



### 6.1.1 Imposition d'une variation de pression

On rappelle la définition des variables entropiques introduite dans la section 2.1.2 :

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ \frac{u_x}{T} \\ \frac{u_y}{T} \\ \frac{u_z}{T} \\ -\frac{1}{T} \end{pmatrix},$$

où  $\mu$  est le potentiel chimique,  $T$  la température et  $(u_x, u_y, u_z)$  sont les vitesses. Pour imposer une variation de pression  $dp$ , une relation linéaire entre  $dp$  et les variations des variables entropiques  $dV_i$  doit être trouvée. On peut la trouver en linéarisant l'expression reliant la pression aux variables entropiques, donnée ci-dessous :

$$p = \exp \left( \frac{1}{R} \left( V_1 - \frac{V_2^2 + V_3^2 + V_4^2}{2V_5} + C \right) - \frac{\gamma}{\bar{\gamma}} (1 + \ln(-V_5)) \right), \quad (6.1)$$

où  $\gamma = c_p/c_v$  est le coefficient adiabatique et  $\bar{\gamma} = \gamma - 1$ , et  $C$  est une constante dépendant uniquement de l'entropie de référence choisie. La pression dépend donc non linéairement des variables entropiques. Il convient de choisir une des variables entropiques pour imposer la variation de pression. Les variables  $V_2$  à  $V_5$  dépendent uniquement des vitesses et de la température. Il ne paraît donc « pas physique » d'imposer la variation de pression avec une autre variable que  $V_1$ . Isolons donc cette variable dans l'équation (6.1) :

$$\begin{aligned} V_1 &= R \ln p + \frac{V_2^2 + V_3^2 + V_4^2}{2V_5} + C + \frac{R\gamma}{\bar{\gamma}} (1 + \ln(-V_5)) \\ &= f_p(V_2, V_3, V_4, V_5, p), \end{aligned} \quad (6.2)$$

On dérive cette expression pour obtenir

$$dV_1 = \sum_{i=2}^5 \frac{\partial f_p}{\partial V_i} dV_i + \frac{\partial f_p}{\partial p} dp. \quad (6.3)$$

On obtient une relation linéaire entre la variation des variables entropiques  $dV_i$  et la variation de la pression  $dp$ , dont les coefficients dépendent non linéairement de la valeur des variables entropiques autour de laquelle la linéarisation a été effectuée :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_p}{\partial V_2} &= \frac{V_2}{V_5}, & \frac{\partial f_p}{\partial V_3} &= \frac{V_3}{V_5}, & \frac{\partial f_p}{\partial V_4} &= \frac{V_4}{V_5}, \\ \frac{\partial f_p}{\partial V_5} &= -\frac{V_2^2 + V_3^2 + V_4^2}{2V_5^2} + \frac{R\gamma}{\bar{\gamma}} \frac{1}{V_5}, & \frac{\partial f_p}{\partial p} &= \frac{R}{p}. \end{aligned}$$

On réécrit (6.3) sous forme vectorielle :

$$\mathbf{dV} = \mathbf{SdV} + \begin{pmatrix} \frac{Rdp}{p} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{SdV} + \alpha \mathbf{e}_1, \quad (6.4)$$

où  $\mathbf{e}_1$  est le premier vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^5$  et  $\alpha = Rdp/p$ . On note que seul  $\alpha$  dépend de  $dp$  à imposer. La condition aux limites de Dirichlet homogène sur la variation de la pression correspond à  $\alpha = 0$ . La matrice  $\mathbf{S}$  est définie par

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial f_p}{\partial V_2} & \frac{\partial f_p}{\partial V_3} & \frac{\partial f_p}{\partial V_4} & \frac{\partial f_p}{\partial V_5} \\ 0 & 1 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

La matrice  $\mathbf{S}$  s'applique aux cinq variables entropiques d'un seul nœud du maillage (voir la section 2.2.1), et remplace la première variable par l'équation (6.3). Pour imposer une conditions aux limites sur un système complet, on indexe la matrice  $\mathbf{S}_i$  et le paramètre  $\alpha_i$  par le numéro  $i$  du nœud. La matrice de transformation  $\mathbf{S}_i$  doit agir sur un vecteur d'inconnues de taille  $5 \times N_{nd}$  ( $N_{nd}$  étant le nombre de nœuds du maillage) et est donc définie par bloc :

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_5 & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} \\ & & \mathbf{I}_5 & & \\ & & & \mathbf{S}_i & \\ & & & & \mathbf{I}_5 \\ \mathbf{0} & & & & \ddots \\ & & & & & \mathbf{I}_5 \end{pmatrix}. \quad (6.6)$$

Une réindexation similaire doit être effectuée pour le vecteur  $\mathbf{e}_1$  qui se note alors  $\mathbf{e}_{i,1}$ . La modification des inconnues du système linéaire  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  pour imposer les conditions de Dirichlet non homogènes au nœud  $i$  s'écrit

$$\mathbf{A}(\mathbf{S}_i \mathbf{x} + \alpha_i \mathbf{e}_{i,1}) = \mathbf{b}. \quad (6.7)$$

La transformation matricielle  $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{MS}_i$  correspond à une combinaison linéaire des colonnes de  $\mathbf{M}$ , afin d'éliminer l'inconnue (la première variable du nœud  $i$ ) imposé par la condition de Dirichlet non homogène. Le terme  $\mathbf{A}\alpha_i \mathbf{e}_{i,1}$ , qui s'ajoutera au second membre, permet de reporter sur les nœuds voisins du nœud  $i$  l'effet de l'inconnue imposée. Ainsi, l'équation (6.7) s'interprète

comme l'imposition des conditions aux limites non homogènes sur les fonctions de forme. Les fonctions test doivent également vérifier la condition aux limites de Dirichlet homogène associée. Pour cela, on multiplie à gauche le système par  $\mathbf{S}_i^T$ , ce qui donne

$$\mathbf{S}_i^T \mathbf{A} \mathbf{S}_i \mathbf{x} = \mathbf{S}_i^T (\mathbf{b} - \alpha_i \mathbf{A} \mathbf{e}_{i,1}) . \quad (6.8)$$

La multiplication à gauche du système linéaire par  $\mathbf{S}_i^T$  élimine la ligne (ici la première du nœud  $i$ ) dont l'inconnue correspondante est déjà déterminée. Cela permet en outre que cette inconnue reste nulle.

On obtient ainsi la procédure pour modifier le système linéaire afin d'imposer la condition aux limites de Dirichlet de pression non homogène au nœud  $i$ . Cette procédure est appliquée pour tous les nœuds de la frontière où s'applique une telle condition de Dirichlet. Une implémentation plus efficace pour la méthode des éléments finis de cette procédure consiste à modifier les matrices élémentaires, quand l'un des nœuds de l'élément considéré est sur la frontière. La combinaison de lignes et de colonnes se fait alors sur une matrice pleine, ce qui est bien plus aisé qu'après distribution de ces matrices élémentaires sur la matrice globale creuse stockée dans un format adapté.

**Remarque 6.1.** La matrice  $\mathbf{S}_i^T \mathbf{A} \mathbf{S}_i$  est singulière, car la ligne et la colonne correspondant à la première variable du nœud  $i$  sont nulles. Pour simplifier l'utilisation de préconditionneurs, on remplace le terme nul sur la diagonal par 1.

**Remarque 6.2.** Après imposition des conditions aux limites de Dirichlet non homogènes, les inconnues du système linéaire sont prises dans un espace vérifiant des conditions de Dirichlet homogènes associées. Pour pouvoir retrouver à des fins de *post-process* la valeur des variables imposées, il faut appliquer la relation (6.3).

### 6.1.2 Imposition d'une onde incidente par les caractéristiques

Les conditions aux limites telles que décrites dans la section précédente imposent une variation de la pression sur la frontière. Pour l'ingénieur acousticien, cela pose problème car cette condition aux limites ne permet pas de contrôler l'énergie acoustique introduite dans le domaine. En effet, imposer une variation de pression sur une interface revient à imposer la somme de deux ondes acoustiques, l'une entrante dans le domaine et l'autre sortante. Aucun contrôle n'est donné pour séparer ces deux quantités. Ainsi, avec ces conditions aux limites, deux calculs sur deux configurations légèrement différentes seront difficilement comparables, puisque l'onde acoustique sortante ne sera pas la même dans les deux calculs, ce qui fera varier l'énergie introduite dans le calcul.

De nombreuses techniques existent pour contrôler précisément l'énergie introduite dans le domaine de calcul. Elles sont toutes issues de la méthode

des conditions aux limites transparentes, qui sont décrites en détail dans [157]. Ce type de conditions aux limites permet d'approcher par un calcul dans un domaine fini un problème dans un domaine infini. La modélisation du comportement en champ lointain de la solution se fait via ces conditions limites. En acoustique, cela s'obtient par des conditions qui laissent passer toutes les ondes sortantes sans réflexions parasites et, en l'absence de source à l'infini, n'en laissent rentrer aucune.

L'utilisation des caractéristiques de l'équation d'Euler est une méthode simple pour obtenir des conditions aux limites transparentes. Soit un plan infini, de normale unitaire  $\mathbf{n}$  (que l'on considérera entrante dans le domaine si ce plan est une frontière), et  $\mathbf{s}$ ,  $\mathbf{t}$  deux vecteurs complétant la base orthonormale. La diagonalisation du jacobien du flux d'Euler selon la direction  $\mathbf{n}$  donne 5 valeurs propres qui sont  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - c, \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + c)$ . Les coordonnées dans la base générée par ces vecteurs propres sont appelées variables caractéristiques. L'expression de ces variables en fonction de la variation des variables primales  $(d\rho, \mathbf{du}, dp)$

$$\delta \mathbf{W} = \begin{pmatrix} dW_1 \\ dW_2 \\ dW_3 \\ dW_4 \\ dW_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d\rho - \frac{1}{c^2} dp \\ \mathbf{s} \cdot \mathbf{du} \\ \mathbf{t} \cdot \mathbf{du} \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{du} + \frac{1}{\rho c} dp \\ -\mathbf{n} \cdot \mathbf{du} + \frac{1}{\rho c} dp \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

Les quantités précédées par  $d$  sont relatives à l'onde acoustique et non à l'écoulement moyen. Les trois premières variables caractéristiques correspondent à la convection à une vitesse  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$  respectivement d'une onde d'entropie et d'ondes de vorticité. La variable caractéristique  $dW_4$  est une onde acoustique convect e se propageant à la vitesse  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} - c$ , tout comme la variable caractéristique  $dW_5$  à la vitesse  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + c$ .

On se place dans le cadre d'une tuyère orient e dans la direction  $\mathbf{e}_x$ . Le plan limite est une section de la tuyère orthonormale à son axe. La vitesse de l'écoulement porteur  $\mathbf{u}$  est donc dirig e selon  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_x$  que l'on consid rera entrant. On note  $u = \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ .

Imposer le mode acoustique entrant seul implique d'imposer la caractéristique entrante de valeur propre  $u + c$ , et de laisser les autres caractéristiques libres. La théorie modale de la propagation acoustique dans les tubes que l'on trouvera dans [130] permet de calculer la variation de pression  $dp$  et la vitesse acoustique  $du$  du mode à imposer, et ainsi calculer la caractéristique entrante  $dW_4$ . C'est pourquoi on appellera dans le reste de ce manuscrit ce type de conditions des conditions aux limites caractéristiques incidentes ou encore caractéristiques.

Imposer la caractéristique  $dW_4$  ajoute une dépendance affine entre la variation de pression  $dp$  et la variation de la vitesse normale. On remplace dans (6.3) la variation de pression  $dp$  par la relation affine introduite par la

définition de  $dW_4$  :

$$dp = \rho c dW_4 - \rho c du_x. \quad (6.10)$$

De la définition des variables entropiques,  $u_x = -V_2/V_5$ . Ainsi  $du_x = -1/V_5 dV_2 + V_2/V_5 dV_5$ . Ainsi,

$$dp = \rho c dW_4 + \frac{\rho c}{V_5} dV_2 - \rho c \frac{V_2}{V_5^2} dV_5. \quad (6.11)$$

On injecte cette expression de  $dp$  dans l'équation (6.3) pour obtenir les dérivées partielles de la fonction implicite  $f_{W_4}$  :

$$dV_1 = \sum_{i=2}^5 \frac{\partial f_{W_4}}{\partial V_i} dV_i + \frac{\partial f_{W_4}}{\partial W_4} dW_4. \quad (6.12)$$

Pour un gaz parfait, l'équation d'état  $p/\rho = RT$  et la définition de la vitesse du son  $c^2 = \gamma RT$  permettent de simplifier l'expression des dérivées partielles de  $f_{W_4}$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{W_4}}{\partial V_2} &= \frac{V_2}{V_5} - c, & \frac{\partial f_{W_4}}{\partial V_3} &= \frac{V_3}{V_5}, & \frac{\partial f_{W_4}}{\partial V_4} &= \frac{V_4}{V_5}, \\ \frac{\partial f_{W_4}}{\partial V_5} &= -\frac{V_2^2 + V_3^2 + V_4^2}{2V_5^2} + \frac{R\gamma}{\bar{\gamma}} \frac{1}{V_5} + c \frac{V_2}{V_5}, & \frac{\partial f_{W_4}}{\partial W_4} &= \frac{\gamma R}{c}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

### 6.1.3 Validation des conditions aux limites incidentes

Les conditions aux limites incidentes ont été testées sur un problème très simple que l'on appellera cavité accordée. Il s'agit d'une géométrie unidimensionnelle, de longueur  $L$ , où l'on impose un signal rentrant par une face, et l'autre face est parfaitement réfléchissante. Un schéma d'un tel dispositif est donné sur la figure 6.1. L'accord de la cavité s'effectue en réglant la fréquence  $f$  de l'onde ou la longueur  $L$  de la cavité afin que l'onde réfléchi par la paroi du fond soit en phase avec l'onde incidente, créant ainsi une onde stationnaire constructive. L'écoulement porteur est évidemment nul au sein de la cavité.

#### Onde plane

La validation la plus simple s'effectue avec une onde plane se propageant dans l'axe de la cavité. Dans ce cas-là, l'accord de la cavité se fait en choisissant une fréquence telle que la longueur de la cavité soit un multiple de  $\lambda/2$ , où  $\lambda$  désigne la longueur d'onde. Utiliser une condition aux limites de pression totale telle que décrite dans la section 6.1.1 sur le plan d'entrée impose à cet endroit la somme des ondes incidente et réfléchi. Imposer seulement l'onde incidente par les conditions limites décrites dans la section

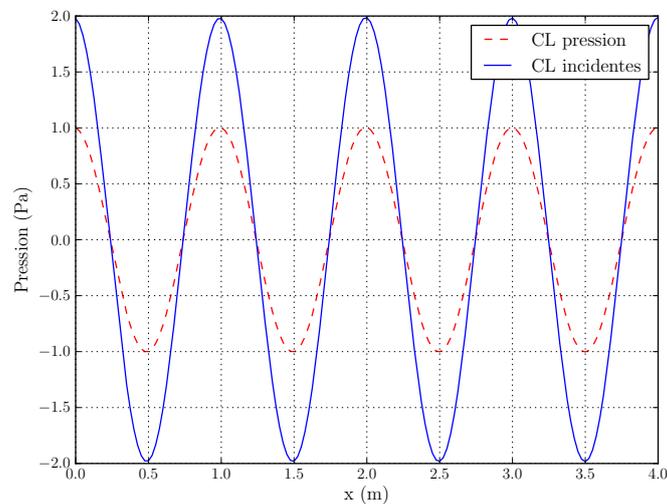
FIGURE 6.1 – Schéma de la cavité accordée. L'onde est injectée en  $x = 0$ .

FIGURE 6.2 – Partie réelle de la variation de pression dans une cavité de 4 m de long. Onde plane à 340 Hz.

6.1.2 conduira à une amplitude de l'onde stationnaire deux fois supérieure. La figure 6.2 présente la partie réelle de l'onde stationnaire dans une cavité de 4 m de long accordée à 340 Hz. Pour les deux conditions aux limites utilisées, une amplitude d'un Pascal a été utilisée. Comme attendu, les conditions aux limites incidentes doublent l'amplitude de l'onde stationnaire par rapport à celle induite par les conditions aux limites totales.

### Modes d'ordre élevé dans un tube

D'autres modes que des ondes planes existent dans un tube. Il existe une infinité de modes que l'on appellera d'ordre élevé qui ont chacun une fréquence de coupure en-deçà de laquelle ils ne se propagent pas. Ils permettent de tester la qualité des conditions aux limites incidentes pour une onde dont la

propagation n'est pas normale à la frontière. On cherche ici à accorder une cavité dans laquelle un de ces modes complexes serait en résonance. Cette cavité est un tube de rayon  $R_0$  et de longueur  $L$ . Un système de coordonnées orthoradial  $(x, r, \theta)$  est utilisé. Le tube est fermé en son fond, en  $x = L$ , par une surface parfaitement réfléchissante. Les modes sont introduits dans le plan de coordonnées  $x = 0$  que l'on nomme plan modal. Les parois radiales du tubes sont parfaitement réfléchissantes. La formule permettant de déterminer pour une forme modale donnée toutes les fréquences de résonance est plus complexe que pour l'onde plane, où il suffit de choisir que la longueur de la cavité soit multiple de la demi-longueur d'onde. Nous allons déterminer cette formule. La pression du mode complexe  $(m, n)$  est donnée par la formule suivante [130] :

$$p_{m,n}(x, r, \theta) = p_0 J_m(k_{m,n} r) e^{i(\omega t - m\theta + k_x x)} \quad (6.14)$$

Ici,  $p_0$  est l'amplitude du mode,  $J_m$  est la fonction de Bessel de premier type d'ordre  $m$ . Le nombre d'onde radial  $k_{m,n}$  est tel que  $k_{m,n} R_0 = \chi_{m,n}$  est le  $n$ -ième zéro de la dérivée de la fonction de Bessel  $J'_m$ , qui est une conséquence de la réflexion parfaite sur la paroi radiale du tube. Cette définition conduit à indexer le mode plan par  $(m = 0, n = 1)$ . Les nombres d'ondes axiaux  $k_x$  et radiaux  $k_{m,n}$  sont reliés par la relation de dispersion au nombre d'onde  $k = 2\pi f/c$  :

$$k^2 = k_x^2 + k_{m,n}^2 \quad (6.15)$$

La pression totale dans le tube est la somme des deux modes entrant et réfléchi. Leur amplitude est égale, car la surface en  $x = L$  est parfaitement réfléchissante. Ces deux modes diffèrent seulement par leur signe du nombre d'onde axial  $k_x$  et une différence de phase  $\varphi$ . La pression totale dans le tube s'écrit donc

$$P_{tot} = p_0 J_m(k_{m,n} r) e^{i\omega t} \left( e^{i(k_x x - m\theta)} + e^{i(-k_x x - m\theta + \varphi)} \right) \quad (6.16)$$

La cavité résonnante est bouchée en  $x = L$ . La réflexion parfaite sur ce mur demande  $\frac{\partial P_{tot}}{\partial x} = 0$ . On en déduit que  $\varphi = -2k_x L$ . La cavité est accordée si l'onde réfléchie est la même que l'onde incidente dans le plan d'entrée  $x = 0$ , *i.e.* si :

$$1 = e^{-2ik_x L}$$

Cela définit entièrement le nombre d'onde axial  $k_x$  par la longueur  $L$  de la cavité et  $p$ , le nombre (entier) de demi longueurs d'onde que la cavité contient :

$$k_x = \frac{p\pi}{L} \quad (6.17)$$

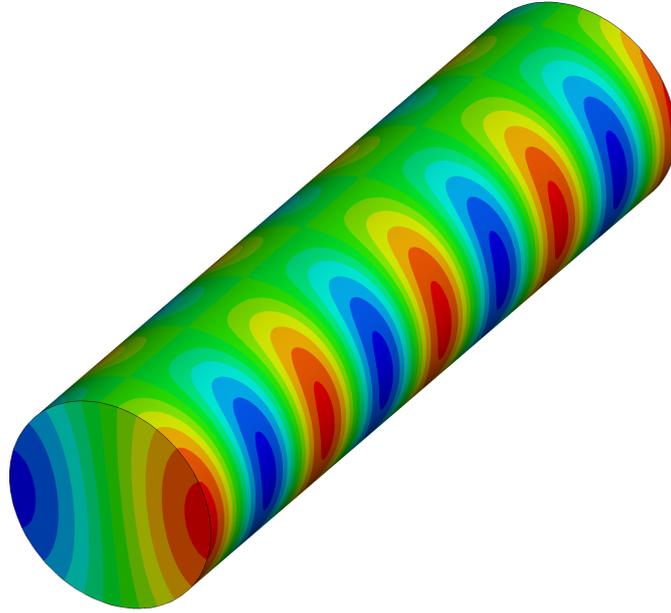


FIGURE 6.3 – Partie réelle de la variation de pression pour un mode (1,1) accordé à  $4 \lambda_x$  dans une cavité cylindrique.

On combine cette définition avec celle de  $k = 2\pi/f$  dans la relation de dispersion (6.15) et on obtient

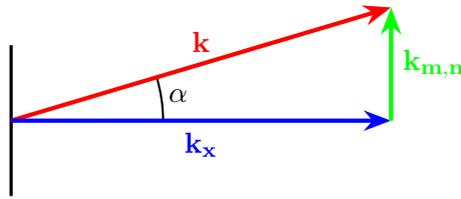
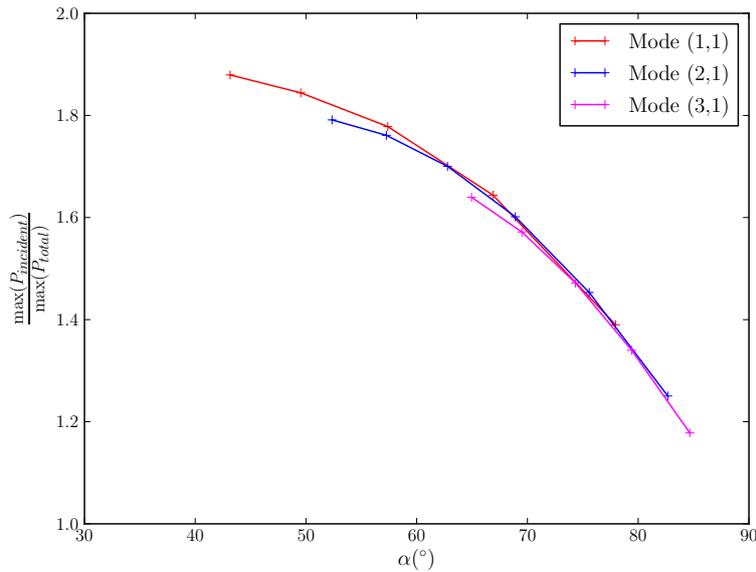
$$\left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2 = \left(\frac{p\pi}{L}\right)^2 + k_{m,n}^2$$

Cette relation permet d'exprimer la fréquence en fonction du nombre de demi longueurs d'onde dans la cavité :

$$f(p) = \sqrt{\left(\frac{pc}{2L}\right)^2 + f_c^2} \quad (6.18)$$

Ici,  $f_c = \frac{k_{m,n}c}{2\pi}$  est la fréquence de coupure du mode  $(m, n)$  considéré. On constate que pour  $p$  très grand, la fréquence du mode se rapproche de celle du mode plan, à savoir  $f \sim \frac{pc}{2L}$ . Cette formule permet d'obtenir la fréquence pour accorder un mode à une cavité en fonction du nombre de périodes souhaité. Par exemple, la partie réelle de la variation de pression pour un mode (1,1) avec  $p = 8$ , c'est-à-dire un accord de la cavité à  $4 \lambda_x$ , est donnée sur la figure 6.3.

La relation de dispersion (6.15) est également une relation de Pythagore qui permet de définir un angle  $\alpha$  tel que présenté sur la figure 6.4. Comme  $k_{m,n}$  dépend seulement du mode considéré, l'angle  $\alpha$  décroît lorsque la fréquence croît. À la fréquence de coupure  $p = 0$ , donc  $\alpha$  vaut  $90^\circ$ . On notera que l'angle  $\alpha$  n'est pas un angle physique, car de tous les nombres d'onde de la relation de

FIGURE 6.4 – Relation de dispersion et définition de l'angle  $\alpha$ FIGURE 6.5 – Perte de pression en fonction de  $\alpha$ 

dispersion (6.15), seul  $k_x$  est réellement un vecteur. Une interprétation plus juste serait de considérer  $k_{m,n}$  comme un vecteur « tournant », et qu'alors  $\alpha$  serait la demi ouverture d'un cône de révolution obtenue par rotation de la figure 6.4.

Cette définition d'angle permet d'étudier le comportement des conditions aux limites caractéristiques en fonction de l'angle  $\alpha$  du mode imposé à la normale du plan modal d'entrée. Les conditions aux limites transparentes par la méthode des caractéristiques se dégradent lorsque l'onde incidente n'est pas normale à la surface [157]. On peut donc supposer que les conditions aux limites incidentes de la section 6.1.2 connaissent le même problème.

La figure 6.5 présente le rapport du maximum de la pression dans la cavité d'un mode imposé par les conditions aux limites incidentes par rapport à celle d'une mode imposé par des conditions aux limites de pression totale, en fonction de l'angle  $\alpha$ , ou de manière équivalente, du rapport  $\frac{k_x}{k}$ . On rappelle que si les conditions aux limites incidentes sont parfaites, ce rapport vaut 2. Ce résultat avait été trouvé pour des ondes planes. Pour des modes

tournants, il est inférieur à 2, et se dégrade au fur et à mesure que l'angle  $\alpha$  augmente. On retrouve donc le résultat intuitif que les conditions aux limites caractéristiques sont plus performantes quand les ondes sont normales à la surface. Il n'a pas été possible d'obtenir des points pour des angles inférieurs à  $40^\circ$ . Ils correspondent à  $p$  (et donc  $k_x$ ) très grand, c'est-à-dire une longueur d'onde  $\lambda_x$  dans la direction  $x$  très faible. La résonance exacte est alors difficile à obtenir, car elle nécessite une grande précision dans la valeur de  $\lambda_x$ . De surcroît, le maillage impose une limite fréquentielle, et empêche de choisir des grandes valeurs de  $p$ .

Plusieurs commentaires sont à formuler sur les résultats de la figure 6.5. Premièrement, on constate que les conditions aux limites incidentes tendent à imposer la pression totale dans la limite des angles très grands. Ce fonctionnement surprenant est délicat à interpréter. Une piste pour éclaircir ce phénomène est de se rappeler que les conditions aux limites incidentes imposent une combinaison affine des variations de pression et de la vitesse normale. Or, un mode proche de sa fréquence de coupure a une vitesse acoustique presque tangente au plan d'entrée. Dans le cas limite d'un mode calculé à sa fréquence de coupure, son nombre radial  $k_x$  est nul, donc la vitesse acoustique normale l'est également. Alors, la caractéristique  $dW_4$  est entièrement déterminée par la pression. Dans ce cas là, la contribution des conditions de Dirichlet non homogènes au second membre du système linéaire sera la même lorsqu'on impose la pression totale et la caractéristique incidente (car  $\frac{\partial f_{W_4}}{\partial W_4} dW_4 = \frac{\partial f_p}{\partial p} \delta p$ ). Cela n'est qu'une partie de la réponse, car les matrices  $\mathbf{S}$  de transformation du système linéaire ne sont pas les mêmes.

La deuxième remarque sur la figure 6.5 est d'ordre pratique pour l'ingénieur utilisant les conditions aux limites incidentes, c'est-à-dire l'écart entre l'énergie incidente voulue et celle effectivement appliquée. Il est important pour lui de quantifier l'erreur commise sur le calcul due aux conditions limites. La figure 6.5 permet de constater que pour des angles  $\alpha$  inférieurs à  $50^\circ$ , la perte de pression acoustique est inférieure à 20%, qui est acceptable en pratique. Enfin, notons que la perte de signal pour des angles supérieurs à  $50^\circ$  est délicate à utiliser quantitativement. En effet, pour de tels angles, l'onde sortante est très certainement en partie réfléchiée par la condition limite d'entrée, qui elle-même n'injecte pas assez d'énergie dans le système. Il devient donc délicat de quantifier à partir de la figure 6.5 l'amplitude du mode incident que l'on impose par les conditions aux limites. Une expérience numérique pour mesurer précisément cela aurait été de placer en  $x = L$  une condition aux limites parfaitement absorbante. Or le code AeTher ne dispose de ce type de conditions. Pour contourner ce problème, on pourrait déraffiner progressivement le maillage le long du tube pour que les modes soient détruits avant le bout du conduit.

### 6.1.4 Imposition de la vitesse de paroi en aéroélasticité

L'autre application durant cette thèse des conditions aux limites de Dirichlet non homogènes a été l'aéroélasticité. Pour les calculs dit statiques, sans terme fréquentiel, on impose le déplacement via un terme *ALE* dans le volume (voir section 2.3.1). Lorsque ce déplacement est considéré comme étant harmonique, on impose au fluide à la paroi une vitesse imaginaire pure valant  $j\omega \mathbf{dx}$ , où  $\mathbf{dx}$  est le déplacement du mode structural considéré. Pour l'imposer, on rappelle la définition des variables entropiques faisant intervenir la vitesse du fluide :

$$\begin{pmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_x}{T} \\ \frac{u_y}{T} \\ \frac{u_z}{T} \end{pmatrix} = -V_5 \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

Les variables dérivées valent donc

$$\begin{pmatrix} dV_2 \\ dV_3 \\ dV_4 \end{pmatrix} = -V_5 \begin{pmatrix} du_x \\ du_y \\ du_z \end{pmatrix} - dV_5 \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = -V_5 \begin{pmatrix} du_x \\ du_y \\ du_z \end{pmatrix} + \frac{dV_5}{V_5} \begin{pmatrix} V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix} \quad (6.19)$$

Les variables  $du_x$ ,  $du_y$  et  $du_z$  sont imposées et valent

$$\mathbf{du} = \begin{pmatrix} du_x \\ du_y \\ du_z \end{pmatrix} = j\omega \delta \mathbf{x} \quad (6.20)$$

où  $\delta \mathbf{x}$  est le déplacement du mode structural imposé (voir section 2.3.1). La transformation à imposer aux variables de travail est donc

$$\mathbf{dV} \mapsto \mathbf{SdV} - V_5 \begin{pmatrix} 0 \\ j\omega \delta x \\ j\omega \delta y \\ j\omega \delta z \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.21)$$

La matrice de transformation  $\mathbf{S}$  est alors définie par

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{V_2}{V_5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{V_3}{V_5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{V_4}{V_5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6.22)$$

Avant l'utilisation de cette condition aux limites, la vitesse imaginaire pure était imposée par pénalisation à la paroi. Pour comparer ces deux façons d'imposer la conditions aux limites, des calculs sur la maquette DTP

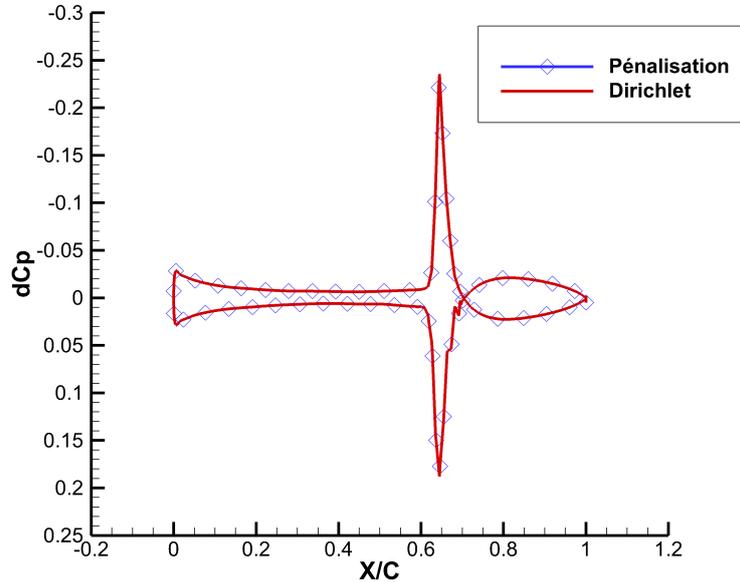


FIGURE 6.6 – Partie imaginaire du  $dC_p$  à mi-envergure de la maquette DTP pour un mouvement de tangage à 30 Hz à Mach 0,88. Imposition de la vitesse à la paroi par pénalisation ou par condition de Dirichlet non homogène.

présentée à la section 3.3.4 ont été effectués. La figure 6.6 présente la partie imaginaire de la variation de pression à la peau à mi-envergure pour un mouvement de tangage à 30 Hz réalisé à Mach 0,88. Les résultats sont identiques pour les deux méthodes. La figure 6.7 montre la convergence du résidu non adimensionné. Les deux courbes ne peuvent se distinguer, à l'exception du résidu initial. La pénalisation introduit en effet un résidu très fort aux nœuds de la paroi. Ce résidu local disparaît après la première itération, à partir de laquelle les deux courbes de convergence sont superposées. Les conditions limites de Dirichlet non homogènes pour imposer la vitesse à la paroi en aéroélasticité sont désormais toujours utilisées dans AeTher linéarisé.

## 6.2 Conditions aux limites transparentes

### 6.2.1 Présentation

Les premiers calculs aéroacoustiques utilisant AeTher et effectués avant cette thèse ont été d'abord réalisés en déaffinant le maillage loin de l'avion, afin d'atténuer les ondes acoustiques avant qu'elles n'atteignent le bord. Sur la frontière représentant l'infini, des conditions de Dirichlet homogènes

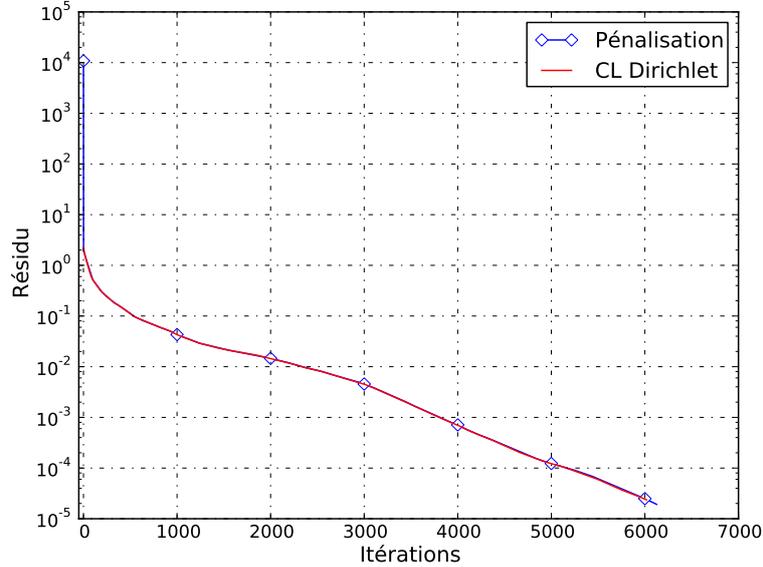


FIGURE 6.7 – Résidu GMRES non adimensionné. Imposition de la vitesse à la paroi par pénalisation ou par condition de Dirichlet non homogène.

sur toutes les variables étaient imposées. Il a été remarqué que les ondes atténuées arrivant sur cette frontière n'étaient pas, ou peu réfléchies. Le même phénomène a été confirmé sur des plus petits domaines de calcul, pour lesquels les ondes n'étaient presque pas atténuées lorsqu'elle atteignent le bord. Il s'est donc avéré que des conditions de Dirichlet homogènes sur toutes les variables entropiques se comportaient comme des conditions aux limites transparentes.

Une des contributions de cette thèse a été de comprendre le mécanisme expliquant cette propriété contre-intuitive. Un modèle 1D a permis de montrer que c'est la stratégie de stabilisation SUPG adoptée dans AeTher qui produit ce résultat surprenant.

### 6.2.2 Modèle 1D

Pour comprendre les conditions aux limites transparentes à l'infini, on utilise les équations d'Euler linéarisées fréquentielles, qui s'écrivent en 1D

$$j\omega \tilde{\mathbf{A}}_0 \mathbf{V} + \tilde{\mathbf{A}}_1 \mathbf{V}_{,x} = \mathbf{0}, \quad (6.23)$$

afin d'étudier leur propriétés une fois discrétisé sur un segment 1D.

#### Explication sans terme de temps

Pour simplifier l'analyse, on s'intéresse d'abord uniquement aux équations d'Euler linéarisées sans terme fréquentiel, qui se réduisent au terme convectif.

**Théorème 6.1.** *La discrétisation des équations d'Euler stationnaires linéarisées par la méthode SUPG, avec la matrice de stabilisation*

$$\boldsymbol{\tau} = \tilde{\mathbf{A}}_0^{-1} \left( \frac{\partial \xi^2}{\partial x} \mathbf{A}_1^2 \right)^{-\frac{1}{2}},$$

qui est la réduction à une dimension de la définition (5.2), est identique à une discrétisation par un schéma de différences finies décentrées sur les variables caractéristiques.

*Démonstration.* C'est une conséquence des théorèmes 5.7 et 5.10 sans utiliser l'approximation effectuée dans le lemme 5.9 développée pour le passage au cas multidimensionnel.

Pour fixer les idées, on rappelle les grandes lignes de la preuve.

La formulation stabilisée par SUPG des équations d'Euler linéarisées s'écrit

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{Y}^H \tilde{\mathbf{A}}_1 \mathbf{V}_{,x} + \mathbf{Y}_{,x}^H \tilde{\mathbf{A}}_1 \boldsymbol{\tau} \tilde{\mathbf{A}}_1 \mathbf{V}_{,x} d\Omega^e = 0, \quad (6.24)$$

où les fonctions tests sont notées cette fois-ci  $\mathbf{Y}$ . On reprend les notations introduites dans la section 5.1.5. Soient  $\mathbf{L}$  le facteur de Cholesky de  $\tilde{\mathbf{A}}_0$ , et  $\tilde{\mathbf{S}}$  la matrice orthonormale de diagonalisation de  $\tilde{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{L}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_1 \mathbf{L}^{-T}$ , et  $\boldsymbol{\Lambda}$  ses valeurs propres associées. De plus,  $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{L}^{-T} \hat{\mathbf{S}}$  diagonalise  $\boldsymbol{\tau}$  :

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \tilde{\mathbf{S}} |\boldsymbol{\Lambda}|^{-1} \tilde{\mathbf{S}}^T.$$

De plus,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}^T \tilde{\mathbf{A}}_1 \tilde{\mathbf{S}} &= \hat{\mathbf{S}}^T \mathbf{L}^{-1} \tilde{\mathbf{A}}_1 \mathbf{L}^{-T} \hat{\mathbf{S}} \\ &= \hat{\mathbf{S}}^T \hat{\mathbf{A}}_1 \hat{\mathbf{S}} \\ &= \boldsymbol{\Lambda}. \end{aligned}$$

Enfin, remarquons que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}^T \tilde{\mathbf{A}}_1 \boldsymbol{\tau} \tilde{\mathbf{A}}_1 \tilde{\mathbf{S}} &= \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{S}^{-1} \boldsymbol{\tau} \mathbf{S}^{-T} \boldsymbol{\Lambda} \\ &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \boldsymbol{\Lambda} |\boldsymbol{\Lambda}|^{-1} \boldsymbol{\Lambda} \\ &= \frac{\partial x}{\partial \xi} |\boldsymbol{\Lambda}|. \end{aligned}$$

Ainsi, si l'on pose  $\mathbf{W} = \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \mathbf{V}$  (attention,  $\mathbf{W}$  désignait auparavant les fonctions test) et  $\mathbf{Z} = \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \mathbf{Y}$  qui sont les variables caractéristiques, la formulation stabilisée (6.24) devient

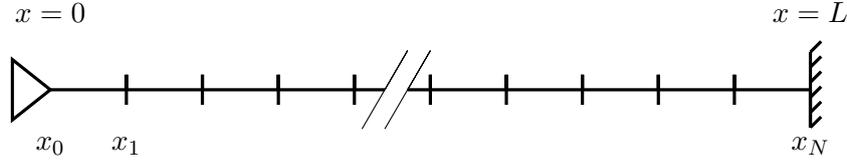


FIGURE 6.8 – Schéma du segment 1D.

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{Z}^H \mathbf{\Lambda} \mathbf{W}_{,x} + \mathbf{Z}_{,x}^H \frac{\partial x}{\partial \xi} |\mathbf{\Lambda}| \mathbf{W}_{,x} d\Omega^e = 0. \quad (6.25)$$

On retrouve le résultat de la section 5.1.2, à savoir qu'il existe une base dans lequel le système d'advection 1D est diagonal. La fin de la preuve du théorème 5.7 permet de conclure.  $\square$

La vitesse de convection de chaque variable caractéristique est donnée par les coefficients de  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(u, u + c, u - c)$ , où  $u$  est la vitesse de l'écoulement porteur et  $c$  la célérité du son.

**Corollaire 6.2.** *Pour une vitesse d'advection  $u$  positive et subsonique, la discrétisation des variables caractéristiques annoncée dans le théorème 6.1 par des éléments finis de longueur uniforme  $h$  est*

$$\begin{cases} u \frac{w_i^{(1)} - w_{i-1}^{(1)}}{h} = 0 \\ (u + c) \frac{w_i^{(2)} - w_{i-1}^{(2)}}{h} = 0 \\ (u - c) \frac{w_{i+1}^{(3)} - w_i^{(3)}}{h} = 0. \end{cases} \quad (6.26)$$

*Démonstration.* Immédiat par application du théorème 5.5.  $\square$

Considérons maintenant un segment de droite  $[0, L]$  discrétisé en  $N + 1$  points numérotés de 0 à  $N$ . Un signal acoustique est injecté en  $x = 0$  et une condition aux limites de Dirichlet homogène sur toutes les variables est imposée en  $x = L$ . Ce segment est représenté sur la figure 6.8.

**Théorème 6.3.** *La condition aux limites de Dirichlet homogènes sur toutes les variables imposées en  $x = L$  pour les équations d'Euler linéarisées avec une vitesse d'écoulement porteur positive et subsonique est transparente pour les deux premières variables caractéristiques  $w^{(1)}$  et  $w^{(2)}$  et impose la troisième variable caractéristique  $w^{(3)}$  à être uniformément nulle sur tout le segment.*

*Démonstration.* C'est une conséquence directe de la discrétisation décentrée par caractéristique, tel que décrit par le théorème 5.5 et son corollaire 6.2. Une condition aux limites de Dirichlet homogène sur toutes les variables

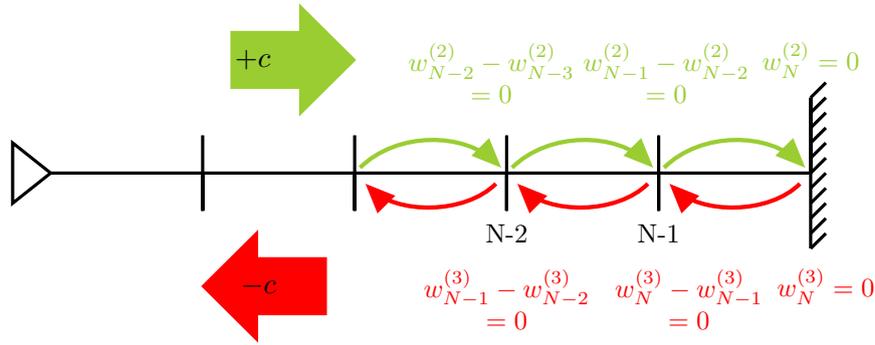


FIGURE 6.9 – Décentrement différent des caractéristiques  $w^{(2)}$  et  $w^{(3)}$  avec la discrétisation SUPG pour une vitesse de fluide nulle

est également une conditions de Dirichlet homogène pour les trois variables caractéristiques. Les équations (6.26) suivies par les variables caractéristiques discrétisées suffisent à montrer la propriété demandée. Les deux premières variables ne vont pas voir la condition aux limite en  $x_N$  avant d'atteindre ce point, alors que la dernière sera imposée à zéro. Cet argument est représenté sur la figure 6.9. En  $x_{N-1}$ , les équations suivies par les variables caractéristiques sont

$$\left\{ \begin{array}{l} u \frac{w_{N-1}^{(1)} - w_{N-2}^{(1)}}{h} = 0 \\ (u + c) \frac{w_{N-1}^{(2)} - w_{N-2}^{(2)}}{h} = 0 \\ (u - c) \frac{0 - w_{N-1}^{(3)}}{h} = 0. \end{array} \right.$$

Cela montre qu'en  $x_{N-1}$  les deux premières caractéristiques ne sont pas affectées par la condition de Dirichlet homogène, alors que la troisième variable est imposée à 0.

Cela prouve le caractère transparent des conditions aux limites de Dirichlet homogènes sur toutes les variables quand une méthode de stabilisation SUPG bien choisie est utilisée.  $\square$

### Ajout du terme temporel

Dans la partie précédente, on s'est cantonné à un terme d'advection pure. Maintenant, nous allons étudier l'impact sur la discrétisation de l'ajout du terme fréquentiel, à la fois sur les conditions aux limites transparentes, ainsi que sur la stabilité et la précision du schéma. Les propriétés du schéma élément fini Galerkin standard ainsi que le schéma élément fini stabilisé par

SUPG seront étudiées. Les équations d'Euler linéarisées fréquentielles à la pulsation  $\omega$  s'écrivent

$$j\omega \tilde{\mathbf{A}}_0 \mathbf{V} + \tilde{\mathbf{A}}_1 \mathbf{V}_{,1} = \mathbf{0}. \quad (6.27)$$

**Lemme 6.4.** *La méthode des éléments finis de Galerkin appliquées aux équations d'Euler linéarisées fréquentielles (6.27) donne la discrétisation suivantes des variables caractéristiques :*

$$\begin{cases} j\omega \left( \frac{1}{6}w_{i-1}^{(1)} + \frac{2}{3}w_i^{(1)} + \frac{1}{6}w_{i+1}^{(1)} \right) + u \frac{w_{i+1}^{(1)} - w_{i-1}^{(1)}}{2h} = 0 \\ j\omega \left( \frac{1}{6}w_{i-1}^{(2)} + \frac{2}{3}w_i^{(2)} + \frac{1}{6}w_{i+1}^{(2)} \right) + (u+c) \frac{w_{i+1}^{(2)} - w_{i-1}^{(2)}}{2h} = 0 \\ j\omega \left( \frac{1}{6}w_{i-1}^{(3)} + \frac{2}{3}w_i^{(3)} + \frac{1}{6}w_{i+1}^{(3)} \right) + (u-c) \frac{w_{i+1}^{(3)} - w_{i-1}^{(3)}}{2h} = 0, \end{cases} \quad (6.28)$$

où par exemple  $w_{i+1}^{(2)}$  désigne la valeur de la deuxième variable caractéristique au nœud  $i+1$ .

*Démonstration.* Vu que

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}^T \tilde{\mathbf{A}}_0 \tilde{\mathbf{S}} &= \hat{\mathbf{S}}^T \mathbf{L}^{-1} \mathbf{L} \mathbf{L}^T \mathbf{L}^{-T} \hat{\mathbf{S}} \\ &= \hat{\mathbf{S}}^T \hat{\mathbf{S}} \\ &= \mathbf{I}, \end{aligned}$$

la forme faible des équations (6.27) exprimées dans variables caractéristiques sur un élément  $\Omega^e$  est

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{Z}^H j\omega \mathbf{I} \mathbf{W} + \mathbf{Z}^H \mathbf{\Lambda} \mathbf{W}_{,x} dx = 0. \quad (6.29)$$

Les résultats d'intégration élémentaires utilisés dans la preuve du théorème 5.5 permettent de conclure.  $\square$

**Lemme 6.5.** *La méthode des éléments finis stabilisées par la méthode SUPG appliquées aux équations d'Euler linéarisées fréquentielles (6.27) donne la discrétisation suivantes des variables caractéristiques :*

$$\begin{cases} j\omega \left( \frac{5}{12}w_{i-1}^{(1)} + \frac{2}{3}w_i^{(1)} - \frac{1}{12}w_{i+1}^{(1)} \right) + u \frac{w_i^{(1)} - w_{i-1}^{(1)}}{h} = 0 \\ j\omega \left( \frac{5}{12}w_{i-1}^{(2)} + \frac{2}{3}w_i^{(2)} - \frac{1}{12}w_{i+1}^{(2)} \right) + (u+c) \frac{w_i^{(2)} - w_{i-1}^{(2)}}{h} = 0 \\ j\omega \left( -\frac{1}{12}w_{i-1}^{(3)} + \frac{2}{3}w_i^{(3)} + \frac{5}{12}w_{i+1}^{(3)} \right) + (u-c) \frac{w_{i+1}^{(3)} - w_i^{(3)}}{h} = 0. \end{cases} \quad (6.30)$$

*Démonstration.* Les équations stabilisées par la méthode SUPG, écrites en variables entropiques, se notent

$$\int_{\Omega^e} \left( \mathbf{Y} + \tau \tilde{\mathbf{A}}_1 \mathbf{Y}_{,x} \right)^H \cdot \left( j\omega \tilde{\mathbf{A}}_0 \mathbf{V} + \tilde{\mathbf{A}}_1 \mathbf{V}_{,x} \right) d\Omega^e = 0. \quad (6.31)$$

Le terme  $\tau \tilde{\mathbf{A}}_1 \mathbf{Y}_{,x}$  qui modifie les fonctions de pondération ajoute deux contributions à la discrétisation, correspondant à l'opérateur de convection et l'opérateur fréquentiel. Simplifions ce dernier terme :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{S}}^T \tilde{\mathbf{A}}_1 \tau j\omega \tilde{\mathbf{A}}_0 \tilde{\mathbf{S}} &= j\omega \mathbf{\Lambda} \tilde{\mathbf{S}}^{-1} \tau \tilde{\mathbf{S}}^{-T} \\ &= j\omega \frac{\partial x}{\partial \xi} \mathbf{\Lambda} |\mathbf{\Lambda}|^{-1} \\ &= j\omega \frac{\partial x}{\partial \xi} \operatorname{sgn}(\mathbf{\Lambda}), \end{aligned}$$

où  $\operatorname{sgn}(\mathbf{\Lambda}) = \operatorname{diag}(\operatorname{sgn}(\lambda_i))$ , et la fonction signe est définie par  $\operatorname{sgn}(x)$  vaut 1 si  $x \leq 0$  et -1 sinon. Les équations stabilisées exprimées en variables caractéristiques sont encore diagonales :

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{Z}^H j\omega \mathbf{W} + \mathbf{Z}_{,x}^H j\omega \frac{\partial x}{\partial \xi} \operatorname{sgn}(\mathbf{\Lambda}) \mathbf{W} + \mathbf{Z}^H \mathbf{\Lambda} \mathbf{W}_{,x} + \mathbf{Z}_{,x}^H \frac{\partial x}{\partial \xi} |\mathbf{\Lambda}| \mathbf{W}_{,x} d\Omega^e = \mathbf{0} \quad (6.32)$$

Les résultats d'intégration élémentaires utilisés dans la preuve du théorème 5.5 permettent de conclure.  $\square$

**Remarque 6.3.** Les deux termes apportés par la stabilisation ont chacun modifié la discrétisation pour passer de l'équation (6.28) à (6.30). Le terme convectif est parfaitement décentré, et le terme fréquentiel n'est plus symétrique.

Pour les deux discrétisations (6.28) et (6.30), la relation de récurrence de la deuxième variable caractéristique est étudiée. Une solution de la forme

$$w_i^{(2)} = \alpha_-^i w_0^- + \alpha_+^i w_0^+, \quad (6.33)$$

est recherchée, où  $\alpha_-$  et  $\alpha_+$  sont les racines du polynôme caractéristique associé à la relation de récurrence.

**Lemme 6.6.** *Pour les éléments finis non stabilisés, les racines  $\alpha_{\text{Gal}+}$  et  $\alpha_{\text{Gal}-}$  sont données par*

$$\alpha_{\text{Gal}\pm} = \frac{-2 \pm \sqrt{3 - 9\zeta^2}}{1 - 3j\zeta}, \quad (6.34)$$

où l'on a introduit le paramètre réduit  $\zeta = \frac{u+c}{\omega h} = \frac{\lambda}{2\pi h}$ , et  $\lambda$  est la longueur d'onde

*Démonstration.* On rappelle la relation de récurrence de la deuxième variable de (6.28), en ayant enlevé l'exposant 2 pour alléger les notations :

$$w_{i-1} \left( \frac{j\omega}{6} - \frac{u+c}{2h} \right) + w_i \frac{2j\omega}{3} + w_{i+1} \left( \frac{j\omega}{6} + \frac{u+c}{2h} \right) = 0. \quad (6.35)$$

En utilisant le paramètre  $\zeta$ , elle se réécrit

$$w_{i-1} \left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4}j\zeta \right) + w_i + w_{i+1} \left( \frac{1}{4} - \frac{3}{4}j\zeta \right) = 0. \quad (6.36)$$

Le polynôme caractéristique associé est

$$\left( \frac{1}{4} + \frac{3}{4}j\zeta \right) + X + X^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{3}{4}j\zeta \right), \quad (6.37)$$

dont les racines sont les  $\alpha_{\text{Gal}\pm}$  recherchés.  $\square$

**Lemme 6.7.** *Pour les éléments finis stabilisés par la méthode SUPG, les racines  $\alpha_{\text{SUPG}+}$  et  $\alpha_{\text{SUPG}-}$  sont données par*

$$\alpha_{\text{SUPG}\pm} = 4 - 6j\zeta \pm \sqrt{21 - 36j\zeta - 36\zeta^2}. \quad (6.38)$$

*Démonstration.* La relation de récurrence sur la deuxième variable caractéristique de (6.30) exprimée à l'aide de  $\zeta$  conduit au polynôme quadratique

$$(-5 - 12j\zeta) + (-8 + 12j\zeta)X + X^2. \quad (6.39)$$

$\square$

**Lemme 6.8** (Propriétés des racines  $\alpha$ ). *Dans la limite  $\zeta \rightarrow \infty$ , qui est celle d'une discrétisation infiniment fine on a*

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{Gal}+} &\longrightarrow -1 & \alpha_{\text{SUPG}+} &\longrightarrow -j\infty \\ \alpha_{\text{Gal}-} &\longrightarrow 1 & \alpha_{\text{SUPG}-} &\longrightarrow 1 \end{aligned} \quad (6.40)$$

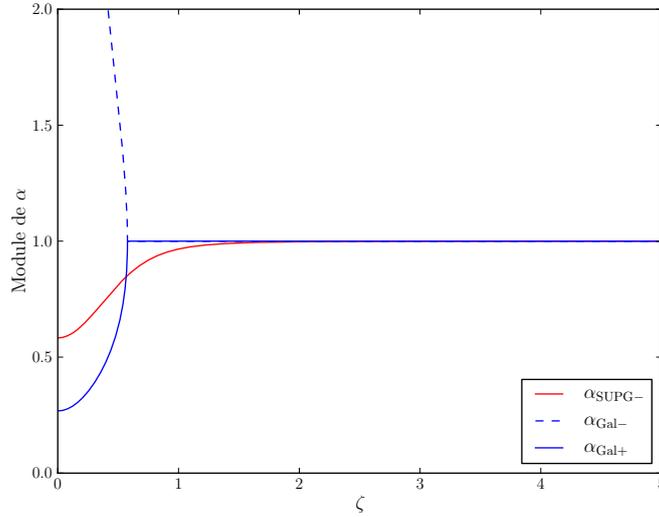
*De plus, pour  $\zeta > 1/\sqrt{3}$ ,  $|\alpha_{\text{Gal}+}| = |\alpha_{\text{Gal}-}| = 1$ .*

*Enfin, la partie réelle de  $\alpha_{\text{Gal}+}$  est toujours négative.*

**Remarque 6.4.** La définition de  $\alpha_{\text{SUPG}\pm}$  utilise la branche  $z = \rho e^{j\theta} \mapsto \sqrt{\rho} e^{j\theta/2} e^{j\pi/2}$  de la fonction multiforme racine carrée, afin que les deux  $\alpha_-$  tendent vers 1.

**Remarque 6.5.** Dans tous nos calculs,  $\zeta$  est toujours supérieur à 1, car  $\zeta = 1$  correspond à environ 6 points par longueur d'onde, ce qui est trop peu pour bien discrétiser une onde avec des éléments linéaires.

**Théorème 6.9.** *La discrétisation par éléments finis non stabilisés conduit à des oscillations non physiques.*


 FIGURE 6.10 – Module des coefficients  $\alpha$  introduits dans (6.34) et (6.38)

*Démonstration.* La solution est recherchée sous la forme donnée dans l'équation (6.33). La partie réelle de  $\alpha_{\text{Gal+}}$  est négative. La partie de la solution  $\alpha_{\text{Gal+}}^i w_0^+$  portée par ce terme sera oscillante d'un nœud à l'autre. C'est un comportement non physique, car la période de l'oscillation est alors fixée par le maillage, et elle existe même si  $h \rightarrow 0$ .  $\square$

Le module des différents coefficients de récurrence  $\alpha_{\pm}$  est tracé dans la figure 6.10. Les figures 6.11 et 6.12 donnent leur partie réelle et leur chemin sur le plan complexe en fonction de  $\zeta$ . Le coefficient  $\alpha_{\text{SUPG+}}$  n'est jamais présenté sur tous les graphes, car pour  $\zeta = 0$ ,  $|\alpha_{\text{SUPG+}}| \approx 8,5$ . De plus, son module croît avec  $\zeta$  et un équivalent à l'infini est  $|\alpha_{\text{SUPG+}}| \sim 12\zeta$ .

Ainsi, la partie réelle de  $\alpha_{\text{SUPG-}}$  est toujours positive, comme celle de  $\alpha_{\text{Gal-}}$ , contrairement à  $\alpha_{\text{Gal+}}$  qui a une partie réelle négative. Notons également que  $|\alpha_{\text{SUPG-}}| < 1$ , qui peut se voir graphiquement sur la figure 6.10, et est également prouvé pour les grands  $\zeta$  par l'équivalent donné dans l'équation (6.44).

On peut maintenant montrer que la propriété de non réflexion d'une condition de Dirichlet homogène existe toujours lorsque l'on stabilise par la méthode SUPG les équations d'Euler linéarisées fréquentielles.

**Théorème 6.10.** *Une condition de Dirichlet homogène sur toutes les variables est transparente pour la caractéristique sortante : elle n'induit qu'une perturbation locale (couche limite exponentiellement décroissante) de cette variable caractéristique.*

La démonstration est reportée après celle du lemme 6.11 et permettra de clarifier l'énoncé du théorème.

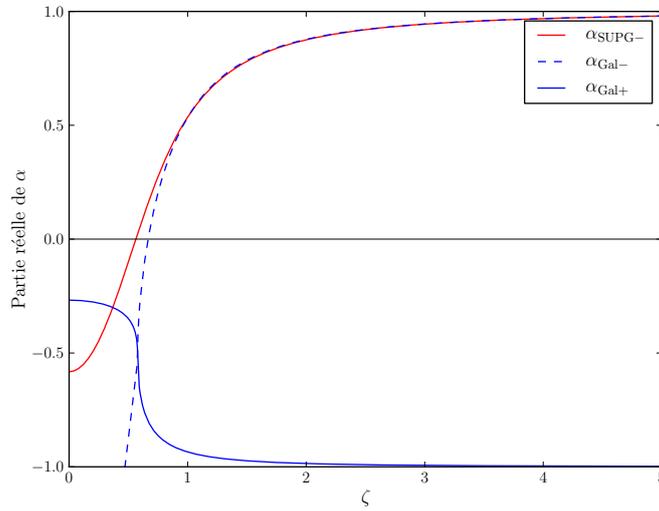


FIGURE 6.11 – Partie réelle des coefficients  $\alpha$  introduits dans (6.34) et (6.38)

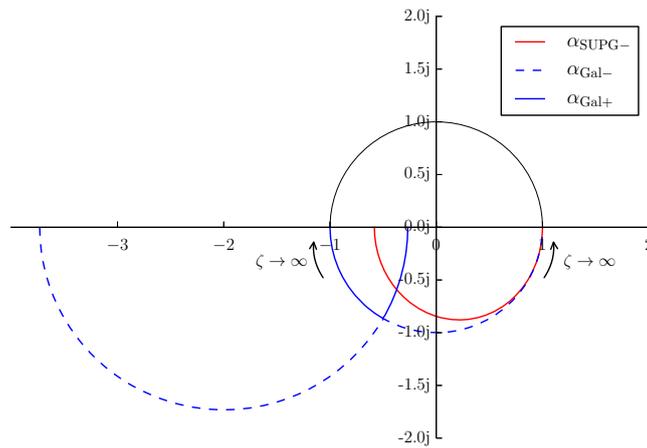


FIGURE 6.12 – Variation des coefficients  $\alpha$  dans le plan complexe pour  $\zeta > 0$

On discrétise les équations sur le même segment que dans le cas précédent sans terme temporel. On pourra consulter la figure 6.8. Soit un segment de longueur  $L$ , discrétisé en  $N$  éléments de longueur  $h$ . Les nœuds ainsi définis sont numérotés de 0 à  $N$ . Une condition de Dirichlet homogène sur toutes les variables est imposée au nœud  $N$ . Pour simplifier l'explication, on impose au nœud 0 une condition aux limites caractéristique qui fixe la seconde variable caractéristique à 1 et les autres à 0. Une condition en pression totale pourrait également être appliquée, mais alors elle couplerait les variables caractéristiques et les conditions aux limites., ce qui complique l'explication sans en changer la forme. Ce choix permet de continuer à n'étudier que la deuxième variable caractéristique.

La démonstration de la transparence des conditions aux limites demande le calcul de la solution.

**Lemme 6.11.** *Les coefficients  $w_0^+$  et  $w_0^-$  définissant la solution discrète  $w_i^{(2)} = \alpha_-^i w_0^- + \alpha_+^i w_0^+$  sont donnés par*

$$\begin{cases} w_0^+ = \frac{\alpha_-^N}{\alpha_-^N - \alpha_+^N} \\ w_0^- = \frac{\alpha_+^N}{\alpha_+^N - \alpha_-^N}, \end{cases} \quad (6.41)$$

et valables pour les deux discrétisations proposées

*Démonstration.* Les conditions aux limites du problème sur la seconde variable sont donc :

$$\begin{cases} w_0 = 1 \\ w_N = 0. \end{cases} \quad (6.42)$$

On réinjecte la forme du terme de récurrence  $w_i = \alpha_-^i w_0^- + \alpha_+^i w_0^+$  :

$$\begin{cases} w_0^- + w_0^+ = 1 \\ \alpha_-^N w_0^- + \alpha_+^N w_0^+ = 0. \end{cases}$$

Si  $\alpha_+^N \neq \alpha_-^N$ , on retrouve l'initialisation demandée.

Dans le cas du SUPG, les équivalents de  $|\alpha_{\text{SUPG}-}|$  et  $|\alpha_{\text{SUPG}+}|$  pour  $\zeta$  grand montrent que  $|\alpha_{\text{SUPG}-}| < |\alpha_{\text{SUPG}+}|$ . Une étude numérique permet d'obtenir les mêmes conclusions pour tout  $\zeta$ . Ainsi,  $\alpha_{\text{SUPG}-}^N \neq \alpha_{\text{SUPG}+}^N$ .

Pour la discrétisation par éléments finis de Galerkin,  $\alpha_{\text{Gal}+}$  et  $\alpha_{\text{Gal}-}$  convergent respectivement vers -1 et 1. L'utilisation d'équivalents permet d'écrire

$$\alpha_{\text{Gal}+}^N - \alpha_{\text{Gal}-}^N = (-1)^N - 1 + j \frac{N}{\zeta} \left( \frac{(-1)^N}{3} - 1 \right) + o\left(\frac{1}{\zeta^2}\right). \quad (6.43)$$

et ainsi de montrer que  $\alpha_{\text{Gal}+}^N - \alpha_{\text{Gal}-}^N$  n'est jamais nul, mais est hautement dépendant de la parité de  $N$ .  $\square$

*Preuve du théorème 6.10.* D'après les équivalents fournis en résultats du lemme 6.8, on constate que  $|w_0^+| \ll 1$  et que  $|w_0^-| \sim 1$ .

Ainsi, la solution SUPG est seulement portée par la racine  $\alpha_{\text{SUPG}-}$  de module proche de 1. La composante divergente apportée par  $\alpha_{\text{SUPG}+}$  n'est présente que pour annuler la solution tout près de la condition limite en  $N$ . Ainsi,  $|\alpha_{\text{SUPG}-}^i w_0^-| = O(1)$ . L'autre morceau de la solution ( $\alpha_{\text{SUPG}+}^i w_0^+$ ) crée une couche limite exponentiellement décroissante proche de la condition de Dirichlet, et est donc négligeable à l'intérieur du domaine.  $\square$

**Remarque 6.6.** Pour le schéma Galerkin standard, on rappelle que  $\alpha_{\text{Gal}+} \rightarrow -1$ ,  $\alpha_{\text{Gal}-} \rightarrow 1$  et que  $\alpha_{\text{Gal}+}^N - \alpha_{\text{Gal}-}^N = (-1)^N - 1 + j \frac{N}{\zeta} \left( \frac{(-1)^N}{3} - 1 \right) + o\left(\frac{1}{\zeta^2}\right)$ . Ainsi,  $|w_0^+| \approx |w_0^-|$ . Cela implique que la solution est plus ou moins également distribuée sur une composante oscillante (due à  $\alpha_{\text{Gal}+}$ ) et une composante sinusoïdale (due à  $\alpha_{\text{Gal}-}$ ). En d'autres termes, l'amplitude du signal physique propagé par  $\alpha_{\text{Gal}-}$  n'est pas l'amplitude réelle de l'onde de pression, et le bruit numérique est du même ordre de grandeur que le signal réel.

**Corollaire 6.12.** *La diffusion et la dispersion du schéma SUPG peuvent être étudiées par l'analyse de  $\alpha_{\text{SUPG}-}$ . La diffusion du schéma est liée au module de  $\alpha_{\text{SUPG}-}$ , et la dispersion à son argument. En utilisant les notations de Landau, pour  $\zeta \rightarrow +\infty$ ,*

$$\begin{aligned} |\alpha_{\text{SUPG}-}| &= 1 - \frac{1}{24\zeta^4} + o\left(\frac{1}{\zeta^5}\right) \\ \arg(\alpha_{\text{SUPG}-}) &= -\frac{1}{\zeta} - \frac{11}{720\zeta^5} + o\left(\frac{1}{\zeta^6}\right) \end{aligned} \quad (6.44)$$

*Preuve et commentaires.* La partie physique de la solution est portée par le terme  $w_0^- \alpha_{\text{SUPG}-}^i$  au point  $i$ . La viscosité numérique du schéma atténue l'amplitude de l'onde au cours de sa propagation. L'écart du module de  $\alpha_{\text{SUPG}-}$  à 1 permet de quantifier cette viscosité.

La dispersion du schéma qualifie l'écart de la phase calculée de l'onde avec la phase théorique. Elle s'évalue avec l'argument de  $\alpha_{\text{SUPG}-}$ . Il est normal que le premier terme de l'équivalent de  $\arg(\alpha_{\text{SUPG}-})$  soit  $-1/\zeta$ . En effet, rappelons que  $\zeta = \frac{\lambda}{2\pi h}$ , et après  $i \approx \lambda/h$  nœuds, l'argument de  $w_i$  doit diminuer de  $2\pi$ .  $\square$

**Remarque 6.7.** Le schéma SUPG est légèrement diffusif et dispersif. Il est intéressant de noter qu'il n'y a pas de terme en  $1/\zeta^2$  dans le module de  $\alpha_{\text{SUPG}-}$ , ni de terme en  $1/\zeta^3$  pour son argument, alors qu'ils sont attendus dans un tel développement. Cela montre la haute précision du schéma stabilisé par la méthode SUPG.

### 6.2.3 Résultats en 2D et en 3D

Dans la section précédente, on a prouvé la transparence d'une condition aux limites de Dirichlet homogène. Le cœur de cette preuve tient dans le décentrement parfait des dérivées spatiales des variables caractéristiques. Cela est possible car le système d'équations exprimé dans les variables caractéristiques est diagonal. Autrement dit, il existe une base qui diagonalise l'opérateur de convection et la matrice de stabilisation.

Le passage au cas multidimensionnel rend impossible cette preuve, notamment à cause de la perte de la dernière propriété. En effet, il n'existe pas de base diagonalisant les trois opérateurs de convection d'Euler simultanément, comme on l'a vu dans la section 5.1.5. Il est donc impossible de réduire les équations stabilisées à un système diagonal. La stabilisation n'est donc pas parfaite dans toutes les directions.

Un deuxième problème rencontré lors du passage à plusieurs dimensions est la notion de taille d'élément. En 1D, le terme de stabilisation est un terme diffusif multiplié par la longueur de l'élément considéré. Cela amène des annulations avec la discrétisation du terme de convection, et permet donc un décentrement parfait. En plusieurs dimensions, la définition de la longueur de l'élément n'est plus très claire, et ne permet pas des annulations parfaites comme en 1D.

Même si la démonstration formelle de la transparence des conditions de Dirichlet homogènes n'est plus possible, il est intéressant de caractériser les imperfections de ces conditions aux limites transparentes. Pour ce faire, une expérience numérique très simple a été mise en place. Elle consiste en la propagation acoustique en deux dimensions d'une source ponctuelle monopolaire dans un domaine rectangulaire. Comme la puissance acoustique est conservée sur tout cercle de rayon  $r$  centré sur la source, l'intensité acoustique est proportionnelle à  $1/r$ . L'intensité acoustique pour des ondes circulaires étant proportionnelle au carré de la pression acoustique, on a  $p \propto 1/\sqrt{r}$ .

La figure 6.14 montre le module de la pression corrigé de l'atténuation géométrique en 2D, sur deux domaines rectangulaires tel qu'expliqué par la figure 6.13. Le premier calcul a été réalisé sur un petit domaine rectangulaire, où le monopôle acoustique était placé en son centre. Sur les bords du rectangle, des conditions aux limites de Dirichlet homogènes jouent le rôle de conditions transparentes. Seule la moitié supérieure du domaine est présentée sur la figure 6.14. On y voit clairement des motifs d'interférences, qui prouvent que de l'énergie est bien réfléchi à l'intérieur du domaine.

Ce premier calcul a servi à obtenir une référence, à partir de laquelle les différences dues à la modification du domaine peuvent être analysées. Le domaine a été agrandi par une extension symétrique à gauche et à droite. Les résultats sur ce grand domaine de calcul sont représentés en-dessous et sur les côtés de la moitié supérieure du petit domaine sur la figure 6.14.

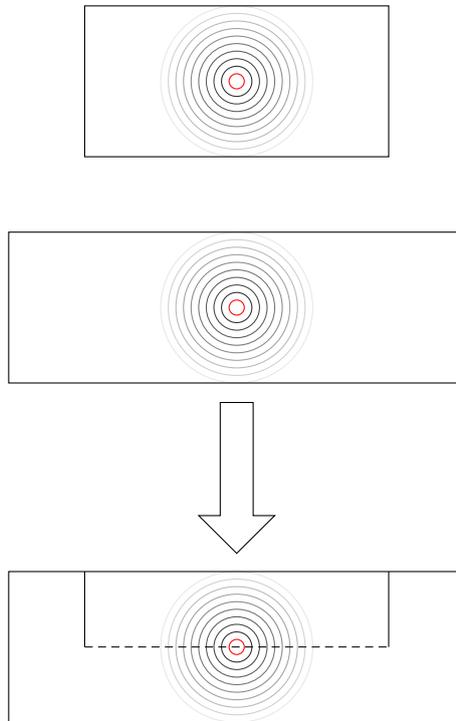


FIGURE 6.13 – Explication de la figure 6.14. Un calcul est réalisé sur un petit domaine, un deuxième sur un domaine plus grand en largeur. Les images des résultats sur les deux domaines sont superposées, en ne montrant que la partie supérieure du petit domaine.

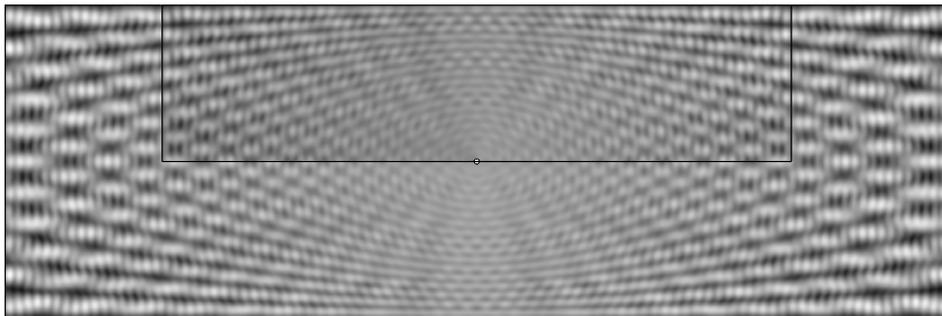


FIGURE 6.14 – Superposition de deux domaines de calcul rectangulaires contenant un monopôle acoustique en leur centre et des conditions limites transparentes à leur bord. Le champ tracé est la pression corrigée pour l'atténuation géométrique en 2D  $\sqrt{r}|p|$ . La moitié du plus petit domaine est superposée sur le plus grand (voir la figure 6.13).

Premièrement, on remarque que les franges d'interférences sont presque identiques sur le petit et le grand rectangle. On en déduit que ce ne sont pas les bords latéraux qui reflètent le plus d'énergie. Cela permet également de mettre hors de cause les coins. Cette observation est importante, car les coins sont délicats à gérer lors de l'implémentation classique de conditions aux limites transparentes par la méthode des caractéristiques, puisqu'il est impossible de définir proprement la normale à la surface dans les coins.

Ce sont donc les parois horizontales qui sont principalement responsables des réflexions. On note que les franges d'interférences deviennent de plus en plus fortes au fur et à mesure que l'on s'éloigne latéralement de la source. Cela montre que lorsque l'angle de l'onde incidente avec la normale de la paroi augmente, les ondes acoustiques sont plus réfléchies. Cela est attendu pour des conditions aux limites caractéristiques [157].

Aucune expérience numérique de la sorte n'a été menée pour les cas tridimensionnels. On se bornera à dire que des calculs sur des configurations industrielles où les bords du domaine sont extrêmement proches de la source ont été menés, sans que des réflexions indésirables trop significatives ne se produisent. La figure 6.15 montre, sur le cas test industriel présenté dans la section 6.3, la partie réelle de la variation de pression dans une coupe effectuée dans le domaine tridimensionnel de calcul. Ce domaine de calcul possède un bord cylindrique, autour de l'axe de révolution  $y = 0, z = 0$ . Les bords de l'image montrent l'étendue réelle du domaine de calcul. Les bords représentant l'infini sont donc très proches de la tuyère. Des interférences sont visibles, mais ne changent pas radicalement la solution en champ proche. Les conditions aux limites de Dirichlet homogènes, qui se sont révélées transparentes ont ainsi permis de radicalement diminuer la taille du domaine de calcul et ainsi le temps de calcul, sans devoir recourir à des conditions aux limites plus complexes [157].

## 6.3 Résultats industriels d'aéroacoustique

### 6.3.1 Présentation de l'étude SFWA

Le code AeTher linéarisé a été utilisé sur un cas test industriel tiré du projet européen *Clean Sky* [34]. Le projet Clean Sky vise à développer des briques technologiques innovantes pour la conception d'avions plus respectueux de l'environnement, qui consommeraient moins de carburant et seraient plus silencieux que les avions actuels. Dans le cadre de SFWA (*Smart Fixed Wing Aircraft*), l'une des six plateformes du projet Clean Sky, Dassault Aviation a travaillé sur un concept innovant d'arrière corps doté d'une gouverne de profondeur en U qui masque le bruit des réacteurs [129]. Une maquette de ce concept, munie de turbines propulsées à l'air comprimé permettant de simuler un réacteur a été testée en soufflerie. L'intérêt de ces turbine est double. Ce sont de véritables modèles réduits de réacteurs (où l'apport d'énergie par

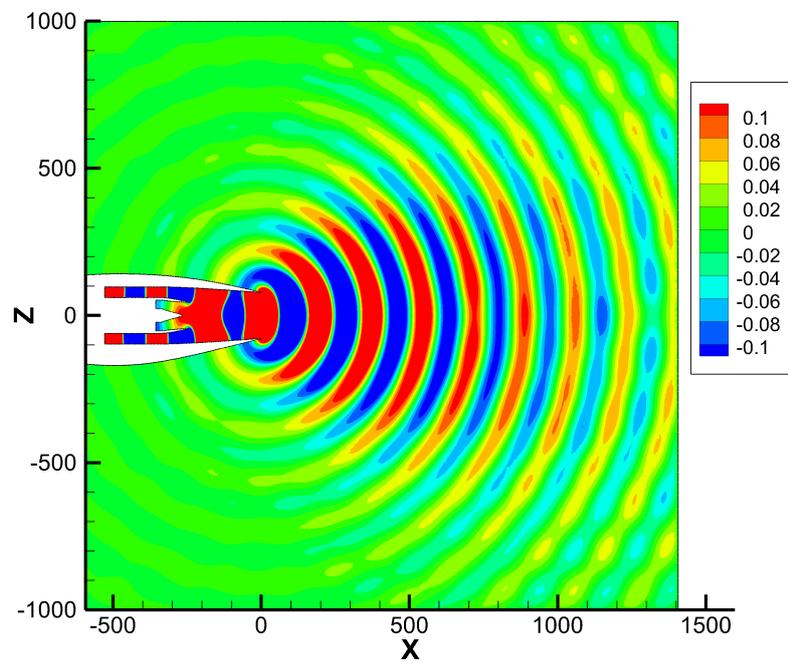


FIGURE 6.15 – Partie réelle de la variation de pression en Pascal pour un mode plan à 2 kHz sans écoulement. Coupe effectuée dans le maillage 3D.

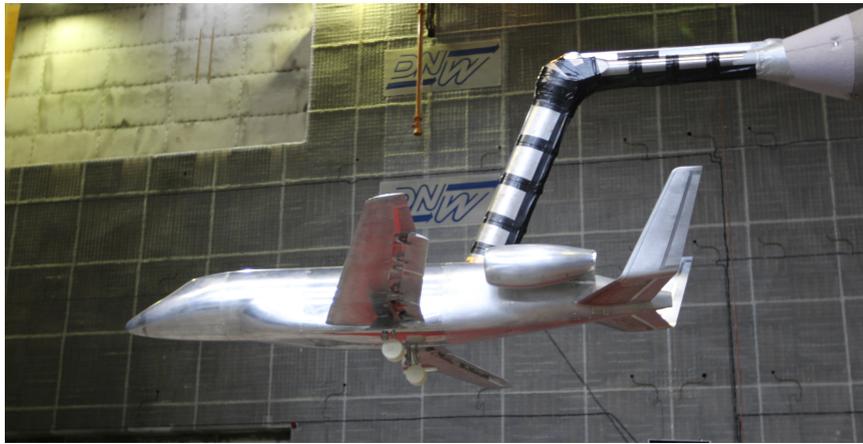


FIGURE 6.16 – Maquette d’un avion avec PH en U en soufflerie. Crédit photographique : Dassault Aviation – Clean Sky 1 – SFWA – DNW

de l’air comprimé remplace la combustion). Ainsi, elles produisent un bruit similaire à celui d’un réacteur. De plus, elles génèrent un jet, qui réfracte ce bruit. Ces essais ont permis de quantifier la réduction de bruit apportée par cet empennage en U par rapport à un empennage en croix typique.

Les calculs présentés dans cette partie ont tous été réalisés sur le modèle réduit de réacteur. Ce cas test est dénommé SFWA. Il est à l’échelle 1/4,7. Certaines parties ne sont cependant pas tout à fait à l’échelle. Le conduit annulaire est plus fin dans le modèle réduit. Le pylône de support est plus gros, pour le passage des tubes amenant l’air comprimé nécessaire au fonctionnement de la turbine. Une image de la géométrie de la tuyère du modèle réduit de réacteur ayant servi au calcul est présentée sur la figure 6.17. À fin de référence, le diamètre de la tuyère est de 20 cm environ.

Pour minimiser l’influence du maillage sur les résultats, le maillage volumique a été délibérément choisi très fin. Il est conçu pour des calculs de propagation acoustique à des fréquences allant jusqu’à 9 kHz, même si aucun calcul durant cette thèse n’a été réalisé à cette fréquence. Comme le conduit annulaire est très fin, les modes d’ordres élevés, qui ont un nombre d’onde radial très haut, nécessitent une discrétisation très fine de l’espace dans le plan modal et l’intérieur de la tuyère. À partir de la sortie de la tuyère, la taille des éléments augmente progressivement pour atteindre la longueur limite de propagation. Près de la frontière infinie, une augmentation de la taille des éléments permet d’atténuer un petit peu plus les réflexions sur la condition aux limites.

### 6.3.2 Résultats sans écoulement

Les premiers calculs ont été effectués sans écoulement. Dans ce cas-là, la propagation acoustique suit les équations d’Helmholtz. Un code interne à

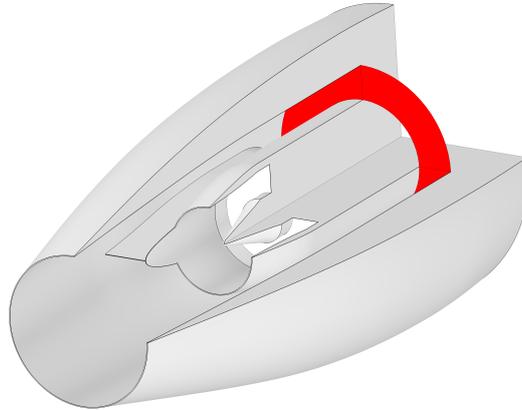


FIGURE 6.17 – Géométrie de la tuyère du réacteur utilisée pour le calcul, avec une découpe pour montrer l'intérieur. Le disque rouge est le plan modal où sont injectés les modes acoustiques.

Dassault Aviation qui résout ces équations par une méthode d'élément de frontière (BEM pour *Boundary Element Method*) [140] a servi de point de comparaison.

### Mode plan à 2 kHz

Tout d'abord, une onde plane à 2 kHz a été injectée dans le plan modal. Ce cas plus simple que les autres réalisés par la suite a permis une première évaluation de la performance du code AeTher linéarisé pour la propagation acoustique. La directivité en champ lointain de ce mode est calculée par une méthode intégrale à base de fonction de Green, à partir de données du calcul volumique interpolées sur une surface dite de Kirchhoff située à une certaine distance de la tuyère. La comparaison de la directivité obtenue par la méthode à élément de frontière et le code AeTher est présentée sur la figure 6.18. L'angle de directivité est relatif à l'axe de la tuyère. Un angle de  $0^\circ$  indique que le point considéré est dans le jet du moteur, tandis qu'un point devant l'entrée d'air du réacteur aura un angle de  $180^\circ$ . On constate que les deux méthodes donnent des résultats très proches. Dans le lobe principal, elles diffèrent de moins d'un décibel. Pour les points écartés de plus de  $120^\circ$  de l'axe, les écarts entre les méthodes s'expliquent principalement par l'erreur de diffraction due à l'ouverture vers l'amont de la surface d'interpolation de Kirchhoff.

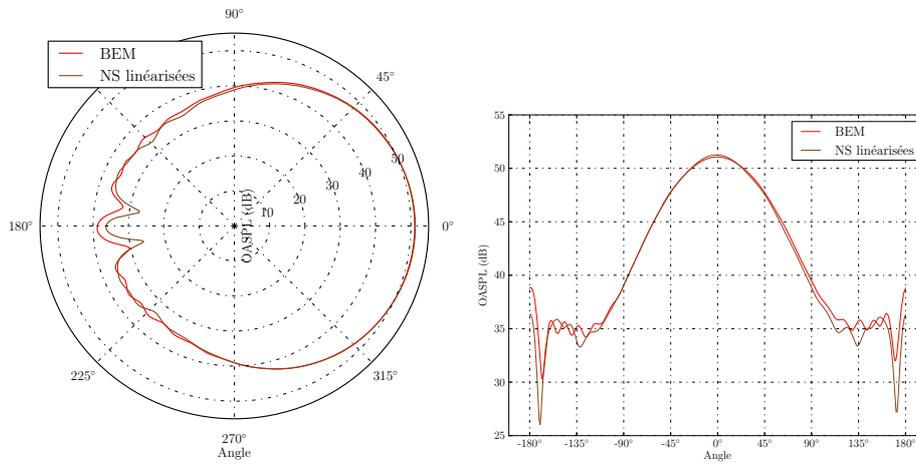


FIGURE 6.18 – Directivité en champ lointain pour le mode plan à 2 kHz. Comparaison entre Navier-Stokes linéarisé et le code BEM.

### Modes d'ordre élevé à 2 kHz et 5 kHz

Comme on l'a expliqué dans la section 6.1.3, d'autres modes qu'une onde plane peuvent se propager dans un tube. Leur propagation est plus difficile à calculer, et leur directivité plus complexe. Le mode (1,1) (pour  $(n = 1, m = 1)$ ) à 2 kHz a été calculé en premier. La variation de pression à imposer dans le plan d'entrée est tracée sur la figure 6.19. La directivité de ce mode est présentée sur la figure 6.20. La directivité issue du calcul Navier-Stokes linéarisé est à moins d'un décibel sur les deux lobes du calcul par éléments de frontière. La seule différence majeure entre les deux méthodes se situe dans la capture du creux d'interférence entre les deux lobes. Le code Navier-Stokes linéarisé ne permet pas d'obtenir une interférence aussi nette que l'approche BEM. Cela pourrait venir de la diffusion numérique dans le volume, ou encore d'un système linéaire pas assez convergé, ou enfin de l'effet de la diffraction due à l'ouverture de la surface d'interpolation vers l'amont. Le code Navier-Stokes arrive quand même à résoudre 20 dB d'écart (ou un rapport 10 en amplitude de pression) entre le maximum des lobes et le minimum dans le creux.

Les plus hautes fréquences sont plus difficiles à calculer. La directivité du mode (1,1) à 5 kHz est très différente de celle à 2 kHz. La figure 6.21 montre la directivité de ce mode à cette fréquence. Les résultats d'AeTher commencent à s'éloigner de ceux de l'approche BEM. Le code AeTher ne donne pas une image parfaite des deux lobes principaux, et ne capture presque pas le lobe secondaire autour de  $-70^\circ$ . Les principales caractéristiques de la directivité sont cependant transcrites. La figure 6.22 montre la partie réelle de la variation de pression sur une coupe du volume pour ce mode. Elle permet de se rendre compte de la complexité de la propagation à l'intérieur

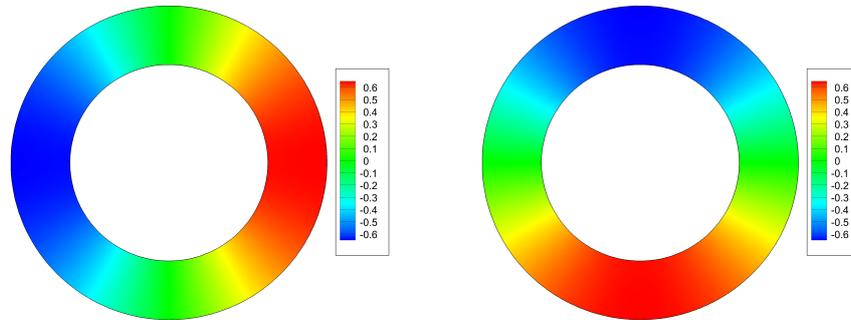


FIGURE 6.19 – Parties réelle (gauche) et imaginaire (droite) de la variation de pression en Pascal d'un mode (1,1) imposé dans le plan d'entrée

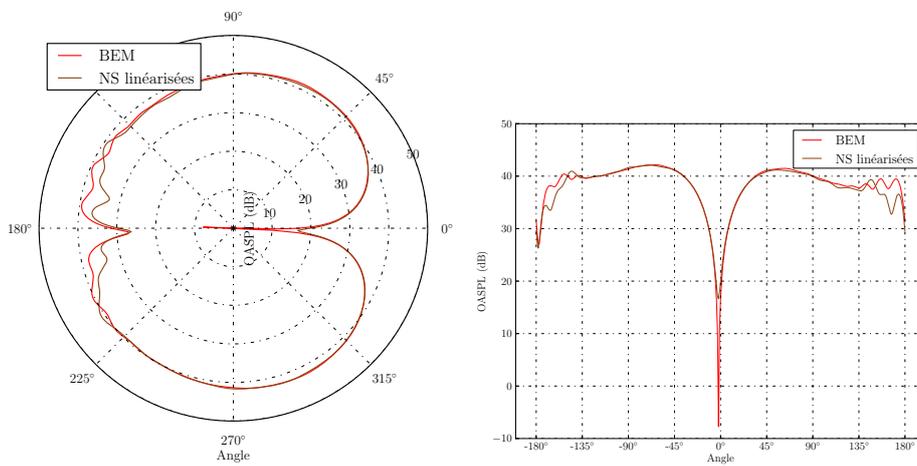


FIGURE 6.20 – Directivité en champ lointain d'un mode (1,1) à 2 kHz sans écoulement. Comparaison entre Navier-Stokes linéarisé et approche Helmholtz BEM.

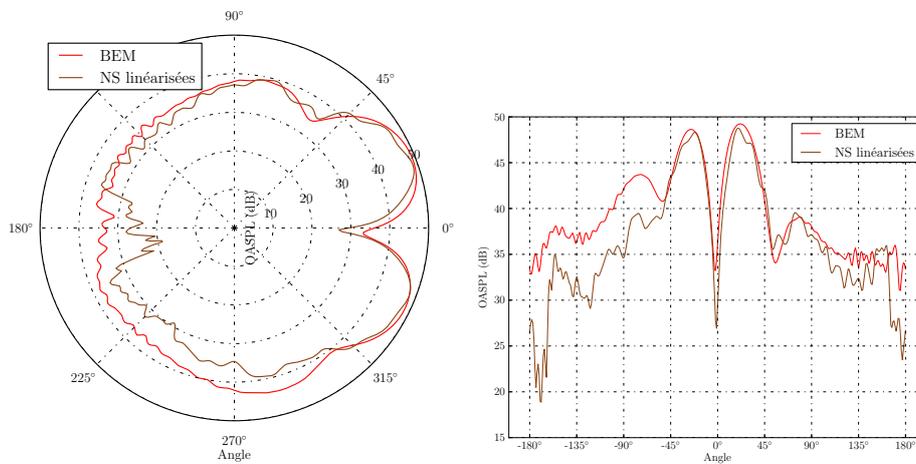


FIGURE 6.21 – Directivité en champ lointain d’un mode (1,1) à 5 kHz sans écoulement. Comparaison entre Navier-Stokes linéarisé et approche Helmholtz BEM.

de la tuyère, ainsi que des franges d’interférences apparaissant plus loin de la sortie.

### 6.3.3 Résultats avec écoulement

La propagation du son change considérablement en la présence d’un écoulement moyen. La réfraction des ondes sonores par les gradients de vitesse et de température altère la direction de propagation. Les ondes sonores sont réfractées vers l’extérieur du jet.

Le champ moyen pour ce cas a été calculé avec une méthode RANS. Comme on l’a indiqué dans la section 6.3.1, le moteur est un modèle réduit. Pour pouvoir fonctionner, il est alimenté en air comprimé à basse température. La détente dans la turbine refroidit l’air du jet autour de  $-100^{\circ}\text{C}$ . La vitesse du son est donc très basse dans le jet, qui est donc localement supersonique. La figure 6.23 montre le nombre de Mach local de l’écoulement.

Un calcul de propagation acoustique a été effectué autour de cet écoulement moyen, pour un mode plan à 2 kHz. La partie réelle de la variation de pression est montrée sur la figure 6.24. On constate que les ondes sonores sont réfractées vers l’extérieur du jet, par rapport au cas sans écoulement présenté sur la figure 6.15. Les oscillations de forte amplitude qui matérialisent le jet correspondent à des instabilités de Kelvin-Helmholtz qui sont amplifiées à cette fréquence au cours de leur convection. Ces instabilités sont présentes dans la couche de cisaillement, et elles créent une onde de forte amplitude qui ne rayonne pas à la fréquence du calcul. Au fur et à mesure que le jet se mélange dans l’air ambiant, les couches de cisaillement deviennent plus épaisses, et les ondes de Kelvin-Helmholtz sont à nouveau stables et

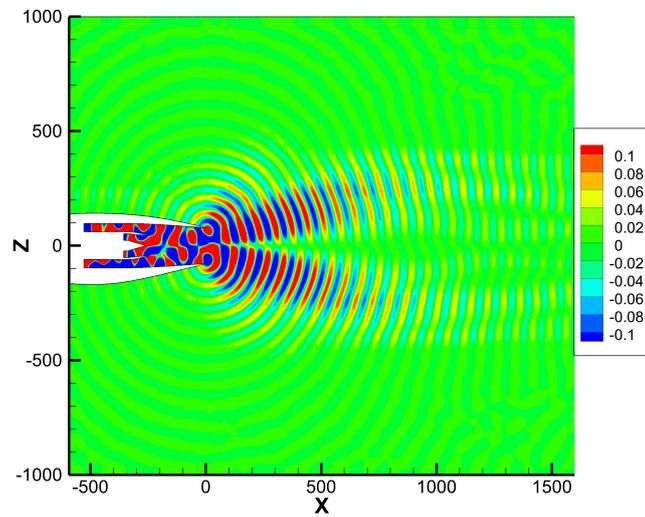


FIGURE 6.22 – Partie réelle de la variation de pression en Pascal pour le mode (1,1) à 5 kHz sans écoulement dans une coupe du maillage.

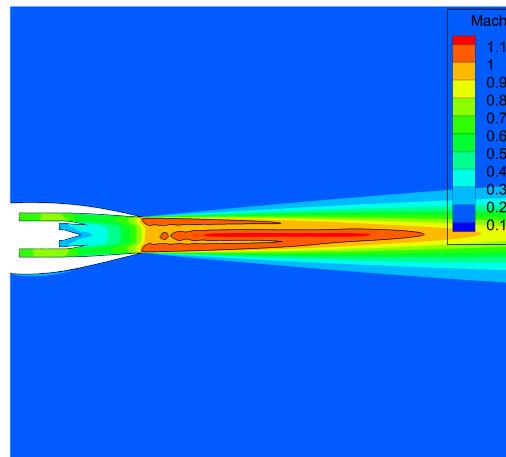


FIGURE 6.23 – Nombre de Mach local de l'écoulement produit par le modèle réduit de réacteur. Il simule alors un réacteur taille réelle à pleine poussée

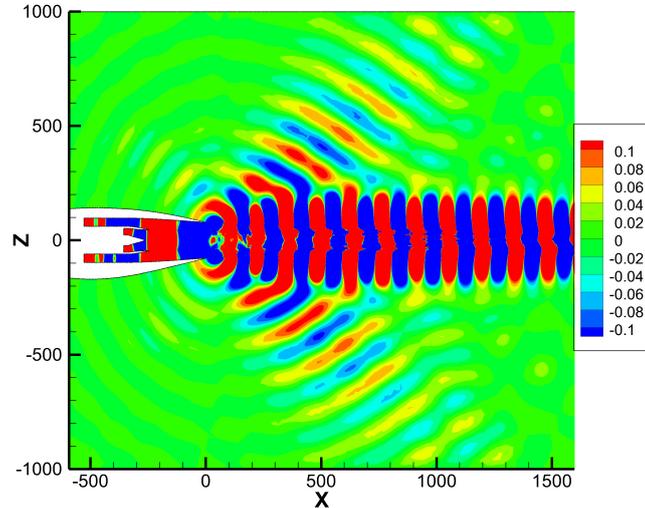


FIGURE 6.24 – Partie réelle de la variation de pression en Pascal pour un mode plan à 2 kHz. L'écoulement moyen correspond à la pleine puissance du réacteur

décroissent exponentiellement. Les conditions aux limites à l'infini n'étant pas parfaitement transparentes, il faut s'assurer que ces ondes d'instabilités sont suffisamment amorties avant d'atteindre le bord. Cette contrainte a été dimensionnante pour déterminer l'étendue du domaine de calcul.

## 6.4 Conclusion

Les variables entropiques sont utilisées dans AeTher pour la résolution des équations de Navier-Stokes afin d'obtenir des propriétés intéressantes de symétrie d'opérateur et de thermodynamique. Ces variables sont cependant éloignées des variables naturelles de l'aérodynamique. L'imposition des conditions aux limites s'en trouve sérieusement complexifiée. En se plaçant dans le cadre proposé par Shakib dans [145] pour les conditions de Dirichlet homogènes, cette thèse a étendu ce cadre pour permettre l'imposition de conditions aux limites de Dirichlet non homogènes pour des variables non triviales du calcul. La linéarisation de la fonction non-linéaire reliant la variable d'intérêt aux variables entropiques fournit les coefficients nécessaires à l'élimination de la variable par laquelle on impose la condition aux limites.

Les conditions aux limites de Dirichlet non homogènes ont permis l'utilisation industrielle en aéroacoustique du code AeTher linéarisé. Des modes acoustiques complexes peuvent être injectés dans le calcul, avec un contrôle précis de leur amplitude. La comparaison des résultats avec ceux donnés

par une approche BEM sur un cas test industriel confirme le bien-fondé des conditions aux limites. Pour l'aéroacoustique, deux façons d'imposer le mode en entrée ont été proposées. La première est d'imposer l'amplitude totale du mode au niveau du plan d'entrée, ce qui a pour inconvénient de ne pas permettre de contrôler l'énergie injectée réellement dans le système. Pour pallier ce problème, on a proposé d'imposer la variable caractéristique entrante, en laissant libres les autres variables caractéristiques. Ainsi, seule l'onde entrante est imposée. Cela a été confirmé en imposant une onde plane dans une cavité résonnante. Les conditions aux limites utilisant les variables caractéristiques sont moins performantes lorsque l'onde incidente n'est plus normale à la paroi [157]. Afin de vérifier le comportement angulaire des conditions aux limites caractéristiques, une étude sur une cavité résonnante pour des modes d'ordre élevé a montré comme attendu qu'elles se dégradent avec l'angle, et a également donné un critère utile à l'ingénieur pour connaître la validité de son calcul.

Dans ce chapitre, le comportement surprenant des conditions aux limites de Dirichlet homogènes sur toutes les variables a été éclairci. Elles jouent le rôle de conditions aux limites transparentes dans les calculs d'aéroacoustique sans traitement particulier. Un modèle 1D a permis de montrer que la discrétisation SUPG telle qu'implémentée dans le code AeTher décentre chacune des variables caractéristiques. Lorsqu'on ne considère que le terme advectif des équations d'Euler, l'explication est simplifiée et tient uniquement au décentrement des variables caractéristiques. L'ajout du terme fréquentiel complique la démonstration, qui fournit deux résultats connexes intéressants. Le premier est l'étude théorique de la diffusion et de la dispersion du schéma SUPG, qui sont très favorables. Enfin, on a prouvé que la discrétisation des équations d'Euler linéarisées fréquentielles par la méthode des éléments finis stabilisés par SUPG n'est pas stable. L'utilisation de conditions de Dirichlet homogènes à l'infini sur toutes les variables sélectionne la partie stable du schéma, tandis que la partie croissante assure l'annulation localisée de la caractéristique sortante au bord infini. La construction de la matrice de stabilisation ne permet pas une extension parfaite de ce résultat si l'espace est à plusieurs dimensions. Malgré cela, une étude numérique en 2D montre qu'elles reflètent davantage les ondes arrivant à grande incidence sur la surface, comme attendu d'une condition aux limites caractéristique. Enfin, leur utilisation pratique sur des cas industriels 3D donne entière satisfaction, car ces conditions aux limites permettent de réduire significativement la taille du domaine de calcul sans provoquer trop de réflexions parasites nuisibles à la qualité des résultats.