\vec{m}_{P'} \cdot \vec{S}_P(\tau_c) = \tau'_c \quad (2.8)$$

ou $\vec{m}_{P'} \cdot \vec{S}_P\left(\frac{1}{\xi}\right) = 1$ en termes de ξ .

La distance de ce sommet est ensuite exprimée en fonction de ξ , et parmi les différentes valeurs de ξ trouvées de cette façon, seule celle correspondant à la plus petite distance de ce sommet de P sur une des facettes de P' est retenue. Dans le cas présent, cette valeur de ξ est $2/\sqrt{3}$ qui donc définit la borne supérieure pour le premier groupe de sommets examiné. Ayant répété ce calcul, pour les 4 autres groupes irréductibles, la même valeur $\xi = 2/\sqrt{3}$ pour la borne supérieure est obtenue pour chaque groupe. Cela signifie que tous les sommets de Bishop et Hill pénètrent **simultanément** dans le polyèdre P' pour cette limite supérieure du rapport ξ .

La même démarche est utilisée pour déterminer la borne inférieure du rapport ξ et la condition d'appartenance d'un sommet de P' à une des facettes du polyèdre de Bishop et Hill s'exprime de la façon suivante :

$$\vec{m}_P \cdot \vec{S}_{P'}(\tau_c) = \tau_c \quad (2.9)$$

ou $\vec{m}_P \cdot \vec{S}_{P'}(\xi) = 1$ en terme de ξ .

Dans ce cas, la plus petite distance de ce sommet à l'origine correspond à la borne inférieure du rapport ξ qui est $\sqrt{3}/2$ quelque soit le groupe irréductible considéré. Nous pouvons à nouveau en conclure que tous les sommets du polyèdre P' pénètrent **simultanément** dans le polyèdre de Bishop et Hill.

Ces limites supérieure et inférieure du rapport ξ sont identiques à celles obtenues par Chin (1972).



2.4.2 Caractérisation des sommets du polyèdre mixte pour des cissions critiques identiques sur $\{110\}$ et $\{112\}$: $\xi = 1$

Ayant l'intervalle de variation du paramètre ξ ($\sqrt{3}/2, 2/\sqrt{3}$) pour lequel à la fois des systèmes de glissement du type $\{110\}\langle 111\rangle$ et $\{112\}\langle 111\rangle$ sont activables, il nous reste à caractériser ce polyèdre mixte et à déterminer s'il est unique ou si plusieurs configurations de celui-ci existent dans cet intervalle.

La première étape consiste à définir les sommets de cette surface d'écoulement pour une valeur particulière de ξ et ensuite, il s'agit de tester la validité de ce polyèdre mixte pour tout l'intervalle d'existence du rapport ξ .

La valeur particulière avec laquelle nous avons choisi de travailler est $\xi = 1$. Ce rapport des cissions résolues critiques ($\tau'_c = \tau_c$) correspond au cas où le glissement est équiprobable sur les 2 types de systèmes $\{110\}\langle 111\rangle$ et $\{112\}\langle 111\rangle$. Ce polyèdre pour $\xi = 1$ a été décrit de façon assez succincte par Schmitt et Raphanel (1986) à partir d'une méthode numérique basée sur le principe du "pencil glide"

La position des sommets du polyèdre mixte dans l'espace des contraintes à 5 dimensions est obtenue en résolvant le problème linéaire suivant :

$$\vec{S} \cdot \vec{m}^k = 1 \quad \text{sur 5 systèmes de glissement indépendants (a)}$$

$$\forall k = 1, \dots, 24' \quad (2.10)$$

$$\vec{S} \cdot \vec{m}^k \leq 1 \quad \text{sur les autres systèmes (b)}$$

Cette résolution consiste à considérer toutes les combinaisons de 5 systèmes de glissement parmi les 48 systèmes possibles. Si le déterminant des équations 2.10 (a) est non-nul, alors les systèmes de glissement sont indépendants et l'état de contrainte \vec{S} nécessaire pour activer ceux-ci est un sommet possible. Mais, pour que ce sommet représente un état de contrainte réel, c'est-à-dire faisant partie de l'enveloppe intérieure du polyèdre mixte, il faut vérifier que sa cission résolue sur tous les autres systèmes n'excède pas la valeur critique égale à 1, comme nous le montre l'équation 2.10 (b).

Après avoir effectué ce calcul numériquement sur ordinateur, nous obtenons 216

Nombre de systèmes de glissement	Type des systèmes de glissement	$\ \vec{s}\ $ pour $\xi = 1$	Caractéristiques du sommet représentant le groupe					Nombre de quintuplets de systèmes indépendants	Notation	
			Systèmes de glissement associés	Coordonnées (en unités τ_c)						
				S_1	S_2	S_3	S_4			S_5
(nombre de sommets équivalents)										
5 (168)	* $3\{110\} + 2\{112\}$ (72)	2.619 (24)	1,7,11,10',15'	$-3\xi + 3\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}\xi + 3/2$	$3\xi - 2\sqrt{3}$	$3\xi - \sqrt{3}$	$-3\xi + 3\sqrt{3}$	$1 = C_5^5$	DX
		2.674 (24)	1,7,11,9',10'	$3\xi/2 - \sqrt{3}$	$\sqrt{3}\xi/2 - 1$	$-6\xi + 3\sqrt{3}$	$3\xi - \sqrt{3}$	$-3\xi + 3\sqrt{3}$		BX
		2.753 (24)	1,7,11,9',15'	$3\xi/2 - \sqrt{3}$	$\sqrt{3}\xi/2 - 1$	$3\xi - 2\sqrt{3}$	$-6\xi + 4\sqrt{3}$	$6\xi - 2\sqrt{3}$		CX
	$2\{110\} + 3\{112\}$ (96)	1.743 (12)	1,11,15',18',24'	0	$-3\sqrt{3}\xi/2 + 1$	$3\xi - 2\sqrt{3}$	$-3\xi + 2\sqrt{3}$	$-3\xi/2 + \sqrt{3}$		AB'
		1.976 (24)	1,11,10',15',18'	$-3\xi + 3\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}\xi/2 - 1/2$	$3\xi - 2\sqrt{3}$	$3\xi - \sqrt{3}$	$-3\xi/2 + \sqrt{3}$		EB'
		2.134 (12)	1,11,2',10',18'	0	$\sqrt{3}\xi/2 - 2$	$-\xi + \sqrt{3}$	$3\xi - \sqrt{3}$	$-3\xi/2 + \sqrt{3}$		DB'
		2.532 (12)	1,7,10',15',20'	$-9\xi/4 + \sqrt{3}$	$-3\sqrt{3}\xi/4 + 1$	$3\xi/2 - \sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$		DC'
		(12)	1,7,2',9',10'	$3\xi/4 - \sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}\xi/4 - 1/2$	$-9\xi/2 + 2\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$		BC'D'(1)
		2.663 (12)	1,11,2',9',10'	0	$\sqrt{3}\xi/2 - 1$	$-3\xi + \sqrt{3}$	$3\xi - \sqrt{3}$	$-3\xi/2 + 2\sqrt{3}$		BC'D'(2)
		2.848 (12)	1,11,9',15',24'	0	$\sqrt{3}\xi/2 - 1$	$3\xi - 2\sqrt{3}$	$-3\xi + 2\sqrt{3}$	$9\xi/2 - \sqrt{3}$		CD'
6 (24)	$3\{110\} + 3\{112\}$ (24)	2.505 (24)	1,9,12,10',15',20'	$-3\xi/2 + \sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}\xi/2 - 3/2$	0	$-3\xi + 3\sqrt{3}$	$6\xi - 3\sqrt{3}$	$5 (< C_6^5)$	DE'
8 (24)	$4\{110\} + 4\{112\}$ (24)	1.793 (6)	1,10,16,19,2',5',8',11'	$3\xi - \sqrt{3}$	$\sqrt{3}\xi - 3$	0	0	0	$44 (< C_8^5)$	AA'
		1.909 (6)	1,10,16,19,5',11',15',21'	$\sqrt{3}/2$	-3/2	$6\xi - 3\sqrt{3}$	0	0		EA'
		2.536 (6)	1,9,12,16,7',10',15',18'	$-3\xi/2 + \sqrt{3}/2$	$-3\sqrt{3}\xi/2 + 3/2$	0	$-3\xi + 3\sqrt{3}$	0		EE'
		3.036 (6)	1,9,12,16,2',5',20',23'	$3\xi/2 - \sqrt{3}$	$3\sqrt{3}\xi/2 - 3$	0	3ξ	0		$52 (< C_8^5)$

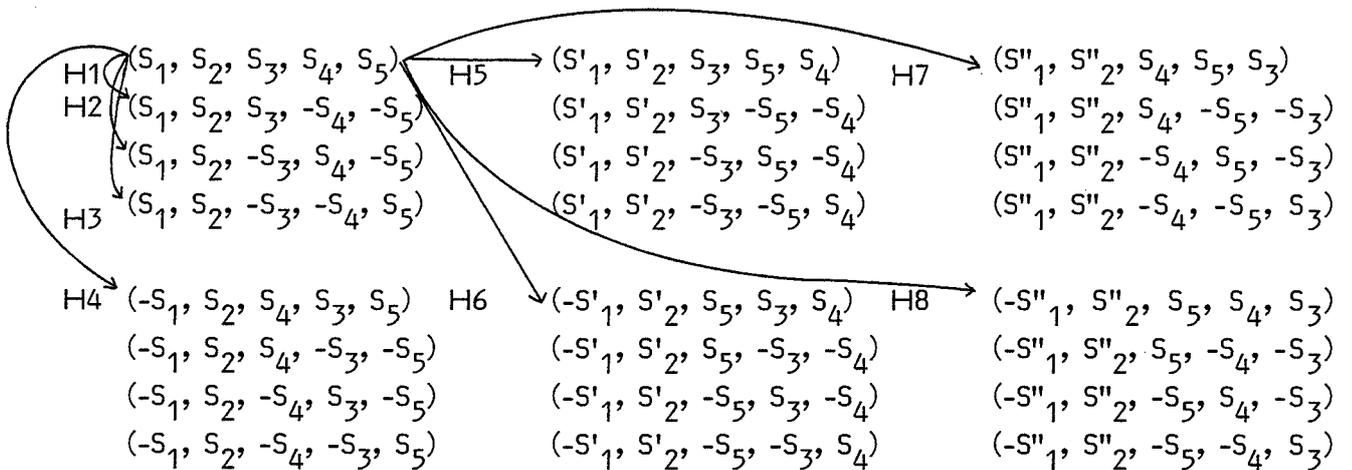
Tableau 2.4 Sommets de la surface d'écoulement pour le glissement mixte sur les systèmes $\{110\}\langle 111 \rangle + \{112\}\langle 111 \rangle$: polyèdre P_m pour $\sqrt{3}/2 < \xi < 2/\sqrt{3}$

* Sommets du polyèdre mixte valables uniquement pour $5/3\sqrt{3} < \xi < 2/\sqrt{3}$.

états de contrainte possibles (plus leurs opposés) auxquels sont associés 5, 6 ou 8 systèmes de glissement. Ces sommets peuvent être classés en 3 catégories (Tableau 2.4).

- 168 sommets à 5 systèmes : 72 d'entre-eux sont constitués de 3 systèmes $\{110\}\langle 111 \rangle$ et 2 $\{112\}\langle 111 \rangle$ et les 96 autres sont composés de 2 systèmes $\{110\}\langle 111 \rangle$ et 3 $\{112\}\langle 111 \rangle$.
- 24 sommets à 6 systèmes dont 3 sont du type $\{110\}\langle 111 \rangle$ et 3 du type $\{112\}\langle 111 \rangle$.
- 24 sommets à 8 systèmes dont 4 sont du type $\{110\}\langle 111 \rangle$ et 4 du type $\{112\}\langle 111 \rangle$.

A ces catégories de sommets, il convient d'appliquer les opérations de symétrie cubique afin de déterminer les états de contrainte cristallographiquement équivalents. Dans la notation de Lequeu et al. (1986), les coordonnées des états de contrainte cristallographiquement équivalents à un sommets $\vec{S} : (S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$ sont les suivantes :



$$\begin{aligned}
 \text{avec } S'_1 &= \frac{S_{33} - S_{11}}{\sqrt{2}} = \frac{S_1}{2} + \frac{\sqrt{3} S_2}{2} & S''_1 &= \frac{S_{33} - S_{22}}{\sqrt{2}} = \frac{S_1}{2} - \frac{\sqrt{3} S_2}{2} \\
 S'_2 &= \sqrt{\frac{3}{2}} S_{22} = \frac{\sqrt{3}}{2} S_1 - \frac{S_2}{2} & S''_2 &= \sqrt{\frac{3}{2}} S_{11} = \frac{-\sqrt{3}}{2} S_1 - \frac{S_2}{2}
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

Ces 24 états (plus leurs opposés) sont obtenus en appliquant les opérations H de symétrie cubique sur le tenseur du déviateur des contraintes S_{ij} .



$$S'_{ij} = H S_{ij} H^T \quad (2.12)$$

où H est la matrice correspondant à une symétrie par rapport à un plan particulier.

Dans notre notation, H1, H2 et H3 correspondent à un plan de symétrie {100} avec

$$H1 = \begin{pmatrix} \bar{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{1} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

et H4, H5, H6, H7 et H8 correspondent à un plan de symétrie {110} avec :

$$H4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad H5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad H6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad H7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Les 15 groupes irréductibles ainsi obtenus sont caractérisés au tableau 2.4 par la norme du vecteur contrainte et par le nombre des sommets appartenant à ces différents groupes.

Finalement, les systèmes de glissement associés à chaque sommet étant connus, les coordonnées de ces sommets peuvent être calculées de façon analytique en fonction de ξ par inversion du systèmes d'équation suivant :

$$\begin{aligned} \tau_c^h &= \vec{m}^h \vec{S} \\ \tau_c^i &= \vec{m}^i \vec{S} \\ \tau_c^j &= \vec{m}^j \vec{S} \\ \tau_c^k &= \vec{m}^k \vec{S} \\ \tau_c^l &= \vec{m}^l \vec{S} \end{aligned} \quad (2.15)$$

avec les 5 composantes du vecteur contrainte \vec{S} comme inconnues,
où h, i, j, k, l sont 5 systèmes de glissement indépendants associés à ce sommet.

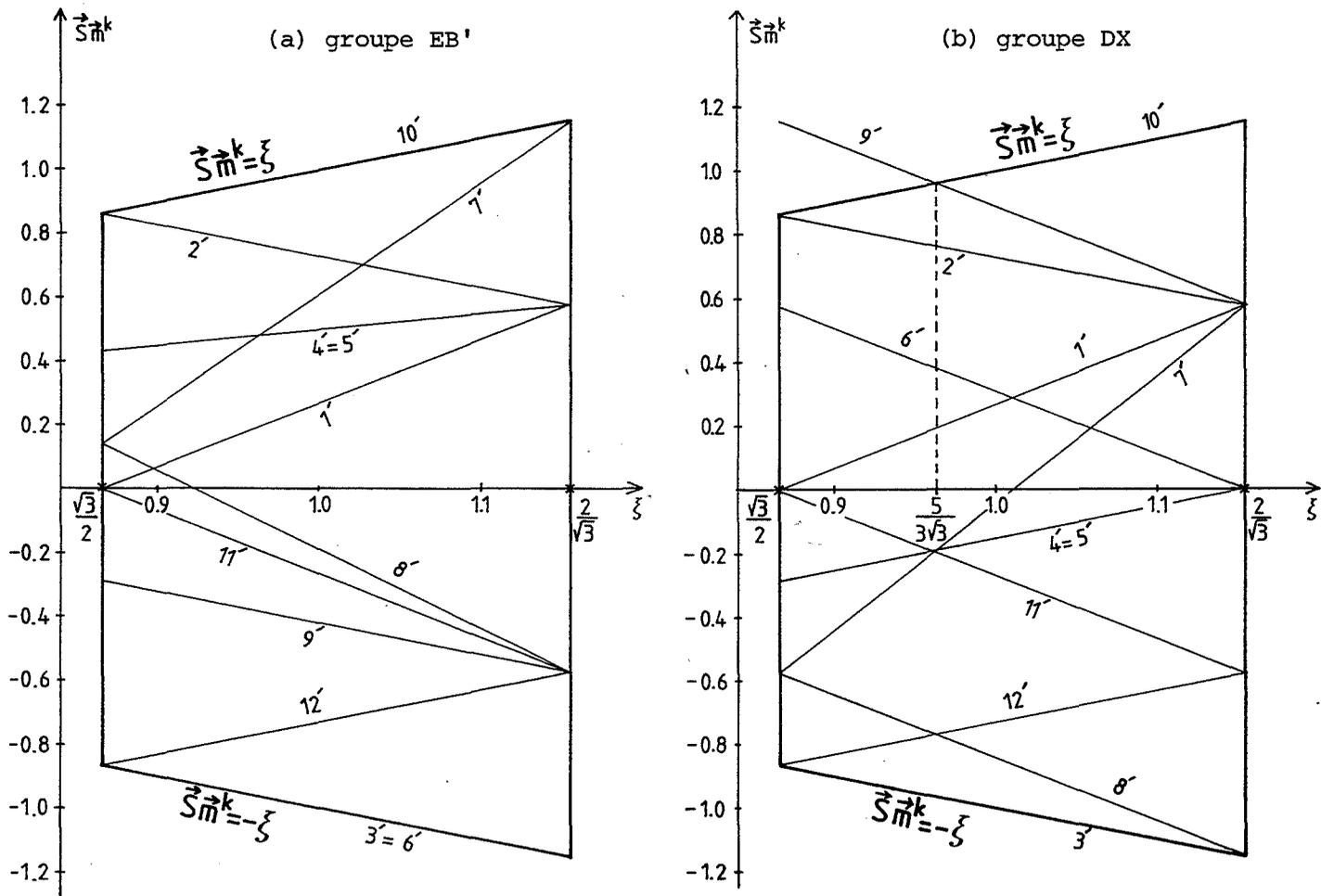


Figure 2.2 Représentation graphique des cissions résolues sur le systèmes $\{112\}\langle 111 \rangle$ (équations 2.16) pour les groupes EB'(a) et DX(b).

Ces coordonnées analytiques S_i sont explicitées au tableau 2.4 pour un sommet quelconque représentant chacun des 15 groupes irréductibles ; cet état de contrainte étant identifié par les systèmes de glissement qui lui sont associés. Dans ce tableau, nous présentons également le nombre de quintuplets de systèmes de glissement indépendants pour chaque groupe irréductible ainsi qu'une notation. Cette dernière est basée sur les notations adoptées pour les polyèdres P et P' et elle sera expliquée plus en détails par la suite.

2.5 CONFIGURATIONS DE LA SURFACE D'ECOULEMENT POUR TOUT L'INTERVALLE D'EXISTENCE DU GLISSEMENT MIXTE

2.5.1 Validité de la configuration du polyèdre critique pour $\xi = 1$

La validité des coordonnées des vecteurs de contrainte obtenues pour le rapport $\xi = 1$ doit être testée sur tout l'intervalle d'existence du glissement mixte ($\sqrt{3}/2 < \xi < 2/\sqrt{3}$). Pour cela, il suffit d'examiner les cissions résolues de ces états de contrainte sur les systèmes $\{112\}\langle 111 \rangle$ en fonction de ξ . En effet, il faut rappeler que les vecteurs de contrainte sont normalisés par rapport à τ_c et donc, que leurs cissions résolues sur les systèmes $\{110\}\langle 111 \rangle$ sont indépendantes de ξ . La condition de base de la validité des sommets tabulés au tableau 2.4 est que leur cission résolue sur les systèmes de glissement $\{112\}\langle 111 \rangle$ n'excède pas ξ . Mathématiquement, cette condition s'exprime comme suit :

$$-\xi \leq \vec{s} \cdot \vec{m}^k \leq \xi \quad k = 1', 12' \quad (2.16)$$

Ces relations peuvent être représentées graphiquement, en traçant les cissions résolues de chaque sommet irréductible du tableau 2.4 sur tous les systèmes de glissement du type $\{112\}$ en fonction du rapport ξ . Deux exemples sont présentés aux figures 2.2(a) et (b), respectivement pour les groupes EB' et DX. Cette résolution graphique a été appliquée systématiquement pour les 15 groupes, ce qui nous a permis de constater que l'expression (2.16) était satisfaite par tous les états de contrainte, excepté ceux des groupes DX, BX et CX. En effet, comme nous le montre la figure 2.2(b) pour le groupe DX, la relation (2.16) est mise en défaut sur le système 9' pour toute valeur de $\xi < 5/3\sqrt{3}$. En fait, pour ces 3 groupes constitués des sommets à 5 systèmes (3 du type $\{110\}$ et 2 du type $\{112\}$), la cission résolue devient supérieure

à ξ sur un des systèmes $\{112\}\langle 111\rangle$ pour toute valeur de $\xi < 5/3\sqrt{3}$. L'élimination des sommets de ce type, c'est-à-dire constitués en majorité par des systèmes $\{110\}\langle 111\rangle$ est prévisible puisque pour ces petites valeurs de ξ ($< 5/3\sqrt{3}$) le glissement sur les plans $\{112\}$ est favorisé.

En résumé, l'analyse systématique des cisssions résolues sur les systèmes $\{112\}\langle 111\rangle$ en fonction du paramètre ξ nous révèle que :

- pour $5/3\sqrt{3} < \xi < 2/\sqrt{3}$, la surface d'écoulement pour le glissement mixte sur $\{110\}\langle 111\rangle$ et $\{112\}\langle 111\rangle$ est correctement définie par les coordonnées des vecteurs de contrainte tabulés au tableau 2.4,
- pour $\sqrt{3}/2 < \xi < 5/3\sqrt{3}$, la configuration de la surface d'écoulement obtenue pour $\xi = 1$ doit être modifiée pour les régions de l'espace des contraintes correspondant aux 3 premiers groupes du tableau 2.4.

2.5.2 Configuration du polyèdre mixte pour l'intervalle :

$$\sqrt{3}/2 < \xi < 5/3\sqrt{3}$$

Il s'agit maintenant de déterminer les nouveaux états de contrainte applicables au cristal pour les valeurs de $\xi < 5/3\sqrt{3}$. Ce calcul pourrait être effectué de façon numérique par programmation sur ordinateur, comme cela a été fait pour la configuration du polyèdre pour $\xi = 1$. Mais, étant donné que la majorité des sommets de cette configuration restent valables dans tout l'intervalle d'existence du glissement mixte ($\sqrt{3}/2, 2/\sqrt{3}$), seule une petite région de l'espace des contraintes nous intéresse. Dès lors, nous avons préféré une résolution géométrique, voisine de celle employée par Tome et Kocks (1985) pour la détermination des surfaces d'écoulement plastique des métaux hexagonaux. Celle-ci est basée sur une connaissance très détaillée du polyèdre critique de Bishop et Hill.

En effet, suite aux travaux de Kocks et al. (1983), toutes les arêtes de la surface d'écoulement $\{110\}\langle 111\rangle$ sont classées en différents groupes cristallographiques en fonction du type de sommets auxquels elles sont connectées. Suivant cette notation, les sommets de P sont répertoriés en 5 groupes irréductibles notés de A à E (Tableau 2.2) et les différents types d'arêtes de ce polyèdre P sont désignés de la façon suivante :

$\vec{S}_P \cdot \vec{m}^{k'} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)$	1'(13')	2'(14')	3'(15')	4'(16')	5'(17')	6'(18')	7'(19')	8'(20')	9'(21')	10'(22')	11'(23')	12'(24')
1 (29)	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1
2 (30)	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1
3 (31)	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2	-1	-1	2
4 (32)	1	1	-2	-2	1	1	1	-2	1	0	0	0
5 (33)	-1	2	-1	0	0	0	-1	-1	2	2	-1	-1
6 (34)	2	-1	-1	-1	-1	2	0	0	0	-1	2	-1
7 (35)	0	0	0	-1	2	-1	2	-1	-1	-1	-1	2
8 (36)	2	-1	-1	-2	1	1	2	-1	-1	-2	1	1
9 (37)	-1	2	-1	-1	2	-1	1	-2	1	1	-2	1
10 (38)	1	1	-2	-1	-1	2	-1	-1	2	1	1	-2
11 (39)	1	1	-2	0	0	0	1	-2	1	2	-1	-1
12 (40)	1	-2	1	2	-1	-1	1	1	-2	0	0	0
13 (41)	0	0	0	1	1	-2	2	-1	-1	1	-2	1
14 (42)	2	-1	-1	1	-2	1	0	0	0	1	1	-2
15 (43)	1	1	-2	-2	1	1	0	0	0	-1	2	-1
16 (44)	-2	1	1	1	1	-2	-1	2	-1	0	0	0
17 (45)	-1	2	-1	0	0	0	-2	1	1	1	1	-2
18 (46)	0	0	0	-1	2	-1	1	1	-2	-2	1	1
19 (47)	0	0	0	-2	1	1	1	-2	1	-1	-1	2
20 (48)	-1	-1	2	1	-2	1	-2	1	1	0	0	0
21 (49)	1	-2	1	-1	-1	2	0	0	0	-2	1	1
22 (50)	-2	1	1	0	0	0	-1	-1	2	1	-2	1
23 (51)	1	1	-2	-1	2	-1	1	1	-2	-1	2	-1
24 (52)	-1	2	-1	1	1	-2	-1	2	-1	1	1	-2
25 (53)	-2	1	1	-2	1	1	-1	-1	2	-1	-1	2
26 (54)	-1	-1	2	-1	-1	2	-2	1	1	-2	1	1
27 (55)	2	-1	-1	1	-2	1	1	-2	1	2	-1	-1
28 (56)	1	-2	1	2	-1	-1	2	-1	-1	1	-2	1

Tableau 2.5 Projections des vecteurs contraintes du polyèdre P : \vec{S}_P sur les systèmes de glissement $\{112\} \langle 111 \rangle : \vec{m}^{k'}$.