

## CHAPITRE IV

RAPPELS SUR LES SYSTEMES HYPERBOLIQUES.  
ILLUSTRATION PAR L'ETUDE DU MODELE  
ASSOCIE A L'ISOTHERME DE LANGMUIR.

### **IV.1- Position du problème associé à l'isotherme de Langmuir**

### **IV.2- Problème de Riemann**

### **IV.3.- Courbes d'ondes**

#### **IV.3.1- Onde de détente**

#### **IV.3.2- Onde de choc et discontinuité de contact**

### **IV.4- Solution du problème de Riemann**

#### **IV.4.1- Profils de la solution du problème de Riemann**

#### **IV.4.2- Détermination de la concentration dans la phase fluide**

### **IV.5- Solution faible et solution entropique du problème de Cauchy**

#### **IV.5.1- Entropie et flux d'entropie**

#### **IV.5.2- Condition d'entropie de Lax**

#### **IV.5.3- Quelques remarques sur le résultat obtenu**



## Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions le problème géochimique défini précédemment dans un cas simple où la fonction isotherme est celle de Langmuir. Ce cas correspond à des températures  $T$  assez grandes (les termes exponentiels disparaissent (cf. II.4.4)). On donnera au fur et à mesure quelques éléments de la théorie des systèmes hyperboliques ainsi que la résolution du problème de Riemann. Pour des exposés plus généraux sur les systèmes de lois de conservation, on renvoie à l'ouvrage de Smoller [41], ou à l'article de Lax ([25], [26]).

Ceci permettra de voir (en comparaison avec les chapitres suivants) l'influence de la température sur le processus de la transformation et au géochimiste de voir l'application de la théorie mathématique à notre problème.

Dans ce qui suit, les variables  $x$  et  $t$  désignent respectivement l'espace et le temps.

$$t \in [0, T[ \quad (T > 0) \text{ et } x \in \mathbb{R}$$

### IV.1- Position du problème associé à l'isotherme de Langmuir

Dans ce qui suit désignons par:

- $u$  et  $v$  les fractions molaires dans la phase solide des deux constituants indépendants ( $M = 3$ ).

- $F$  la fonction isotherme de Langmuir dont l'expression est donnée par :

$$F(u, v) = \begin{pmatrix} f(u, v) \\ g(u, v) \end{pmatrix} \quad (4.i)$$

$$\text{où : } \begin{cases} f(u, v) = N_\alpha \frac{\alpha u}{1 - \alpha u - \beta v} \\ g(u, v) = N_\beta \frac{\beta u}{1 - \alpha u - \beta v} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} N_\alpha = \frac{1 - \alpha}{\alpha} \\ N_\beta = \frac{1 - \beta}{\beta} \end{cases} \text{ avec } 0 < \alpha, \beta < 1$$

La roche est la région définie par  $\{x / x \geq 0\}$

Le fluide est la région définie par  $\{x / x \leq 0\}$

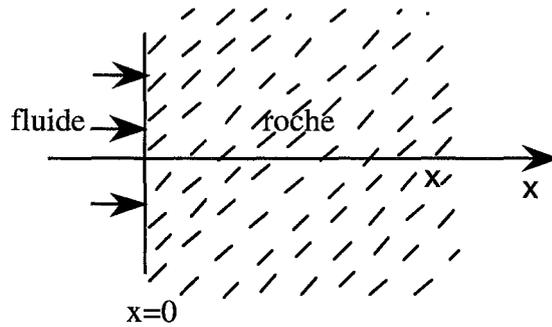


Figure 4.1

Le problème (L) à résoudre est le suivant :  
chercher  $u$  et  $v$  tq:

$$(L) \begin{cases} u_t + \phi v (f(u, v))_x = 0 \\ v_t + \phi v (g(u, v))_x = 0 \end{cases}$$

Dans une première partie, on va étudier le problème associé à cette isotherme dans le cas où  $\alpha = \beta$ . Le cas  $\alpha \neq \beta$  sera étudié au chapitre V.

### Remarque

L'égalité  $\alpha = \beta$  est loin d'être physique. Son seul avantage est d'étudier le comportement de la solution du problème dans un cas simple avant de l'étudier dans le cas général (qui présente des équations compliquées à étudier).

On pose :  $\tau = \phi v \cdot (1 - \alpha)t$

$$u(x, \tau) := \alpha u(x, t), \quad v(x, \tau) := \alpha v(x, t)$$

où :  $v$  est la vitesse du fluide et la porosité du milieu.

L'étude du problème (P) peut être ramené au problème suivant noté encore (P) :

$$(P) \begin{cases} \partial_\tau u + \partial_x \left( \frac{u}{1-u-v} \right) = 0 \\ \partial_\tau v + \partial_x \left( \frac{v}{1-u-v} \right) = 0 \end{cases}$$

Le système précédent rentre dans la classe des systèmes de lois de conservation. Ce sont des systèmes issus de la physique. Il s'écrivent sous la forme conservative générale pour une dimension d'espace :

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0 \quad x \in \mathbb{R} \text{ et } 0 < t < T \quad (4.1)$$

où  $U = {}^t(u_1, u_2, \dots, u_p)$  et  $F$  est un champ de vecteur régulier :

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R}^p \\ U &\rightarrow F(U) = {}^t(F_1(U), \dots, F_p(U)) \end{aligned}$$

Avec la condition initiale :

$$U(x, t) \Big|_{t=0} = U_0(x) \quad (4.2)$$

Le problème ainsi obtenu est appelé problème de Cauchy.

## IV.2- Problème de Riemann

### Définition

Si dans (4.2) la donnée initiale  $U_0$  est telle que :

$$U_0(x) = \begin{cases} U^g & \text{si } x < 0 \\ U^d & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

alors ce problème de Cauchy particulier est appelé problème de Riemann.

Le système quasi-linéaire (homogène) pour les systèmes de lois de conservation s'écrit pour les solutions régulières :

$$U_t + A(U).U_x = 0$$

où :  $A(U) = DF(U) \equiv \frac{\partial F}{\partial U}(U)$  (différentielle de  $F$  au point  $U$ ).

Matrice  $A(u) = DF(u)$  :

$$A(u) = \frac{1}{(1-u-v)^2} \begin{pmatrix} 1-v & u \\ v & 1-u \end{pmatrix}$$

**a) Système hyperbolique****Définition**

On dit que le système est hyperbolique si les valeurs propres  $\lambda_i(U)$  de  $A(U)$  sont réelles. Si de plus elles sont distinctes, le système est dit strictement hyperbolique.

On note par  $D$  le domaine où les  $\lambda_i(U)$  sont réelles.  $D$  est appelé domaine d'hyperbolicité.

On ordonne les valeurs propres de la façon suivante :

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_p$$

**Remarque**

De façon générale dans le cas  $p = 2$ , on écrit le système (4.1)-(4.2) avec :

$$F = (f, g), U = (u, v) \text{ et } A(U) \equiv DF(U) = \begin{bmatrix} f_u & f_v \\ g_u & g_v \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de  $A(u)$  vérifient :

$$\lambda^2 - (f_u + g_v)\lambda + f_u \cdot g_v - f_v \cdot g_u = 0$$

et pour que le système soit strictement hyperbolique (c.à.d que les valeurs propres soient réelles et distinctes) il faut que :

$$\Delta = (f_u - g_v)^2 + 4f_v \cdot g_u > 0.$$

Une condition suffisante est que :

$$f_v \cdot g_u > 0.$$

**Remarque**

Pour le problème (L) que nous étudions, les valeurs propres représenteront les vitesses de concentrations généralisées qui sont des fonctions des concentrations effectives des constituants.

$$\text{Pour le système (L) On a : } f_v \cdot g_u = \frac{uv}{(1-u-v)^4} \geq 0$$

donc le système(L) est strictement hyperbolique dans.  $D^* = D \setminus \{(0,0)\}$ .

**b) Champ V.N.L. et champ L.D.****Définition**

soit  $r_k(U)$  le vecteur propre à droite associé à  $\lambda_k(U)$ .

Dans une région  $D$ , on dit que le  $k^{\text{ème}}$  champ est :

- linéairement dégénéré (L.D) si:  $\nabla \lambda_k(U) \cdot r_k(U) \equiv 0 \quad \forall U \in D$  (\*)

- vraiment non linéaire (V.N.L) si:  $\nabla \lambda_k(U) \cdot r_k(U) \neq 0 \quad \forall U \in D$  (\*\*)

Dans le cas V.N.L on normalise les vecteurs propres par :

$$\nabla \lambda_k(U) \cdot r_k(U) \equiv 1 \quad \forall U \in D$$

**Remarque**

Dans le cas scalaire ( $p = 1$ ) la loi de conservation s'écrit:

$$\partial_t u + \partial_x (f(u)) = 0$$

$$A(u) = f'(u) = \lambda(u) \text{ et } r(u) = 1$$

Donc :  $\Rightarrow \nabla \lambda(u) \cdot r(u) = f''(u)$

La relation (\*) de la définition précédente généralise le cas linéaire c.à.d :

si  $f'' = 0 \Rightarrow f' = \text{cste} \rightarrow$  système linéaire.

La relation (\*\*) de la définition précédente généralise le cas où  $f''$  est de signe constant :

$f'' \neq 0 \Rightarrow f$  est convexe ou concave.

Valeurs propres de  $A(u)$  dans  $D^*$  :

$$\lambda_1 = \frac{1}{1-u-v}, \lambda_2 = \frac{1}{(1-u-v)^2} \text{ et } \lambda_1 < \lambda_2 \quad (4.3)$$

Vecteurs propres associés respectivement à  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  dans  $D^*$  :

$$r_1 = {}^t(1, -1) \text{ et } r_2 = {}^t(u, v) \quad (4.4)$$

Le 1<sup>er</sup> champ est linéairement dégénéré (L.D) dans  $D^*$ . En effet:

$$\nabla \lambda_1 \cdot r_1 = \frac{1}{(1-u-v)^2} - \frac{1}{(1-u-v)^2} = 0$$

Le 2<sup>ème</sup> champ est vraiment non linéaire (V.N.L) dans  $D^*$ . En effet :

$$\nabla \lambda_2 \cdot r_2 = \frac{2(u+v)}{(1-u-v)^3} \neq 0 \text{ car si } u+v=0 \text{ alors } u=0 \text{ et } v=0 \text{ et } (0,0) \notin D^*.$$

### c) Relation de Rankine-Hugoniot

Si  $u$  est discontinue le long d'une courbe régulière  $\Gamma$  d'équation  $x = \xi(t)$  et si elle est de classe  $C^1$  de chaque côté de  $\Gamma$  (figure 4.2) alors on doit avoir :

$$[F(U)] = \sigma[U] \text{ où } [U] = U^g - U^d \text{ et } \sigma = \frac{dx}{dt}$$

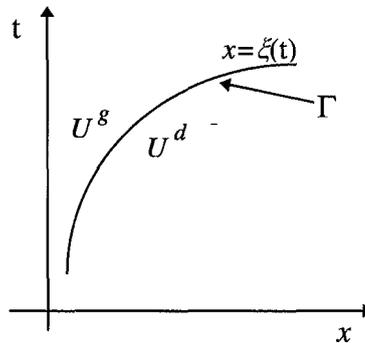


Figure 4.2

### d) Invariant de Riemann

#### Définition

Soit  $w_k : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  une application de classe  $C^1$ .

on dit que  $w_k$  est un  $k$ -invariant de Riemann (I. R.) au sens de Lax si :

$$\nabla w_k(U) \cdot r_k(U) \equiv 0 \quad \forall U \in D \quad (4.5)$$

#### Remarque

Pour chaque valeur de  $k$ , il existe  $(p-1)$   $k$ -invariant de Riemann linéairement indépendant notés :  $w_k^i$   $i = 1, \dots, p-1$ . Pour le problème que nous traitons, on a :  $p = 2$ . Donc il existe un invariant de Riemann pour chaque champ. Ces invariants de Riemann sont des concentrations généralisées qui se déplacent à la vitesse  $\lambda_k$  (valeur propre associée au  $k^{\text{ème}}$  champ).

### IV.3- Courbes d'ondes

Soit  $(\bar{u}, \bar{v})$  un état donné. On cherche à déterminer les états  $(u, v)$  à droite de  $(\bar{u}, \bar{v})$  qu'on peut lier à  $(\bar{u}, \bar{v})$  par une détente, un choc ou une discontinuité de contact.

#### IV.3.1- Onde de détente

Soit  $U^g$  un état donné (c.à.d qu'il existe  $(x, t)$  tq :  $U(x, t) = U^g$ ). On cherche un état à droite  $U^d$  tel qu'il existe des états intermédiaires  $U(x, t)$  solution de (P) et qui soit autosemblable c.à.d que  $U(x, t)$  s'écrit sous la forme  $U(x, t) = h(\frac{x}{t})$  et  $h$  est solution de (4.1)-(4.2).

On pose :  $\sigma = \frac{x}{t}$

La fonction  $h$  vérifie alors :

$$(A(h(\sigma)) - \sigma.I).h'(\sigma) = 0$$

Deux cas se présentent :

1<sup>er</sup> cas: Si  $h'(\sigma) = 0$  alors  $h(\sigma) = U(x, t) = \text{constante}$ .

2<sup>ème</sup> cas: Sinon :  $\sigma$  est valeur propre de  $A(h(\sigma)) = A(U(x, t))$   
et  $h'(\sigma)$  vecteur propre associé à  $\sigma$ .

Dans ce 2<sup>ème</sup> cas, il existe  $k$  et  $\alpha(\sigma)$  tq:

$$\sigma = \lambda_k(h(\sigma)) = \lambda_k(U(x, t))$$

$$h'(\sigma) = \alpha(\sigma).r^k(h(\sigma))$$

Or, si le  $k^{\text{ème}}$  champ est V.N.L et que le vecteur propre est normalisé, on a :

$$\alpha(\sigma) = 1$$

Donc pour que la solution du problème soit autosemblable c.à.d que  $(U(x, t) = h(\frac{x}{t}))$ , il faut que le système suivant soit vérifié :

$$h'(\sigma) = r^k(h(\sigma)) \quad (4.6)$$

$$\lambda_k(h(\sigma)) = \sigma \quad (4.7)$$

**Définition**

Lorsque le  $k^{\text{ème}}$  champ est V.N.L, on appelle onde de détente (ou de raréfaction) reliant les états  $U^g$  et  $U^d$  une solution continue de la forme :

$$U(x, t) = \begin{cases} U^g & \text{si } \frac{x}{t} \leq \lambda_k(U^g) \\ h(\frac{x}{t}) & \text{si } \lambda_k(U^g) \leq \frac{x}{t} \leq \lambda_k(U^d) \\ U^d & \text{si } \lambda_k(U^d) \leq \frac{x}{t} \end{cases} \quad \begin{array}{l} (4.8) \\ (4.9) \\ (4.10) \end{array}$$

où  $h$  est solution du système (4.6)-(4.7) avec  $h(\lambda_k(U^g)) = U^g$ .

**Proposition**

Si  $w$  est un  $k$ -invariant de Riemann alors:

$w(h(\sigma))$  ne varie pas avec  $\sigma$  où  $h$  est solution du système (4.6)-(4.7)

c.à.d que les  $k$ -invariants de Riemann restent constants le long d'une  $k$ -détente.

Le 2<sup>ème</sup> champ du système (L) est V.N.L. On peut lui appliquer le résultat précédent.

Détermination de la 2-détente :

On a  $p = 2$  donc il y a un seul 2-invariant de Riemann à déterminer. On le note  $z$ .

$z$  vérifie :

$$z(\bar{u}, \bar{v}) = z(u, v) \quad (4.11)$$

$$\lambda_2(\bar{u}, \bar{v}) \leq \lambda_2(u, v) \quad (4.12)$$

$$\lambda_2(u, v) = \frac{x}{t} \quad (4.13)$$

Détermination de  $z$ 

On a :  $\nabla_z \cdot r^2 = 0 \Rightarrow \partial_u z \cdot u + \partial_v z \cdot v = 0$

Si on pose  $z(u, v) = f(u) + g(v)$ , on a alors :

$$f'(u) \cdot u + g'(v) \cdot v = 0$$

Donc on a forcément :

$$f'(u) \cdot u = -g'(v) \cdot v = c = \text{constante}$$

donc  $f'(u) = \frac{c}{u}$  et  $g'(v) = -\frac{c}{v}$  et par suite  $z = c \cdot \log\left(\frac{u}{v}\right)$

D'après (4.11) on a :  $z(\bar{u}, \bar{v}) = z(u, v)$  donc  $v = \frac{u\bar{v}}{\bar{u}}$ .

Et (4.12) implique que  $\bar{u} + \bar{v} \leq u + v$

La solution obtenue vérifie dans le plan  $(u, v)$ :

$$v = \frac{u\bar{v}}{\bar{u}} \tag{4.14}$$

$$\bar{u} + \bar{v} \leq u + v \tag{4.15}$$

Et dans le plan  $(x, t)$ , la relation (4.13) nous donne:

$$\frac{x}{t} = \frac{1}{(1-u-v)^2} \text{ et } x > t \text{ (car } 0 < 1-u-v < 1) \tag{4.16}$$

Finalement en reportant (4.14) dans (4.16), on obtient:

$$u = \frac{\bar{u}}{(\bar{u} + \bar{v})} \left(1 - \sqrt{\frac{t}{x}}\right) \tag{4.17}$$

$$v = \frac{\bar{v}}{(\bar{u} + \bar{v})} \left(1 - \sqrt{\frac{t}{x}}\right) \tag{4.18}$$

### IV.3.2- Onde de choc et discontinuité de contact

Soit  $U^g$  un état donné. Quels sont les états  $U^d$  à droite de  $U^g$  qu'on peut relier à  $U^g$  par un choc?

#### Définition

On dira qu'un choc (discontinuité) de  $U^g$  à  $U^d$  est admissible au sens de Lax, si sa vitesse  $\sigma_k$  est telle que :

cas 1 :  $\exists k \in \{1, \dots, p\}$  tq :

$$\lambda_k(U^g) = \sigma_k = \lambda_k(U^d) \tag{4.19}$$

le  $k^{\text{ème}}$  champ est L.D. Dans ce cas on parle de  $k$ -discontinuité de contact.

cas 2 :  $\exists k \in \{1, \dots, p\}$  tq :

$$\lambda_k(U^d) \leq \sigma_k \leq \lambda_k(U^g) \tag{4.20}$$

$$\lambda_{k-1}(U^g) < \sigma_k < \lambda_{k+1}(U^d) \quad (4.21)$$

et le  $k^{\text{ème}}$  champ est V.N.L. Dans ce cas on parle de  $k$ -choc

### Remarques

On montre [41]:

- ◆ qu'il y a au moins un raccord  $C^2$  entre les  $k$ -chocs et les  $k$ -détentes.
- ◆ que dans le cas de choc faible ( $\|U^g - U^d\|$  très petit), il y a équivalence entre choc entropique (cf. IV.5) et choc admissible au sens de Lax.

### Discontinuité de contact pour l'isotherme de Langmuir

On les détermine seulement pour les champs L.D. C'est le cas pour le 1<sup>er</sup> champ.

Pour une D.C., les deux états doivent vérifier :

$$F(u, v) - F(\bar{u}, \bar{v}) = \sigma_2 \begin{pmatrix} u - \bar{u} \\ v - \bar{v} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1(\bar{u}, \bar{v}) = \sigma_1 = \lambda_1(u, v)$$

Les deux égalités nous donnent :

$$\bar{u} + \bar{v} = u + v \quad (4.22)$$

$$\frac{x}{t} = \frac{1}{1-u-v} = \frac{1}{1-\bar{u}-\bar{v}} \quad (4.23)$$

Cette dernière égalité nous donne dans le plan  $(x, t)$  la droite qui sépare les deux états.

### Choc pour l'isotherme de Langmuir

Le 2<sup>ème</sup> champ est V.N.L. Pour avoir un 2-choc les deux états doivent vérifier la relation de Rankine-Hugoniot et la définition d'un 2-choc admissible au sens de Lax :

$$F(u, v) - F(\bar{u}, \bar{v}) = \sigma_2 \begin{pmatrix} u - \bar{u} \\ v - \bar{v} \end{pmatrix} \quad (\text{R.H})$$

$$\lambda_2(u, v) < \sigma_2 \quad (4.24)$$

$$\sigma_2 = \frac{x}{t} \quad (4.25)$$

En additionnant membre à membre les deux égalités dans (R.H) on obtient:

$$\sigma = \frac{1}{(1-u-v)(1-\bar{u}-\bar{v})}$$

En remplaçant  $\sigma$  dans (R.H) on obtient :

$$v = \frac{u\bar{v}}{\bar{u}}$$

(4.24) et (4.25) nous donnent :

$$u+v < \bar{u} + \bar{v} \text{ et } \sigma = \frac{x}{t} = \frac{1}{(1-u-v)(1-\bar{u}-\bar{v})}$$

En résumé, les deux états vérifient dans le plan  $(u,v)$  les relations :

$$v = \frac{u\bar{v}}{\bar{u}} \text{ avec } u+v < \bar{u} + \bar{v}$$

et dans le plan  $(x,t)$  la droite d'équation :

$$\frac{x}{t} = \frac{1}{(1-u-v)(1-\bar{u}-\bar{v})}$$

sépare les deux états constants.

#### IV.4- Solution du problème de Riemann

On considère le problème suivant :

$$\partial_t U + \partial_x F(U) = 0 \quad (\text{P.R})$$

Avec la condition initiale :

$$U(x,t)|_{t=0} = U_0(x) = \begin{cases} U^g & \text{si } x < 0 \\ U^d & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

On rappelle le théorème :

Si  $U^g$  et  $U^d$  sont suffisamment proches (c.à.d que  $\|U^g - U^d\| \ll 1$ ), le problème (P.R) de Riemann admet une solution entropique au sens de Lax. Cette solution est formée d'états constants séparés par une détente, un choc ou une discontinuité de contact.

Donc partant d'un état  $U^g$ , on peut atteindre l'état  $U^d$  par une succession d'états constants intermédiaires :  $U^0 = U^g, U^1, \dots, U^{p-1}, U^p = U^d$ , chaque état  $U^k$  est reliée à  $U^{k+1}$  par :

Une  $k$ -détente ou un  $k$ -choc si  $\lambda_k$  est V.N.L.

Une  $k$ -discontinuité de contact si  $\lambda_k$  est L.D.

Une onde complexe dans les autres cas.

Pour un état donné  $(\bar{u}, \bar{v}) = (u^g, v^g)$ , on a 4 possibilités pour  $(u^d, v^d)$  (car les deux droites divisent le plan en 4 régions).

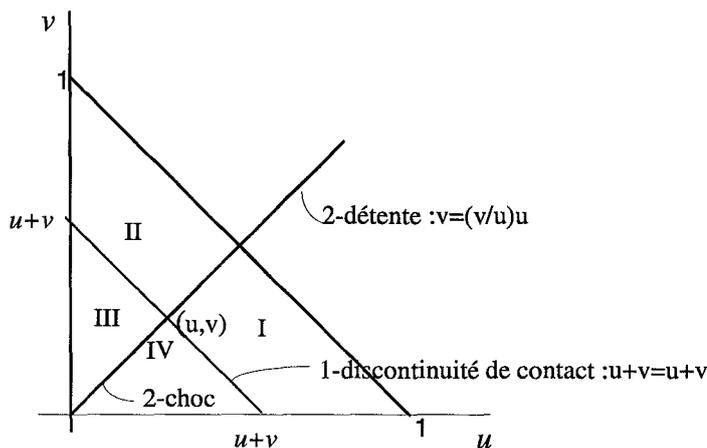


Figure 4.3 Pour un état donné les courbes des i-ondes divisent le domaine en quatre régions.

Sur la figure 4.3 on a :

\* une 1-discontinuité de contact et une 2-détente si  $(u^d, v^d)$  est dans la région I ou II.

\* une 1-discontinuité de contact et un 2-choc si  $(u^d, v^d)$  est dans la région III ou IV.

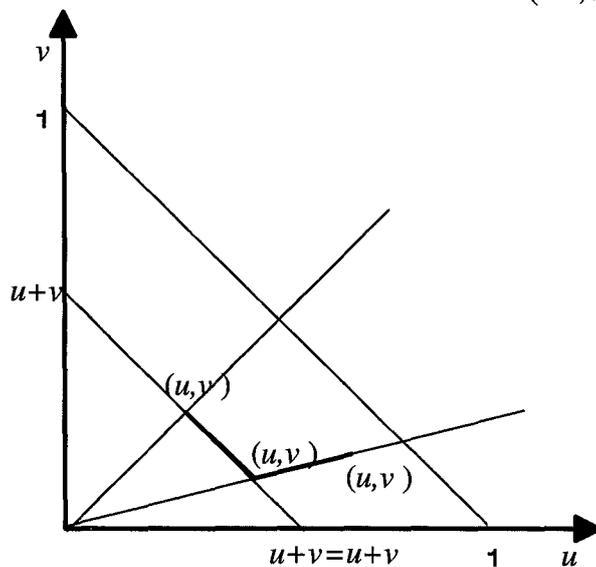
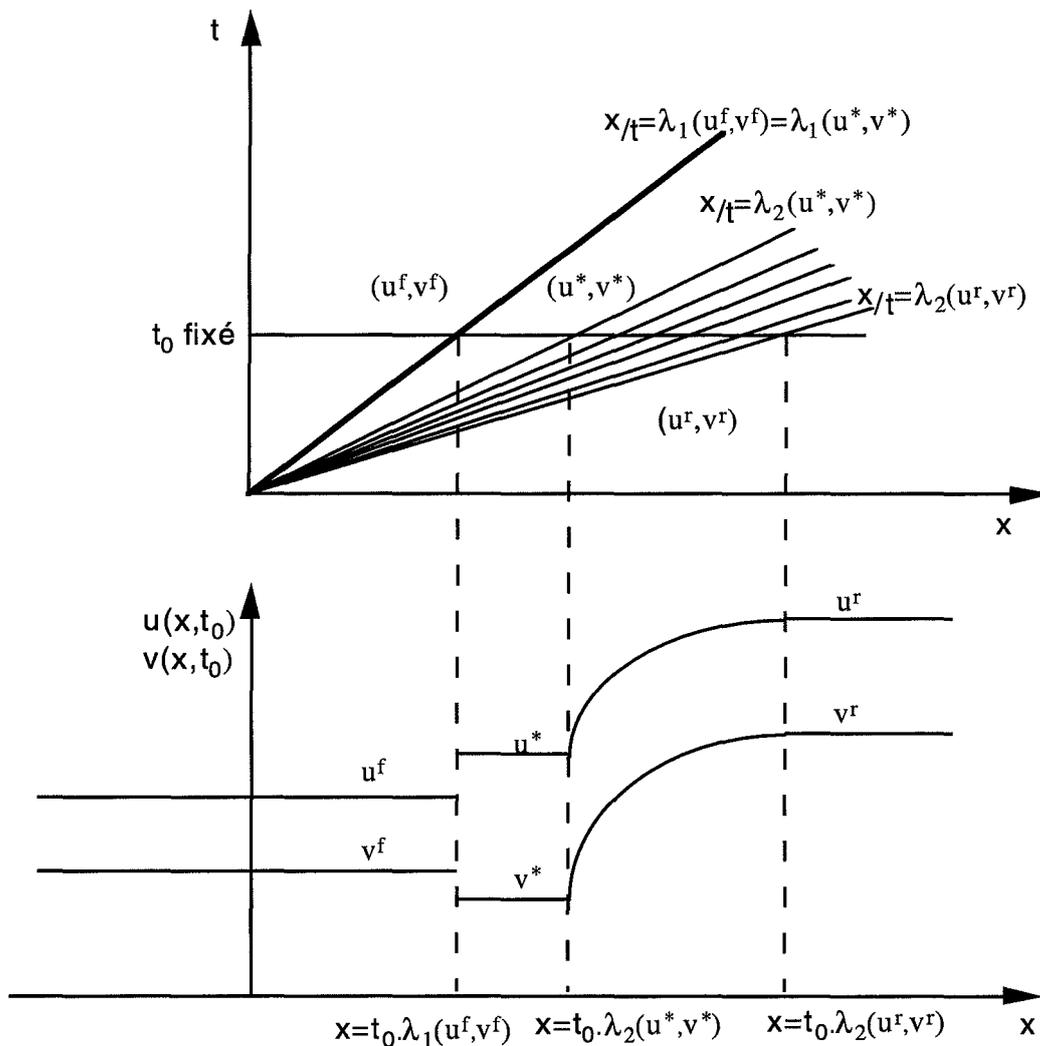


Figure 4.4 Les états par lesquelles passe le système pour relier l'état gauche  $(u^g, v^g)$  à l'état droite  $(u^d, v^d)$

On a  $p = 2$  donc la solution du problème de Riemann est formée de 3 états constants. Les deux états constants  $(u^g, v^g)$  et  $(u^d, v^d)$  sont des données du problème (sur les figures ci-après ils désignent respectivement  $(u^f, v^f)$  et  $(u^r, v^r)$ ). Le troisième état constant  $(u^*, v^*)$  est donné par l'intersection des deux droites.

**IV.4.1- Profils de la solution du problème de Riemann**

Traçons les profils de  $u$  et de  $v$  dans le cas où  $(u^d, v^d) = (u^r, v^r)$  est dans la région I (fig. 4.5) et dans la région III (fig. 4.6).



**Figure 4.5** Profil de la solution du problème de Riemann quand l'état droit est dans la région I (voir fig. 4.3)

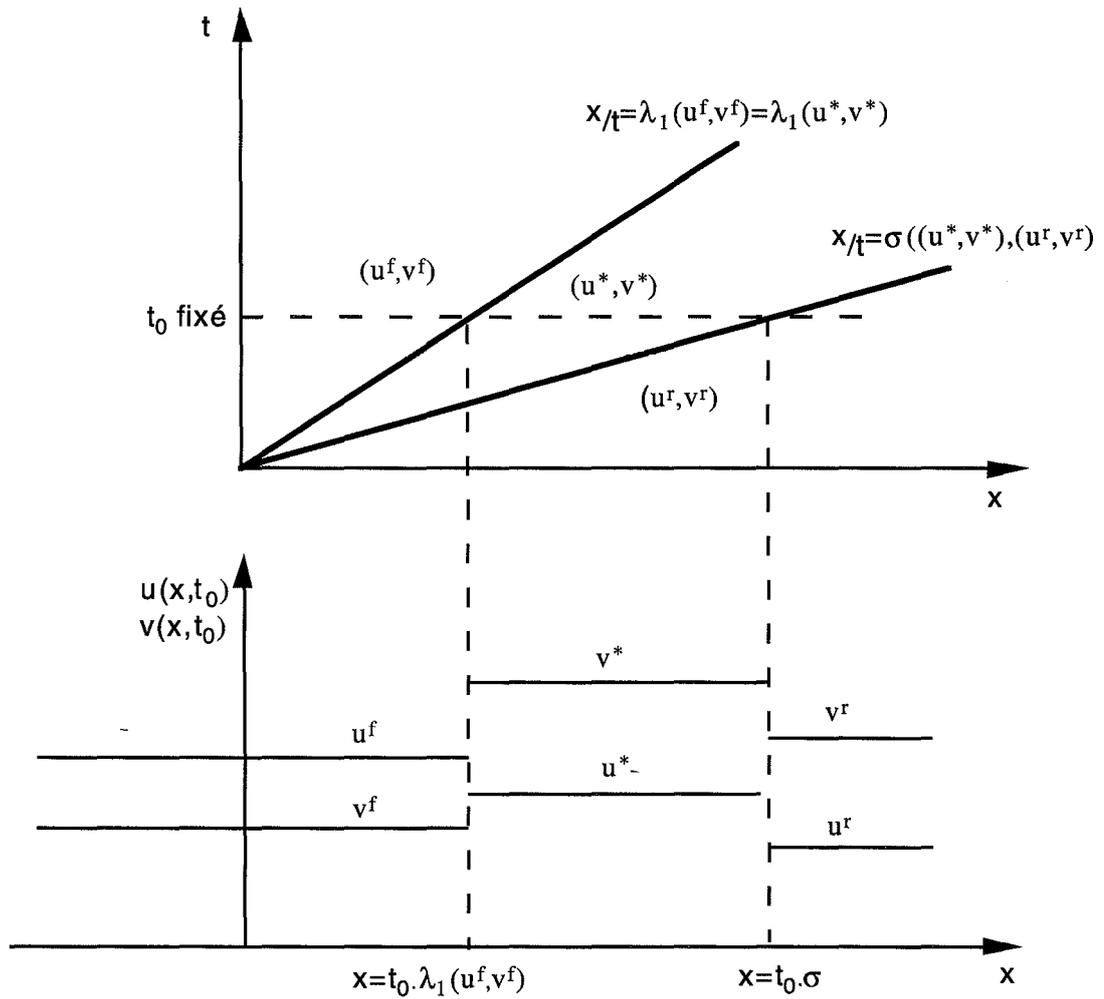


Figure 4.6 Profil de la solution du problème de Riemann quand l'état droit est dans la région III (voir fig. 4.3)

#### IV.4.2- Détermination de la concentration dans la phase fluide

La concentration dans la phase fluide est donnée par (4.i):

$$f(u, v) = \frac{u}{1-u-v} \text{ et } g(u, v) = \frac{v}{1-u-v}$$

Sur les états constants (c.à.d  $u=cste, v=cste$ )  $f(u, v)$  et  $g(u, v)$  sont constants.

Sur les détenteles reliant  $(\bar{u}, \bar{v})$  à  $(u, v)$  on a d'après (4.16):

$$\frac{x}{t} = \frac{1}{(1-u-v)^2} \text{ et } x > t \text{ Donc } \frac{1}{(1-u-v)} = \sqrt{\frac{x}{t}} \text{ et } x > t$$

Et par suite :

$$f(u, v) = u \cdot \sqrt{\frac{x}{t}} \text{ et } g(u, v) = v \cdot \sqrt{\frac{x}{t}}$$

Or d'après (4.17) et (4.18) on a :

$$u = \frac{\bar{u}}{(\bar{u} + \bar{v})} \left(1 - \sqrt{\frac{t}{x}}\right)$$

$$v = \frac{\bar{v}}{(\bar{u} + \bar{v})} \left(1 - \sqrt{\frac{t}{x}}\right)$$

Donc :

$$f(u, v) = \frac{\bar{u}}{(\bar{u} + \bar{v})} \left(\sqrt{\frac{x}{t}} - 1\right)$$

$$g(u, v) = \frac{\bar{v}}{(\bar{u} + \bar{v})} \left(\sqrt{\frac{x}{t}} - 1\right)$$

## IV.5- Solution faible et solution entropique du problème de Cauchy

Le problème de Cauchy (4.1)-(4.2) n'admet pas en général de solution globale régulière même si la donnée initiale  $U_0$  l'est. On définit alors la notion de solution *faible* (au sens des distributions), pour lesquelles certaines discontinuités sont admises, comme suit :

$U$  est solution *faible* du problème (4.1)-(4.2) si et seulement si pour toute fonction régulière à support compact dans  $\bar{\Omega} = [0, T] \times \mathbb{R}$ , on a :

$$\iint_{Q_T} \{U \Phi_t + F(U) \cdot \Phi_x\} dx dt = \iint_{\mathbb{R}} U_0(x) \Phi(0, x) dx$$

Le problème de Cauchy peut avoir plusieurs solutions faibles et certaines d'entre elles n'ont pas de sens physique. On est amené alors à chercher un critère de sélection : les solutions entropiques au sens de Lax.

### IV.5.1- Entropie et flux d'entropie

#### Définition

Soient deux applications  $\varphi$  et  $\psi$  définies de  $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ .

On dit que  $\varphi$  est une *entropie* du système (4.1)-(4.2) associée au *flux*  $\psi$  si :

$$\nabla\varphi(U).A(U) = \nabla\psi(U) \quad \forall U \in D$$

L'entropie définie ci-dessus à un sens mathématique et ne coïncide pas avec l'entropie au sens thermodynamique. Cependant, on peut exprimer l'une en fonction de l'autre. C'est le cas pour le système de la dynamique des gaz ([11]) et pour le problème que nous traitons où l'entropie au sens mathématique est l'opposée de l'entropie physique ([16a], [18]) ■

#### IV.5.2- Solution faible entropique

En général, on montre que les systèmes de lois de conservation n'ont pas une solution unique. un critère de sélection permettant d'avoir l'unique solution qui a un sens physique, est l'inégalité d'entropie suivante.

#### Condition d'entropie de Lax

Les solutions faibles entropiques sont celles qui vérifient:

$$\partial_t \varphi(U) + \partial_x \psi(U) \leq 0 \quad \text{au sens des distributions.}$$

Pour toute entropie convexe  $\varphi$ , de flux associé  $\psi$ .

Si  $U$  est une solution régulière du problème de Cauchy, on a donc :

$$\partial_t \varphi(U) + \partial_x \psi(U) = 0$$

#### Définition

On dira qu'un choc (discontinuité) de  $U^s$  à  $U^d$  est *entropique* si :

$$[\psi(U)] \leq \sigma.[\varphi(U)]$$

pour tout entropie convexe  $\varphi$ , de flux associé  $\psi$ .

La quantité  $[\psi(U)] - \sigma.[\varphi(U)]$  est appelée taux de production d'entropie.

#### IV.5.3- Quelques remarques sur le résultat obtenu

Soit  $E$  une entropie convexe du système (au sens mathématique) et  $L$  le flux d'entropie associé à  $E$ .  $E$  et  $L$  vérifient :

$${}^t \nabla L(u, v) = {}^t \nabla E(u, v). DF(u, v)$$

où  $F$  désigne la fonction isotherme du problème (4.1).

Comme pour les problèmes de la chromatographie, le système que nous étudions possède plusieurs couples entropie-flux d'entropie. Citons-en quelques uns :

$$E_1 = u+v \quad , \quad L_1 = \frac{1}{1-u-v}$$

$$E_2 = (u+v)^2 \quad , \quad L_2 = 2[-\log(1-u-v) + \frac{1}{1-u-v}]$$

$$E_3 = (u+v-1)^2 \quad , \quad L_3 = 2 \log(1-u-v)$$

Pour relier  $(\bar{u}, \bar{v})$  à  $(u, v)$  (état à droite), on a d'après (4.15), (4.12) et (4.28) :

$E_1$  croît sur les 2-détentes.

$E_1$  reste constant sur les 1-discontinuités de contact.

$E_1$  décroît sur les 2-chocs.

Donc suivant les variations de  $E$  on peut déduire la courbe d'onde qui lie les deux états.

On peut montrer ceci en se ramenant à une équation scalaire. En effet en sommant les deux membres du système (4.1), le couple  $(E_1, L_1)$  vérifie :

$$\partial_t E_1 + \partial_x L_1 = 0$$

En posant  $w = 1-u-v$ , on obtient :

$$\partial_t w + \partial_x \frac{-1}{w} = 0$$

avec la condition initiale :

$$w|_{t=0} = \begin{cases} w^g = 1-u^g - v^g & \text{si } x < 0 \\ w^d = 1-u^d - v^d & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La fonction  $g(w) = -\frac{1}{w}$  est concave donc les chocs admissibles sont ceux qui sont croissants.

Autrement dit si  $w^g < w^d$  c.à.d  $u^g + v^g > u^d + v^d$

#### a) Bilan entropique

Sur la 1-discontinuité de contact reliant  $(\bar{u}, \bar{v})$  à  $(u, v)$  (à droite), on a vu d'après (4.22) que :

$$u + v = \bar{u} + \bar{v}$$

donc  $E_1$  et  $L_1$  restent constants. Et par suite le taux de production est nulle sur la 1-discontinuité de contact pour ce couple  $(E_1, L_1)$ .

Et en additionnant membre à membre dans (R.H) on obtient :

$$\frac{1}{1-u-v} - \frac{1}{1-\bar{u}-\bar{v}} = \sigma((u+v) - (\bar{u} + \bar{v}))$$

Cette dernière équation s'écrit :

$$[L(u, v)] = \sigma[E(u, v)]$$

Et par suite la production d'entropie est nulle sur le 1-choc pour ce couple  $(E_1, L_1)$ .

### ***b) Augmentation des concentrations***

Dans le cas scalaire, on montre que la solution  $u$  du problème de Cauchy, associé à la condition initiale  $u_0$ , vérifie:

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathfrak{R})} \quad (\text{c. à. d. } u \in [-R, R] \text{ où } R = \sup_{x \in \mathfrak{R}} |u_0(x)|)$$

Cela veut dire, dans notre cas ( $u$  et  $u_0$  positifs), que la solution  $u$  ne peut pas dépasser le maximum de  $u_0$ .

Comme on peut voir ceci sur la figure 4.5, ce résultat n'est pas vrai en dimension  $p \geq 2$  : l'état intermédiaire  $u^*$  du 1<sup>er</sup> constituant dépasse les deux états  $u^f$  et  $u^r$  (données du problème). Cela veut dire que localement dans une roche, on peut avoir une surconcentration de l'un des constituants et appauvrissement de l'autre.