Chapitre 2

CONCEPTS ET OUTILS PRELIMINAIRES DE MODELISATION

2.1 Introduction

Plusieurs méthodes existent pour la modélisation mathématique des problèmes de la mécanique du solide rigide. La prise en compte de l'évolution des outils mathématiques dans la modélisation de tels problèmes est un paramètre important dans la conception et l'élaboration de modèles généraux. Le calcul numérique et symbolique de ces modèles fait généralement appel à la notion de changement de repères pour décrire les déplacements relatifs des différents éléments du système mécanique les uns par rapport aux autres. La construction de repères conduit à la définition de systèmes de coordonnées pour la paramétrisation du groupe des déplacements et de l'espace des configurations.

Ce chapitre est consacré à la présentation de l'outil mathématique qui permet une telle description dans la théorie des groupes et algèbres de Lie. Nous allons par la suite associer une structure de module à l'algèbre de Lie des torseurs. Pour définir les systèmes de coordonnées, nécessaires à la manipulation numérique et symbolique des êtres mathématiques intervenant dans la modélisation, nous allons introduire la notion de familles fondamentales de l'algèbre de Lie des torseurs $\mathfrak{D}$ comme une alternative à la notion classique de repères (i.e. systèmes d'axes) de l'espace géométrique affine $\mathcal{E}$ et nous montrerons que ces deux notions sont équivalentes. Notre choix est justifié pour deux raisons essentielles:

- L'automatisation du calcul symbolique à un degré d'abstraction assez élevé. Cela va permettre de faire des manipulations symboliques sur les familles fondamentales; donc directement sur les repères associés.
- L'ergonomie de la représentation syntaxique des modèles, pour permettre une meilleure transparence du calcul symbolique et une plus simple localisation des simplifications du calcul à un degré d'abstraction assez élevé.

2.1.1 Notion du groupe des déplacements euclidiens

En se plaçant dans le cadre de la géométrie euclidienne, la théorie mathématique des groupes peut être appliquée à l'ensemble des déplacements de corps rigides (i.e. déplacements euclidiens). Cet ensemble forme un groupe de Lie [J. Favard [FAVA-57], J-M. Hervé [HERV-78], A. Karger & J. Novak [KARG-85], D. Chevallier [CHEV-86] & [CHEV-91]] que nous noterons dans la suite $\mathbb{D}$. Dire que l'ensemble $\mathbb{D}$ est un groupe de Lie signifie que cet ensemble est muni d'une structure de groupe, d'une structure de variété différentielle et que la composition et l'inversion des déplacements sont des opérations différentiables [Annexe A].

Dire qu'un corps rigide C est contraint à évoluer dans un sous-groupe de $\mathbb{D}$, signifie que ce corps est soumis à des liaisons d'origine mécanique. Nous reviendrons sur cette idée, pour développer plus amplement la notion de contraintes lors de l'étude des liaisons mécaniques [Chapitre 3].

2.1.2 Notion de configuration d'un corps rigide

La notion de configuration du corps rigide C est un élément de modélisation assez abstrait. Généralement, une configuration $\boldsymbol{s}$ est donnée par rapport à une référence $\boldsymbol{r}$, éventuellement virtuelle. On caractérise, souvent, cette notion par la donnée de la position et l'orientation du corps. L'ensemble des configurations d'un corps solide forme une variété différentielle $\mathcal{S}$. L'opération du groupe des déplacements $\mathbb{D}$ à gauche sur l'ensemble $\mathcal{S}$ peut être définie de façon complètement abstraite par les trois axiomes suivants [D. Chevallier [CHEV-86]]:

(a_1) $\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{D},\ \forall s \in \mathcal{S}:\quad \boldsymbol{A} \bullet (\boldsymbol{B} \bullet \boldsymbol{s}) = (\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}) \bullet \boldsymbol{s}.$

(a_2) $\forall \boldsymbol{s} \in \mathcal{S}:\quad \boldsymbol{e} \bullet \boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}.$

(a_3) $\forall \boldsymbol{r}\,(\text{fixé}) \in \mathcal{S}:\quad \boldsymbol{A} \mapsto \boldsymbol{A} \bullet \boldsymbol{r}$ est une bijection de $\mathbb{D}$ sur $\mathcal{S}$.

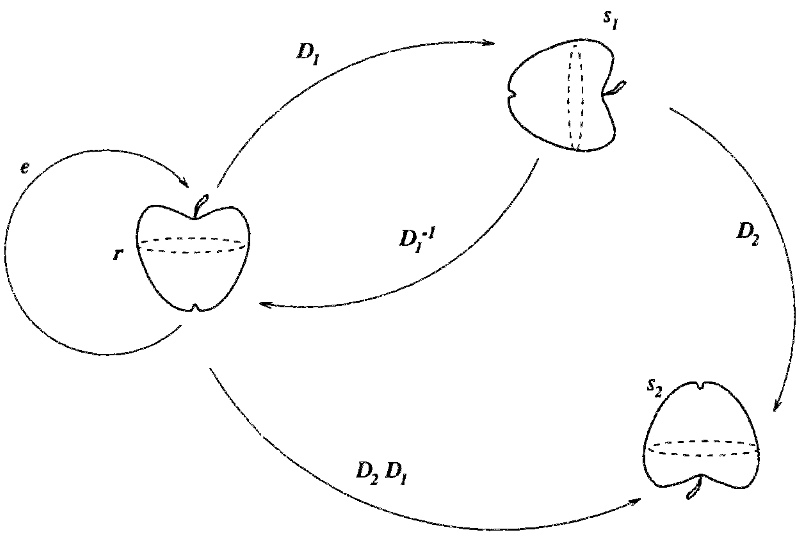
Ces trois axiomes traduisent le fait que l'espace $(\mathcal{S}, \mathbb{D}, \bullet)$ est un espace homogène sans points fixe[1]. Nous allons montrer dans ce chapitre qu'il est possible d'identifier la variété $\mathcal{S}$, à un isomorphisme près, à l'ensemble $\mathfrak{F}$ des familles fondamentales donnant ainsi une interprétation de $\mathcal{S}$ par des éléments de $\mathfrak{D}$ et une interprétation de l'action "$\bullet$" par l'action naturelle du groupe de Lie $\mathbb{D}$ sur l'algèbre de Lie des torseurs $\mathfrak{D}$.

2.2 Algèbre de Lie des torseurs

2.2.1 Rappels – Définitions – Notations

Notons $\mathcal{E}$ l'espace géométrique affine et E l'espace vectoriel associé. Dans cette section, nous allons, d'une part rappeler, la terminologie de base et les propriétés immédiates de la notion de torseur et, d'autre part, définir les notations dans lesquels nous allons travailler:

[1] Le lecteur pourra se rapporter à l'annexe A.



L'action de "déplacement" est l'opération qui permet un changement de configurations d'un corps tout en restant dans l'hypothèse du solide rigide. Ainsi:

- Un changement de configurations $[r \longrightarrow s_2]$ est indépendant du chemin suivi pour atteindre la configuration finale s_2.
- Si on applique à un corps rigide $\mathcal{C}$ un déplacement D_1, pour remettre $\mathcal{C}$ dans sa configuration initiale; il suffit de lui appliquer l'opération inverse ${D_1}^{-1}$;
- La composée $D_2\,D_1$ de deux déplacements D_2 et D_1 est également un déplacement;
- On convient qu'il existe un déplacement e qui laisse fixe toute configuration de solide rigide. C'est l'élément neutre du groupe des déplacements.

Ainsi, le groupe de Lie des déplacements euclidiens, pourra être interprété, comme le groupe de transformations de la variété différentielle $\mathcal{S}$ des configurations spatiales d'un corps rigide.

Fig. 2.1: Action du groupe $\mathbb{D}$ sur l'ensemble des configurations $\mathcal{S}$

- On appelle champ de vecteurs toute application X de $\mathcal{E}$ sur E.
- Un champ de vecteurs X est équiprojectif, s'il vérifie la condition:

$$X(M).\overrightarrow{MN} = X(N).\overrightarrow{MN}\,; \quad \forall M,\ N\ \in \mathcal{E}$$

- Pour tout champ équiprojectif (ou torseur) X, il existe un vecteur ω_X tel que:

$$X(M) = X(N) + \omega_X \times \overrightarrow{NM}\,; \quad \forall M,\ N\ \in \mathcal{E}$$

Les vecteurs ω_X et $X(M)$ sont dits les éléments de réduction du torseur X au point M. Il sont dits respectivement vecteur résultant et moment du torseur X. De plus, la donnée de la paire $\{\omega_X, X(M)\}$ en un point M de $\mathcal{E}$ caractérise de façon unique le torseur X. Nous allons noter, dans la suite, $\mathfrak{D}$ l'ensemble de tous les torseurs.

- La magnitude du torseur X est la norme de son vecteur résultant (i.e $\mathsf{m}(X) = \| \omega_X \|$) pour la norme "$\| \,.\, \|$" associée au produit scalaire "." sur E.

- On appelle forme bilinéaire de Klein des torseurs X et Y et on note $[X/Y]$, la forme $\boldsymbol{R}$–bilinéaire symétrique définie par: $[X/Y] = \omega_X.Y(M) + X(M).\omega_Y$.

- Les torseurs élémentaires sont les torseurs isotropes pour la forme de Klein (i.e. tels que $[X/X] = 0$). Il existe deux types de torseurs isotropes pour la forme de Klein:

    - On appelle torseur constant ou couple un torseur dont le vecteur résultat est nul. On notera $\mathfrak{t}$ l'ensemble des torseurs constant.

    - On appelle glisseur un torseur tel qu'il existe un point $M \in \mathcal{E}$ qui annule son moment. On notera $\mathfrak{g}$ l'ensemble de tous les glisseurs de $\mathfrak{D}$.

- En tout point M de l'espace affine $\mathcal{E}$, tout torseur X se décompose de façon unique en un torseur constant et un glisseur. De plus, soit $\mathfrak{c}_M = \{X \in \mathfrak{D}/X(M) = 0\}$, l'ensemble $\mathfrak{c}_M$ est un sous-espace vectoriel de $\mathfrak{D}$ sur $\boldsymbol{R}$ et $\mathfrak{D} = \mathfrak{c}_M \oplus \mathfrak{t}$. Cette décomposition est dite dcomposition canonique de $\mathfrak{D}$ au point M.

- Si $X \in \mathfrak{D} \setminus \mathfrak{t}$, on appelle pas[2] du torseur X l'application de $\mathfrak{D}$ dans $\boldsymbol{R}$ définie par:

$$\mathsf{p}(X) = \frac{[X/X]}{2\,\mathsf{m}(X)^2}$$

- Si $X \in \mathfrak{D} \setminus \mathfrak{t}$, on appelle axe central du torseur X que nous noterons Λ_X l'ensemble des points de $\mathcal{E}$ tels que les éléments de réductions de X soient colinéaires.

- On note opérateur Ω, l'opérateur défini dans $\mathfrak{D}$, qui à un torseur X associe le torseur constant de moment: $\Omega X\,(M) = \omega_X\,; \quad \forall\, M \in \mathcal{E}$.

- L'image et le noyau de l'opérateur Ω sont confondus: $Im\,\Omega = Ker\,\Omega = \mathfrak{t}$ (i.e $\Omega^2 = 0$).

2.2.2 Structure d'algèbre de Lie de l'espace vectoriel des torseurs

On associe, généralement, au groupe de Lie des déplacements euclidiens $\mathbb{D}$, l'algèbre de Lie des torseurs $\mathfrak{D}$ munie du crochet de Lie.

[2] Traduction anglaise: "pitch".

Théorème et définition 2.1

L'application bilinéaire $(X,Y) \mapsto [X,Y]$ *définie par*[3]*:*

$$[X,Y](M) = \omega_X \times Y(M) + X(M) \times \omega_Y \; ; \; \forall M \in \mathcal{E} \qquad \text{(Eq.2.1)}$$

muni l'espace vectoriel $\mathfrak{D}$ *de la structure d'algèbre de Lie.*

Preuve :

$\mathfrak{D}$ est un espace vectoriel. Il est évident que le crochet "[,]", défini par la relation (Eq.2.1), est une application bilinéaire, antisymétrique. Un calcul simple permet de montrer que le crochet de Lie "[,]" vérifie l'identité de Jacobi (i.e. $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0; \;\; \forall X, Y, Z \in \mathfrak{D}$). ∎

2.2.3 Multiplication des torseurs par les nombres duaux

Considérons maintenant l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathfrak{D})$ des opérateurs linéaires sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{D}$. La notion d'opérateurs cylindriques[4] va établir une interprétation, en terme d'opérateurs linéaires, de la multiplication de torseurs par des nombres duaux.

Définition 2.1

Nous appellerons opérateur cylindrique tout opérateur linéaire de $\mathcal{L}(\mathfrak{D})$ *de la forme:*

$$\Sigma_{\alpha,a} = \alpha\, id + a\,\Omega \qquad \text{(Eq.2.2)}$$

où α *et* a *sont des réels quelconques.*

Soit $\Sigma(\mathfrak{D})$ l'ensemble des opérateurs cylindriques. Il est clair que cet ensemble est un sous anneau et un $\boldsymbol{R}$-sous-espace vectoriel (i.e. sous-algèbre) de $\mathcal{L}(\mathfrak{D})$. De plus $\Sigma(\mathfrak{D})$ et Δ sont isomorphes (par l'isomorphisme d'anneaux $\Sigma_{\alpha,a} \mapsto \alpha + \varepsilon\, a$).

Ainsi, la multiplication d'un torseur X par un nombre dual $\alpha + \varepsilon\, a$, s'identifie à l'image du torseur X par l'opérateur cylindrique $\Sigma_{\alpha,a}$. On écrira:

$$(\alpha + \varepsilon\, a)\, X \equiv \Sigma_{\alpha,a}\, X = \alpha\, X + a\,\Omega\, X$$

2.3 Représentation duale des torseurs

2.3.1 Opérateur de réduction d'un torseur en un point

Dans ce paragraphe, nous allons définir l'opérateur de réduction d'un torseur en un point et les propriétés qu'implique une telle opération sur la manipulation des torseurs.

---

[3]Dans la suite, nous préférerons la relation:

$$[X,Y](M) = \omega_X \times Y(M) - \omega_Y \times X(M)$$

à la relation (Eq.2.1), pour des raisons de symétrie du calcul symbolique sur les structures duales. En effet, cette remarque fera l'objet de la proposition 2.2 [page 36].

[4]J'ai choisi l'appellation *opérateur cylindrique* parce que, comme on va le voir plus tard, les générateurs infinitésimaux des déplacements cylindriques (composition d'une rotation et d'une translation de même axe) se ramènent à l'image d'un glisseur unitaire par de tels opérateurs.

Définition 2.2

Soit O un point quelconque de l'espace euclidien affine $\mathcal{E}$. Nous appellerons opérateur de réduction au point O, l'application définie par:

$$\begin{array}{rccl} \mathfrak{r}_O : & \mathfrak{D} & \rightarrow & \widetilde{E} \\ & X & \mapsto & \omega_X + \varepsilon X(O) \end{array}$$

Pour alléger les notations nous désignerons par X_O, le vecteur dual image du torseur X par l'application $\mathfrak{r}_O$.

Proposition 2.2

Soit O un point quelconque de l'espace euclidien affine $\mathcal{E}$. Alors:

i) L'opérateur de réduction $\mathfrak{r}_O$ est un isomorphisme de Δ-modules.

ii) Si "$\times$" désigne le produit vectoriel sur le Δ-module $\widetilde{E}$. Alors:

$$\mathfrak{r}_O([X,Y]) = \mathfrak{r}_O(X) \times \mathfrak{r}_O(Y) \,;\; \forall X, Y \in \mathfrak{D} \qquad \text{(Eq.2.3)}$$

Preuve :

Montrons d'bord la proposition i). Il est évident que $\mathfrak{D}$ est un Δ-module et que $\mathfrak{r}_O$ est un homomorphisme de Δ-modules. Montrons que cet homomorphisme est bijectif:

Soit un vecteur dual $u \in \widetilde{E}$. Nous savons que tout torseur est défini d'une manière unique par la donnée de ses éléments de réduction en un point de l'espace euclidien affine $\mathcal{E}$. Ainsi, il existe un unique torseur X de $\mathfrak{D}$ tel que: $\omega_X = Re(u)$, $X(O) = Du(u)$. Cela signifie que l'homomorphisme $\mathfrak{r}_O$ est bijectif. Ce qui montre la relation la proposition i).

Ensuite, pour montrer la proposition ii), il suffit de voir que d'après la relation (Eq.2.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} Re\,[X,Y]_O = \omega_{[X,Y]} = \omega_X \times \omega_Y = Re\,X_O \times Re\,Y_O \\ \\ Du\,[X,Y]_O = [X,Y]\,(O) = \omega_X \times Y(O) + X(O) \times \omega_Y = Re\,X_O \times Du\,Y_O + Du\,X_O \times Re\,Y_O \end{array} \right.$$

Ce qui montre la relation la proposition ii. ∎

Ainsi, d'après les propositions 1.8 [page 24] et 2.2.i, nous avons le résultat suivant:

Corollaire 2.3

Le Δ-module $(\mathfrak{D}, +, .)$ est libre de dimension trois.

2.3.2 Produit scalaire dual sur le Δ-module des torseurs

Théorème et définition 2.4

La structure de Δ-module libre de $\mathfrak{D}$ peut être munie d'une forme Δ-bilinéaire:

$$\{X/Y\} = \omega_X . \omega_Y + \varepsilon\,[X/Y] \qquad \text{(Eq.2.4)}$$

qui sera dite produit scalaire dual sur $\mathfrak{D}$.

Preuve :

Il est clair que "$\{./.\}$" est une forme R-bilinéaire. De plus elle est symétrique, puisque le produit scalaire sur E des vecteurs résultants et la forme de Klein le sont (somme de deux fonctions symétriques). La linéarité par rapport à l'addition étant évidente, il reste à montrer que si $x = \alpha + \varepsilon\, a$, alors, $\{x\, X/Y\} = x\,\{X/Y\}$. En effet:

$$\{x\, X/Y\} = \alpha\,\{X/Y\} + a\,\{\varepsilon\, X/Y\} = \alpha\,\{X/Y\} + a\,\varepsilon\,\omega_X\,\omega_Y = x\,\{X/Y\}$$

d'où le résultat. ∎

Proposition 2.5

Soient X, Y, Z trois torseurs de $\mathfrak{d}$, alors, le double crochet de Lie s'exprime par la relation:

$$[[X,Y],Z] = \{X/Z\}\, Y - \{Y/Z\}\, X \qquad \text{(Eq.2.5)}$$

La démonstration de cette proposition découle directement de la relation (Eq.1.31) en prenant pour vecteurs duaux les image par $\mathfrak{r}_O$ des torseurs X, Y, Z en un point quelconque $O \in \mathcal{E}$ [page 26].

2.3.3 Pseudo-norme sur le Δ–module des torseurs

Nous pouvons, ainsi définir une certaine pseudo-norme duale (pseudo-norme euclidienne), issue du produit scalaire dual sur l'ensemble $\mathfrak{d} \setminus \mathfrak{t}$ (i.e. l'ensemble des torseurs non constants) par:

$$\| X \|_{\mathfrak{d}} = \begin{cases} \sqrt{\{X/X\}}\,; & \forall X \in \mathfrak{d} \setminus \mathfrak{t} \\ 0 \quad \text{si } X = 0 \end{cases} \qquad \text{(Eq.2.6)}$$

Proposition 2.6

Si X est un torseur non constant, alors, la pseudo-norme euclidienne de X s'exprime par la relation[5]:

$$\| X \|_{\mathfrak{d}} = \mathfrak{m}(X)\,[1 + \varepsilon\,\mathfrak{p}(X)]\,;\ \forall X \in \mathfrak{d} \setminus \mathfrak{t} \qquad \text{(Eq.2.7)}$$

La démonstration est simple, elle consiste à appliquer la relation (Eq.1.15) avec la fonction "$\sqrt{\ \ }$" et le nombre dual $x = \{X/X\}$.

2.3.4 Produit mixte dual de torseurs

Théorème et définition 2.7

Nous appellerons produit mixte dual la forme Δ-tri-linéaire alternée définie par:

$$(X,Y,Z) \mapsto \{X/\,[Y,Z]\}$$

Cette application vérifie:

$$\{X/\,[Y,Z]\} = \{Z/\,[X,Y]\} = \{Y/\,[Z,X]\} \qquad \text{(Eq.2.8)}$$

[5]Cette pseudo-norme peut être obtenue aussi à partir de la pseudo-norme euclidienne sur Δ^3 [page 1.4.2] par la relation:

$$\| X \|_{\mathfrak{d}} = \| X_O \|_{\Delta}\,;\ \forall O \in \mathcal{E}$$

Preuve :

La démonstration de la partie théorème de cet énoncé est triviale. Elle découle des propriétés du produit mixte sur $\widetilde{E}$, compte tenu de la proposition 2.2.i puisque $\{X/[Y,Z]\} = X_O \times (Y_O \times Z_O)$, pour tout point $O \in \mathcal{E}$. ∎

2.3.5 Torseurs unitaires et torseurs orthogonaux

Définition 2.3

Nous appellerons torseur unitaire tout torseur $X \in \mathfrak{D}$, tel que:

$$\| X \|_{\mathfrak{d}} = 1 \qquad \text{(Eq.2.9)}$$

Il paraît donc clair qu'un torseur unitaire est nécessairement un glisseur -de pas égal à zéro- de magnitude égale à un.

A ce stade du développement, on peut logiquement se poser les questions suivantes:

- Quelles sont les relations entre les bases ortho-normales du Δ–module libre $\mathfrak{D}$ et les bases de la structure de R-espace vectoriel de $\mathfrak{D}$.
- Comment sont construites les bases ortho-normales "directes" du Δ–module libre $\mathfrak{D}$ de dimension trois (muni de "$\{./.\}$" et du produit mixte)?
- Comment est construit le "groupe orthogonal" de $\mathfrak{D}$, muni du produit intérieur dual "$\{./.\}$"?

C'est le propos des deux sections suivantes.

2.4 Famille fondamentale de l'algèbre de Lie des torseurs

Nous allons définir dans ce paragraphe une notion qui peut être interprétée de plusieurs façons[6] selon la structure associée à $\mathfrak{D}$. Cette notion va permettre, ainsi, la paramétrisation de l'algèbre de Lie des torseurs $\mathfrak{D}$ et, par la suite, la paramétrisation du groupe des déplacements $\mathbb{D}$.

Théorème 2.8

Considérons l'algèbre de Lie des torseurs $\mathfrak{D}$:

(a) Si $X \in \mathfrak{D} \setminus \mathfrak{t}$ et $\mathfrak{p}(X) = 0$, alors, X s'annule sur son axe central Λ_X.

(b) Si $X, Y \in \mathfrak{D} \setminus \mathfrak{t}$ tels que $\mathfrak{p}(X) = \mathfrak{p}(Y) = 0$, alors:

$$[X/Y] = 0 \iff (\Lambda_X \text{ et } \Lambda_Y \text{ sont coplanaires.}) \qquad \text{(Eq.2.10)}$$

en particulier si $\omega_X \times \omega_Y \neq 0$ (i.e. $[X,Y] \notin \mathfrak{t}$), les axes Λ_X et Λ_Y se coupent.

[6] Voir les théorème 2.9 et 2.10 [page 39–40].

Preuve :

La proposition *(a)* est évidente. Il reste à montrer la proposition *(b)*:

or, dire que les pas des torseurs X et Y sont nuls, signifie que tous les deux sont des glisseurs. Considérons un point O fixe de l'axe Λ_Y, d'après la proposition *(a)*:

$$\forall M \in \Lambda_X : \quad [X/Y] = \omega_X.(\omega_Y \times \overrightarrow{OM}) = 0$$

i.e. $\overrightarrow{OM}.(\omega_X \times \omega_Y) = 0$. Donc, nous avons deux cas à examiner:

- si $\omega_X \times \omega_Y = 0$, alors, les axes Λ_X et Λ_Y sont parallèles, ils sont donc coplanaires.
- si $\omega_X \times \omega_Y \neq 0$, alors, les axes Λ_X et Λ_Y ne peuvent pas être parallèles. De plus $\overrightarrow{OM}.(\omega_X \times \omega_Y) = 0$ signifie que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$, ω_X et ω_Y sont coplanaires. i.e. le point M appartient au plan (O, ω_Y, ω_X) (qui contient l'axe Λ_Y). Ceci étant pour tout point M de l'axe Λ_X, les axes Λ_X et Λ_Y sont donc coplanaires.

Ce qui montre le théorème. ∎

Définition 2.4

Nous appellerons famille fondamentale de l'algèbre de Lie $\mathfrak{d}$; un triplet de torseurs (ξ, η, ζ) non nuls, tels qu'ils vérifient les trois conditions suivantes:

$$[\xi, \eta] = \zeta \,, \ [\eta, \zeta] = \xi \,, \ [\zeta, \xi] = \eta \qquad \text{(Eq.2.11)}$$

Dans la suite les conditions (Eq.2.11) seront dites conditions d'ortho-orientation de la famille fondamentale.

Définition 2.5

On considère le Δ-module libre $\mathfrak{d}$ muni du produit "$\{./.\}$" et du produit mixte. Soit $\mathfrak{f} = (\xi, \eta, \zeta)$ une famille ortho-normale de $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{f}$ sera dite directe, si et seulement si:

$$Re \ \{[\xi, \eta] / \zeta\} > 0 \qquad \text{(Eq.2.12)}$$

Théorème 2.9

Soit un triplet de torseurs (ξ, η, ζ) de $\mathfrak{d}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(a) (ξ, η, ζ) *est une base du Δ-module libre* $\mathfrak{d}$;

(b) $(\xi, \eta, \zeta, \Omega\,\xi, \Omega\,\eta, \Omega\,\zeta)$ *est une base du $\boldsymbol{R}$-espace vectoriel* $\mathfrak{d}$;

(c) $(\Omega\,\xi, \Omega\,\eta, \Omega\,\zeta)$ *est une partie libre sur $\boldsymbol{R}$ (i.e. $(\Omega\,\xi, \Omega\,\eta, \Omega\,\zeta)$ est une base de $\mathfrak{t}$)*[7].

Preuve :

[7]Notons que cela veut dire aussi que, tout simplement, $(\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta)$ est une base de l'espace vectoriel euclidien E.

- $\boxed{(a) \Longrightarrow (b)}$
  Soient $\alpha, \beta, \gamma, a, b$ et c six nombres réels, la relation: $\alpha\,\xi + \beta\eta + \gamma\,\zeta + a\,\Omega\,\xi + b\,\Omega\,\eta + c\,\Omega\,\zeta = 0$ équivaut à: $(\alpha + \varepsilon\,a)\,\xi + (\beta + \varepsilon\,b)\,\eta + (\gamma + \varepsilon\,c)\,\zeta = 0$ (une combinaison linéaire à cœfficients dans Δ). Si la proposition (a) est vérifiée, cela implique: $\alpha + \varepsilon\,a = \beta + \varepsilon\,b = \gamma + \varepsilon\,c = 0$ et donc: $\alpha = \beta = \gamma = a = b = c = 0$.

- $\boxed{(b) \Longrightarrow (c)}$
  Cette implication est triviale, puisque toute partie d'une base est une famille libre.

- $\boxed{(c) \Longrightarrow (a)}$
  La combinaison linéaire: $(\alpha + \varepsilon\,a)\,\xi + (\beta + \varepsilon\,b)\,\eta + (\gamma + \varepsilon\,c)\,\zeta = 0$ implique (en multipliant les deux membres par ε): $\varepsilon\,\alpha\,\xi + \varepsilon\,\beta\,\eta + \varepsilon\,\gamma\,\zeta = \alpha\,\Omega\,\xi + \beta\,\Omega\,\eta + \gamma\,\Omega\,\zeta = 0$ et, d'après (c) $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Il reste alors: $a\,\Omega\,\xi + b\,\Omega\,\eta + c\,\Omega\,\zeta = 0$, d'où par le même raisonnement: $a = b = c = 0$.

Ce qui prouve l'équivalence entre les proposition (a), (b) et (c). ∎

Théorème 2.10

Soit un triplet de torseurs (ξ, η, ζ) de $\mathfrak{D}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(a) (ξ, η, ζ) est une famille fondamentale de $\mathfrak{D}$;

(b) (ξ, η, ζ) est une base directe du Δ-module libre $\mathfrak{D}$;

(c) il existe un repère ortho-normé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que les torseurs ξ, η et ζ soient déterminés par:

$$\left\{\begin{array}{ll} \xi(M) = & \vec{i} \times \overrightarrow{OM}, \\ \eta(M) = & \vec{j} \times \overrightarrow{OM}, \\ \zeta(M) = & \vec{k} \times \overrightarrow{OM} \end{array}\right. \quad ; \ \forall M \in \mathcal{E} \tag{Eq.2.13}$$

De plus, dans ces conditions:

$$\{[\xi, \eta] / \zeta\} = 1 \tag{Eq.2.14}$$

∎ Preuve :

- $\boxed{(a) \Longrightarrow (b)}$
  A priori, (ξ, η, ζ) étant une base du Δ-module libre $\mathfrak{D}$, il existe a, b, $c \in \Delta$ tels que: $[\xi, \eta] = a\,\xi + b\,\eta + c\,\zeta$ cette base étant ortho-normale, alors:

  $$\{\xi/[\xi,\eta]\} = a\{\xi/\xi\} = 0\,, \ \{\eta/[\xi,\eta]\} = b\{\eta/\eta\} = 0\,, \ \{\zeta/[\xi,\eta]\} = c\{\zeta/\zeta\} = c\,.$$

  ainsi, $[\xi, \eta] = c\,\zeta$ avec $c = \{\zeta / [\xi, \eta]\}$
  et plus généralement $[\xi, \eta] = c\,\zeta$; $[\eta, \zeta] = c\,\xi$; $[\zeta, \xi] = c\,\eta$ (avec le même c).

On en déduit alors: $[\eta, [\xi, \eta]] = c\,[\eta, \zeta] = c^2\,\xi$ et d'après la formule (Eq.2.5) du double crochet de Lie:

$$[\eta, [\xi, \eta]] = \{\eta/\eta\}\,\xi - \{\eta/\xi\}\,\eta = \xi$$

finalement: $\xi = c^2\,\xi$ d'où $c^2 = 1$ et comme $Re\,c = Re\,\{\zeta/[\xi, \eta]\} > 0$, alors: $c = 1$.

- $\boxed{(b) \Longrightarrow (a)}$
  La relation (b) entraîne, d'une part, que: $\{\xi/\eta\} = \{\eta/\zeta\} = \{\zeta/\xi\} = 0$
  et, d'autre part: $\{\xi, \xi\} = \{\eta, \eta\} = \{\zeta, \zeta\} = \{\zeta/\{\xi, \eta\}\} = c$
  et

$$\begin{aligned}\{\xi, \xi\} &= \{[\xi, \eta]\,/\,[\xi, \eta]\} \\ &= \{[\xi, [\eta, \xi]]\,/\eta\} \\ &= \{\xi, \xi\}\ \{\eta, \eta\} - \{\xi/\eta\}\ \{\xi/\eta\} \\ &= \{\xi, \xi\}\ \{\eta, \eta\}\end{aligned}$$

  d'où $c = c^2$ et l'on a deux solutions possibles (dans Δ); à savoir $c = 0$ et $c = 1$.
  Or, si $c = 0$ alors: $\xi = \eta = \zeta = 0_{\mathfrak{D}}$ (ce qui est exclu par hypothèse). Donc, $c = 1$ et en conséquence la famille (ξ, η, ζ) forme une base ortho-normale du Δ–module libre $\mathfrak{D}$.

- $\boxed{(a) \Longrightarrow (c)}$
  Les relations exprimant l'ortho-normalité de la famille (ξ, η, ζ) impliquent que:

  - les vecteurs sommes: $\vec{i} = \omega_\xi\,; \vec{j} = \omega_\eta\,; \vec{k} = \omega_\zeta$ forment une base ortho-normale de l'espace vectoriel réel de dimension trois E;
  - les parties duales: $[\xi/\xi] = [\eta/\eta] = [\zeta/\zeta] = 0$. Cela implique que les axes Λ_ξ, Λ_η et Λ_ζ sont deux à deux sécants et deux à deux orthogonaux. Ces axes se coupent en un même point $O \in \mathcal{E}$ et $\xi(O) = \eta(O) = \vec{0}$, or nous avons montrer que $(\vec{i} \times \vec{j}).\vec{k} = Re\,\{\zeta/[\xi, \eta]\} > 0$, donc, le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère ortho-normé direct de l'espace euclidien orienté $\mathcal{E}$.
  - $\boxed{(c) \Longrightarrow (a)}$
    La démonstration de cette implication découle d'un calcul immédiat.

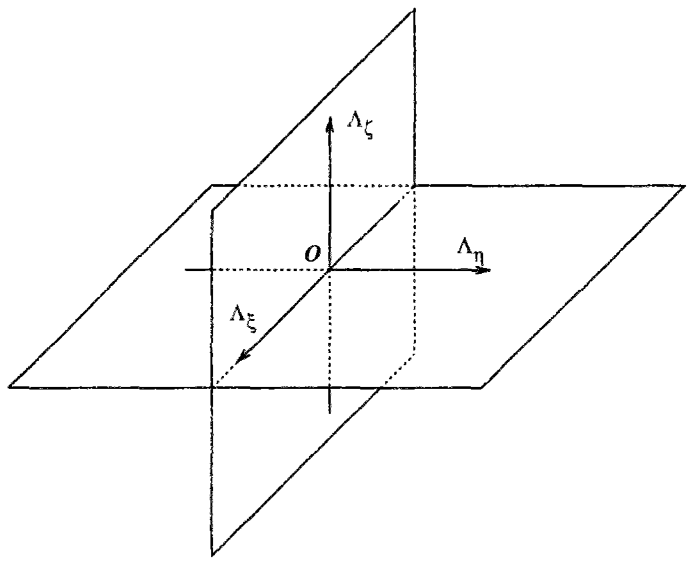
Ce qui montre le théorème. ∎

Définition 2.6

Soit $\mathfrak{f} = (\xi, \eta, \zeta)$ une famille fondamentale de l'algèbre de Lie $\mathfrak{D}$. Nous appellerons origine de $\mathfrak{f}$ et nous noterons $\mathsf{o}(\mathfrak{f})$ l'intersection[8] *des axes Λ_ξ, Λ_η et Λ_ζ.*

[8]L'unique point O de $\mathcal{E}$ (Voir le théorème 2.10 [page 40]) tel que:

$$\xi(O) = \eta(O) = \zeta(O) = \vec{0}$$



Cette figure schématise les axes associés à une famille fondamentale. Ces axes forment un trièdre dont l'origine est celui de la famille fondamentale.

Fig. 2.2: Famille fondamentale

2.5 Groupe orthogonal de $\mathfrak{D}$ – Déplacements euclidiens

Le but de cette section est de déterminer le "groupe orthogonal" de $\mathfrak{D}$ et caractériser les déplacements euclidiens en tant qu'opérateurs sur $\mathfrak{D}$.

Théorème 2.11

Soit une application $F : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ ensembliste à priori. Les deux propositions suivantes sont équivalentes:

(a) F est un endomorphisme qui conserve la pseudo-norme "$\| \,.\, \|_{\mathfrak{D}}$".

(b) F conserve le produit scalaire dual sur le Δ-module libre $\mathfrak{D}$.

Une telle application est nécessairement bijective et elle détermine une isométrie du Δ-module libre $\mathfrak{D}$.

Preuve :

- $\boxed{(a) \Longrightarrow (b)}$

  Considérons deux torseurs arbitraires X et Y:$\{F(X)+F(Y)/F(X)+F(Y)\} = \| F(X) \|_{\mathfrak{D}}^2$ $+ \| F(Y) \|_{\mathfrak{D}}^2 + 2\,\{F(X)/F(Y)\}$ et comme F est linéaire, alors:

$$\begin{aligned}\{F(X)/F(Y)\} &= \frac{1}{2}\left[\| F(X)+F(Y) \|_{\mathfrak{D}}^2 - \| F(X) \|_{\mathfrak{D}}^2 - \| F(Y) \|_{\mathfrak{D}}^2\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\| F(X+Y) \|_{\mathfrak{D}}^2 - \| F(X) \|_{\mathfrak{D}}^2 - \| F(Y) \|_{\mathfrak{D}}^2\right]\end{aligned}$$

  et d'après (a) on a: $\{F(X)/F(Y)\} = \frac{1}{2}\left[\| X+Y \|_{\mathfrak{D}}^2 - \| X \|_{\mathfrak{D}}^2 - \| Y \|_{\mathfrak{D}}^2\right] = \{X/Y\}$.

- $\boxed{(b) \Longrightarrow (a)}$

  Soit (ξ,η,ζ) une base ortho-normale du Δ–module libre $\mathfrak{D}$. Comme F conserve le produit scalaire, alors:

$$\left\{\begin{array}{llll}\{F(\xi)/F(\xi)\} = & \{F(\eta)/F(\eta)\} = & \{F(\zeta)/F(\zeta)\} = & 1\\ \{F(\xi)/F(\eta)\} = & \{F(\eta)/F(\zeta)\} = & \{F(\xi)/F(\zeta)\} = & 0\end{array}\right. \qquad \text{(Eq.2.15)}$$

  $(F(\xi), F(\eta), F(\zeta))$ est une famille de trois glisseurs unitaires deux à deux orthogonaux, donc elle définit également une base ortho-normale de $\mathfrak{D}$ (cela découle du corollaire 2.3 et du fait que l'anneau Δ est commutatif). Maintenant:

$$\left\{\begin{array}{lll}\{F(x\,\xi+y\,\eta+z\,\zeta)/F(\xi)\} = & \{x\,\xi+y\,\eta+z\,\zeta/\xi\} = & x\\ \{F(x\,\xi+y\,\eta+z\,\zeta)/F(\eta)\} = & \{x\,\xi+y\,\eta+z\,\zeta/\eta\} = & y\\ \{F(x\,\xi+y\,\eta+z\,\zeta)/F(\zeta)\} = & \{x\,\xi+y\,\eta+z\,\zeta/\zeta\} = & z\end{array}\right.$$

  donc $F(x\,\xi+y\,\eta+z\,\zeta) = x\,F(\xi)+y\,F(\eta)+z\,F(\zeta)$ et F est alors Δ–linéaire. Par ailleurs, d'après (b) on a: $\{F(X)/F(X)\} = \{X/X\}$, donc $\| F(X) \|_{\mathfrak{D}} = \| X \|_{\mathfrak{D}}$.

ce qui montre le théorème. ∎

Ce théorème caractérise le groupe orthogonal du Δ-module libre $\mathfrak{D}$.

Corollaire 2.12

Soit $F : \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ ensembliste à priori. Les deux propositions suivantes sont équivalentes:

(a) F conserve le produit scalaire dual et le produit mixte sur le Δ-module libre $\mathfrak{D}$.

(b) Il existe un déplacement euclidien $\boldsymbol{D}$ de $\mathbb{D}$, tel que:

$$F = \boldsymbol{D}_* \qquad \text{(Eq.2.16)}$$

▌Preuve :

- $\boxed{(b) \Longrightarrow (a)}$

  Elle découle du théorème précédent.

- $\boxed{(a) \Longrightarrow (b)}$
  F conserve le produit mixte, en d'autres termes:

$$\text{si } Re\{[X,Y]/Z\} > 0 \text{ alors } Re\{[F(X),F(Y)]/F(Z)\} = Re\{[X,Y]/Z\} > 0$$

et compte tenu du théorème 2.11, cela implique que F transforme les repères ortho-normés directs de $\mathcal{E}$ en d'autres repères ortho-normés directs de $\mathcal{E}$. Donc, il existe un déplacement $\boldsymbol{D}$ tel que $F = \boldsymbol{D}_*$

∎

2.6 Action du groupe des déplacements à gauche sur $\mathfrak{F}$

Notons par $\mathfrak{F}$ l'ensemble de toutes les familles fondamentales. Nous allons établir dans ce paragraphe des propriétés qui présentent un intérêt capital pour tous les aspects de modélisation et les interprétations ultérieures.

Proposition 2.13
Le groupe $\mathbb{D}$ opère $\mathfrak{F}$ à gauche[9] par l'action "$\diamond$" définie par:

$$\boldsymbol{D} \diamond \mathfrak{f} = (\boldsymbol{D}_*\xi, \boldsymbol{D}_*\eta, \boldsymbol{D}_*\zeta) : \forall \boldsymbol{D} \in \mathbb{D} \text{ et } \forall \mathfrak{f} = (\xi,\eta,\zeta) \in \mathfrak{F} \qquad \text{(Eq.2.17)}$$

▌Preuve :

Il suffit de montrer que d'une part l'ensemble $\mathfrak{F}$ de toutes les familles fondamentales reste stable par l'opération "$\diamond$" et que d'autre part $\boldsymbol{D}$ opère à gauche de $\mathfrak{F}$. En effet:

- Considérons une famille fondamentale $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F}$ et un déplacement euclidien $\boldsymbol{D} \in \mathbb{D}$ à priori arbitraires:

$$\begin{cases} [\xi,\eta] = \zeta \\ [\eta,\zeta] = \xi \\ [\zeta,\xi] = \eta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{D}_*[\xi,\eta] = \boldsymbol{D}_*\zeta \\ \boldsymbol{D}_*[\eta,\zeta] = \boldsymbol{D}_*\xi \\ \boldsymbol{D}_*[\zeta,\xi] = \boldsymbol{D}_*\eta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} [\boldsymbol{D}_*\xi,\boldsymbol{D}_*\eta] = \boldsymbol{D}_*\zeta \\ [\boldsymbol{D}_*\eta,\boldsymbol{D}_*\zeta] = \boldsymbol{D}_*\xi \\ [\boldsymbol{D}_*\zeta,\boldsymbol{D}_*\xi] = \boldsymbol{D}_*\eta \end{cases}$$

  ce qui montre que $\boldsymbol{D} \diamond \mathfrak{f}$ est bien une famille fondamentale.

- Par ailleurs:

  - soit $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F}$ (quelconque), si e désigne l'élément neutre du groupe $\mathbb{D}$, alors, $e_* = \mathbb{1}$ et, donc, $e \diamond \mathfrak{f} = \mathfrak{f}$.
  - pour tout déplacement $\boldsymbol{D}$, l'application $\mathfrak{f} \mapsto \boldsymbol{D} \diamond \mathfrak{f}$ est bijective. En effet, son inverse est l'application $\mathfrak{f} \mapsto \boldsymbol{D}^{-1} \diamond \mathfrak{f}$.

[9] Voir Annexe A [pp. 214-215].

∘ Posons, maintenant, $\mathfrak{f} = (\xi, \eta, \zeta)$ et considérons deux déplacements $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ quelconques du groupe $\mathbb{D}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} \diamond (\boldsymbol{B} \diamond \mathfrak{f}) &= \boldsymbol{A} \diamond (\boldsymbol{B}_* \xi, \boldsymbol{B}_* \eta, \boldsymbol{B}_* \zeta) \\
&= (\boldsymbol{A}_*(\boldsymbol{B}_* \xi), \boldsymbol{A}_*(\boldsymbol{B}_* \eta), \boldsymbol{A}_*(\boldsymbol{B}_* \zeta)) \\
&= ((\boldsymbol{A}_* \circ \boldsymbol{B}_*) \xi, (\boldsymbol{A}_* \circ \boldsymbol{B}_*) \eta, (\boldsymbol{A}_* \circ \boldsymbol{B}_*) \zeta) \\
&= ((\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})_* \xi, (\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})_* \eta, (\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})_* \zeta) \\
&= (\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}) \diamond \mathfrak{f}
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\mathbb{D}$ opère à gauche de $\mathfrak{F}$ par l'opération "$\diamond$". ∎

Théorème 2.14
L'ensemble $(\mathfrak{F}, \mathbb{D}, \diamond)$ est un espace homogène sans points fixes.

∎ Preuve :

Il s'agit de montrer que: $\forall\, \mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2 \in \mathfrak{F},\ \exists!\ \boldsymbol{D} \in \mathbb{D}$ tel que: $\mathfrak{f}_2 = \boldsymbol{D} \diamond \mathfrak{f}_1$.

- **<u>Existence:</u>** Ecrivons d'abord: $\mathfrak{f}_1 = (\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ et $\mathfrak{f}_2 = (\xi_2, \eta_2, \zeta_2)$ et considérons l'application $F \in \mathcal{L}(\mathfrak{D})$ définie par sa matrice duale:

$$[F] = \begin{pmatrix} \{\xi_2/\xi_1\} & \{\eta_2/\xi_1\} & \{\zeta_2/\xi_1\} \\ \{\xi_2/\eta_1\} & \{\eta_2/\eta_1\} & \{\zeta_2/\eta_1\} \\ \{\xi_2/\zeta_1\} & \{\eta_2/\zeta_1\} & \{\zeta_2/\zeta_1\} \end{pmatrix}$$

L'application F est visiblement orthogonale pour le produit scalaire "$\{./.\}$" (sa matrice est duale orthogonale), donc F conserve le produit scalaire dual et le produit mixte dual. Donc, compte tenu du corollaire 2.12, il existe un déplacement $\boldsymbol{D} \in \mathbb{D}$ tel que: $F = \boldsymbol{D}_*$. De plus, $F(\xi_1) = \{\xi_2/\xi_1\}\,\xi_1 + \{\xi_2/\eta_1\}\,\eta_1 + \{\xi_2/\zeta_1\}\,\zeta_1 = \xi_2$. De même, $F(\eta_1) = \eta_2$ et $F(\zeta_1) = \zeta_2$. Donc, $\mathfrak{f}_2 = \boldsymbol{D} \diamond \mathfrak{f}_1$

- **<u>Unicité:</u>** Supposons qu'il existe deux déplacements $\boldsymbol{D}_1$ et $\boldsymbol{D}_2$ tels que:

$$\mathfrak{f}_2 = \boldsymbol{D}_1 \diamond \mathfrak{f}_1 = \boldsymbol{D}_2 \diamond \mathfrak{f}_1$$

Donc: $({\boldsymbol{D}_2}^{-1}\boldsymbol{D}_1) \diamond \mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f}_1$, ainsi, $\forall X \in \mathfrak{D}$: $({\boldsymbol{D}_2}^{-1}\boldsymbol{D}_1)_* X = X$ i.e. ${\boldsymbol{D}_2}^{-1}\boldsymbol{D}_1 = e$.

Ce qui achève la démonstration. ∎

2.7 Isomorphie de $(\mathcal{S}, \mathbb{D}, \bullet)$ et $(\mathfrak{F}, \mathbb{D}, \diamond)$

L'idée que nous développons dans cette section consiste à adjoindre à une configuration s donnée du solide, une famille fondamentale $\mathfrak{f}$ qui en soit rigidement solidaire. Cela est justifié par le fait que $(\mathcal{S}, \mathbb{D}; \bullet)$ et $(\mathfrak{F}, \mathbb{D}; \diamond)$ sont des espaces homogènes sans points fixes opérés par le même groupe $\mathbb{D}$ et donc isomorphes [Annexe A, paragraphe A.4.3, page 215]. En effet, *i)* on peut définir une application invariante (ou équivariante) $s \mapsto \mathfrak{f}_s$ de $\mathcal{S}$ dans $\mathfrak{F}$ telle que:

$$\mathfrak{f}_{D \bullet s} = \quad D \diamond \mathfrak{f}_s \qquad \text{(Eq.2.18)}$$

ii) comme les deux espaces sont homogènes sans points fixes, une telle application est bijective (c'est un isomorphisme d'espaces opérés par le groupe $\mathbb{D}$).

iii) si une configuration de référence $\boldsymbol{r} \in \mathcal{S}$ et une famille $\mathfrak{f} \in \mathfrak{F}$, telles que $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}_r$, sont données, alors, il existe un unique isomorphisme, de $(\mathcal{S}, \mathbb{D}; \bullet)$ sur $(\mathfrak{F}, \mathbb{D}; \diamond)$, caractérisé par la relation (Eq.2.18).

Ainsi, l'action de "lier une famille fondamentale à un solide rigide" consiste tout simplement à donner un isomorphisme de $(\mathcal{S}, \mathbb{D}; \bullet)$ sur $(\mathfrak{F}, \mathbb{D}; \diamond)$. Cette façon de voir les choses peut être généralisée à tous les types d'objets "liés à un solide rigide".

2.8 Notion de mouvement de solide rigide – Familles mobiles

Pour décrire en cinématique le mouvement d'un solide ou d'un mécanisme en général, nous allons définir la notion de familles mobiles qui peut être vue comme une abstraction de la notion de repères mobiles[10]. Les calculs associés à la notion de familles mobiles peuvent être décrits par l'action du groupe $\mathbb{D}$ sur l'ensemble $\mathfrak{F}$ des familles fondamentales et donc par l'action des matrices duales de $\mathcal{M}_3(\Delta)$ sur le Δ–module libre Δ^3 de dimension 3 (puisque toute famille fondamentale définie un système de coordonnées sur $\widetilde{E}$).

Définition 2.7
Nous appelons famille mobile toute application de $\boldsymbol{R}$ (ou encore de $[t_0, +\infty[$ en prenant t_0 comme origine des temps) dans l'ensemble $\mathfrak{F}$.

En conséquence, si $\mathfrak{f}_0 \in \mathfrak{F}$ est fixé, il existe une application unique $t \mapsto D(t)$ de $\boldsymbol{R}$ dans $\mathbb{D}$, telle que:

$$\mathfrak{f}(t) = \quad D(t) \diamond \mathfrak{f}_0 \qquad \text{(Eq.2.19)}$$

Cela revient au même de décrire un mouvement du solide rigide à partir de sa trajectoire $t \mapsto s(t) \in \mathcal{S}$ telle que pour une configuration de référence fixe r, $s(t)$ est déterminée par l'application $t \mapsto D(t)$ telle que $s(t) = D(t) \bullet r$ (les deux descriptions sont liées par les isomorphismes évoqués plus haut).

2.9 Exponentielle de torseurs – Générateur infinitésimal d'un déplacement

Au point ou nous en sommes de nos développements, de point de vue théorique, il est tout à fait raisonnable de se contenter d'une vision relativement simple de ce qui peut être appelée application

[10]Nous avons démontré qu'une famille fondamentale est équivalente au trièdre ortho-normé direct formé par les axes centraux des glisseurs qui la composent [Chapitre 2, Théorème 2.10, page 40]. Munir une telle famille d'un mouvement donné revient à munir le repère associé du même mouvement.

exponentielle de torseurs. Cette fonction est définie pour tout groupe de Lie et généralise ainsi la notion d'exponentielle habituelle (sur $\mathbb{C}$) ou encore la fonction exponentielle d'opérateurs. En effet, la théorie générale des groupes et algèbres de Lie permet de définir une telle application à partir de la notion de sous-groupes à un paramètre [Annexe A, paragraphe A.5.2, page 219–220]. Ainsi, si e désigne l'élément neutre du groupe $\mathbb{D}$, pour tout torseur $X \in \mathfrak{D}$; la solution maximale $t \mapsto \Phi_X(t)$ des équations différentielles avec condition initiale:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\Phi(t) = X \circ \Phi(t)\,, \quad \Phi(0) = e \\ \text{ou encore} \\ \dfrac{d}{dt}\Phi(t) = \Phi(t) \circ X\,, \quad \Phi(0) = e \end{array}\right. \qquad \text{(Eq.2.20)}$$

est un sous-groupe à un paramètre engendré par le torseur X. La fonction exponentielle du groupe $\mathbb{D}$ n'est autre que l'application notée "*exp*" telle que: $exp X = \Phi_X(1)$. Il reste, cependant, que cette définition demeure abstraite et il faut bien passer par une représentation adéquate pour décrire les calculs. En effet, un calcul ne peut se faire qu'en termes d'une représentation opératoire. Pour contourner cette difficulté, nous allons définir l'exponentielle de torseurs à partir de l'exponentielle d'opérateurs de $\mathcal{L}(\mathfrak{D})$. Pour une telle définition, nous nous devons de signaler que nous admettons un certain nombre de résultats qui se démontrent de façon générale dans la théorie des groupes et algèbres de Lie[11] à savoir:

i) Dans le groupe $\mathbb{D}$: $\boldsymbol{A}_* = \boldsymbol{B}_* \iff \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

ii) On admet que:

- $\boldsymbol{D} \mapsto \boldsymbol{D}_*$ coïncide avec la représentation adjointe,
- $(exp X)_* = exp(ad X) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ad X)^n}{n!}$.

iii) Soient $\mathfrak{N} = \{X \in \mathfrak{D} / \parallel \omega_X \parallel \notin 2\pi\,\mathbb{N}^*\}$ et $\mathfrak{N}_0 = \{X \in \mathfrak{D} / \parallel \omega_X \parallel < \pi\}$. La restriction de l'application exponentielle à $\mathfrak{N}$ définit un homéomorphisme local de $\mathfrak{N}$ sur un ouvert de $\mathbb{D}$. Sa restriction à $\mathfrak{N}_0$ est un homéomorphisme de $\mathfrak{N}_0$ sur un voisinage ouvert $\mathcal{U}$ de e dans $\mathbb{D}$. L'image par l'application réciproque de tels homéomorphismes définit la notion de "générateur infinitésimal" d'un déplacement. Dans la théorie générale des groupes et algèbres de Lie on parle aussi, d'application logarithme (définie du groupe de Lie dans l'algèbre de Lie). On appelle alors générateur infinitésimal d'un déplacement son image par l'application logarithme.

[11]Pour la démonstration de ces résultat dans le cadre général de la théorie des groupes et algèbres de Lie le lecteur pourra se reporter, par exemple, à la référence [DIE—71].

2.10 Calcul de la représentation adjointe d'un déplacement

Nous proposons ci-après une méthode pour la détermination analytique de la représentation adjointe d'un déplacement quelconque. Cette méthode est purement intrinsèque et indépendante de tout choix du système de coordonnées.

Lemme 2.15
Soit X un torseur de $\mathfrak{d}$. Alors:

(a) Si $X \in \mathfrak{t}$ (i.e. la magnitude de X est nulle), alors, pour $n \geq 2$:

$$(ad\,X)^n = \quad 0 \qquad \text{(Eq.2.21)}$$

(b) Si $X \in \mathfrak{d} \setminus \mathfrak{t}$ (i.e. la magnitude de X est non nulle), alors:

- *pour $n \geq 1$:*

$$(ad\,X)^{2n} = \quad (-1)^{n-1} \; \| X \|_{\mathfrak{d}}^{2n-2} \; (ad\,X)^2 \qquad \text{(Eq.2.22)}$$

- *pour $n \geq 0$:*

$$(ad\,X)^{2n+1} = \quad (-1)^{n} \; \| X \|_{\mathfrak{d}}^{2n} \; ad\,X \qquad \text{(Eq.2.23)}$$

Preuve :

- La démonstration est évidente dans le cas où $X \in \mathfrak{t}$.
- Dans le cas où $X \in \mathfrak{d} \setminus \mathfrak{t}$, la démonstration s'établit donc par récurrence, en calculant d'abord $(ad\,X)^3$ et $(ad\,X)^4$. En effet, d'après la relation du double crochet de Lie:

$$(ad\,X)^3\,Y = ad\,X\,([X,[X,Y]]) = ad\,X\,(\{X/Y\}\,X - \{X/X\}\,Y) = -\{X/X\}\,[X,Y]$$

i.e. $\qquad (ad\,X)^3 = -\{X/X\}\,ad\,X.$

Ensuite, en multipliant chacun des deux membres de cette égalité par $ad\,X$, on obtient la relation $(ad\,X)^4 = -\{X/X\}\,(ad\,X)^2$. Pour le reste il suffit d'exprimer l'hypothèse de récurrence.

Ce qui achève la démonstration du lemme. ∎

Considérons maintenant un déplacement $\boldsymbol{D}$ (par exemple: le déplacement de passage entre deux configurations de l'organe terminal), à priori, à un ou plusieurs degrés de libertés.

Théorème 2.16
Soit un déplacement $\boldsymbol{D} \in \mathbb{D}$ et notons X son générateur infinitésimal. Alors:

- *Si $X \in \mathfrak{t}$ (i.e. la magnitude de X est nulle), alors:*

$$\boldsymbol{D}_* = \quad \mathbb{1} + ad\,X \qquad \text{(Eq.2.24)}$$

- *Si $X \in \mathfrak{d} \setminus \mathfrak{t}$, alors:*

$$\boldsymbol{D}_* = \quad \mathbb{1} + \frac{\sin \| X \|_{\mathfrak{d}}}{\| X \|_{\mathfrak{d}}}\,ad\,X + \frac{(1-\cos \| X \|_{\mathfrak{d}})}{\| X \|_{\mathfrak{d}}^2}\,(ad\,X)^2 \qquad \text{(Eq.2.25)}$$

Preuve :

La représentation adjointe du déplacement $\boldsymbol{D}$ s'écrit: $\boldsymbol{D}_* = \mathbb{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ad\,X)^n}{n\,!}$.

- Si $X \in \mathfrak{t}$, la relation (Eq.2.24) est évidente.
- Si $X \in \mathfrak{D} \setminus \mathfrak{t}$, en remplaçant les termes de puissances paires par leur expression dans (Eq.2.22) et les termes de puissances impaires par leur expression dans (Eq.2.23), compte tenu du lemme 2.15 et en regroupant d'une part les termes de facteur commun $ad\,X$ et d'autre part les termes de facteur commun $(ad\,X)^2$, on obtient:

$$\boldsymbol{D}_* = \mathbb{I} + \frac{1}{\| X \|_{\mathfrak{d}}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \; \| X \|_{\mathfrak{d}}^{2n+1}}{(2n+1)\,!} \right) ad\,X + \frac{1}{\| X \|_{\mathfrak{d}}^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \; \| X \|_{\mathfrak{d}}^{2n}}{(2n)\,!} \right) (ad\,X)^2$$

  Compte tenu des relations (Eq.1.9) et (Eq.1.10) [Chapitre 1, corollaire 1.3, page 18], on obtient le résultat recherché.

Ce qui montre le théorème. ∎

2.11 Déplacements élémentaires – Décomposition canonique des déplacements

Vu leur rôle essentiel dans la modélisation, il nous semble logique de chercher, à se stade du développement, à caractériser les déplacements élémentaires (i.e. translations et rotations). En effet, tout déplacement peut se décomposer en une rotation et une translation suivant un même axe.

Proposition 2.17

$\boldsymbol{T}$ est une translation de vecteur $\vec{u}$ si et seulement, s'il existe un torseur U tel que:

$$\boldsymbol{T} = exp(U) \text{ avec } \mathfrak{t} \ni U \text{ de vecteur } \vec{u} \qquad \text{(Eq.2.26)}$$

Preuve :

Soit $\boldsymbol{T}$ est une translation de vecteur $\vec{u}$, alors: $\forall M \in \mathcal{E} : \; \overrightarrow{M\,\boldsymbol{T}(M)} = \overrightarrow{\boldsymbol{T}^{-1}(M)\,M} = \vec{u}$,
or, $\quad \forall Y \in \mathfrak{D}, \forall M \in \mathcal{E} : \quad (\boldsymbol{T}_* Y)(M) = Y(\boldsymbol{T}^{-1}(M))$
et comme Y est un champ équiprojectif, il vient:

$$(\boldsymbol{T}_* Y)(M) = Y(M) + \overrightarrow{\boldsymbol{T}^{-1}(M)\,M} \times \omega_Y = Y(M) + \vec{u} \times \omega_Y$$

ceci étant en tout point M de l'espace affine $\mathcal{E}$. Prenons le torseur $U \in \mathfrak{t}$ de vecteur $\vec{u}$. La relation précédente implique: $\quad \boldsymbol{T}_* Y = Y + [U, Y] = (\mathbb{I} + ad\,U)\,Y$. Or, comme le résultat est vérifié pour tout torseur Y de $\mathfrak{D}$, on en déduit (Eq.2.26).

La réciproque est évidente, elle découle directement de la définition d'une translation. Ainsi, elle ne soulève aucune difficulté particulière. ∎

Corollaire 2.18

Soit $\mathfrak{f}$ une famille fondamentale donnée et $\mathcal{R}$ le repère ortho-normé direct qui en est associé[12] *:*

$$T \text{ est une translation de vecteur } \vec{u} \iff \begin{cases} \vec{u}/_{\mathcal{R}} = & [u_1\, u_2\, u_3]^t \\ \\ [T_*]/_{\mathfrak{f}} = & \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon\, u_3 & \varepsilon\, u_2 \\ \varepsilon\, u_3 & 1 & -\varepsilon\, u_1 \\ -\varepsilon\, u_2 & \varepsilon\, u_1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Proposition 2.19

Si $X \in \mathfrak{g}$, alors, le déplacement défini par $\boldsymbol{R} = \exp X$ est une rotation d'axe Λ_X.

Preuve :

Soit un glisseur X, alors, il existe un point $A \in \mathcal{E}$ tel que $X(A) = \vec{0}$. De plus l'application $t \mapsto exp(t\,X)(A)$ est la solution de l'équation différentielle avec condition initiale:

$$\frac{d}{d\,t}F(t) = \vec{0}, \quad F(0) = A$$

donc $t \mapsto exp(t\,X)(A)$ est une application constante de valeur égale à A. D'où le déplacement $\boldsymbol{R}_t = exp\,(t\,X) \in Rot(A)$ (où $Rot(A)$ est l'ensemble des rotations autour du point A). Cela étant pour tout point $A \in \Lambda_X$, donc $\boldsymbol{R} = exp\,X$ laisse invariant l'axe Λ_X. ∎

Théorème 2.20

Tout déplacement $\boldsymbol{D} \in \mathbb{D}$ se décompose en un déplacement de rotation $\boldsymbol{R} \in \mathbb{D}$ et un déplacement de translation $\boldsymbol{T} \in \mathbb{D}$ suivant un même axe, tels que:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}\,\boldsymbol{T} \tag{Eq.2.27}$$

Preuve :

Soit $\boldsymbol{D}$ un déplacement du groupe $\mathbb{D}$, notons X son générateur infinitésimal (i.e. $\boldsymbol{D} = exp\,X$).

- Si $X = 0$, alors, la translation et la rotation du théorème se réduisent à l'élément neutre e du groupe des déplacements.
- Si $X \in \mathfrak{t}$, alors, il suffit de prendre $\boldsymbol{T} = exp\,X$ et $\boldsymbol{R} = e$.
- Si $X \in \mathfrak{d} \setminus \mathfrak{t}$, alors, $\|\, X \,\|_{\mathfrak{d}}$ est inversible. Posons $Z = \dfrac{\mathfrak{m}(X)}{\|\, X \,\|_{\mathfrak{d}}}\, X$ et $U = \dfrac{\mathfrak{m}(X)\,\mathfrak{p}(X)}{\|\, X \,\|_{\mathfrak{d}}}\, \Omega\, X$. Ainsi, les torseurs Z et U vérifient:
  - ○ $U \in \mathfrak{t}$ et $Z \notin \mathfrak{t}$ tel que $[Z/Z] = 0$. Donc, d'après les propositions 2.17 et 2.19 le déplacement $\boldsymbol{T} = exp\,U$ est une translation et le déplacement $\boldsymbol{R} = exp\,Z$ est une rotation.
  - ○ $X = Z + U$ et $[Z,U] = 0$, donc $exp\,U$ et $exp\,Z$ commutent (i.e. de même axe). Ainsi:

$$\boldsymbol{D} = exp\,X = (exp\,Z) \circ (exp\,U) = (exp\,U) \circ (exp\,Z)$$

Ce qui montre le théorème. ∎

[12] Voir le théorème 2.10 [page 40].

2.12 Changement de coordonnées relatif à un changement de configurations

Considérons une configuration de référence $\boldsymbol{r}$ d'un solide et une famille fondamentale $\mathfrak{f}_r = (\xi_r, \eta_r, \zeta_r)$ rigidement solidaire à $\boldsymbol{r}$. A toute autre configuration $\boldsymbol{s}$ transformée de $\boldsymbol{r}$ par un déplacement $\boldsymbol{D}$ (i.e. $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{D} \bullet \boldsymbol{r}$), nous pouvons associer également une famille $\mathfrak{f}_s = (\xi_s, \eta_s, \zeta_s)$ telle que $\mathfrak{f}_s = \boldsymbol{D}(t) \diamond \mathfrak{f}_r$. Les familles $\mathfrak{f}_r$ et $\mathfrak{f}_s$ en tant que bases ortho-normales, du Δ–module libre $\mathfrak{D}$ de dimension trois, définissent deux systèmes de coordonnées de $\mathfrak{D}$. Soit Y un torseur quelconque de $\mathfrak{D}$, notons Y_r et Y_s les vecteurs duaux colonnes (i.e matrices 3×1) qui représentent les coordonnées locales de Y, respectivement, dans les bases ortho-normales $\mathfrak{f}_r$ et $\mathfrak{f}_s$. Alors, en notant $[\boldsymbol{D}_*]$ la matrice duale, associée à l'opérateur $\boldsymbol{D}_*$, relativement à la base $\mathfrak{f}_r$, les systèmes de coordonnées du torseur Y par rapport à ces deux bases sont liées par la relation:

$$Y_{D\bullet r} = \ [\boldsymbol{D}_*]\ Y_r \qquad \text{(Eq.2.28)}$$

Soit, maintenant, une transformation linéaire $\boldsymbol{A}$ dans $\mathfrak{D}$ (i.e. $\boldsymbol{A} \in \mathcal{L}(\mathfrak{D})$). Si $[\boldsymbol{A}]_r$ et $[\boldsymbol{A}]_s$ représentent les matrices duales associées à $\boldsymbol{A}$ relativement aux familles fondamentales $\mathfrak{f}_r$ et $\mathfrak{f}_s$, alors:

$$[\boldsymbol{A}]_{D\bullet r} = \ [\boldsymbol{D}_*]\, [\boldsymbol{A}]_r\, [\boldsymbol{D}_*]^{-1} \qquad \text{(Eq.2.29)}$$

Cette relation traduit le changement de bases associé au changement de configuration du solide.

2.13 Conclusion

Famille fondamentale et configuration de corps rigide sont des représentations équivalentes à un isomorphisme près. Nous avons vu que la notion de famille fondamentale permet une "*algébrisation*" de la notion classique de repère affine orthonormé direct. En effet, il est difficile de munir un calcul direct des repères affines. Ce calcul se fait en deux étapes distincte et souvent fait appel à des techniques différentes:

- calcul de l'orientation du repère étudié dans un repère de référence,
- calcul de la position du repère étudié dans le repère de référence.

L'intérêt d'utiliser des familles fondamentales permet de traduire ces deux transformations en une seule transformation duale traduisant le déplacement associé au changement de configurations -changeant le repère associé à la famille fondamentale de référence en le repère associé à la famille fondamentale étudiée- de l'objet "*famille fondamentale*". Cette vision des choses permet de conduire un calcul symbolique à un degré d'abstraction assez élevé.