

Simulation de corps déformables

Sommaire

2.1	Introduction	7
2.2	Modèles de simulation physique	8
2.2.1	Notion de base de la mécanique	8
2.2.2	Méthodes de modélisation	16
2.3	Animation Physique	33
2.3.1	Méthodes d'intégration	34
2.3.2	Boucle de simulation	36
2.4	Modifications Topologiques	37
2.4.1	Découpe	38
2.4.2	Fractures/déchirures	41
2.4.3	Adaptation de maillage	45
2.4.4	Mises à jour du modèle mécanique	50
2.5	Conclusion	51

2.1 Introduction

L'objectif de cette thèse est d'utiliser un langage à base de règles de transformations de graphes pour simuler les déformations et les transformations topologiques de corps solides déformables. Dans cette perspective, le but de ce chapitre est de fournir une vue globale à la fois sur les modèles pour la simulation des solides déformables et sur les approches simulant les modifications topologiques lors de l'animation d'un objet. Dans ce chapitre, nous étudions tout d'abord les deux approches possibles pour décrire le comportement des solides déformables, à savoir la mécanique discrète ou la mécanique continue. Nous nous focalisons ensuite sur des modèles permettant de mettre en équation l'une ou l'autre des approches afin que le comportement soit calculable par ordinateur. Nous exposons les étapes de la simulation physique et détaillons quelques méthodes d'intégration numérique permettant de résoudre les équations. Finalement, nous présentons un bref état de l'art sur les transformations topologiques des objets déformables en 2D et 3D.

2.2 Modèles de simulation physique

Dans cette section nous nous intéressons aux modèles de corps solides déformables basés sur la mécanique et proposés dans la littérature. L'utilisation de lois physiques est une hypothèse forte de nos travaux, nous n'évoquons pas ici les modèles de déformation purement géométriques (par exemple [Bar84, SP86]).

Les recherches sur l'animation de corps physiques ont démarré dans les années 1980 [TPBF87, Luc85, Mil88] afin d'améliorer le réalisme des animations créées par ordinateur. Ces travaux sont basés sur des méthodes issues de l'ingénierie mécanique qui ont été adaptées au contexte de l'informatique graphique. Ces travaux se sont poursuivis selon deux voies : d'une part, la complexification des modèles afin d'obtenir des animations de plus en plus réalistes et, d'autre part, la gestion de la lourdeur de calcul afin d'exploiter les simulations en temps réel ou en temps interactif. L'ensemble de ces modèles se divise en deux groupes, selon la mécanique, discrète ou continue, sur laquelle ils se basent. Notons que, dans les deux cas, une discrétisation de l'objet est nécessaire, afin de rendre fini le nombre de degrés de liberté de l'objet étudié. Ainsi, nous commençons cette section par l'introduction des concepts de base de la mécanique, discrète puis continue. Ces concepts sont nécessaires pour comprendre le reste de ce manuscrit. Ensuite, nous présentons une série de modèles, discrets ou continus, qui exploitent ces diverses lois physiques, en étudiant leurs avantages et inconvénients.

2.2.1 Notion de base de la mécanique

Pour étudier la déformation d'un corps, il existe dans la littérature deux approches différentes pour décrire son comportement : l'approche Lagrangienne et l'approche Eulérienne.

- **L'approche Lagrangienne** : l'objet est dissocié en un ensemble de particules mobiles qui sont caractérisées par une position de départ et dont la trajectoire est déterminée au cours de temps ;
- **L'approche Eulérienne** : les grandeurs physiques (scalaires, vecteurs, tenseurs) et leurs variations sont décrites en chaque point de l'espace. Pour cela, un certain nombre de points fixes sont choisis dans l'espace de l'objet et les propriétés mécaniques et leurs variations sont calculées uniquement en ces points.

D'une manière globale, mais ce n'est pas une règle, l'approche eulérienne est plutôt utilisée pour les fluides. Concernant les solides déformables, l'approche lagrangienne est largement préférée. Pour cela dans la suite de ce manuscrit, nous ne nous intéressons qu'à la représentation des objets avec l'approche lagrangienne.

2.2.1.1 Mécanique discrète

En mécanique discrète, un objet de masse m est discrétisé, au préalable, en un ensemble de points massiques que l'on nomme *particules*. Chaque particule possède une masse m_i , une position \mathbf{x}_i et une vitesse \mathbf{v}_i . Une particule interagit avec toutes ou un sous-ensemble des autres particules par l'intermédiaire de liaisons qui appliquent des forces d'attraction ou répulsion sur ces particules. Ces liaisons peuvent être des ressorts qui obéissent, par exemple, à la *loi de Hooke* pour reproduire des comportements élastiques. Dans ce cas, la force est proportionnelle à l'écart de distance entre les particules par rapport à la distance au repos :

$$f = k \times \Delta l \quad (2.1)$$

avec k la raideur du ressort et Δl la déformation.

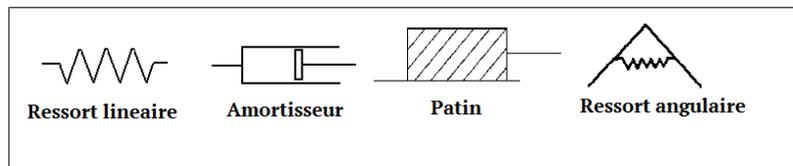


FIGURE 2.1 – Exemples d'interactions.

Ces interactions peuvent être de différents types (voir [LJF⁺91]). Quelques exemples sont présentés sur la figure 2.1 : ressorts linéaires ou non pour représenter un comportement élastique, amortisseurs pour la dissipation de l'énergie et pour permettre d'introduire un comportement visqueux dans l'objet, patins qui permettent d'introduire un comportement plastique et de la non-linéarité, etc. Certaines interactions peuvent comprendre plus que deux particules, par exemple, les ressorts angulaires permettant de s'opposer à la courbure/flexion. Il est possible de former des interactions plus complexes, construites par une combinaison en série ou en parallèle de différentes interactions élémentaires. Quelques exemples de ces combinaisons sont présentés sur la figure 2.2.

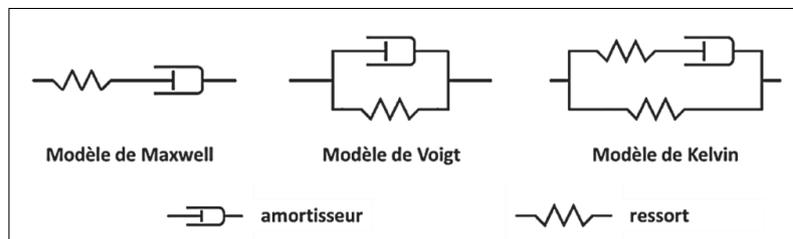


FIGURE 2.2 – Exemples de combinaison de liaisons.

Le modèle le plus utilisé pour simuler des objets déformables avec un comportement visco-élastique est celui de Voigt parce qu'il est le plus simple à modéliser et qu'il se calcule en tant que somme des forces engendrées par chaque interaction

élémentaire. Les autres assemblages fournissent des comportements plus complexes mais sont plus délicats à implanter.

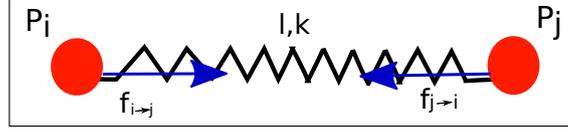


FIGURE 2.3 – Forces appliquées par un ressort.

Considérons par exemple que la liaison entre les deux particules est un ressort linéaire, comme montré sur la figure 2.3. La force appliquée par ce ressort linéaire sur l'une des particules se calcule à partir de la position des deux particules, comme décrit dans la formule suivante :

$$\mathbf{f}_{i \rightarrow j} = k_{ij} (\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\| - l_{ij}) \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} \quad (2.2)$$

avec k_{ij} la raideur du ressort et l_{ij} sa longueur au repos. Par conséquent et en se basant sur la troisième loi de Newton, celle d'action/réaction, la force appliquée par la particule j sur i est déterminée par :

$$\mathbf{f}_{j \rightarrow i} = -\mathbf{f}_{i \rightarrow j} \quad (2.3)$$

Si le comportement désiré est un comportement visco-élastique, alors les vitesses des deux particules, c'est à dire les dérivées temporelles de leurs positions, notées $\dot{\mathbf{x}}_i$ et $\dot{\mathbf{x}}_j$, sont prises en compte pour calculer la force appliquée par la particule i sur j :

$$\mathbf{f}_{i \rightarrow j} = \left(k_{ij} (\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\| - l_{ij}) - \lambda_{ij} (\dot{\mathbf{x}}_j - \dot{\mathbf{x}}_i) \cdot \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} \right) \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} \quad (2.4)$$

où λ_{ij} est le coefficient d'amortissement. De même la force appliquée par la particule j sur i est l'opposée de $\mathbf{f}_{i \rightarrow j}$.

Pour animer l'objet, il faut déterminer la trajectoire de chaque particule au cours du temps, en appliquant le principe fondamental de la dynamique (PFD). Ce dernier indique que l'accélération d'une particule est proportionnelle à l'ensemble des forces appliquées sur elle comme montré par l'équation (2.5).

$$\mathbf{f}_i = m_i \ddot{\mathbf{x}}_i \quad (2.5)$$

avec m_i la masse de la particule i , $\ddot{\mathbf{x}}_i$ son accélération, autrement dit la dérivée seconde temporelle de sa position, et \mathbf{f}_i la somme des forces appliquées sur la particule à l'instant t . Cette somme comprend des forces intérieures \mathbf{f}_{int} issues de l'ensemble des interactions attachées à la particule (ces forces mesurent l'influence des autres particules sur la particule i), et les forces extérieures \mathbf{f}_{ext} (gravité, collision, force du vent, viscosité du milieu ambiant...).

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_{int} + \mathbf{f}_{ext} \quad (2.6)$$

Dans le cas particulier de forces extérieures constituées par la gravité \mathbf{g} et la viscosité γ_i d'un milieu ambiant, on obtient la formule suivante :

$$\mathbf{f}_i = \sum_j \mathbf{f}_{j \rightarrow i} + m_i \mathbf{g} - \gamma_i \dot{\mathbf{x}}_i \quad (2.7)$$

2.2.1.2 Mécanique des milieux continus

Nous introduisons dans cette partie les concepts de base de la mécanique des milieux continus. Au contraire de la mécanique discrète qui considère la matière comme un ensemble de points, la mécanique continue considère la matière à l'échelle macroscopique en tant que couverture continue de l'espace. Un objet est alors considéré comme un domaine borné par une surface qui délimite l'intérieur de l'extérieur de l'objet. Ce dernier se déforme et se déplace en respectant des contraintes externes comme par exemple la force de gravité. Le processus de la mécanique continue commence tout d'abord par déterminer le déplacement de chaque point de l'objet par rapport à sa position au repos. Ensuite, en utilisant ces déplacements, le tenseur de déformation peut être calculé, là aussi en chaque point de l'objet. Le tenseur de contrainte, correspondant aux forces dues à la déformation, est alors déterminé en appliquant une loi de constitution à partir du tenseur de déformation. Ensuite, en déterminant la densité d'énergie de déformation en chaque point, il est possible d'en déduire une densité de force. Nous détaillons, dans la suite, les diverses étapes de ce calcul.

Déplacement

L'application de forces à un objet non rigide provoque une déformation de ce dernier. Par conséquent, chaque point matériel constituant cet objet peut se déplacer depuis sa position au repos \mathbf{x}_0 vers une nouvelle position \mathbf{x} . Le déplacement $\mathbf{u}(\mathbf{x}_0)$ définit le vecteur déplacement entre la position au repos du point et sa position après la déformation comme montré dans la figure 2.4.

Tenseur de déformation

Le *tenseur de déformation* permet de décrire la déformation d'un objet suite à l'application d'une contrainte. Ce tenseur, noté $[\varepsilon]$, doit être invariant par translation ou rotation, car ces transformations ne représentent pas une déformation et sont, de ce fait, qualifiées de « rigides ». Le tenseur de déformation est représenté par une matrice 3×3 si l'objet est de dimension 3 :

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \gamma_{yx} & \varepsilon_y & \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} & \gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

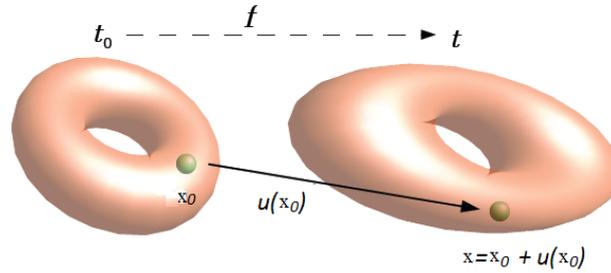


FIGURE 2.4 – Déplacement d'un point de sa position au repos à une position déformée (issue de [Nes08])

En inspectant la forme de ce tenseur, on peut remarquer qu'il caractérise deux types de déformation. La première, située sur la diagonale de la matrice, exprime l'élongation ou la compression le long des trois axes (\mathbf{x} , \mathbf{y} et \mathbf{z}). L'autre type de déformation, symbolisée par les trois éléments non diagonaux γ_{ij} (la matrice est symétrique), correspond au cisaillement. La figure 2.5 présente ces deux types de changement de formes à partir d'un objet au repos.

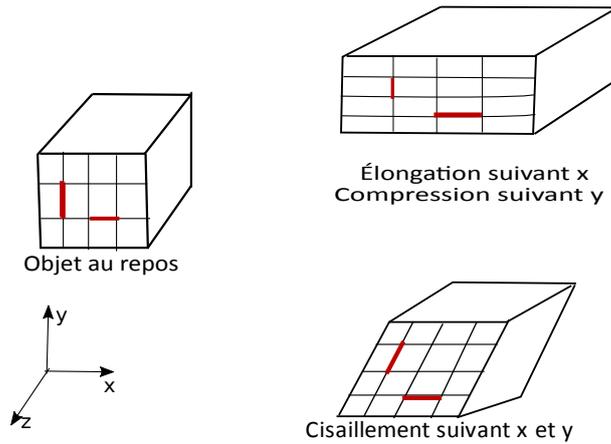


FIGURE 2.5 – Exemples de déformation d'un objet.

Il existe plusieurs solutions, plus ou moins complexes, pour calculer le tenseur de déformation. Parmi ces solutions, le tenseur de *Green Lagrange* permet de déterminer les valeurs de ce tenseur en fonction du gradient du champ de déplacements. Il s'écrit sous la forme suivante :

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2} \left([\nabla \mathbf{u}] + [\nabla \mathbf{u}]^T + [\nabla \mathbf{u}]^T [\nabla \mathbf{u}] \right) \quad (2.9)$$

où ∇ est l'opérateur Nabla, $[\nabla \mathbf{u}]$ désigne la matrice représentant le gradient de \mathbf{u} et $[\nabla \mathbf{u}]^T$ sa transposée. Pour les petits déplacements, le tenseur de Green Lagrange peut être remplacé par sa forme linéaire qui est le tenseur de déformation de Cauchy. Il s'écrit sous la forme suivante :

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2} \left([\nabla \mathbf{u}] + [\nabla \mathbf{u}]^T \right) \quad (2.10)$$

Le terme $\nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}$ est omis car non linéaire et négligeable (car quadratique) lorsque les déplacements sont petits. Le tenseur de Cauchy est généralement utilisé car il est plus rapide à évaluer et surtout, parce qu'étant linéaire, il peut être facilement interpolé. L'inconvénient de ce tenseur est qu'il n'est pas invariant en rotation et considère des déformations même pour de simples transformations rigides. Des forces sont alors artificiellement générées. Nous abordons plus précisément ce problème dans la section 2.2.2.3.

Tenseur des contraintes

Le *tenseur de contrainte* permet de décrire la répartition des forces internes en chaque point. En effet, une contrainte caractérise une force appliquée par unité de surface à un endroit donné de l'objet. Plus précisément, pour qu'une contrainte soit définie, il faut spécifier un élément de surface, et la contrainte correspond alors à la pression exercée sur cet élément. Elle est définie par un vecteur de dimension 3. Comme représenté sur la figure 2.6, les contraintes sont calculées pour trois éléments de surface qui sont orthogonaux respectivement aux axes \mathbf{x} , \mathbf{y} et \mathbf{z} . Chacune de ces contraintes se décompose en une composante perpendiculaire à la surface (contrainte normale, orientée selon l'un des axes) et deux autres composantes, tangentes à la surface, représentant des contraintes de cisaillement.

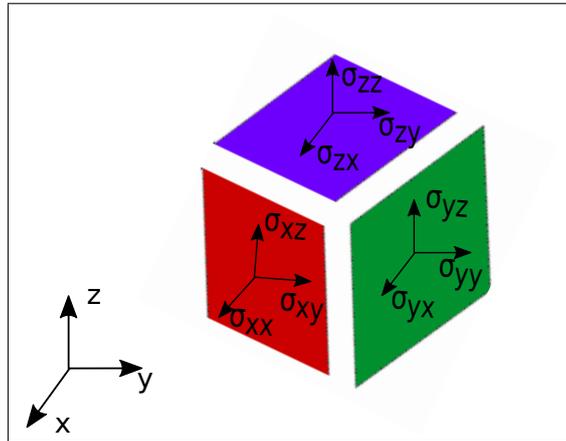


FIGURE 2.6 – Le tenseur des contraintes.

Ces trois contraintes sont regroupées dans une matrice 3×3 pour former le tenseur de contrainte. Ce dernier s'écrit ainsi, en chaque point du solide :

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Loi de comportement

La loi de comportement définit la relation entre le tenseur de déformations et celui de contraintes :

$$[\sigma] = f([\varepsilon]) \quad (2.12)$$

Il existe dans la littérature différentes lois de comportement parce que, sous l'effet des forces extérieures exercées sur les matériaux, chaque type de matériaux se comporte d'une manière différente. Nous nous intéressons dans ce manuscrit aux lois de comportement élastique. Pour plus d'informations sur les autres comportements, le lecteur peut se référer, par exemple, à [YC93].

L'*élasticité* est un comportement qui correspond à plusieurs types de matériaux déformables. En physique, l'élasticité est la capacité d'un objet de se déformer suite à l'application d'une force extérieure, et à retrouver sa taille et sa forme d'origine lorsque cette force est supprimée.

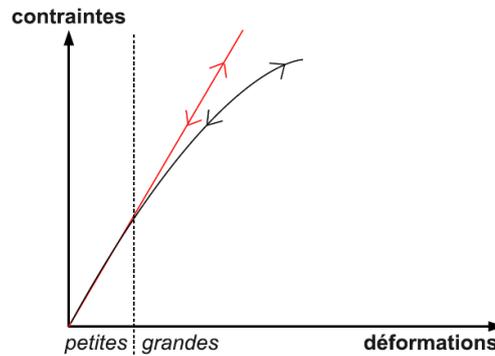


FIGURE 2.7 – Loi de comportement élastique (issue de [Der12]).

La partie en rouge de la figure 2.7 correspond à une *élasticité linéaire*, mais ne correspond qu'à de petits déplacements. En appliquant la loi de comportement élastique sur un matériau linéaire, la relation entre les déformations et les contraintes est linéaire. La relation entre tenseurs peut s'écrire de la façon suivante :

$$[\sigma] = [C] [\varepsilon] \quad (2.13)$$

Comme les tenseurs $[\varepsilon]$ et $[\sigma]$ sont d'ordre 2 (matrices 3×3), $[C]$ est un tenseur d'ordre 4, constitué de 81 coefficients.

Loi de Hooke

Dans le cas de l'élasticité linéaire, les matériaux peuvent être décrits par la loi de Hooke. Cette loi considère que le matériau utilisé est isotrope, c'est à dire qu'il possède les mêmes propriétés dans toutes les directions. Le tenseur de comportement C est calculé en se basant sur les paramètres rhéologiques¹ issus des mesures

1. La rhéologie est l'étude de la déformation de la matière sous l'effet d'une contrainte appliquée

effectuées sur des matériaux réels. En pratique, un matériau isotrope est désigné avec uniquement deux coefficients indépendants, λ et μ , appelées coefficients de Lamé. Avec ces coefficients, la loi de Hooke se définit ainsi :

$$[\sigma] = \lambda \text{tr}([\varepsilon]) [I] + 2\mu [\varepsilon] \quad (2.14)$$

où tr fournit la trace d'une matrice et $[I]$ est la matrice identité. Il existe une autre écriture de la loi de Hooke qui utilise le module de Young E et le coefficient de poisson ν pour définir les caractéristiques d'un matériau. Le module de Young E caractérise le degré d'élasticité d'un matériau et il est exprimé en Pascal. Le coefficient de poisson définit la compressibilité du matériau, s'exprime sans unité et est toujours compris entre 0 et 0.5. Ces paramètres sont très utilisés en mécanique parce qu'ils sont simples à interpréter et surtout directement mesurables. En utilisant ces deux coefficients, les coefficients de Lamé s'écrivent alors sous cette forme :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.15)$$

En conséquence, la loi de Hooke s'écrit :

$$[\sigma] = \frac{E}{1+\nu} \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \text{tr}([\varepsilon]) [I] + [\varepsilon] \right) \quad (2.16)$$

Comme les tenseurs de déformations et de contraintes sont symétriques, il est possible de les représenter sous une forme vectorielle synthétique, énumérant leurs six valeurs significatives. On définit les vecteurs $\boldsymbol{\sigma}$ et $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}$$

Le tenseur de comportement $[C]$ peut alors être défini sous la forme d'une matrice 6×6 :

$$[C] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Équation du mouvement

La loi de constitution ne permet pas, sous cette forme, d'exploiter la mécanique du point. Néanmoins, l'équation de **Navier** décrit le mouvement de chaque point de l'objet. Elle s'écrit sous la forme suivante :

$$\mathbf{f}_{ext} + \mathbf{f}_{int} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (2.18)$$

Ici, ρ est la masse volumique et $\ddot{\mathbf{u}}$ l'accélération du point d'application. \mathbf{f}_{ext} sont les forces extérieures appliquées à l'objet en ce point. Les forces internes en ce point sont calculées comme le vecteur divergence du tenseur de contraintes $\mathbf{f}_{int} = \nabla \cdot [\boldsymbol{\sigma}]$.

2.2.2 Méthodes de modélisation

Dans la section précédente, nous avons présenté les modèles mathématiques qui permettent d'établir une équation régissant le comportement d'un corps déformable. Or, avant de pouvoir exploiter puis résoudre la ou les équations mécaniques, une étape préalable de modélisation est nécessaire. En effet, le processus de modélisation n'est surtout pas à négliger, puisqu'il conditionne à la fois la faisabilité de la simulation et la conformité des résultats au phénomène observé dans la réalité. Souvent, il n'existe pas de solution analytique des équations. Aussi, dans cette section, nous présentons divers modèles, issus de stratégies de modélisation différentes en mécanique discrète ou continue.

Dans plusieurs de ces méthodes, la structure mécanique est issue d'un maillage géométrique. L'utilisation d'un maillage consiste à discrétiser le milieu spatial en un ensemble d'éléments géométriques et à s'appuyer sur cette structure pour exprimer les interactions entre éléments. Il existe cependant d'autres méthodes de résolution, dites sans maillage ou *meshless*. Comme leur nom l'indique, elles ne dépendent pas, pour la partie mécanique, d'une structure géométrique bien définie. Néanmoins, un maillage est généralement utilisé dans l'étape de visualisation.

Nous commençons cette partie par une discussion sur l'emploi des méthodes avec ou sans maillage. Nous nous intéressons ensuite aux modèles basés sur des maillages parce que notre approche est dédiée à ce type de modèles.

2.2.2.1 Discussion sur les maillages géométriques

Un corps déformable dont les équations sont régies par la mécanique des milieux continus possède potentiellement un nombre infini de degrés de liberté. Pour pouvoir calculer son comportement sur ordinateur, il faut nécessairement rendre fini ce nombre. Plusieurs stratégies ont été proposées.

Dans une première stratégie, que l'on peut appeler « modèles à jeu de déformations », les déformations autorisées sont définies *a priori*. La simulation consiste à déterminer les valeurs des paramètres de ces déformations au cours du temps. Par exemple, Pentland et Williams [PW89] proposent de calculer les modes de vibrations d'un corps déformable afin de contrôler ses transformations globales [Bar84] (courbure, torsion, etc.). Dans [CHP89], Chadwick *et al.* proposent d'utiliser une grille de type *Free Form Deformation* ou FFD [SP86] dont les nœuds obéissent aux équations physiques afin de modéliser la déformation du corps encapsulé dans la grille. Par ailleurs, les splines sont un outil très utile en modélisation pour représenter des

courbes, des surfaces ou des volumes, dont la forme est contrôlée par un nombre réduit de points, appelés *points de contrôle*. Il est possible de les utiliser en animation physique, par le biais de la mécanique Lagrangienne [RNG00, RNN00, TGAB08]. Toutes ces approches ont été proposées pour répondre au problème des simulation interactives ou temps-réel en réduisant de façon drastique le nombre de degrés de liberté du corps. Néanmoins, cette réduction peut globalement nuire au réalisme lorsqu'une déformation, non restituable par l'ensemble des degrés de liberté, est attendue par l'utilisateur. Par exemple, dans la simulation d'intestin grêle proposée dans [LFMC02, FLA⁺05], aucune déformation radiale n'est possible, toute la déformation se concentre sur la spline décrivant la forme longitudinale de l'intestin. Pour conclure sur cette stratégie, on peut dire qu'elle entretient un lien étroit avec la géométrie, puisqu'elle se base sur des transformations géométriques pour modéliser le comportement des corps.

Les autres stratégies considèrent une discrétisation de l'objet par des points, choisis *a priori*, qui pilotent les déformations de l'objet. Dans la seconde stratégie, celle des « modèles sans maillage », les points ne sont pas nécessairement choisis en lien avec la forme de l'objet, mais leur positionnement est plutôt motivé par le comportement et les déformations du corps. Il s'agit alors de définir les interactions entre les points, afin de définir les forces qui les animent. Dans un tel modèle, la structure de l'objet est purement mécanique. Certaines interactions peuvent se baser sur la géométrie, mais plutôt dans une optique de proximité : par exemple, une interaction est activée lorsque la distance entre les deux points qu'elle lie est plus faible qu'un seuil donné. Le problème de la visualisation se pose dans une étape ultérieure, la géométrie est donc globalement peu présente dans ce type de modèles.

La dernière catégorie comprend les « modèles maillés ». Elle est certainement la plus utilisée, en particulier en mécanique de l'ingénieur. Elle consiste à disposer les points afin de former un maillage géométrique de l'objet. Les points correspondent à des sommets ou à d'autres points caractéristiques (comme le milieu des arêtes) des éléments du maillage. Les interactions sont définies directement à l'aide du maillage, en exploitant les relations de voisinage topologique (interaction entre sommets liés par une arête, entre sommets d'un même élément, etc.).

La question de l'utilisation ou non d'un maillage est directement liée à l'importance du rôle que le modélisateur choisit d'attribuer à la géométrie. Car cette dernière n'est pas vraiment présente dans les équations mécaniques exposées en section précédente. Néanmoins, de nombreuses méthodes s'appuient sur la géométrie, et c'est à ces méthodes que s'adressent les contributions de notre travail.

Dans les sections suivantes, nous présentons brièvement les modèles sans maillage puis nous dressons un inventaire des modèles basés sur les maillages.

2.2.2.2 Modèles sans maillage ou *Meshless*

Les modèles sans maillage discrétisent l'objet en un ensemble de points obéissant à la mécanique du point. Ces particules sont dotées d'une masse et subissent des forces, extérieures ou intérieures. L'ensemble des influences entre les particules forme

un graphe d'interactions, qui structure l'objet. Aucun maillage n'est nécessaire, hormis peut-être pour la visualisation, mais dans ce cas, le maillage n'est pas utilisé pour définir le graphe d'interaction.

Le graphe d'interaction peut être complet, c'est-à-dire que chaque particule interagit avec toutes les autres. C'est le cas de la méthode *smoothed particle hydrodynamics* [Mon92]. Cette approche permet d'approximer les équations continues avec un ensemble de particules [MG04, FGBP11]. C'est également le cas des modèles inspirés de la dynamique globulaire [MP89] ainsi que les modèles basés sur les agglomérats [LJF⁺91, JSV97]. Si le graphe est complet, le nombre d'interactions est quadratique en nombre de particules. Pour réduire le temps de calcul, il est possible de délimiter l'action d'une particule uniquement à ces proches voisins. A chaque étape de la simulation, un sous-graphe représentant les couples de particules proches est extrait du graphe d'interaction. Ainsi, Desbrun *et al.* [DC95] ont proposé de limiter les distances d'interaction entre particules. De façon générale, le modèle SPH utilise également des rayons d'action bornés.

Cependant, le plus souvent, le graphe d'interaction est constitué, dès la modélisation, d'un sous-ensemble de l'ensemble des couples de particules. Le modèle le plus connu et le plus général est le modèle *masses/interactions* introduit dans les travaux de Luciani *et al.* [LJF⁺91] sur CORDIS ANIMA (voir figure 2.8(b)). Dans ce modèle, il est possible de définir l'ensemble des particules en interaction. Les interactions possibles sont multiples et définies de façon générique (la force d'une interaction est définie linéairement par morceaux en fonction de la distance entre les particules). Plus récemment, les approches périodynamiques [LBC⁺14] se basent également sur des graphes d'interactions.

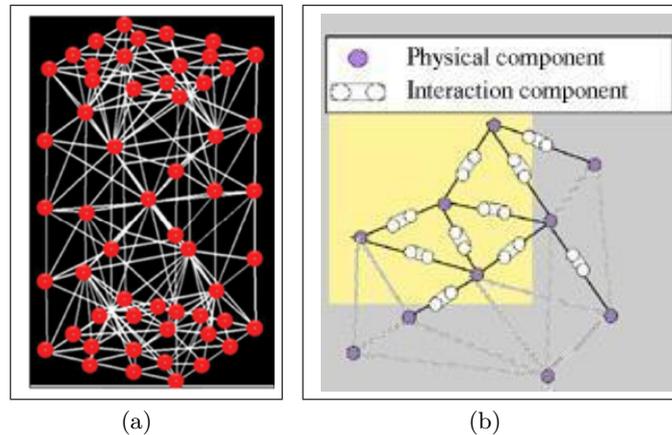
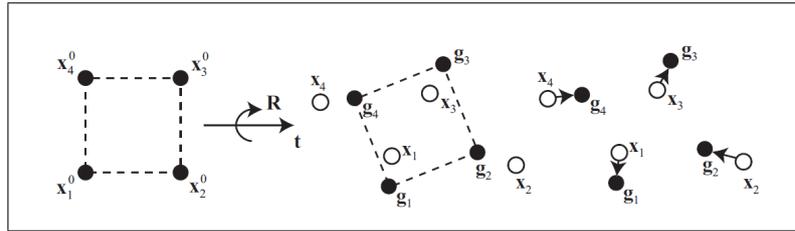


FIGURE 2.8 – Exemples de modélisation avec le modèle masse/interaction (issue de [CLF90]).

Il est possible de réduire considérablement le nombre d'interactions. Ainsi, en considérant une référence rigide de l'objet dont la position et l'orientation sont calculées par la méthode du *shape matching* [MHTG05], une particule n'est concernée que par une seule interaction, celle qui la lie à la référence rigide (voir figure 2.9).

FIGURE 2.9 – Le principe du *shape matching* (issue de [MHTG05])

Pour conclure, les méthodes sans maillage évitent d'introduire un maillage géométrique, dont les lois de la mécanique n'ont pas directement besoin, dans la modélisation mécanique du corps. Le principal problème de ces modèles est la visualisation, puisque le modèle mécanique n'est pas du tout construit sur des principes géométriques et surtout topologiques. Des principes d'habillage, par exemple par *mapping* [DKS⁺11] ou par surfaces implicites [DC95] ont été proposés. Pour plus d'informations concernant les méthodes sans maillage, le lecteur peut se référer à [FM03, GQ05].

2.2.2.3 Modèles maillés

L'utilisation d'un maillage permet de garantir un nombre fini de degrés de liberté. Le maillage décompose l'objet en un ensemble d'éléments (faces en 2D et volumes en 3D) juxtaposés et couvrant tout l'objet. L'objet se déforme alors en modifiant la position des sommets ou d'autres points caractéristiques des éléments (milieux des arêtes par exemple). Le maillage peut être bâti comme une grille alignée sur les axes, ce qui permet, au besoin, de définir, par différences finies, les opérateurs de dérivations par rapport aux coordonnées (x, y, z) que l'on trouve dans la mécanique des milieux continus. Néanmoins, dans la plus grande part des modèles, le maillage est quelconque et peut comprendre divers types d'éléments. Les plus classiques sont les triangles et quadrilatères en 2D, les tétraèdres et les hexaèdres en 3D. Une fois le maillage réalisé, il est possible de doter l'objet d'une mécanique discrète ou continue afin de simuler un comportement comme décrit sur la figure 2.10.

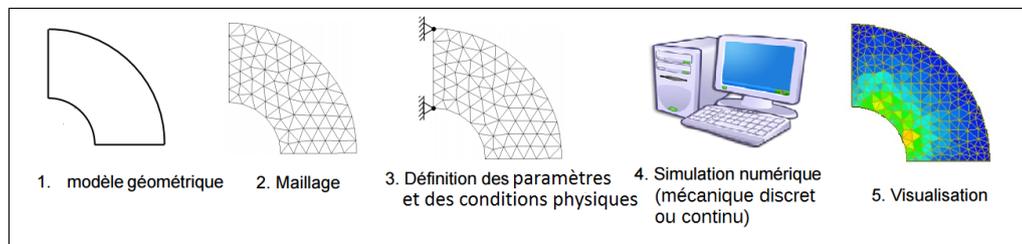


FIGURE 2.10 – Processus de la simulation numérique en utilisant une méthode avec maillage géométrique

Modèles discrets maillés

Dans les modèles maillés discrets, les sommets du maillage sont des particules dotées d'une masse. La masse d'une particule est définie généralement à partir des éléments qui l'entourent. Par exemple, sur la figure 2.11, un sommet (représenté en vert) est commun à quatre faces $F1$, $F2$, $F3$ et $F4$. Ces faces contribuent toutes les quatre à la masse de ce sommet.

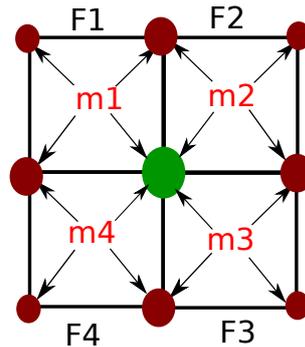


FIGURE 2.11 – Masse d'un sommet.

Les interactions se basent sur les relations topologiques entre sommets fournies par le maillage. Elles peuvent ainsi se positionner sur les arêtes ou dans les éléments. Elles peuvent être de n'importe quel type ou une combinaison de plusieurs interactions (voir section 2.2.1.1). Un exemple classique d'une telle construction est le modèle masse/ressort, souvent référencé sous l'abréviation MSS (*mass/spring system*), où les arêtes portent des liaisons constituées par des ressorts linéaires complétés, au besoin, par un amortisseur selon le modèle de Voigt (voir figure 2.12). Les liaisons ne se situent pas obligatoirement sur des arêtes. Par exemple, des ressorts de cisaillement peuvent être positionnés dans des faces ou des volumes.

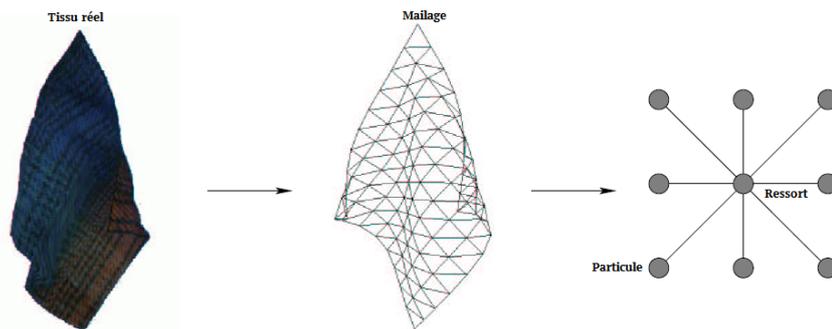


FIGURE 2.12 – Représentation d'un tissu par un maillage dont les sommets sont les particules et les arêtes sont les ressorts (issu de [Zar03]).

Dans la suite, nous montrons comment, dans la littérature, les modèles masses/ressorts ont été construits.

- **Modèle de dimension 2 :**

Un modèle masses/ressorts 2D a été proposé par Provot [Pro95] pour modéliser un tissu. C'est un modèle basé sur un maillage géométrique rectangulaire. Trois types de ressorts sont définis dans ce modèle, afin de modéliser différents comportements de tissu, comme présenté sur la figure 2.13. Le premier est constitué par les ressorts d'élongation qui lient chaque sommet à ses voisins auxquels il est relié par une arête (en noir). D'autres ressorts sont portés par les diagonales des faces pour maintenir leur forme et s'opposer au phénomène de cisaillement (en bleu). Pour gérer la courbure, Provot a introduit des ressorts linéaires qui connectent un sommet à son second voisin (en vert). La définition de chaque ressort entre les particules i et j est classique et se base sur une raideur k_{ij} et une longueur de repos l_{ij} . Les forces sont calculées par la formule (2.2) en page 10.

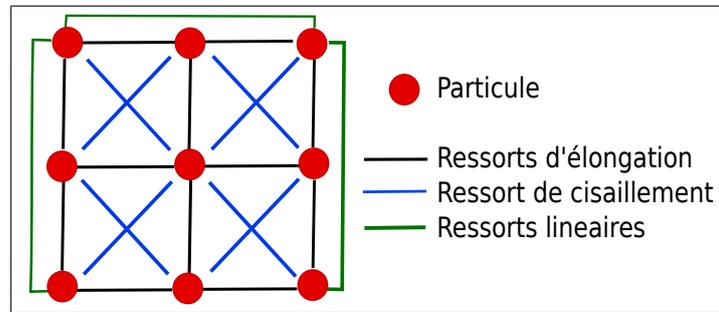


FIGURE 2.13 – Modèle de tissu de Provot [Pro95].

D'autres travaux se sont focalisés sur les maillages triangulaires [BMF03, GHDS03, BW98]. Tout d'abord, ces maillages ne nécessitent pas de ressorts de cisaillement. Pour la courbure, un ressort angulaire est utilisé pour contrôler l'angle entre deux faces triangulaires adjacentes. La force appliquée par ces ressorts est relative à l'angle entre les deux faces. Bridson *et al.* [BMF03] ont défini la formule suivante pour calculer les forces appliquées sur les sommets de deux triangles liés entre eux par un ressort angulaire positionné sur leur arête commune (entre les sommets 3 et 4, sur la figure 2.14) :

$$\mathbf{f}_i = k \frac{|\mathbf{e}^2|}{|\mathbf{n}_1| + |\mathbf{n}_2|} \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{u}_i \quad (2.19)$$

avec i le sommet 1 ou 2, θ l'angle entre les normales des deux faces, k la raideur du ressort angulaire, $\mathbf{e} = \mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_3$ l'arête commune. \mathbf{n}_i sont les normales aux faces (avec $\mathbf{n}_1 = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) \times (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_4)$ et $\mathbf{n}_2 = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_4) \times (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3)$). \mathbf{u}_i désigne le déplacement de chaque sommet (suite à la variation d'angle). Il faut ensuite reporter l'opposée des forces subies par les sommets 1 et 2 sur les sommets 3 et 4.

- **Modèle de dimension 3 :**

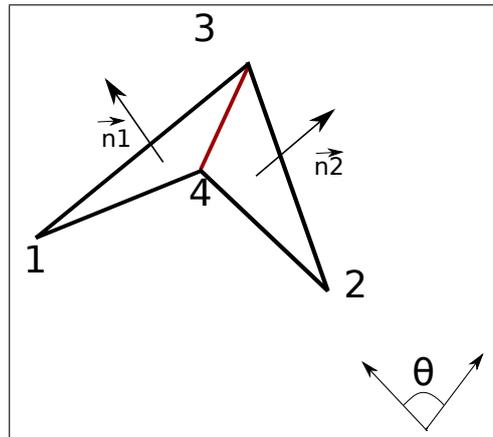


FIGURE 2.14 – Ressort angulaire.

En 3D, la démarche est similaire à la 2D. Des ressorts d'élongation peuvent être disposés sur les arêtes. Le cisaillement n'est géré que si les mailles sont hexaédriques, afin de maintenir leur forme. Les ressorts de cisaillement peuvent alors être placés dans le volume pour lier les sommets des diagonales de l'élément (en rouge dans la figure 2.15) ou (de façon non exclusive) le long des diagonales des faces, comme en 2D (en vert sur la figure 2.15). En 3D, les ressorts de courbure ne sont généralement pas utilisés, car les autres ressorts permettent de gérer ce phénomène.

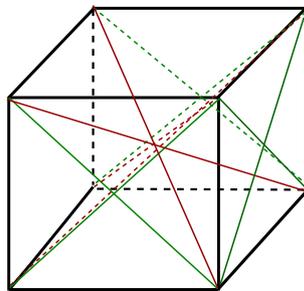


FIGURE 2.15 – Ressorts de cisaillement en 3D.

Les modèles masses/ressorts sont des modèles largement utilisés pour la simulation des objets déformables et plus précisément dans le domaine médical [TGG00], la simulation de tissu [BWK03, Pro95, HB99] et dans diverses autres approches. En effet, c'est un modèle simple, facile à implanter et qui permet d'obtenir des résultats de comportement visuellement satisfaisant, ce qui est suffisant pour des applications en informatique graphique. De plus, cette méthode est efficace en temps de calcul et elle permet de gérer proprement les modifications topologiques.

Bien qu'elle soit très utilisée, cette méthode n'est pas précise parce qu'il est très difficile de trouver les bons paramètres pour reproduire un comportement réel donné. Plusieurs travaux se sont focalisés sur la manière de trouver ces valeurs pour

les faire correspondre à un comportement observé ou désiré. Van Gelder [vG98] a défini une méthode pour trouver les raideurs des ressorts dans un maillage triangulaire en 2D et tétraédrique en 3D en se basant sur les paramètres rhéologiques du matériau qui constitue l'objet à simuler. Il se base sur les lois de la mécanique continue pour trouver les formules pour un matériau élastique isotrope. Pour cela, il calcule la raideur k_c d'un ressort avec une longueur au repos c et placé sur une arête commune à deux triangles $T1$ et $T2$ en utilisant la formule suivante :

$$k_c = \sum_{j=1}^n \left(\frac{E}{1+\nu} \right) \frac{\text{Aire}(T_i)}{|c^2|} + \left(\frac{E\nu}{1-\nu^2} \right) \frac{(a_i^2 + b_i^2 - c^2)}{8\text{Aire}(T_i)} \quad (2.20)$$

avec $i=1$ ou 2 pour désigner les triangles, E le module de Young, ν le coefficient de Poisson, c l'arête commune et a_i et b_i les autres arêtes du triangle i .

De la même manière, Fléchon *et al.* [FZDJ14] ont proposé des formules pour calculer les raideurs de ressorts pour des maillages rectangulaires en 2D et hexaédriques en 3D en utilisant les paramètres physiques des matériaux (le module de Young et le coefficient de Poisson). La formule proposée pour calculer les raideurs des ressorts d'élongation en 2D le long d'une arête est la suivante :

$$k_{elongation} = \frac{E(l_1^2(3\nu+2) - h^2)}{4l_1h(1+\nu)} + \frac{E(l_2^2(3\nu+2) - h^2)}{4l_2h(1+\nu)} \quad (2.21)$$

Comme on peut le remarquer dans cette formule, il existe deux termes correspondant à la contribution des deux faces adjacentes à l'arête. En pratique, chaque face apporte un ressort à l'arête (ressorts en rouge sur la figure 2.16), les deux ressorts se composent selon le schéma de Voigt, donc leurs raideurs s'additionnent pour former un ressort équivalent (ressort vert). Les raideurs se calculent à partir de la dimensions des faces, la longueur $h = h_1 = h_2$ de l'arête commune et l_1 et l_2 la longueur des autres arêtes.

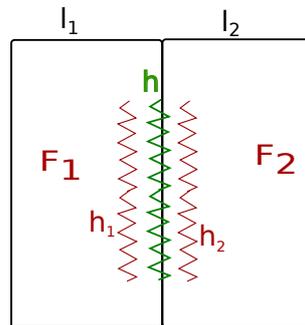


FIGURE 2.16 – Calcul de raideurs des ressorts pour des mailles rectangulaires [FZDJ14].

Fléchon *et al.* [FZDJ14] ont aussi proposé une formule qui permet de calculer la raideur des ressorts de cisaillement en 2D :

$$k_{\text{cisaillement}} = \frac{E(l^2 + h^2)}{4lh(1 + \nu)} \quad (2.22)$$

avec l et h respectivement la largeur et la longueur de la face.

De même en 3D, des formules pour les ressorts d'élongation et les ressorts de cisaillement à l'intérieur des volumes sont proposées.

Le comportement obtenu en utilisant le modèle masses/ressorts dépend du type de ressorts utilisé et du choix des valeurs de raideur et d'amortissement. Mais, ce modèle peut parfois exhiber de trop grandes déformations, qu'une augmentation des raideurs des ressorts peine à compenser. Pour cela, quelques travaux ont proposé d'ajouter des contraintes de déformation sur les ressorts pour avoir de meilleurs résultats. Par exemple Provot [Pro95] a défini des contraintes sur l'élongation des ressorts pour limiter l'élasticité du tissu lors de la simulation. Le fait d'utiliser des ressorts amène également des problèmes d'anisotropie : le ressort ne définit de force que dans une direction. Ainsi, l'objet peut plus ou moins bien réagir à des déformations, selon la direction dans laquelle s'exerce les contraintes. Certaines techniques visent à maîtriser les effets anisotropes [BC00].

Modèles continus

Les lois de la mécanique continue définissent la déformation et les contraintes de l'objet en tout point de l'objet à simuler. Ceci correspond à un nombre de degrés de liberté infini, qu'il convient de rendre fini pour permettre son calcul par ordinateur. Il existe dans la littérature deux grandes méthodes de discrétisation des équations de la mécanique de milieux continus. La méthode des différences finies et celle des éléments finis. Ces méthodes se basent toutes les deux sur une discrétisation spatiale, donc un maillage.

- **Méthode des différences finies**

La méthode des différences finies est une méthode de résolution numérique qui propose une écriture discrète des opérateurs différentiels. Le cas le plus simple consiste à approximer l'objet par une grille régulière. Pour toute quantité physique ξ , il est possible d'évaluer sa dérivée partielle grâce à :

$$\frac{\partial \xi}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \approx \frac{\xi(\mathbf{x} + \delta_i \mathbf{x}_i) - \xi(\mathbf{x} - \delta_i \mathbf{x}_i)}{2\delta_i} \quad (2.23)$$

Où $\xi(\mathbf{x} + \delta_i \mathbf{x}_i)$ et $\xi(\mathbf{x} - \delta_i \mathbf{x}_i)$ représentent la quantité physique sur les nœuds voisins dans la grille, x_i la coordonnée choisie pour la dérivation partielle et \mathbf{x}_i son axe. Par exemple, ξ peut représenter un déplacement, ce qui permet de calculer en chaque nœud de la grille, le tenseur de déformation selon les formules (2.9), page 12, ou (2.10), page 13. À partir de la loi de constitution, le tenseur de contraintes puis les forces internes peuvent être évalués afin d'appliquer l'équation de Navier (2.18).

Cette méthode a été introduite pour la première fois en informatique graphique par Terzopoulos *et al.* [TPBF87] pour permettre de simuler des corps déformables. Son problème principal est l'utilisation d'une grille régulière, car les points de la grille sont disposés avec un écart de δ_i le long de chaque axe pour pouvoir utiliser directement la formule (2.23). Debunne *et al.* [DDBC99, DDCB00] ont proposé d'utiliser des opérateurs différentiels discrets plus souples, afin d'approximer, en particulier, l'opérateur Laplacien, utilisé dans l'équation de Navier. Cette approche permet d'utiliser tout type de maillage et non des grilles régulières.

Néanmoins, la méthode des différences finies n'est généralement pas la méthode préférée pour discrétiser les équations de la mécanique continue. En effet, elle est relativement instable car trop approximative. De plus des problèmes apparaissent aux nœuds frontières. En se basant sur l'équation (2.23), pour évaluer une dérivée en un sommet \mathbf{x} de la grille, on a besoin de la valeur de la quantité à dériver aux sommets $\mathbf{x} + \delta_i \mathbf{x}_i$ et $\mathbf{x} - \delta_i \mathbf{x}_i$. Si \mathbf{x} est un nœud frontière, l'une de ces deux positions désigne un point en dehors de la grille. La dérivée n'est donc pas évaluable par cette méthode et il faut utiliser d'autres formules, plus approximatives. Pour ces raisons, en simulation de corps déformables, la méthode par différences finies est souvent délaissée au profit de la méthode par éléments finis.

- **Méthode des éléments finis linéaires**

Dans la méthode des éléments finis (nom abrégé en FEM, pour *Finite-Element Method*), l'objet à simuler est divisé en un ensemble d'éléments (faces en 2D et volumes en 3D) : des triangles, des quadrangles, des tétraèdres, des hexaèdres... comme montré sur la figure 2.17.

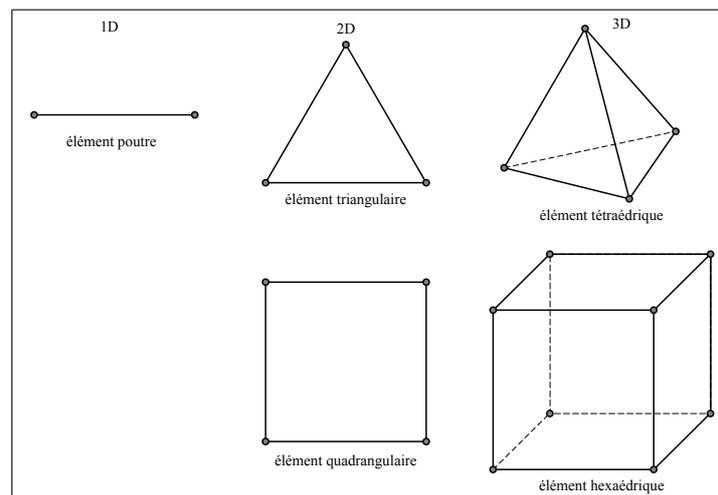


FIGURE 2.17 – Exemples d'éléments linéaires utilisés par la méthode des éléments finis.

Les propriétés physiques de tous les points d'un élément sont estimées par interpolation, en se basant sur les valeurs connues en certains points de l'élément, appelés

nœuds. Ces nœuds sont représentés en noir sur les figures 2.17 et 2.18. Dans le cas des éléments linéaires, ces nœuds sont les sommets des éléments (voir figure 2.17). Pour plus de précision, on peut augmenter le nombre de degrés de liberté et ajouter d'autres nœuds qui peuvent être par exemple, le centre de gravité, le milieu des arêtes, etc. Après la discrétisation de l'objet, la deuxième étape consiste à définir les fonctions d'interpolation, appelées également les fonctions de forme, pour chaque élément de maillage. Ces fonctions peuvent être linéaires ou quadratiques comme on peut le voir sur la figure 2.18.

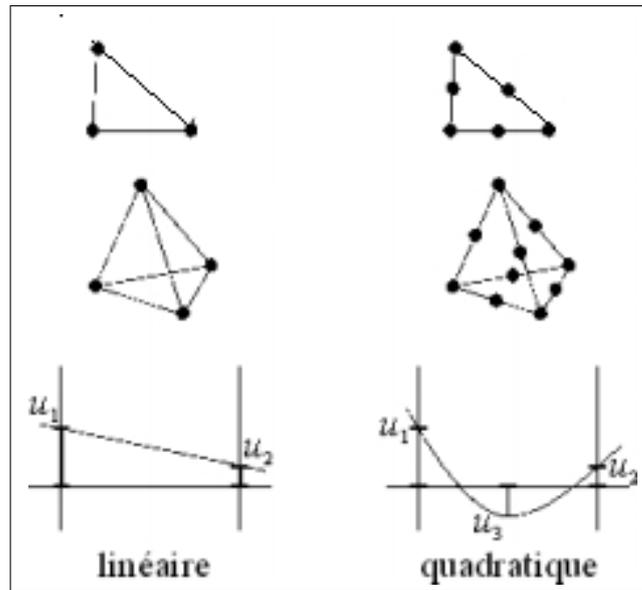


FIGURE 2.18 – Exemple d'éléments finis avec des fonctions d'interpolation linéaire et quadratique.

Une fois les fonctions d'interpolation choisies, on peut définir des équations de la mécanique continue pour chaque élément de l'objet. Le champ de tenseur de déformation sur un élément peut s'exprimer, grâce aux fonctions d'interpolation, sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}(x, y, z) = \left[B^{(e)}(x, y, z) \right] \mathbf{U}^{(e)} \quad (2.24)$$

Où $\left[B^{(e)}(x, y, z) \right]$ est la matrice de déformation de l'élément qui, en général, dépend de la position car elle se base sur les fonctions de forme de l'élément et plus précisément leurs dérivées par rapport aux coordonnées x , y et z . Néanmoins, si ces fonctions de forme sont linéaires, comme cela est le cas en 2D pour les triangles et en 3D pour les tétraèdres, les déformations se révèlent proportionnelles aux déplacements et la matrice $\left[B^{(e)} \right]$ est constante sur l'élément. En conséquence, compte tenu de la loi de Hooke, le tenseur de contrainte $\boldsymbol{\sigma}^{(e)}$ est constant sur l'élément et s'écrit sous la forme suivante :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = [C] \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = [C] [B^{(e)}] \mathbf{U}^{(e)} \quad (2.25)$$

Pour calculer les forces appliquées sur chaque nœud, il faut calculer tout d'abord l'énergie de déformation d'un élément, définie comme l'intégrale, sur le volume, des densités énergétiques de déformation $\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)T} \boldsymbol{\sigma}^{(e)}$ calculées en chaque point de l'élément :

$$\xi^{(e)} = \int_{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)T} \boldsymbol{\sigma}^{(e)} dv \quad (2.26)$$

Puisque les tenseurs sont constants sur l'élément et les déplacements aux nœuds fixés, on obtient alors que :

$$\begin{aligned} \xi^{(e)} &= \int_{(e)} \mathbf{U}^{(e)T} [B^{(e)}]^T [C] [B^{(e)}] \mathbf{U}^{(e)} dv \\ &= \mathbf{U}^{(e)T} \int_{(e)} dv [B^{(e)}]^T [C] [B^{(e)}] \mathbf{U}^{(e)} \\ &= \mathbf{U}^{(e)T} v^{(e)} [B^{(e)}]^T [C] [B^{(e)}] \mathbf{U}^{(e)} \\ &= \mathbf{U}^{(e)T} [K^{(e)}] \mathbf{U}^{(e)} \end{aligned}$$

Avec $[K^{(e)}] = v^{(e)} [B^{(e)}]^T [C] [B^{(e)}]$ la matrice de rigidité de l'élément (e) , $v^{(e)}$ son volume (ou sa surface en 2D) et $\mathbf{U}^{(e)}$ l'ensemble des déplacements de ses sommets. Si on considère que des forces $\mathbf{F}^{(e)}$ sont appliquées uniquement aux nœuds de l'élément et doivent correspondre à la même énergie de déformation, on trouve que $\mathbf{U}^{(e)T} \mathbf{F}^{(e)} = -\mathbf{U}^{(e)T} [K^{(e)}] \mathbf{U}^{(e)}$. Cette égalité étant vérifiée pour toute valeur de déplacement, on obtient que les forces exercées sur les nœuds s'écrivent sous la forme suivante :

$$\mathbf{F}^{(e)} = - [K^{(e)}] \mathbf{U}^{(e)}. \quad (2.27)$$

Les matrices de rigidité de tous les éléments (e) peuvent être réunies dans une seule matrice globale, permettant de trouver la somme de toutes les forces \mathbf{F} subies par tous les nœuds du corps :

$$\mathbf{F} = -[K] \mathbf{U} \quad (2.28)$$

Où $[K]$ regroupe l'ensemble des $[K^{(e)}]$, et \mathbf{U} le déplacement de tous les nœuds. La matrice $[K]$ est symétrique et creuse parce que les nœuds de l'objet ne sont connectés qu'à certains autres et non à tous.

Dans l'approche statique, on cherche à déterminer les déformations, et donc les forces internes résultantes de l'application de forces extérieures \mathbf{R} . Le bilan des forces étant nul à l'équilibre, on résout l'équation :

$$\mathbf{R} - [K] \mathbf{U} = \mathbf{0} \text{ soit } [K] \mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (2.29)$$

Ce qui revient à résoudre un système linéaire, lorsque la matrice $[K]$ est constante. On peut, en outre, imposer des contraintes de déplacement sur certains nœuds, les forces externes étant, dans ce cas, inconnues [GMTT89]. Néanmoins, la résolution de ce système est coûteuse en temps de calcul, aussi cette méthode n'est généralement pas utilisée directement en simulation temps réel. Diverses approches ont cherché à réduire sa complexité en considérant que seul le déplacement aux nœuds de surface ont un intérêt pour l'affichage [BNC96, JP99]. Il faut enfin noter qu'une animation basée sur cette méthode est qualifiée de pseudo-statique, puisqu'elle considère que la déformation est une suite d'états d'équilibre, ce qui est une hypothèse raisonnable seulement si les vitesses sont faibles.

Aussi dans le cas général, l'approche dynamique est préférable, et se base sur une formulation dite « explicite » des éléments finis. En effet, la formule décrite dans l'équation (2.27) ne vise qu'à calculer les forces exercées sur les nœuds d'un élément suite à la déformation de ce seul élément. Il est possible de calculer le cumul des forces issues des déformations de tous les éléments placés autour d'un nœud. On se base alors sur la deuxième loi de la dynamique exprimée en chaque nœud, ce qui s'écrit sous la forme suivante :

$$m_i \ddot{\mathbf{u}}_i + \lambda_i \dot{\mathbf{u}}_i - \mathbf{f}_i^{int} = \mathbf{f}_i^{ext} \quad (2.30)$$

Où m_i est la masse du nœud i , λ_i le coefficient de viscosité dans le milieu ambiant, \mathbf{f}_i^{int} est la somme des forces issues des déformations des éléments auxquels le nœud appartient, et \mathbf{f}_i^{ext} est la somme des forces extérieures. Cette équation suppose que la masse du corps, issue de chaque élément, se concentre sur les nœuds. Pour cela, Cotin *et al.* ont utilisé la technique dite du *mass-lumping*, qui revient à concentrer, sur la diagonale, l'ensemble des termes non diagonaux de la matrice de masse du corps. La matrice de masse est alors diagonale et on en déduit la masse de chaque nœud.

Nous avons présenté la méthode de base permettant de comprendre la méthode des éléments finis pour des éléments de base linéaires. Il est possible d'utiliser des éléments non simpliciaux, comme les quadrangles ou les hexaèdres. Dans ce cas, la stratégie de calcul reste la même, mais les fonctions de forme ne sont pas linéaires, et les tenseurs de déformation, et donc de contraintes, ne sont pas constants sur l'élément. Il est possible, dans ce cas, d'utiliser la technique des points de Gauss qui transforme l'intégrale de l'équation (2.26) en une somme finie de valeurs de la densité énergétique calculées en certains points bien définis, multipliée par la surface ou le volume de l'élément. Si la loi de Hooke et le tenseur de déformation linéarisé sont utilisés, la matrice de raideur reste constante par élément.

Pour conclure, nous constatons que la méthode des éléments finis est très répandue, en mécanique de l'ingénieur, mais également en informatique graphique, pour résoudre des équations basées sur les lois de la mécanique continue.

- **Masses/tenseurs**

Le modèle masses/tenseurs a été proposé par Cotin *et al.* [CDA00] pour réunir la

robustesse de la méthode des éléments finis et la simplicité des modèles masses/ressorts. Plus particulièrement, les auteurs ont défini cette méthode pour permettre de résoudre les problèmes de temps de calcul lors de la simulation de modifications topologiques. Cette méthode peut être considérée comme une autre façon d'exprimer les équations de la méthode des éléments finis linéaires explicites. Quelques résultats de l'approche de Cotin *et al.* sont présentés sur la figure 2.19 dans le cas de maillages tétraédriques.

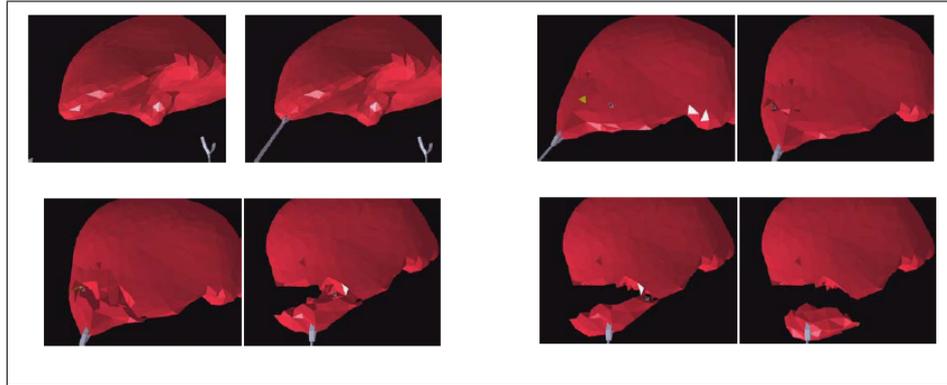


FIGURE 2.19 – Résultats de déformation et de découpe d'un foie avec la méthode masses/tenseurs (images issues de [CDA99]).

La méthode des masses/tenseurs revient à calculer, pour chaque élément, les effets de chaque sommet sur lui-même ainsi que son influence sur les autres sommets de l'élément. En réalité, ces influences entre déplacement des nœuds et les forces qu'ils subissent sont clairement explicitées dans la matrice de raideur $[K^{(e)}]$ de chaque élément. Si on considère, par exemple, des éléments tétraédriques, la matrice de rigidité est de taille 12×12 . Elle se décompose en 16 matrices de taille 3×3 , réparties entre les sommets et les arêtes du tétraèdre, comme montré par la figure 2.20.

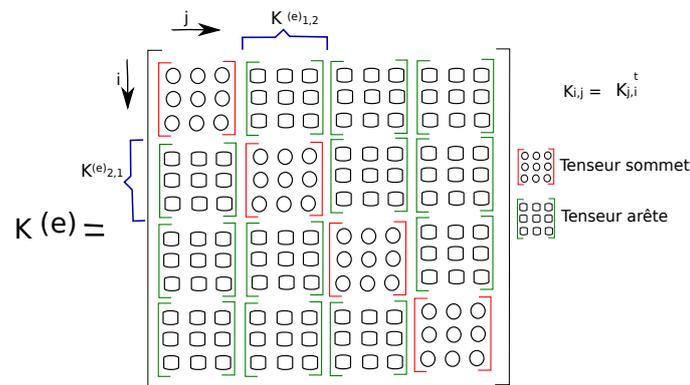


FIGURE 2.20 – Décomposition de matrice de raideurs.

Dans cette figure, les matrices (encadrées de rouge) $[K_{ii}^{(e)}]$ qui se trouvent sur la

diagonale montrent les forces subies par un sommet suite à son propre déplacement. Les autres matrices (encadrées de vert) $[K_{ij}^{(e)}]$ montrent comment le déplacement d'un sommet j entraîne l'application d'une force sur le sommet i . Comme la matrice de rigidité globale 12×12 est symétrique, l'influence du sommet i sur le sommet j est obtenue par $[K_{ij}^{(e)}] = [K_{ji}^{(e)}]^T$. Ces deux tenseurs sont associés à la même arête, joignant i et j . Aussi, au lieu de définir 16 tenseurs pour chaque tétraèdre, il suffit d'en définir seulement 10, comme montré sur la figure 2.21.

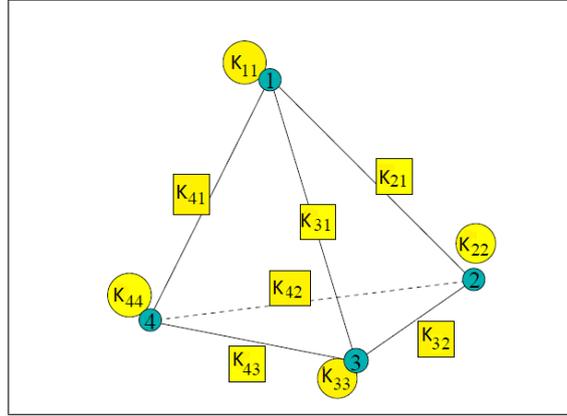


FIGURE 2.21 – Les tenseurs de raideur qui permettent de calculer les forces appliquées sur chaque nœud.

Cette approche peut se généraliser pour tout autre type d'élément linéaire (matrice de rigidité constante). On trouve alors des tenseurs liés aux sommets, aux arêtes, mais aussi aux diagonales de faces et de volumes, le cas échéant (par exemple dans les hexaèdres).

Dans un maillage, un sommet ou une arête appartient généralement à plus d'un élément. Pour chaque couple de nœuds (n_1, n_2) avec n_1 non nécessairement différent de n_2 , il faut prendre en compte les influences issues des déformations de tous les éléments possédant ces nœuds. Cette propriété est également vérifiée par certaines diagonales (par exemple les diagonales d'une face quadrangulaire partagée entre deux hexaèdres). Pour se rapprocher d'une simulation dont la complexité est analogue à celle d'un modèle masses/ressorts (où les interactions sont traitées par couple de particules), Il faut accumuler ces différentes influences. Par exemple, il est recommandé de cumuler les tenseurs des éléments incidents à un même sommet (*i.e.* : $[K_{ii}] = \sum_{(e)} [K_{ii}^{(e)}]$), ou une même arête ou diagonale (*i.e.* : $[K_{ij}] = \sum_{(e)} [K_{ij}^{(e)}]$). Ainsi le bilan des forces appliquées sur chaque sommet est calculé à partir de toutes les contributions :

$$\mathbf{f}_i = [K_{ii}] \mathbf{u}_i + \sum_{j \neq i} [K_{ij}] \mathbf{u}_j \quad (2.31)$$

Où $[K_{ii}]$ est la somme des contributions du déplacement du nœud i dans tous les éléments auxquels il appartient. $[K_{ij}]$ correspond à la somme de contributions

des éléments auxquels l'arête ou la diagonale ij appartient.

Cotin *et al.* [CDA99] ont défini une formule qui permet de calculer chaque tenseur $[K_{ij}^{(e)}]$ d'un tétraèdre (e) à part, sans utilisation de la matrice $[K^{(e)}]$ des éléments.

$$[K_{ij}^{(e)}] = \frac{1}{36v_{(e)}} (\lambda (\mathbf{n}_j \times \mathbf{n}_i) + \mu (\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j) I_3 + \mu (\mathbf{n}_i \times \mathbf{n}_j)) \quad (2.32)$$

Où $v(e)$ est le volume, λ et μ sont les coefficients de Lamé, \mathbf{n}_i est le vecteur normal à la face opposée au sommet i du tétraèdre (e), de même pour \mathbf{n}_j . Tous ces tenseurs peuvent être calculés dans une phase préliminaire parce que les données de la formule (2.32) ne dépendent que de la géométrie du maillage au repos et des coefficients de Lamé.

Pour conclure, lors d'un changement topologique, il faut uniquement mettre à jour les tenseurs sur lesquels le ou les éléments modifiés ont une influence. Le problème de cette méthode est qu'elle nécessite que les matrices de rigidité soient constantes en chaque élément. Ceci n'est vérifié que dans le cas de l'élasticité linéaire (loi de Hooke) en petits déplacements (tenseur de déformation linéarisé). Picinbono *et al.* [PDA00,PDA01] ont étendu les travaux de Cotin pour pouvoir simuler avec la méthode masses/tenseurs des matériaux anisotropes avec une élasticité non linéaire en utilisant le tenseur de Green Lagrange.

- **Méthode du Co-rotationnel**

La méthode des éléments finis explicite et l'approche masses/tenseurs proposée par Cotin se basent sur le tenseur de déformation linéarisé, et, de ce fait, font l'hypothèse de petits déplacements. En particulier, le tenseur de déformation n'est pas invariant par rotation. Toute rotation subie par un élément est interprétée comme une déformation, qui génère des forces dans des directions ne permettant pas de réduire cette « déformation ». Ce phénomène aboutit à un gonflement de l'objet comme montré sur la figure 2.22, où la barre en rouge est simulée avec un tenseur de comportement non linéaire et celle en vert avec un tenseur de comportement linéaire.

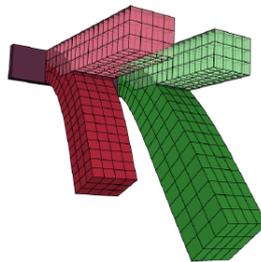


FIGURE 2.22 – Simulation de comportement de deux poutres (image issue de [NPF05]).

Pour résoudre ce problème, quelques approches proposent d'utiliser des tenseurs de comportement non-linéaires pour mieux calculer les déformations, par exemple, le tenseur de Green Lagrange, car il est invariant en rotation. Müller *et al.* [MG04] ont proposé une autre approche, dite du « co-rotationnel », qui peut être considérée comme une extension de la méthode des éléments finis linéaires. Le principe de cette méthode consiste à extraire un mouvement rigide (translation et rotation) de la transformation entre la position courante des nœuds et leur position de repos, afin de pouvoir définir la déformation de chaque élément proprement dite. Le calcul de la force nette appliquée à un élément par la formule (2.27), page 27, devient alors :

$$\mathbf{F}^{(e)} = [R^{(e)}] [K^{(e)}] \left([R^{(e)}]^T \mathbf{X} - \mathbf{X}_0 \right) \quad (2.33)$$

Où $[R^{(e)}]$ est une matrice 12×12 formée par la duplication, le long de la diagonale, de la matrice de rotation 3×3 calculée pour chaque élément, \mathbf{X} est un vecteur regroupant la position des sommets et \mathbf{X}_0 leur position au repos. Cette formule applique la rotation inverse sur la position des sommets dans la configuration déformée, afin d'exprimer la déformation dans le repère de l'élément au repos. La force correspondant à cette déformation est calculée en utilisant la matrice de rigidité. Il ne faut pas oublier de ré-exprimer les forces dans le repère global en appliquant la rotation de l'élément.

Il existe des méthodes assez peu coûteuses pour déterminer le mouvement rigide dans le cas d'éléments de type triangulaire ou tétraédrique. Aussi, cette méthode se restreint, la plupart du temps, à des maillages de simplexes. Pour extraire la rotation et la translation de la transformation subie par un tétraèdre, Nesme *et al.* [NPF05] proposent d'utiliser une décomposition QR. L'idée de cette méthode est de calculer comment un repère local d'un élément se transforme après déformation, en se basant sur la construction de Gram-Schmidt. Pour cela il faut choisir un sommet de l'élément comme origine et ordonner les arêtes (en respectant une orientation positive) issues de ce sommet. La première arête fournit le premier axe. Le deuxième axe doit appartenir au plan des deux premières arêtes, mais ne peut être construit immédiatement. Le troisième axe doit être orthogonal au plan contenant les deux premiers axes et, par conséquent, les deux premières arêtes. Aussi, on le construit à partir du produit vectoriel du premier axe et de la seconde arête. Une fois le troisième et le premier axes construits, il suffit de calculer leur produit vectoriel pour obtenir le second axe. La figure 2.23 montre un exemple dans lequel l'origine est le sommet B , la première arête choisie comme premier axe est BC , le deuxième axe lui est perpendiculaire et appartient au plan (BC, BA) et le troisième axe est orthogonal aux deux autres (il correspond simplement au produit vectoriel entre \mathbf{BC} et \mathbf{BA}).

Cette construction de Gram-Schmidt est appliquée aux trois vecteurs colonnes extraits de la matrice de transformation de l'élément. Elle indique alors comment le repère $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$ est transformé en un autre repère orthonormé. Il s'agit bien d'une rotation, approximant la transformation de l'élément, en ignorant la partie défor-

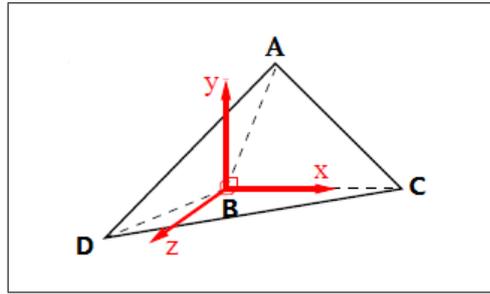


FIGURE 2.23 – Principe de la décomposition QR.

mation. Il faut noter que la rotation définie par cette méthode dépend du sommet d'origine et de l'ordre des arêtes choisi.

Tous les modèles présentés (masses/ressorts, méthode des différences finies, la méthode des éléments finis linéaires, masses/tenseurs et co-rotationnel) se différencient par leur degré de précision et réalisme, le temps de simulation et leur capacité à gérer des modifications topologiques. Mais il semble intéressant de regrouper plusieurs modèles physiques dans un même outil pour que l'utilisateur puisse comparer la déformation d'un même objet avec les mêmes propriétés physiques selon les approches choisies. De plus, il est aussi intéressant de simuler un même objet avec deux modèles physiques en même temps. Par exemple la simulation de l'intérieur d'un corps peut se faire avec une méthode des éléments finis explicite alors que sa surface est modélisée avec le modèle masses/ressorts afin de limiter les variations de volume global de l'objet. Ce type de simulation avec un modèle hybride est prévu, par exemple, dans le *framework* SOFA [Sof].

2.3 Animation Physique

Maintenant que les équations nécessaires ont été introduites dans la section précédente, il faut ici entreprendre leur résolution. Pour pouvoir simuler des corps déformables, il est nécessaire de connaître la position de chaque particule au cours du temps. Une équation de mouvement doit être écrite pour chaque particule. Pour tous les modèles mécaniques, il est possible de se ramener à l'équation (2.34). Cette équation réunit toutes les équations de toutes les particules dans un système à n équations :

$$[M]\ddot{\mathbf{x}}(t) + [D]\dot{\mathbf{x}}(t) + [K]\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}_{ext}(t) \quad (2.34)$$

avec $[M]$, $[D]$ et $[K]$ les matrices respectivement de masse, d'amortissement et de raideur, \mathbf{x} la position ou le déplacement du point. C'est une équation du second ordre qui nécessite une double intégration pour trouver les positions des particules. On parle d'approche *dynamique*. Comme vu dans l'état de l'art des méthodes à

éléments finis, il est possible de se focaliser uniquement sur l'équation à l'équilibre. Il s'agit du cas *statique*, dont l'équation s'écrit ainsi :

$$[K] \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2.35)$$

Ici, on cherche l'état d'équilibre du système en ignorant l'évolution au cours du temps, c'est à dire les états transitoires. Néanmoins, cette approche n'est adaptée qu'à des situations pseudo-statiques, où chaque étape du mouvement peut être considérée comme un équilibre.

Concernant l'approche dynamiques, l'évolution au cours de temps des degrés de liberté de l'objet est recherchée. Pour simplifier la résolution de l'équation (2.34), qui est une equation du second ordre, elle peut être réécrite sous la forme d'un système d'équations du premier ordre :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = [M]^{-1} (\mathbf{f}_{ext} - [D] \mathbf{v}(t) - [K] \mathbf{x}(t)) \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}(t) \end{cases} \quad (2.36)$$

Pour résoudre numériquement ce système, les algorithmes utilisés se basent sur une discrétisation temporelle, en d'autres termes, la solution n'est calculée qu'en certains instants. Le temps entre deux états calculés est appelé *pas de temps*, on le note Δt . Ce mode opératoire n'est pas un handicap car le système n'a généralement besoin d'être connu qu'à certains instants, correspondant souvent à une modalité d'interaction donnée (fréquence d'affichage ou de mise à jour d'un retour haptique, par exemple). Selon le théorème de Shannon, le pas de temps ne doit pas dépasser une certaine valeur, fonction de la fréquence naturelle d'oscillation du système :

$$\Delta t < \frac{1}{2f} \quad (2.37)$$

où f est la fréquence naturelle d'oscillation du système.

Si une trop grande valeur est choisie pour le pas de temps, toute résolution de l'équation du mouvement est incorrecte. Dans certains cas, cette non-conformité se traduit par une divergence de la résolution. Néanmoins, si le pas de temps choisi est trop petit, le temps de calcul de la résolution devient très important, et des états du système non réellement utiles sont calculés (typiquement, pour visualiser une animation sans saccades, quelques dizaines de millisecondes peuvent séparer deux états).

2.3.1 Méthodes d'intégration

Les méthodes de résolution par discrétisation du temps consistent, à partir d'un état connu du système à un instant t , à calculer son nouvel état à l'instant $t + \Delta t$, en s'appuyant sur les équations (2.36) page 34. Il existe dans la littérature différentes méthodes d'intégration numérique. On peut les distinguer en deux grands types : les méthodes explicites et les méthodes implicites.

2.3.1.1 Méthodes explicites

Les méthodes explicites sont les méthodes les plus simples à mettre en œuvre pour calculer l'évolution au cours du temps d'un système. Une méthode explicite des plus élémentaires est la méthode d'Euler explicite. Elle est basée uniquement sur le développement de Taylor d'ordre 1 qui s'écrit sur la forme suivante :

$$\mathbf{h}(t + \Delta t) \approx \mathbf{h}(t) + \dot{\mathbf{h}}(t)\Delta t \quad (2.38)$$

La méthode d'Euler explicite applique ce développement à la vitesse et à la position des degrés de liberté :

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t + \Delta t) \approx \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t)\Delta t \\ \mathbf{v}(t + \Delta t) \approx \mathbf{v}(t) + \dot{\mathbf{v}}(t)\Delta t \end{cases} \quad (2.39)$$

Compte tenu de sa simplicité, cette méthode est rapide en temps de calcul. Elle se comporte bien si le pas de temps choisi est adapté.

En se basant également sur le développement de Taylor d'ordre 1 et l'équation (2.39), les nouvelles positions peuvent dépendre des nouvelles vitesses, que l'on calcule juste avant de traiter les positions. Cette méthode s'appelle méthode d'Euler semi-implicite ou symplectique, et elle est plus stable.

$$\begin{cases} \mathbf{v}(t + \Delta t) \approx \mathbf{v}(t) + \dot{\mathbf{v}}(t)\Delta t \\ \mathbf{x}(t + \Delta t) \approx \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t + \Delta t)\Delta t \end{cases} \quad (2.40)$$

Il existe diverses méthodes d'intégration explicite, comme par exemple la méthode de Störmer-Verlet (ordre 2) et Runge Kutta (en particulier ordre 2 et 4), qui peuvent être un peu plus compliquées à mettre en œuvre. Néanmoins, il a été montré, dans la thèse de Provot [Pro97] par exemple, que l'intégration d'Euler symplectique est plus stable que celle de Runge Kutta d'ordre 2. Ces diverses méthodes permettent d'augmenter la précision, mais elles sont plus coûteuses en temps de calcul et, souvent, également en mémoire.

2.3.1.2 Méthodes implicites

Les méthodes implicites permettent de résoudre les problèmes d'instabilité (convergence de la résolution) des approches explicites. Elles sont inconditionnellement stables (si le pas de temps est trop élevé, le comportement n'est pas correctement calculé, mais le système ne diverge pas). L'idée de ces méthodes est de calculer les positions et les vitesses à l'instant $t + \Delta t$, pas à l'aide des forces du temps précédent, comme le font les méthodes explicites, mais à l'aide des forces de l'instant considéré. Ceci permet de garantir que l'état en $t + \Delta t$ est compatible avec l'état en t . Parmi les méthodes implicites, la plus connue est celle d'Euler implicite qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{v}(t + \Delta t) \approx \mathbf{v}(t) + \dot{\mathbf{v}}(t + \Delta t)\Delta t \\ \mathbf{x}(t + \Delta t) \approx \mathbf{x}(t) + \mathbf{v}(t + \Delta t)\Delta t \end{cases} \quad (2.41)$$

La difficulté, ici, est que pour calculer $\mathbf{v}(t + \Delta t)$, il faut connaître $\dot{\mathbf{v}}(t + \Delta t)$ qui dépend des forces exercées sur le système et donc de $\mathbf{x}(t + \Delta t)$ et $\mathbf{v}(t + \Delta t)$. Or, la deuxième équation de ce système indique que $\mathbf{x}(t + \Delta t)$ n'est calculable que lorsque $\mathbf{v}(t + \Delta t)$ est connue. Pour résoudre cette équation, un système non linéaire doit nécessairement être résolu. Bien que ces approches soient plus difficiles à implanter que les méthodes explicites, elles sont utilisées dans plusieurs travaux [BW98, DSB99] en raison de leur stabilité.

Le choix de la méthode d'intégration a une grande importance dans la précision et la stabilité des simulations. Chacune de ces méthodes a des avantages et inconvénients, pour cela le choix dépend de l'application visée. Dans notre cas, un modèle simple est suffisant : nous nous intéressons aux principes des modèles et à la mise en œuvre algorithmique. Nous pouvons adapter les paramètres physiques d'un corps à simuler pour garantir une résolution correcte des équations, pour un pas de temps donné ou, au besoin, adapter le pas de temps au système étudié. Aussi, une intégration symplectique d'Euler est parfaitement adéquate.

2.3.2 Boucle de simulation

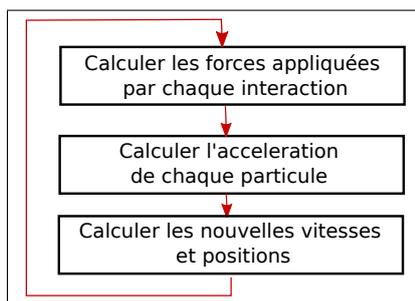


FIGURE 2.24 – Les étapes de la boucle de simulation.

Une fois que toutes les forces sont calculées et que la méthode d'intégration qui permet de calculer les nouvelles vitesses et positions est choisie, il faut appliquer la boucle de simulation décrite dans la figure 2.24 pour chaque pas de temps.

Comme décrit dans cette figure, la première étape consiste à calculer les forces appliquées par chaque interaction sur chaque particule. L'étape suivante consiste alors à calculer l'accélération de chaque particule, qui revient en fait à calculer (1) le bilan des forces appliquées sur chaque particule et (2) son accélération, en se basant sur la deuxième loi de Newton définie dans l'équation (2.5) en page 10. Ensuite, il faut calculer les nouvelles vitesses et positions de chaque particule en utilisant un schéma d'intégration bien défini. Ces mêmes étapes sont à suivre à chaque pas de temps de la simulation.

Cette boucle peut être utilisée pour simuler les déformations de n'importe quel objet avec un modèle discret ou continu. La seule différence réside dans la manière de calculer des forces, les autres étapes sont les mêmes pour tous les modèles physiques

dynamiques.

2.4 Modifications Topologiques

Les transformations topologiques sont très exploitées pour simuler les explosions ou les fractures d'un objet, par exemple dans les jeux vidéo ou en réalité virtuelle. On peut également citer les découpes et déchirures de tissus dans les simulateurs chirurgicaux. Nous nous focalisons dans cette section sur les transformations topologiques des modèles physiques, sujet largement étudié dans la littérature.

Tout d'abord, il nous faut différencier la découpe d'une part et la déchirure et la fracture d'autre part. La simulation d'une découpe en chirurgie virtuelle est généralement contrôlée par l'utilisateur, au moyen d'un outil de coupe (par exemple une lame à bistouri dans le domaine médical). En pratique, un simple contact entre le corps à inciser et l'outil est suffisant pour déclencher la découpe. Au contraire, la déchirure ou la fracture est une opération qui apparaît dans le corps simulé comme conséquence des contraintes qu'il subit. Dans nos travaux, nous considérons que les déchirures ou fractures sont les traductions d'un même phénomène, la différence s'expliquant essentiellement par les lois de comportement du corps simulé (corps rigide, corps déformable, corps ductile²...).

Nous ne considérons dans cette partie que les objets basés sur des maillages géométriques. Les découpes, déchirures ou fractures apparaissent comme des modifications de ce maillage, comme, par exemple, une séparation de faces ou volumes adjacents, la suppression d'une face ou d'un volume, etc. Par ailleurs, pour créer des simulations plus réalistes et plus précises, plusieurs approches ont proposé de raffiner la résolution d'un maillage avant de lui appliquer des modifications topologiques. Au contraire, des zones non manipulées voire invisibles peuvent bénéficier d'un passage à une résolution plus grossière du maillage, pour améliorer le temps de calcul. Ces changements de résolution sont également des modifications topologiques. Après des modifications du maillage d'un corps, y compris les changements de sa résolution, il est, la plupart du temps, nécessaire de mettre à jour son modèle mécanique.

Pour prendre en compte les modifications topologiques, la boucle de simulation présentée dans la section précédente doit être adaptée comme le montre la figure 2.25. Après le calcul des nouvelles positions, il faut évaluer un critère qui déclenche la modification. Ce critère peut être, par exemple, un contact entre l'objet et l'outil de coupe dans le cas des découpes, ou une intensité trop élevée des forces appliquées en un point du corps, dans le cas des déchirures ou fractures. Si le critère est vérifié, alors il faut appliquer la modification topologique correspondante et, ensuite, mettre à jour les propriétés mécaniques de l'objet après la modification du maillage. Nous exposons, dans cette section, un bref état de l'art de ces modifications topologiques, que nous regroupons par type.

2. Qui est capable de subir une déformation plastique (sans retour à sa forme d'origine) avant de se rompre dans des cas extrêmes.

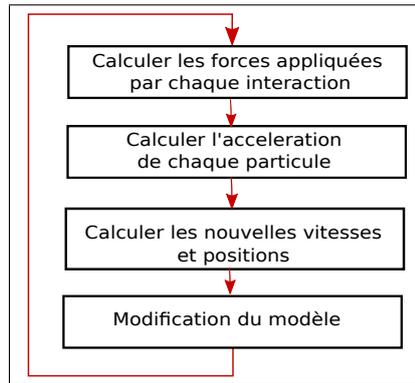


FIGURE 2.25 – Les étapes de la boucle de simulation avec transformations topologiques.

2.4.1 Découpe

Plusieurs méthodes pour la simulation des découpes ont été proposées dans la littérature. Nous avons décidé de classifier ces méthodes de découpe suivant la modification topologique choisie. Ces modifications peuvent être regroupées en quatre catégories qui sont la suppression, la séparation, la division et la duplication d'éléments.

2.4.1.1 Suppression d'éléments

La méthode la plus simple pour simuler une découpe d'un objet consiste à supprimer un ou plusieurs éléments du maillage lorsque l'outil de coupe entre en collision avec le corps simulé comme montré sur la figure 2.26. L'élément ou les éléments à supprimer sont ceux qui se trouvent le long du chemin de coupe.

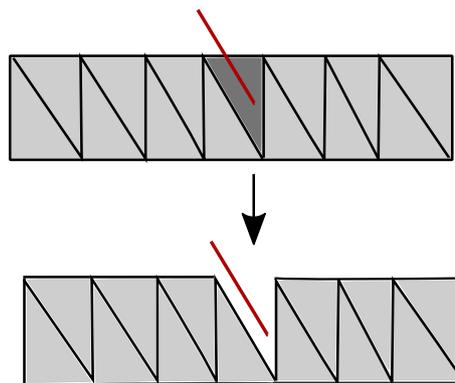


FIGURE 2.26 – Découpe avec suppression d'élément (face en 2D).

Grâce à sa simplicité et la simplification du maillage, cette méthode a été utilisée dans plusieurs approches [CDA00,FDA05] et elle a donné des résultats satisfaisants. Un exemple de résultat de l'utilisation de cette méthode dans les travaux de Cotin

et al. est donné sur la figure 2.27. Néanmoins, il faut signaler que la suppression des éléments engendre une perte de matière ce qui nuit au réalisme de la simulation. Pour pouvoir utiliser cette méthode tout en limitant la perte de masse, il faut que la taille des éléments soit petite ce qui conduit à simuler un nombre important d'éléments.

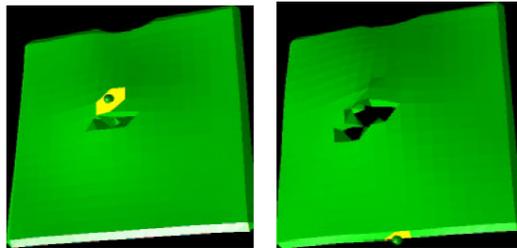


FIGURE 2.27 – Découpe d'une plaque par suppression de tétraèdre (issu de [CDA00]).

2.4.1.2 Séparation d'éléments

L'approche par séparation d'éléments consiste à séparer des éléments adjacents en « éclatant » leur bord commun. Le chemin de coupe est ainsi approximé par une suite d'arêtes en 2D ou de faces en 3D du maillage initial (voir figure 2.28). Cette méthode a été utilisée dans [Fri99] et [NvdS00]. Dans [NvdS00], un plan de coupe est défini par une surface triangulaire. Durant son déplacement, les faces du maillage les plus proches du plan de coupe sont éclatées. Pour réduire l'écart entre le chemin de coupe et les faces à éclater, les éléments du maillage sont déformés en rapprochant de la surface de coupe les nœuds les plus éloignés (méthode du *node snapping*).

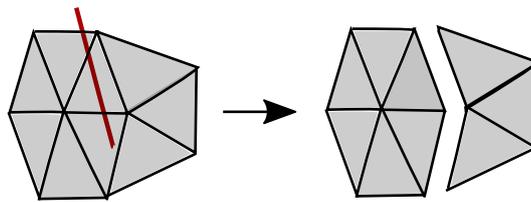


FIGURE 2.28 – Découpe avec séparation des éléments.

2.4.1.3 Division d'éléments

La division d'éléments consiste à couper en deux les éléments qui intersectent la surface de découpe. Plus précisément, l'intersection d'un élément avec la surface de découpe définit une arête en 2D ou une face en 3D qui sont insérées dans l'élément. Par l'éclatement de ces nouvelles cellules, l'élément est coupé en deux comme montré

sur la figure 2.29. Dans [BG00], Bielser *et al.* ont introduit cette méthode sur des tétraèdres et mis en évidence différentes configurations de découpe de l'élément.

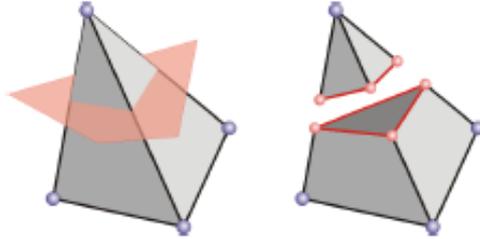


FIGURE 2.29 – Division d'un élément (issue de [WWD14]).

Ils ont montré que cette approche est graphiquement très réaliste parce que la découpe se fait exactement à l'endroit souhaité. Cependant cette méthode est assez coûteuse en temps de calcul et le nombre de tétraèdres augmente au fur et à mesure des coupes. Par ailleurs, cette méthode, purement géométrique, peut générer, selon le placement des cellules insérées, des éléments mal formés qui ne respectent pas les contraintes de proportion des éléments exigées par la simulation physique (les éléments *fins* et *longs* sont à éviter en simulation par éléments finis, par exemple).

2.4.1.4 Duplication d'éléments

Dans [MBF04,SDF07], la méthode des nœuds virtuels est introduite pour contourner les problèmes numériques qui résultent des éléments mal formés. L'idée de base est de créer un ou plusieurs duplicatas des éléments à couper. En chaque duplicata est défini un plan de coupe qui permet de séparer l'élément en deux parties : l'une contient de la matière, l'autre est vide. Ainsi, les duplicatas sont définis à la fois par des sommets originaux, qui étaient présents dans le maillage avant la découpe, et de nouveaux nœuds dits *virtuels*, qui permettent de définir topologiquement et géométriquement l'élément, mais sont situés dans la zone sans matière. Lors de la simulation, seules les parties contenant de la matière sont considérées, ce qui nécessite une adaptation mécanique. Un exemple de résultat de cette méthode est illustré dans la figure 2.30

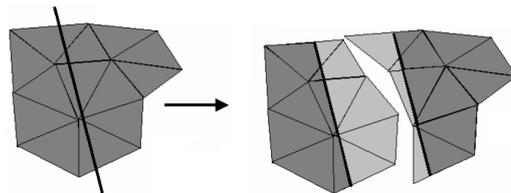


FIGURE 2.30 – Découpe avec duplication des éléments

L'un des inconvénients de cette méthode est l'utilisation d'un seul plan de coupe par élément. Aussi, des travaux postérieurs ont cherché à lever cette limitation [SDF07,WJST14]. Par ailleurs, cette méthode ne permet pas de garantir que le modèle obtenu après duplication est une quasi variété (cette notion est définie ultérieurement, dans la partie 3.3.2.2). Un élément peut, en effet, être lié à un élément adjacent et son duplicata par un même bord. Cela implique que le maillage soit décrit par un modèle compatible avec les duplications et limite fortement le recours aux modèles topologiques que nous décrivons dans le prochain chapitre.

2.4.1.5 Discussion

Pour plus d'informations sur les méthodes utilisées pour la découpe virtuelle des objets en 2D ou en 3D, il est possible de se référer à la publication de Wu *et al.* [WWD14] qui présente un état de l'art sur la simulation physique de découpe dans les objets déformables. Nous constatons que la découpe est délicate et que les différentes méthodes soit privilégient le maillage existant (suppression ou séparation d'éléments) soit modifient ce maillage, en introduisant de nouveaux éléments non nécessairement compatibles avec les exigences de la simulation physique. La méthode des nœuds virtuels apparaît comme un compromis entre ces deux familles d'approches, mais il contraint fortement le modèle décrivant le maillage de l'objet.

2.4.2 Fractures/déchirures

Les phénomènes de fracture et déchirure apparaissent dans un objet lorsqu'il subit des déformations trop importantes. Plusieurs travaux se sont focalisés sur l'étude de ces phénomènes, mais les méthodes sont toujours étroitement liées au modèle de comportement utilisé (discret ou continu). La déchirure a été principalement étudiée dans le cas des tissus (textiles ou biologiques). Au contraire, les fractures ont été largement étudiées, principalement pour deux types de matériaux, classique en ingénierie : les matériaux *ductiles* et les matériaux *fragiles*. En général, la principale différence entre ces deux types de matériaux est la capacité de déformation plastique que le matériau subit avant que la fracture se produise, en d'autres termes, sa rigidité. Les matériaux ductiles démontrent une grande quantité de déformation plastique avant la fracture alors que les matériaux fragiles se brisent dès les premières déformations. Dans ce manuscrit, nous considérons que la fracture et la déchirure sont des phénomènes qui peuvent être traités de la même manière, la différence de comportement étant plutôt due aux lois de comportement du matériau et non aux changements topologiques en tant que tels.

Pour déclencher une déchirure ou une fracture dans un objet, un critère est requis. Ce dernier permet de déterminer quand et où une déchirure/fracture apparaît, ainsi que la façon dont elle se propage dans l'objet. Plusieurs types de critères ont été définis dans la littérature. Ils peuvent être basés soit sur les forces ou les contraintes appliquées sur le corps [OH99] ou sur ses déformations [NTB⁺91]. Pour les modèles de type masses/ressorts, ces critères sont équivalents (car la force est

directement proportionnelle à la déformation du ressort, ou au carré, au cube, etc. de cette dernière). Lorsque la force ou la déformation dépassent un seuil, le critère est vérifié. Ce critère doit alors définir l'emplacement où une transformation topologique doit s'appliquer pour représenter la déchirure ou la fracture. Plusieurs types de transformations topologiques ont également été proposés dans la littérature, certaines étant similaires à celles utilisées pour la découpe, d'autres ayant été spécifiquement conçues pour les fractures.

2.4.2.1 Critères

Dans cette section, nous présentons les critères de déchirure/fracture que nous classifions, comme indiqué dans la discussion précédente, en approches basées sur les déformations (*strain*) et celles basées sur les forces/contraintes (*stress*).

- Critères basés sur les déformations

En 1988, Terzopoulos et Fleischer [TF88] ont présenté une technique pour simuler des déformations inélastiques et des fractures. Lorsque le déplacement d'un point de l'objet par rapport à sa référence non déformée excède un seuil de déformation, une fracture est enclenchée. La fracture se base complètement sur le schéma utilisé pour gérer la plasticité du modèle, en modifiant la forme de référence. L'objet étant représenté par une spline, la fracture est représentée visuellement via la mise à 0 de certains des coefficients gérant la continuité de la spline.

En 1991, Norton *et al.* [NTB⁺91] ont présenté une méthode pour animer des objets solides en 3D par un modèle masses/ressorts et qui se fracturent suite à une grande déformation. Lorsque la distance entre deux particules attachées dépasse un seuil (*i.e.* le ressort correspondant se déforme au delà d'une limite donnée), une fracture est appliquée. Des exemples de résultats sont donnés sur la figure 2.31.



FIGURE 2.31 – Exemples de résultats des objets avec la méthode de Norton (images issues de [NTB⁺91])

Ce même critère a été utilisé par plusieurs autres approches. Citons, par exemple celle de Hirota *et al.* [HTK00] pour simuler la fracture sur une surface d'argile, Boux

de Casson *et al.* [BL00] pour simuler la déchirure de tissus biologiques représentés par des mailles triangulaires en 2D (travail étendu plus tard aux tétraèdres en 3D). Un tel critère de déformation a également été utilisé dans [DKS⁺11] et [LBC⁺14].

- **Critères basés sur les forces ou les contraintes**

Dans les modèles utilisant des interactions entre couples de particules (modèle discrets en particulier), la force de l'interaction est directement liée à la déformation du lien d'interaction. De ce fait, les critères à base de forces peuvent être remplacés par des critères sur la déformation, ce qui peut être moins coûteux selon l'implantation de la simulation. Cependant, pour les modèles basés sur la mécanique continue, le tenseur de contrainte et celui de déformation sont liés par la loi de constitution, par exemple la loi de Hooke (équation (2.13) page 14). Compte tenu de cette loi, les critères sur les déformations et sur les contraintes fournissent des résultats différents.

La plupart des travaux qui se sont intéressés aux fractures des modèles continus se basent sur une résolution de type éléments finis. Les travaux fondateurs de O'Brien *et al.* en informatique graphique, montrent comment les tenseurs de contraintes calculés par une méthode des éléments finis peuvent être utilisés pour générer des fractures. Ils se sont intéressés aux matériaux fragiles [OH99] puis aux matériaux ductiles [OBH02]. Les maillages utilisés sont uniquement de type tétraédriques et l'interpolation de type linéaire. Les tenseurs de contraintes sont donc constants sur les éléments. La méthode revient à calculer un tenseur en chaque sommet à partir des tenseurs des tétraèdres auxquels les sommets appartiennent. Dans [OH99], les tenseurs des tétraèdres sont divisés en deux parties, pour séparer les effets de traction et de compression. Un *tenseur de séparation* est calculé, en chaque sommet, en combinant les tenseurs de traction des tétraèdres entourant le sommet, d'une part, et les tenseurs de compression, d'autre part. Récemment, Koshier *et al.* [KLB14] ont proposé un tenseur plus simple à calculer, en moyennant les tenseurs des tétraèdres incidents à chaque sommet et en les pondérant par la masse du volume. En chaque sommet, les valeurs propres de son tenseur sont calculées. Si au moins l'une d'elle dépasse un seuil pré-défini, la fracture est déclenchée. Un plan de fracture est défini comme orthogonal au vecteur propre associé à la valeur propre maximale et passant par le sommet. Notons que plusieurs autres approches ont utilisé les tenseurs aux sommets (tenseurs de séparation ou non) en 2D ou 3D, comme par exemple [PNdO14,BDW13,PO09,IO09,WRK⁺10]. Dans [OH99,KLB14], la méthode des éléments finis utilisée est dynamique, le corps est alors déformable (mais très faiblement). Néanmoins, il est possible de simuler le corps en tant que corps rigide et d'avoir recours à une méthode des éléments finis statique visant uniquement à calculer les tenseurs de contraintes correspondant à une déformation due à une collision pour décider des lieux de fracture [MMD⁺01,BHTF07,LHLW11].

2.4.2.2 Modifications topologiques

Une fois un critère vérifié, on en déduit l'emplacement d'une déchirure/fracture ainsi que certaines informations supplémentaires comme, par exemple, un plan de

fracture. Une transformation topologique doit alors être appliquée. Plusieurs types de transformations ont été proposés dans la littérature. Les différents types de modifications topologiques déjà cités dans la partie de découpe (section 2.4.1), peuvent également être utilisés pour les déchirures et fractures. Par exemple, dans [NTB⁺91], les auteurs ont choisi la suppression d'un ou plusieurs éléments du maillage. La séparation d'éléments est utilisée dans [SWB00] et [BL00]. Mais concernant les critères s'appliquant en un sommet du maillage, une opération plus complexe doit être définie afin de permettre d'éclater ce sommet en deux sommets, en s'appuyant sur le plan de la fracture. Dans [OH99, OBH02, KLB14] les tétraèdres intersectant le plan de fracture sont divisés (en utilisant, au besoin la méthode du nœud virtuel décrite en section 2.4.1.4). Dans [MMD⁺01], les tétraèdres incidents à un sommet sont regroupés en deux sous-ensembles, selon leur position par rapport au plan de fracture. Chaque face située entre deux tétraèdres de signes opposés est alors éclatée afin de séparer les deux tétraèdres. De cette manière, une « couronne » de faces est éclatée ce qui a pour conséquence d'éclater le sommet en deux. Cette méthode peut également être utilisée en 2D, on classe les faces en deux groupes que l'on sépare en éclatant les deux arêtes (en vert sur la figure 2.32) entre faces de signes opposés.

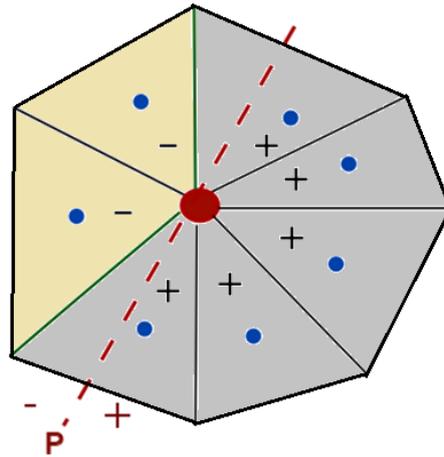


FIGURE 2.32 – Principe d'éclatement d'un sommet (cas 2D).

2.4.2.3 Lien entre les critères et les modifications topologiques

Nous venons d'exposer différents types de critères existants dans la littérature ainsi que quelques types de modifications topologiques qui se déclenchent suite à la vérification d'un critère. Compte tenu de ces différentes approches, il est légitime de se poser la question de la relation entre le critère et la modification topologique, en particulier lorsque l'emplacement du critère ne correspond pas au lieu de la modification. En effet, il apparaît que le lien entre les deux n'est pas immédiat et qu'il est même souvent arbitraire. Par exemple, dans [BL00] et [DKS⁺11], le critère utilisé est celui d'une trop grande elongation d'une arête, mais la modification topologique est l'éclatement d'un sommet. L'arête étant délimitée par deux

Critère	Modification Topologique	Références
Déformation	Éclatement de sommet	[SWB00, BL00, DKS ⁺ 11]
	Suppression d'élément	[NTB ⁺ 91]
	Division d'élément	[HTK00]
Force	Éclatement de sommet	[MMD ⁺ 01, OH99, OBH02, KLB14]
	Duplicata d'élément	[MBF04]
	Suppression d'élément	[CDA00]

TABLE 2.1 – Critères *vs* modifications topologiques de quelques travaux antérieurs.

sommets, le choix du sommet à éclater est parfaitement arbitraire, il peut tout au plus être conditionné par des considérations concernant la géométrie locale du maillage autour des sommets. Autre exemple, un critère de fracture calculé en un sommet résulte en l'éclatement de ce sommet, possible uniquement par éclatement de plusieurs arêtes/faces incidentes à ce sommet. La modification topologique dépasse largement la zone où le critère a été calculé. Enfin, il existe des combinaisons critères/modification topologique qui n'ont pas été étudiées. Le table 2.1, résume les critères et les modifications topologiques utilisés dans quelques travaux antérieurs. Comme décrit au dessus nous avons décomposé ces travaux en nous basant sur le type de critères utilisé, les déformations ou les forces internes, le lieu d'application (sommet ou élément) et la modification topologique qui est appliquée.

2.4.3 Adaptation de maillage

Dans la littérature, plusieurs approches ont considéré qu'il fallait modifier un maillage avant d'effectuer une déchirure ou une fracture, voire également une découpe. Par exemple, Nienhuys *et al.* [NvdS02] ont décidé de déformer le maillage initial pour correspondre au chemin de coupe. Les faces les plus proches de la surface de coupe sont identifiées et leur sommets sont projetés sur cette dernière (*node snapping*). Mais cette méthode, purement géométrique, peut conduire à des éléments mal proportionnés qui perturbent la simulation. Nous n'aborderons pas d'avantage cette méthode, car ce manuscrit se focalise sur les modifications de nature topologique et pas seulement géométrique. Aussi, dans cette partie, nous abordons des adaptations du maillage qui ne correspondent pas à des découpes, déchirures ou fractures. Ce sont, d'une part, les adaptations locales de maillage par réagencement des éléments et, d'autre part, les changements de résolution (raffinement/simplification de maillage).

2.4.3.1 Modification des éléments

Un réagencement des éléments d'un maillage vise à adapter le maillage avant de procéder à une modification topologique de type découpe/déchirure/fracture, afin que la simulation du phénomène soit plus précise et/ou pour éviter la forma-

tion d'éléments mal proportionnés. Par exemple, une opération classique en 2D, le basculement d'arête, consiste à modifier l'emplacement d'une arête entre deux triangles pour que le quadrilatère formé par les deux triangles soit découpé par l'autre diagonale.

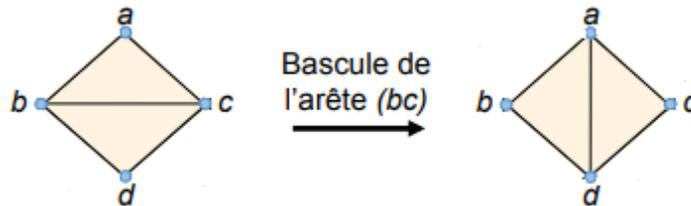


FIGURE 2.33 – Basculement d'arête.

On comprend sur la figure 2.33 que la nouvelle arête obtenue peut mieux approximer le chemin de coupe, que l'arête initiale. Cette idée intuitive est à la base des travaux de Paulus *et al.* [PUC⁺15]. Ils se basent sur une opération de raffinement plus élaborée, dite $\sqrt{3}$, qui nécessite de subdiviser, au préalable, les triangles en trois triangles, comme montré sur la figure 2.34(a).

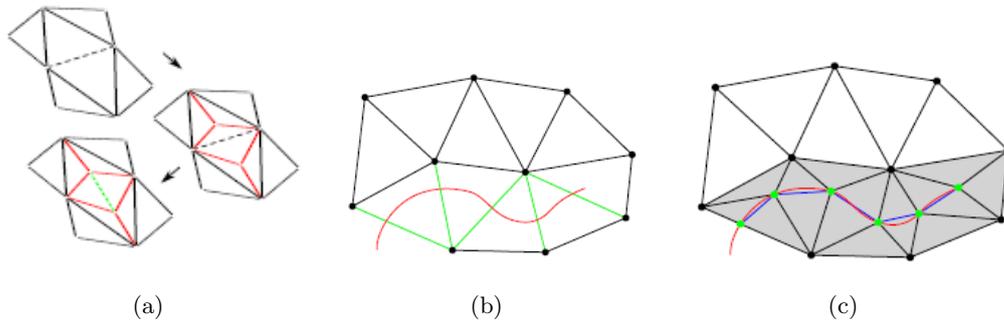


FIGURE 2.34 – Modification d'éléments avec le raffinement $\sqrt{3}$ (cas 2D).

En 2D, les arêtes traversées par la ligne de coupe sont d'abord sélectionnées, comme montré sur la figure 2.34(b). Ensuite, les triangles adjacents sont divisés, et les arêtes sélectionnées sont basculées afin de lier les nouveaux sommets (voir figure 2.34(c)), ce qui fournit des arêtes approxinant le chemin de coupe. Une version 3D a également été proposée, à base de division de tétraèdres et de la même manière qu'avec la version 2D.

Comme montré par la figure 2.36, si une des arêtes du tétraèdre est traversée par le plan de coupe, il faut diviser le tétraèdre en quatre sous-tétraèdres (Voir figure 2.35). Si le plan de coupe intersecte plus que trois arêtes, il faut alors insérer un sommet qui est le barycentre des intersections. Si moins de trois arêtes sont intersectées, les auteurs utilisent les points d'intersection entre les arêtes et l'exten-

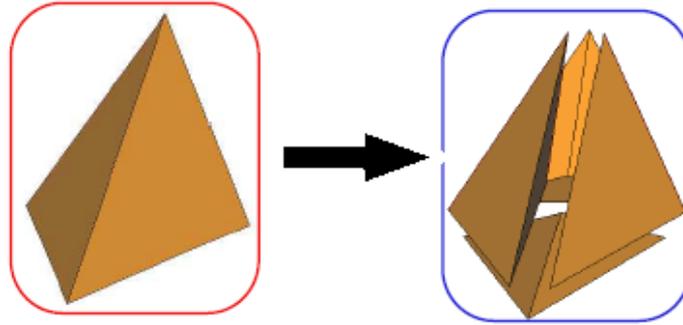
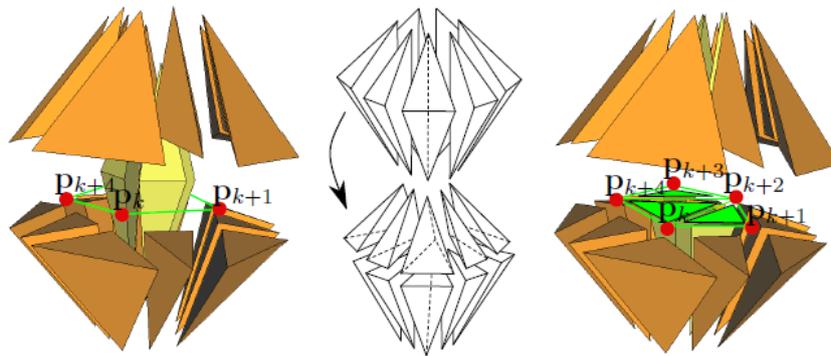


FIGURE 2.35 – subdivision d'un tétraèdre (1-4 split).

sion du plan de coupe. Après il faut ajouter les arêtes entre les sommets insérés. Finalement, la surface de séparation est triangulée comme montré sur la figure 2.36.

FIGURE 2.36 – Modification d'éléments avec le raffinement $\sqrt{3}$ (cas 3D).

Cette méthode permet d'avoir des éléments bien proportionnés, tout en limitant au maximum le nombre de nouveaux sommets insérés et donc les temps de simulation supplémentaires après la transformation.

Le coraffinement [Gui06] est également une méthode de modification d'un maillage permettant de le « fusionner » avec un autre maillage, typiquement, dans notre contexte, un motif pré-défini représentant une fracture. En effet, de nombreux travaux ont choisi d'utiliser un tel motif pour mieux contrôler le résultat final d'une fracture, comme par exemple [IO09, PO09, MCK13]. Ce sont alors les arêtes ou faces du motif qui sont éclatées et non celles du maillage initial. La figure 2.37 montre un exemple de résultat obtenu dans [IO09]. Ici, la fracture résulte de l'application d'un motif sur un verre plat.

2.4.3.2 Changement de résolution

Durant la simulation, il apparaît indispensable de définir un maillage de façon fine (donc avec beaucoup de petits éléments) là où l'objet est manipulé. Plus encore,

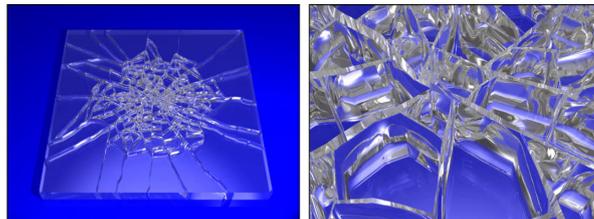


FIGURE 2.37 – Exemples de résultat des travaux de Iben *et al.* [IO09]

s'il subit une modification de type découpe, déchirure ou fracture, un changement de résolution peut permettre de simuler plus précisément le phénomène physique. Néanmoins, il est très coûteux de simuler des maillages à haute résolution (beaucoup d'éléments, beaucoup de degrés de liberté). Il semble donc utile de pouvoir modifier, à la volée, la résolution d'un maillage, c'est à dire le rendre plus fin, là où cela est utile (et on accepte le surplus de temps de calcul), et plus grossier là où il n'y a pas d'interaction et où l'objet n'est pas visible (d'où un gain en temps de calcul). On parle de *résolution adaptative*, qui est un procédé largement étudié dans plusieurs domaines de l'informatique graphique, en particulier, en animation physique.

L'un des travaux les plus connus pour la résolution adaptative est l'approche de Hutchinson *et al.* [HPH96]. Ils ont proposé une méthode adaptative pour un modèle mécanique masse/ressort pour simuler des tissus (maillage 2D) avec des plis (voir figure 2.38).

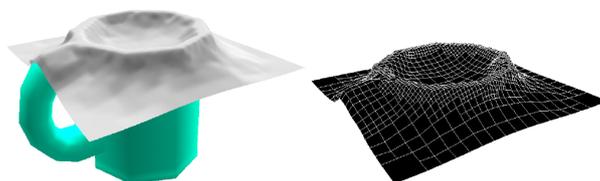
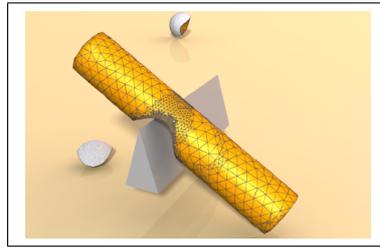
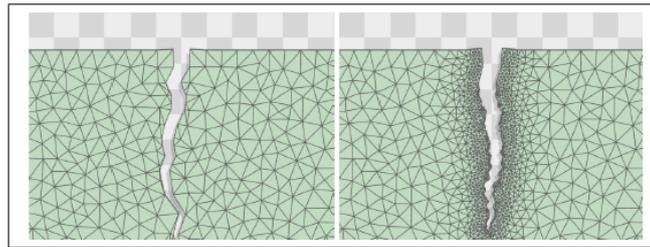


FIGURE 2.38 – Exemples de résultat des travaux de Hutchinson *et al.* [HPH96]

Dans cette méthode, le tissu est tout d'abord maillé grossièrement (niveau de résolution 0). Si, durant la simulation, l'angle entre deux ressorts, alignés et incidents à une même masse, s'éloigne trop des 180° , la zone est raffinée en ajoutant des masses et des ressorts. Ces derniers ont comme niveau de résolution 1. Cette opération peut être ré-itérée pour créer les niveaux de résolution supérieurs. De même, Villard *et al.* [VB05] ont également proposé une méthode adaptative pour la simulation d'un tissu 2D en se basant sur le modèle de Provot [Pro95]. Les auteurs montrent l'inconvénient d'utiliser un maillage grossier et proposent de raffiner localement des zones bien définies. Le critère qui est choisi pour raffiner est un critère géométrique dépendant de la courbure calculée en un sommet de maillage. Des approches utilisent des schémas de raffinement [WRK⁺10, KLB14, BDW13, PNdO14]... pour affiner la résolution d'un maillage et augmenter la précision des coupes, déchirures ou fractures (voir figure 2.39).



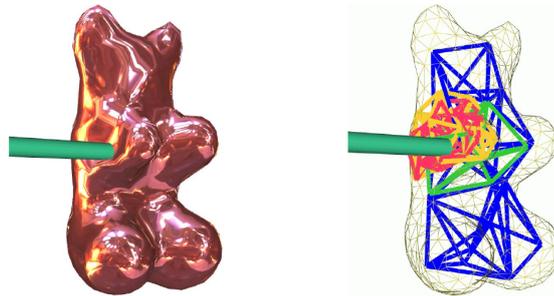
(a) Fracture (issue de [KLB14])



(b) Déchirure (issue de [BDW13])

FIGURE 2.39 – Exemples de changement de résolution lors de fractures et déchirures.

Dans les méthodes de résolution adaptative, la résolution du maillage dépend de la zone considérée et n'est pas constante sur tout le maillage. Une autre modélisation consiste à faire co-habiter plusieurs maillages d'un même objet à diverses résolutions, définis dès le départ de la simulation. Pour chaque traitement sur l'objet, l'application choisit la résolution la plus adaptée (par exemple, résolution grossière pour la simulation physique interactive, mais résolution fine pour la visualisation). Ainsi, Debunne *et al.* [DDCB01, DDCB00], proposent une animation en temps réel d'objets visco-élastiques qui offre des résultats avec une bonne précision dans les zones où il y a une grande force appliquée sur l'objet comme montré sur la figure 2.40. Le critère de raffinement utilisé est la valeur de courbure du champ de déformation.

FIGURE 2.40 – Exemples de résultat des travaux de Dubunne *et al.* [DDCB01]

L'objet est défini à différentes résolutions, mais ces dernières doivent être cohérentes. Aussi, les résolutions possèdent des nœuds dits *actifs* et d'autres dits *fantômes*. Dans une zone, seule la résolution utilisée à un instant donné contient des

nœuds actifs. Un nœud est dit fantôme, lorsque la résolution à laquelle il appartient n'est pas en cours d'utilisation pour la zone où il se trouve. Durant la simulation, il faut simuler uniquement les nœuds actifs, alors que les nœuds fantômes sont interpolés linéairement à partir des positions des nœuds des résolutions voisines. Lors d'un changement de résolution, les nœuds de la résolution choisie deviennent actifs et leur informations mécaniques (positions, vitesses) sont connues.

Signalons qu'il n'existe pas nécessairement un lien fort entre les diverses résolutions. Dans les méthodes de résolution adaptative, le maillage de résolution plus grossière est souvent inclus dans le maillage de résolution plus fine. En d'autres termes, l'opération de raffinement préserve le maillage existant ; les sommets sont gardés et participent à la définition du maillage fin, les arêtes, faces et volumes sont quant à elles subdivisées. On parle alors de modèle pyramidal [Kra08]. Néanmoins, il est possible de rendre les résolutions complètement indépendantes, comme l'ont proposé Debonne *et al.* [DDCB01, DDCB00].

2.4.4 Mises à jour du modèle mécanique

Après l'application de l'opération de modification topologique et comme les propriétés mécaniques de l'objet dépendent de la structure géométrique du maillage, une phase de mise à jour du modèle mécanique est nécessaire (masse, raideur des ressorts, matrices éléments finis...). plusieurs méthodes sont proposées dans la littérature. Par exemple concernant la mise à jour de masses, dans [HPH96], lorsqu'un sommet est ajouté, il récupère la même masse que les autres sommets du maillage. Ceci implique que la masse du corps croît au fur et à mesure des modifications topologiques. Dans d'autres travaux comme [FZDJ14, MDS10], la valeur de la masse d'un sommet est considérée comme la somme des contributions de chaque élément incident au sommet en question.

Pour les interactions, par exemple, lorsqu'un ressort est coupé en deux quand on insère un sommet au milieu de son arête support, les deux ressorts obtenus, deux fois plus courts que le ressort initial, doivent avoir une raideur double de la raideur de ce dernier pour préserver l'élasticité du corps (mise en série de deux ressorts) [HPH96]. Si de nouveaux ressorts apparaissent, leurs paramètres doivent pouvoir être calculés, à partir des caractéristiques mécaniques du corps modélisé. Nous devons alors revenir aux méthodes ayant permis d'identifier les paramètres du modèle maillé que nous avons présenté en section 2.2.2.3.

Il faut noter que les interactions en lien étroit avec les arêtes des maillages, par exemple les ressorts d'élongation ou les masses/tenseurs, sont généralement concernées par tout type de modification topologique (dès que l'arête support est modifiée par la transformation). Au contraire, certaines interactions, en lien avec les éléments, comme les ressorts de cisaillement ou les matrices éléments finis, ne sont concernés que par les modification de l'élément lui-même (par exemple, une subdivision). Dans tous les cas, quelles que que soit les interactions utilisées, toute modification impliquant des sommets nécessitent généralement un re-calcul de la masse du ou des sommets qui en proviennent.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons fait un tour d'horizon des différents modèles physiques existants dans la littérature pour la simulation d'objets solides déformables. Ces modèles sont basés sur la mécanique discrète ou continue et diverses méthodes de calcul du comportement ont été exposées. Ensuite, nous avons présenté les différentes étapes de la boucle de simulation utilisée pour simuler les déformations des objets déformables en se basant sur n'importe quel modèle mécanique. Ce chapitre nous a également permis d'introduire de nombreux travaux portant sur les transformations topologiques des objets solides déformables pour la simulation des coupes, des déchirures et des fractures, ainsi que les adaptations locales de maillage et les changements de résolution.

Il faut se rendre compte ici qu'il existe un concept sous-jacent que nous n'avons pas encore réellement mis en évidence et qui est cependant au cœur de nos préoccupations. Il s'agit de la description topologique choisie pour expliciter les relations de voisinage (plus précisément d'adjacence et d'incidence) existant entre les diverses cellules (sommets, arêtes, faces, volumes) du maillage. Celle-ci est généralement peu décrite dans les publications, alors qu'elle est à la base du fonctionnement du modèle. Citons quelques exemples : un calcul élément fini sur un élément (face ou volume) doit pouvoir fournir des forces aux sommets de cet élément ; la masse d'un sommet du maillage est en lien direct avec les éléments situés autour de lui ; un ressort placé sur une arête doit pouvoir identifier les sommets sur lesquels sa force de déformation s'applique. Cette description topologique est encore plus nécessaire pour traiter les modifications topologiques de l'objet. Par exemple, pour séparer deux volumes (resp. deux faces), il faut connaître la face (resp. l'arête) qui les lie. Pour l'éclatement d'un sommet en 3D, tous les volumes autour de ce sommet doivent être identifiés et positionnés par rapport au plan de coupe ou de fracture, puis toutes les faces joignant des volumes à séparer doivent être identifiées pour être éclatées.

La plupart des approches citées dans ce chapitre se basent sur une structure topologique rudimentaire. Certaines relations de voisinage n'y sont pas forcément décrites de façon explicite, ce qui peut obliger à retrouver ces voisinages, par le biais d'algorithmes plus ou moins coûteux. En outre, rien ne garantit la robustesse des modèles topologiques naïfs : après une modification complexe, le maillage peut se trouver dans un état incohérent ou exhiber des dégénérescences comme des faces ou arêtes pendantes. Nous affirmons ici la nécessité de recourir à un modèle topologique capable de fournir les relations de voisinages nécessaires à la simulation mécanique ainsi qu'une grande robustesse lors des opérations de modifications du maillage. Aussi, dans le chapitre suivant, nous présentons un état de l'art sur les modèles topologiques.