Concepts fondamentaux

Sommaire

1.1 Introduction 25
1.2 Généralités sur les familles exponentielles 25
1.3 Fonctions variances et leurs déterminants 27
1.4 Opérations classiques sur *FEN* 29
1.5 Modèles stables-Tweedie univariés 30
1.6 Schéma de caractérisations des *NST* et *MST* 35

1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la description des *FEN*. Ainsi, la Section 1.2 décrit les *FEN* sur $\mathbb{R}^k$, la Section 1.3 est consacrée aux fonctions variances et fonctions variances généralisées. La Section 1.4 mentionne quelques opérations classiques sur les *FEN* et leurs fonctions variances (généralisées). Enfin, la Section 1.5 traite les cas particuliers des modèles stables-Tweedie univariés.

1.2 Généralités sur les familles exponentielles

Les familles exponentielles représentent un ensemble de lois, contenant la plupart des lois usuelles, qui satisfont à une propriété importante en Statistique que nous référons le lecteur au livre de Barndorff-Nielsen (1978). Nous rappelons que pour étudier la loi d'une variable aléatoire $\mathbf{x}$, nous considérons, soit ses probabilités $f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) = P(\mathbf{X} = \mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$ (cas discret), soit sa densité $f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})$ (cas continu) paramétrés par θ. Nous utiliserons dans les énoncés la fonction de densité, mais le cas discret est tout à fait analogue.

Définition 1.2.1 *Soit une variable aléatoire* $\mathbf{X}$ *de loi* $P_{\boldsymbol{\theta}}$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subseteq \mathbb{R}^k$ *sur un espace mesurable* $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. *Cette loi fait partie d'une famille exponentielle si elle satisfait aux deux propriétés suivantes :*

(*i*) *Le support* $S_\theta = \{\mathbf{x} \in \mathcal{X}, f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) > 0\} = S$ *ne dépend pas de* $\boldsymbol{\theta}$,

(*ii*) *Il existe* $k+1$ *fonctions* $a_1(\boldsymbol{\theta}), \ldots, a_k(\boldsymbol{\theta}), b(\boldsymbol{\theta})$ *définies sur* $\boldsymbol{\Theta}$, *et* $k+1$ *fonctions* $T_1(\mathbf{x}), \ldots, T_k(\mathbf{x}), h(\mathbf{x})$ *définies sur* $\mathcal{X}$, *telles que la densité s'écrit :*

$$\ln\left(f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})\right) = \sum_{j=1}^{k}\Big(a_j(\boldsymbol{\theta})T_j(\mathbf{x})\Big) + b(\boldsymbol{\theta}) + h(\mathbf{x}),$$

équivalent à

$$f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) = \exp\left\{\sum_{j=1}^{k}\Big(a_j(\boldsymbol{\theta})T_j(\mathbf{x})\Big) + b(\boldsymbol{\theta}) + h(\mathbf{x})\right\}. \tag{1.1}$$

Nous pouvons encore écrire :

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) &= \exp(b(\boldsymbol{\theta}))\exp(h(\mathbf{x}))\exp\sum_{j=1}^{k}\Big(a_j(\boldsymbol{\theta})T_j(\mathbf{x})\Big) \\ &= B(\boldsymbol{\theta})H(\mathbf{x})\exp\sum_{j=1}^{k}\Big(a_j(\boldsymbol{\theta})T_j(\mathbf{x})\Big). \end{aligned}$$

Dans (1.1), si pour tout $j \in \{1,\ldots,k\}$ on a : $a_j(\boldsymbol{\theta}) = \theta_j$, $T_j(\mathbf{x}) = x_j$ et $h(\mathbf{x}) = 0$ pour tout $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1,\ldots,\theta_k)^\top \in \boldsymbol{\Theta}$ et pour tout $\mathbf{x} = (x_1,\ldots,x_k)^\top \in \mathbb{R}^k$, alors on parle d'une famille exponentielle naturelle (*FEN*).

Proposition 1.2.1 *Soit une variable aléatoire* X *de loi* $P_{\boldsymbol{\theta}}$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subseteq \mathbb{R}^k$ *faisant partie d'une famille exponentielle. Sous des conditions de régularité évidentes, nous avons :*

$$\forall i \in \{1,\ldots,k\}, \quad \sum_{j=1}^{k}\mathbb{E}[T_j(X)]\frac{\partial a_j(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i} = -\frac{\partial b(\boldsymbol{\theta})}{\partial\theta_i}.$$

Exemples de familles exponentielles usuelles

Voici quelques exemples d'illustration des familles exponentielles pour des lois univariées.

Exemple 1 *Soit une variable aléatoire* X *distribuée selon une loi Binomiale* $\mathcal{L}(X) = \mathcal{B}(n;p)$. *Pour* $x \in \{0,\ldots,n\}$, *nous avons :*

$$\ln\left(f(x;p)\right) = x\ln\left(\frac{p}{1-p}\right) + n\ln(1-p) + \ln\left(\frac{n!}{x!(n-x)!}\right).$$

Nous constatons que cette loi fait partie d'une familles exponentielles avec $\theta = p$, $p = 1$, le support $S_p = \{0,\ldots,n\} = S$ qui ne dépend pas de p, et :

$$a_1(p) = \ln\left(\frac{p}{1-p}\right),\ T_1(x) = x,\ b(p) = n\ln(1-p),\ h(x) = \ln\left(\frac{n!}{x!(n-x)!}\right).$$

La Proposition 1.2.1 nous donne ici $\mathbb{E}[T(X)]\dfrac{1}{p(1-p)} = \dfrac{n}{1-p}$. C'est-à-dire $\mathbb{E}[X] = np$.

Exemple 2 *Soit une variable aléatoire X distribuée selon une loi Normale $\mathcal{L}(X) = \mathcal{N}(m;\sigma^2)$. Pour $x \in \mathbb{R}$, nous avons :*

$$\ln\left(f(x;m,\sigma^2)\right) = \frac{xm}{\sigma^2} - \frac{x^2}{2\sigma^2} - \frac{m^2}{2\sigma^2} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right).$$

Nous avons $k = 2$, $\theta = (m,\sigma^2)^\top$, le support $S_{(m,\sigma^2)} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}_\star^+ = S$ qui ne dépend pas de m ni de σ^2, et :

$$\begin{aligned} &a_1(m,\ \sigma^2) = \frac{m}{\sigma^2}, \quad a_2(m,\ \sigma^2) = -\frac{1}{2\sigma^2}, \quad T_1(x) = x,\\ &T_2(x) = x^2, \quad b(m,\ \sigma^2) = -\frac{m^2}{2\sigma^2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right), \quad h(x) = 0. \end{aligned}$$

Une loi Normale univariée fait bien partie d'une famille exponentielle. Il en est de même pour les lois Normales multivariées. La Proposition 1.2.1, lorsque nous dérivons par rapport à m, nous donne ici :

$$\mathbb{E}[T_1(X)]\tfrac{1}{\sigma^2} + 0\ \mathbb{E}[T_2(X)] = \tfrac{m}{\sigma^2}.$$

C'est-à-dire $\mathbb{E}[X] = m$. Lorsque nous dérivons par rapport à σ^2, nous obtenons :

$$-\mathbb{E}[T_1(X)]\frac{m}{\sigma^4} + \mathbb{E}[T_2(X)]\frac{1}{2\sigma^4} = -\frac{m^2}{2\sigma^4} + \frac{1}{2\sigma^2}.$$

C'est-à-dire $\mathbb{E}[X^2] = m^2 + \sigma^2$.

Proposition 1.2.2 *Soit $\tilde{X}$ un n-échantillon d'une variable aléatoire X de loi $P_{\boldsymbol{\theta}}$, $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta} \subseteq \mathbb{R}^k$ faisant partie d'une famille exponentielle. Alors la loi de $\tilde{X}$ notée $\mathcal{L}(\tilde{X})$ fait partie d'une FE. Son support est S^n et la vraisemblance s'écrit :*

$$\ln(L(\tilde{x}\ ;\ \boldsymbol{\theta})) = \left(\sum_{j=1}^k a_j(\boldsymbol{\theta})\left(\sum_{i=1}^n T_j(x_i)\right)\right) + nb(\boldsymbol{\theta}) + \left(\sum_{i=1}^n h(x_i)\right),$$

où S et L désignent respectivement le support de $P_{\boldsymbol{\theta}}$ et la densité de $\tilde{X}$.

Il suffit de considérer les mêmes fonctions $a_j(\boldsymbol{\theta})$, $j = 1,\cdots,k$, que celles de $\mathcal{L}(X)$, $nb(\boldsymbol{\theta})$ et de poser $T_j(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^n T_j(x_i)$, $j = 1,\ldots,k$ et $h(\tilde{x}) = \sum_{i=1}^n h(x_i)$. □

1.3 Fonctions variances et leurs déterminants

Les *FEN* est une classe remarquable des familles exponentielles. Elle est en générale déterminée par la forme de sa fonction variance contrairement aux fonctions variances généralisées qui de nos jours demeurent difficiles à manipuler pour caractériser certaines *FEN*. Dans cette thèse nous considérons les *FEN* définies comme suit :

Soit μ une mesure de Randon positive sur $\mathbb{R}^k$ avec $k \in \{2, 3, \ldots\}$. Soit

$$L_\mu : \mathbb{R}^k \to (0, \infty), \ \boldsymbol{\theta} \mapsto L_\mu(\boldsymbol{\theta}) := \int_{\mathbb{R}^k} \exp(\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{x} \rangle) \mu(\mathbf{dx}),$$

sa transformée de Laplace et $\mathbf{K}_\mu(\boldsymbol{\theta}) := \ln L_\mu(\boldsymbol{\theta})$ la fonction cumulante et analytique réelle sur l'intérieur $\Theta(\mu)$ de l'ensemble convexe $\{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^k; L_\mu(\boldsymbol{\theta}) < \infty\}$. L'application $\boldsymbol{\theta} \longmapsto \mathbf{K}_\mu(\boldsymbol{\theta})$ est une fonction convexe sur $\Theta(\mu)$. Notons $\mathcal{M}\left(\mathbb{R}^k\right)$ l'ensemble des mesures μ tels que μ ne soit pas concentrée sur un hyperplan affine. Dans ces conditions $\mathbf{K}_\mu$ est strictement convexe, réelle analytique sur $\Theta(\mu)$. Ainsi, pour $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^k)$ fixé, l'ensemble des mesures de probabilités

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mu) = \{\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}, \mu)(dx) = \exp[\langle \boldsymbol{\theta}, \mathbf{x} \rangle - \mathbf{K}_\mu(\boldsymbol{\theta})]\mu(dx); \ \boldsymbol{\theta} \in \Theta(\mu)\},$$

définie sur $\mathbb{R}^k$ est appelé *FEN* engendrée par μ. La mesure μ est appelée base de $\mathbf{F}$ et pour tout $\boldsymbol{\theta} \in \Theta(\mu)$ on a :

$$\mathbf{K}'_\mu(\boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{\partial \mathbf{K}_\mu(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j}\right)_{j=1,\ldots,k} = \int_{\mathbb{R}^k} \mathbf{x}\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}, \mu)d\mathbf{x} =: \mathbf{m}(\boldsymbol{\theta}),$$

et

$$\mathbf{K}''_\mu(\boldsymbol{\theta}) = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{K}_\mu(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j}\right)_{i,j=1,\ldots,k} = \int_{\mathbb{R}^k} [\mathbf{x} - \mathbf{m}(\boldsymbol{\theta})] \otimes [\mathbf{x} - \mathbf{m}(\boldsymbol{\theta})]\mathbf{P}(\boldsymbol{\theta}, \mu)d\mathbf{x},$$

où $\mathbf{m}(\boldsymbol{\theta})$ désigne la moyenne de $\mathbf{F}$.

De plus les applications $\mathbf{K}'_\mu : \Theta(\mu) \to \mathbf{K}'_\mu\left(\Theta(\mu)\right) =: \mathbf{M}_\mathbf{F}$ où $\mathbf{M}_\mathbf{F}$ désigne le domaine des moyennes de $\mathbf{F}$ et $h \longmapsto \mathbf{K}''_\mu(\boldsymbol{\theta})(h, h)$ sont respectivement un difféomorphisme (voir Letac, 1992) et une forme quadratique strictement définie positive sur $\mathbb{R}^{k\star}$ (espace dual de $\mathbb{R}^k$). Notons $\psi_\mu : \mathbf{M}_\mathbf{F} \to \Theta(\mu)$ la bijection réciproque de $\mathbf{K}'_\mu$. Il est alors possible de donner une nouvelle définition de la famille $\mathbf{F}(\mu)$, sous la forme :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mu) = \left\{\mathbf{P}(\psi(\mathbf{m}), \mu); \mathbf{m} \in \mathbf{M}_\mathbf{F}\right\}, \tag{1.2}$$

appelée paramétrisation canonique de $\mathbf{F}$ par son domaine des moyennes.

Définition 1.3.1 *Soit* $\mathbf{F}$ *une FEN sur* $\mathbb{R}^k$ *engendrée par une mesure* $\mu \in \mathcal{M}\left(\mathbb{R}^k\right)$ *en (1.2) et* $\mathbf{M}_\mathbf{F}$ *le domaine des moyennes* $\mathbf{m}$. *L'application* $\mathbf{V}_\mathbf{F} : \mathbf{M}_\mathbf{F} \to \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^k\right)$ *définie par*

$$\mathbf{V}_\mathbf{F}(\mathbf{m}) = \mathbf{K}''_\mu\left(\psi_\mu(\mathbf{m})\right) = \left[\psi'_\mu(\mathbf{m})\right]^{-1} \in \mathcal{S}\left(\mathbb{R}^k\right),$$

est appelée fonction variance de $\mathbf{F}$ *et caractérise les FEN,* $\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^k\right)$ *désigne l'ensemble des matrices symétriques définies positives sur* $\mathbb{R}^k$.

La forme basique des fonctions variances en multivariées est celle des fonctions variances quadratiques considérées par Letac (1989) comme suit :

$$\mathbf{V_F}(\mathbf{m}) = \mathbf{A}(\mathbf{m}, \mathbf{m}) + \mathbf{B}(\mathbf{m}) + \mathbf{C}, \tag{1.3}$$

où $\mathbf{A}(\mathbf{m}, \mathbf{m})$, $\mathbf{B}(\mathbf{m})$ et $\mathbf{C}$ sont respectivement des matrices carrées d'ordre k bilinéaire symétrique, linéaire et constante d'élements en $\mathbf{m} \in \mathbf{M_F} \subseteq \mathbb{R}^k$. Casalis (1996) décrit et classifie l'ensemble des *FEN* quadratiques simples sur $\mathbb{R}^k$ de fonctions variances de forme particulière de (1.3)

$$\mathbf{V_F}(\mathbf{m}) = a\mathbf{m}\mathbf{m}^\top + \mathbf{B}(\mathbf{m}) + \mathbf{C},$$

pour tout $\mathbf{m} \in \mathbf{M}_F$ et $a \in \mathbb{R}$. Elle contribue également dans l'ouvrage de Kotz et al. (2000, [Chap. 54]) sur les résultats standards et les notations sur les *FEN*.

Définition 1.3.2 *Sous l'hypothèse de Définition 1.3.1, la fonction variance généralisée de la famille* $\mathbf{F}$ *est l'application*

$$\det \mathbf{V_F} : \mathbf{M_F} \to (0, \infty); \mathbf{m} \mapsto \det \mathbf{V_F}(\mathbf{m}).$$

1.4 Opérations classiques sur *FEN*

Nous présentons dans cette section quelques résultats utiles sur les *FEN*, leurs fonctions variances et variances généralisées qu'on utilisera tout au long de ce document.

Proposition 1.4.1 *Soit* μ *et* μ' *deux mesures positives de Randon* σ*-finies sur* $\mathbb{R}^k$ *telles que* $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mu)$, $\mathbf{F}' = \mathbf{F}(\mu')$ *et* $\mathbf{m} \in \mathbf{M_F}$.

(*i*) *S'il existe* $(\mathbf{a}, b) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$ *tels que* $\mu'(d\mathbf{x}) = \exp\{\langle \mathbf{a}, \mathbf{x}\rangle + b\}\mu(d\mathbf{x})$, *alors* $\mathbf{F} = \mathbf{F}'$: $\Theta(\mu') = \Theta(\mu) - \mathbf{a}$ *et* $\mathbf{K}_{\mu'}(\theta) = \mathbf{K}_\mu(\theta + \mathbf{a}) + b$; *pour* $\overline{\mathbf{m}} = \mathbf{m} \in \mathbf{M_F}$,

$$\mathbf{V}_{\mathbf{F}'}(\overline{\mathbf{m}}) = \mathbf{V_F}(\mathbf{m}) \text{ et } \det \mathbf{V}_{\mathbf{F}'}(\overline{\mathbf{m}}) = \det \mathbf{V_F}(\mathbf{m})$$

(*ii*) *Si* $\mu' = \varphi * \mu$ *est l'image de* μ *par la transformation* $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, *où* $\mathbf{A}$ *est une matrice non dégénérée d'ordre* k *et* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$, *alors :* $\Theta(\mu') = \mathbf{A}^\top\Theta(\mu)$ *et* $\mathbf{K}_{\mu'}(\theta) = \mathbf{K}_\mu(\mathbf{A}^\top\theta) + \mathbf{b}^\top\theta$; *pour* $\overline{\mathbf{m}} = \mathbf{A}\mathbf{m} + \mathbf{b} \in \varphi(\mathbf{M})$,

$$\mathbf{V}_{\mathbf{F}'}(\overline{\mathbf{m}}) = \mathbf{A}\mathbf{V_F}\left(\varphi^{-1}(\overline{\mathbf{m}})\right)\mathbf{A}^\top \text{ et } \det \mathbf{V}_{\mathbf{F}'}(\overline{\mathbf{m}}) = (\det \mathbf{A})^2 \det \mathbf{V_F}(\mathbf{m}).$$

(*iii*) *Si* $\mu' = \mu^{*t}$ *est une puissance de convolution* $t-$*ièmè de* μ *pour* $t > 0$, *alors :* $\Theta(\mu') = \Theta(\mu)$ *et* $\mathbf{K}_{\mu'}(\theta) = t\mathbf{K}_\mu(\theta)$; *pour* $\overline{\mathbf{m}} = t\mathbf{m} \in t\mathbf{M_F}$,

$$\mathbf{V}_{\mathbf{F}'}(\overline{\mathbf{m}}) = t \cdot \mathbf{V_F}\left(t^{-1} \cdot \overline{\mathbf{m}}\right) \text{ et } \det \mathbf{V}'_{\mathbf{F}}(\overline{\mathbf{m}}) = t^k \det \mathbf{V_F}(\mathbf{m}).$$

(*iv*) *(Hassaïri, 1999) Si* $\boldsymbol{\mu}$ *est une mesure infiniment divisible, il existe une mesure positive de Lévy modifiée* $\boldsymbol{\rho}\left(\boldsymbol{\mu}\right)$ *sur* $\mathbb{R}^k$ *telle que, pour tout* $\boldsymbol{\theta} \in \boldsymbol{\Theta}\left(\boldsymbol{\mu}\right) = \boldsymbol{\Theta}\left(\boldsymbol{\rho}\left(\boldsymbol{\mu}\right)\right)$, $\mathbf{K}_{\boldsymbol{\rho}}\left(\boldsymbol{\mu}\right) = \ln\det\mathbf{K}''_{\boldsymbol{\mu}}\left(\boldsymbol{\theta}\right)$. *De plus, si* $\boldsymbol{\mu}' = \boldsymbol{\rho}\left(\boldsymbol{\mu}\right)$ *alors, pour tout* $\overline{\mathbf{m}} = \sum_{i=1}^{k}\left(\mathbf{V}'_{\mathbf{F}}\left(\mathbf{m}\right)e_i\right)e_i, \mathbf{V}'_{\mathbf{F}}\left(\overline{\mathbf{m}}\right) = \dfrac{d\overline{\mathbf{m}}}{d\mathbf{m}}\mathbf{V}_{\mathbf{F}}\left(\mathbf{m}\right)$.

Les parties (*i*) et (*ii*) de la Proposition 1.4.1 montrent, respectivement, que la fonction variance généralisée $\det\mathbf{V}_{\mathbf{F}}\left(\mathbf{m}\right)$ de $\mathbf{F}$ est invariant pour tout élément de ces bases (ou mesure génératrice) et pour les transformations affines $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ telles que $\det\mathbf{A} = \pm 1$, en particulier pour la translation $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{b}$.

1.5 Modèles stables-Tweedie univariés

Nous rappelons brièvement ici les modèles stables-Tweedie univariés, lesquels s'avèrent indispensables pour décrire les modèles multivariés *NST* et *MST*.

Définition 1.5.1 *La loi* α*-stable positive est une loi de probabilité générée par le processus de Lévy* $(X_t^{\alpha})_{t>0}$ *et peut être définie par les mesures de probabilités (Feller, 1971 ; page 583),*

$$\mu_{\alpha,t}(dx) = \frac{1}{\pi x}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{t^j\Gamma(1+j\alpha)\sin(-j\pi\alpha)}{j!\alpha^j(\alpha-1)^{-j}\left[(1-\alpha)\,x\right]^{\alpha j}}\mathbb{1}_{\{x>0\}}dx,$$

où $\alpha \in (0,1)$ *est le paramètre d'indice,* $\Gamma(\cdot)$ *est la fonction gamma classique, et* $\mathbb{1}_A$ *désigne la fonction indicatrice sur tout événement* A *donné.*

Elle est utilisée en mathématiques, physique et analyse quantitative (finance de marché). Le cas particulier le plus utilisé est la distribution inverse-gaussienne ($\alpha = 1/2$). Voir Kaufman & Roberts (1966) pour $\alpha = 1/3$ en utilisant la fonction de Bessel. Rappelons qu'une variable aléatoire non dégénérée X est (strictement) α-stable si, pour tout $n \geq 2$, il existe un réel (zéro) b_n tel que

$$X_1 + \ldots + X_n \overset{d}{=} n^{1/\alpha}X + b_n, \tag{1.4}$$

où $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes copies de la variable X et $\overset{d}{=}$ désigne une égalité en lois de probabilités. Par conséquent, on a $\alpha \in]0,2]$. Le cas limite à gauche de $\alpha \to 0$ correspond à la distribution gamma. Pour $\alpha \in [1,2]$ on définit une famille de distributions stables (extrêmes) concentrées sur $\mathbb{R}$ où les cas spéciaux sont les distributions de Cauchy ($\alpha = 1$) et normal ($\alpha = 2$). Puisque le paramètre d'indice α dans la relation (1.4) peut aussi être négatif et correspond à la distribution de famille Poisson composée ($\alpha < 0$), Tweedie

(1984) a proposé une classification de toutes les distributions $\alpha - stables$ avec $\alpha \in [-\infty, 2]$. En introduit le paramètre de "puissance de variance" p, défini par

$$p : p(\alpha) = (2-\alpha)/(1-\alpha), \tag{1.5}$$

et équivalent à $\alpha := \alpha(p) = (p-2)/(p-1)$.

Soit $t > 0$ le paramètre de convolution, $\alpha \in [-\infty, 2]$ connecté intrinsèquement au paramètre de puissance variance $p \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty]$ de relation (1.5). Nous définissons les *FEN* stables-Tweedie, $F_{p,t} = F(\mu_{p,t})$ générées par les mesures positives σ-finies $\mu_{p,t}$, de transformées de Laplace

$$L_{\mu_{\alpha,t}}(\theta_0) = \int_{\mathbb{R}} \exp(\theta_0 x)\, \mu_{\alpha,t}(dx) = \left(L_{\mu_{\alpha,1}}(\theta_0)\right)^t =: \left(L_{\mu_p}(\theta_0)\right)^t, \tag{1.6}$$

et les fonctions cumulantes $K_{\mu_{p,t}} = tK_{\mu_{p,1}} =: tK_{\mu_p}$ avec

$$K_{\mu_p}(\theta_0) = \begin{cases} \exp(\theta_0) & \text{pour} \quad p = 1 \\ -\ln(-\theta_0) & \text{pour} \quad p = 2 \\ [1/(2-p)]\,[-(p-1)\theta_0]^{1+1/(1-p)} & \text{pour} \quad p \neq 1,\ 2 \end{cases}, \tag{1.7}$$

pour tout θ_0 dans les domaines canoniques respectifs

$$\Theta\left(\mu_p\right) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pour} \quad p = 0,\ 1 \\ [0, +\infty[& \text{pour} \quad p < 0 \text{ ou } 0 < p < 1 \\ ]-\infty, 0[& \text{pour} \quad 1 < p \leq 2 \text{ ou } p = \infty \\ ]-\infty, 0] & \text{pour} \quad 2 < p < \infty \end{cases}$$

de support de distributions

$$S_p = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{pourr} \quad p \leq 0\ ,\ p \to \infty \\ \mathbb{N} & \text{pour} \quad p = 1 \\ [0, +\infty[& \text{pour} \quad 1 < p < 2 \\ ]0, +\infty[& \text{pour} \quad p \geq 2. \end{cases} \tag{1.8}$$

Ainsi, en posant $m = K'_{\mu_{p,t}}(\theta_0)$ la dérivée première de $K_{\mu_{p,t}}(\theta_0)$ et en exprimant θ_0 en fonction de m on obtient $\theta_0(m) = [1/(1-p)]\,(m/t)^{(1-p)}$ pour $p \neq 1$ et $\theta_0(m) = \ln(m/t)$ pour $p = 1$, on trouve la fonction variance correspondante $V_{F_{p,t}}(m) := K''_{\mu_{\alpha(p),t}}(\theta_0(m)) = [\theta'_0(m)]^{-1}$ d'expression

$$V_{F_{p,t}}(m) = tV_p(m/t) = t^{1-p}m^p \ \forall m \in M_{F_{p,t}} \tag{1.9}$$

avec $M_{F_{p,t}} = tM_p$ où

$$M_p := K'_{\mu_p}(\Theta(\mu_p)) = \begin{cases} \mathbb{R} & p = 1 \\ ]0, +\infty[& p \neq 1, \end{cases} \tag{1.10}$$

et

$$m(\theta_0) = \begin{cases} \exp(\theta_0) & p = 1 \\ -1/\theta_0 & p = 2 \\ [-(p-1)\theta_0]^{1/(1-p)} & p \neq 1,\ 2. \end{cases}$$

Une description complète en termes des modèles exponentiels de dispersion de paramètre de puissance variance unité

$$V_p(m) = m^p, \quad m \in M_p, \;\; p \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\,, \tag{1.11}$$

peut être trouvée dans Jørgensen (1997, [Chap. 4]), où M_p est le domaine des moyennes m. Pour convenance nous prenons $p = \infty$, et la fonction variance unité prend la forme exponentielle $V_\infty(m) = \exp(\beta m)\,, \beta \neq 0$.

Pour $\alpha \in (0, 1)$ ou $p > 2$, on obtient les distributions α-stable positive de (1.5.1) avec le cas particulier de la distribution inverse-gaussienne ($\alpha = 1/2$ ou $p = 3$). Le cas limite $\alpha \to 0$ ou $p = 2$ conduit à la distribution gamma. Observons cependant que les distributions stables extrêmes ($\alpha \in (1, 2)$, ou $p < 0$) ne sont pas *steep* [1], concentrées sur $\mathbb{R}$ avec le domaine des moyennes $(0, \infty)$ et leurs cas limites qui sont les distributions de Cauchy ($\alpha = 1$ ou $p = \infty$) et normale ($\alpha = 2$ ou $p = 0$). Comme pour $\alpha < 0$ ou $p \in (1, 2)$, c'est la famille Poisson composée ayant une masse en zéro et par ailleurs une distribution positive continue

$$\mu_{p(\alpha),t}(dx) = \delta_0(dx) + \frac{dx}{x} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^j (\alpha - 1)^j}{j! \alpha^j \Gamma(-\alpha j) \left[(1 - \alpha)\, x\right]^{\alpha j}} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$$

(δ_x étant la mesure de Dirac en x). Seule la distribution de Poisson ($\alpha = -\infty$ ou $p = 1$) est discrète dans la classe des stables-Tweedie univariées. Finalement, suivant les valeurs de p, les modèles stables-Tweedie univariés se diffèrent plus ou moins par les expressions mathématiques de leurs mesures, les fonctions cumulantes, les supports de distribution ou leur domaines des moyennes. Tel est le cas de famille Poisson composée ayant une masse de distribution en zéro pour $p \in (1, 2)$. La sous-classe des distributions stables extrêmes $p \in (-\infty, 0)$ ne sont pas *steep* et ne sera pas considérée dans ce travail. Par conséquent, sous la propriété de *steepness* nous résumons selon les valeurs de ces p, les sous-classes des stables-Tweedies univariées Tweedie (1984) comme suivent : la distribution normale ($p = 0$) avec le domaine des moyennes et le support de distribution $\mathbb{R}$, les distributions de Poisson ($p = 1$) et Poisson composée ($1 < p < 2$) avec le domaine des moyennes $(0, \infty)$ et les supports de distribution $\mathbb{N}$ et $[0, \infty)$, respectivement. Et enfin, les distributions gamma ($p = 2$) et positive stable ($p > 2$) avec les domaines des moyennes et supports de distribution $(0, \infty)$. La Table 1.5.1 suivante récapitule les lois stables-Tweedie de domaine des moyennes M_p et de support de distributions S_p.

1. *Steepness* peut être caractérisé comme suit : le domaine des moyennes $\left(M_p\right)$ est égal à l'intérieur de l'enveloppe convexe fermée du support de distribution $\left(S_p\right)$; voir Barndorff-Nielsen (1978).

TABLE 1.5.1 – Résumé des modèles stables-Tweedie de domaine des moyennes unité M_p et de support de distributions S_p (e.g. Jørgensen, 1997).

Distribution(s)	$p = p(\alpha)$	$\alpha = \alpha(p)$	M_p	S_p
Stable extrême	$p < 0$	$1 < \alpha < 2$	$]0, +\infty[$	$\mathbb{R}$
Normal	$p = 0$	$\alpha = 2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
[N'existe pas]	$0 < p < 1$	$2 < \alpha < \infty$		
Poisson	$p = 1$	$\alpha = -\infty$	$]0, +\infty[$	$\mathbb{N}$
Poisson composée	$1 < p < 2$	$\alpha < 0$	$]0, +\infty[$	$[0, +\infty[$
Gamma décentrée	$p = 3/2$	$\alpha = -1$	$]0, +\infty[$	$[0, +\infty[$
Gamma	$p = 2$	$\alpha = 0$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$
Stable positive stable	$p > 2$	$0 < \alpha < 1$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$
Inverse-gaussienne	$p = 3$	$\alpha = 1/2$	$]0, +\infty[$	$]0, +\infty[$
Stable extrême	$p = \infty$	$\alpha = 1$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$

Le résultat suivant est nouveau dans ce travail de thèse et est d'importance intérêt sur la continuité de la fonction $p \mapsto K''_{\mu_p}$ pour $p \geq 1$ et sera utilisé au chapitre 4 dans la résolution des équations de Monge-Ampère.

Théorème 1.5.1 *Pour $t = 1$, la fonction $p \mapsto K''_{\mu_p}$ est continue sur $]1, +\infty[$.*

Remarque 1.5.2 *Pour l'instant on n'a pas la continuité à droite de $p = 1$. Cela est dû au fait que la distribution de Poisson correspondante soit discrète. Une attention particulière mériterait de porter sur ce cas dans la suite de notre travail.*

Pour la démonstration du Théorème 1.5.1, on utilisera le lemme suivant :

Lemme 1.5.3 *Pour $p \geq 1$, la fonction $p \mapsto K''_{\mu_p}$ satisfait les égalités suivantes :*

(i) $K''_{\mu_p}(\theta_0) = K_{\mu_p}(\theta_0)$ *pour* $p = 1$.

(ii) $K''_{\mu_p}(\theta_0) = \left[(2-p)K_{\{\mu_p}(\theta_0)\right]^{p/(2-p)}$ *pour* $1 < p < 2$.

(iii) $K''_{\mu_p}(\theta_0) = \exp\left[2K_{\mu_p}(\theta_0)\right]$ *pour* $p = 2$.

(iv) $K''_{\mu_p}(\theta_0) = \left[1/\left(-(p-2)K_{\mu_p}(\theta_0)\right)\right]^{-p/(p-2)}$ *pour* $p > 2$.

Démonstration : Nous considérons dans cette preuve les expressions des fonctions cumulantes de relation (1.7).

$\boxed{(i)}$ Pour $p = 1$, $K_{\mu_p}(\theta_0) = \exp(\theta_0)$, les dérivées successives donnent respectivement $K'_{\mu_p}(\theta_0) = \exp(\theta_0)$ et $K''_p(\theta_0) = \exp(\theta_0)$ par conséquent $K''_{\mu_p}(\theta_0) = K_{\mu_p}(\theta_0)$, avec $K_{\mu_p}(\theta_0) > 0$ pour $\theta_0 \in \mathbb{R}$.

$\boxed{(ii)}$ Pour $1 < p < 2$, $K_{\mu_p}(\theta_0) = [1/(2-p)]\left[-(p-1)\theta_0\right]^{1+1/(1-p)}$ équivalent à $\theta_0 = [1/(1-p)]\left[(2-p)K_{\mu_p}(\theta_0)\right]^{(1-p)/(2-p)}$ avec $\Theta_{\mu_p} = (-\infty, 0)$. Les dérivées successives donnent respectivement,

$$K'_{\mu_p}(\theta_0) = [-(p-1)\theta_0]^{1/(1-p)} = \left[(2-p)K_{\mu_p}(\theta_0)\right]^{1/(2-p)},$$

et

$$K''_{\mu_p}(\theta_0) = [-(p-1)\theta_0]^{p/(1-p)} = \left[(2-p)K_{\mu_p}(\theta_0)\right]^{p/(2-p)},$$

avec $K_{\mu_p}(\theta_0) > 0$.

$\boxed{(iii)}$ Pour $p = 2$, $K_{\mu_p}(\theta_0) = -\ln(-\theta_0)$ équivalent à $\theta_0 = -\exp\left[-K_{\mu_p}(\theta_0)\right]$ avec $\Theta_{\mu_p} = (-\infty, 0)$. Alors les dérivées successives donnent respectivement, $K'_{\mu_p}(\theta_0) = -1/\theta_0 = \exp\left[K_{\mu_p}(\theta_0)\right]$ et $K''_{\mu_p}(\theta_0) = 1/\theta_0^2 = \exp\left[2K_{\mu_p}(\theta_0)\right]$.

$\boxed{(iv)}$ Pour $p > 2$, $K_{\mu_p}(\theta_0) = [-1/(p-2)]\,[-(p-1)\theta_0]^{1+1/(1-p)}$ équivalent à $\theta_0 = [1/(1-p)]\left[(2-p)K_{\mu_p}(\theta_0)\right]^{(1-p)/(2-p)}$ avec $\Theta_{\mu_p} = (-\infty, 0)$. Les dérivées successives donnent respectivement,

$$K'_{\mu_p}(\theta_0) = [1/(-(p-1)\theta_0)]^{1/(p-1)} = \left[1/\left(-(p-2)K_{\mu_p}(\theta_0)\right)\right]^{1/(p-2)},$$

et

$$K''_{\mu_p}(\theta_0) = [1/(-(p-1)\theta_0)]^{p/(p-1)} = \left[1/\left(-(p-2)K_{\mu_p}(\theta_0)\right)\right]^{p/(p-2)},$$

avec $K_{\mu_p}(\theta_0) < 0$. □

Démonstration du Théorème 1.5.1 : Pour $p \neq 1; 2$ la fonction $p \mapsto K''_{\mu_p}$ est bien définie et donc continue.

Pour $p \neq 2$,

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to 2^-}\left[K''_{\mu_p}(\theta_0)\right] &= \lim_{p\to 2^-}\left[(2-p)K_{\mu_p}(\theta_0)\right]^{p/(2-p)} \\
&= \lim_{p\to 2^-}\left[(2-p)\,[1/(2-p)]\,[-(p-1)\theta_0]^{1+1/(1-p)}\right]^{p/(2-p)} \\
&= \lim_{p\to 2^-}[-(p-1)\theta_0]^{p/(1-p)} \\
&= (\theta_0)^{-2} \\
&= \exp\left[2K_{\mu_{p=2}}(\theta_0)\right] \\
&= K''_{\mu_{p=2}}(\theta_0),
\end{aligned}$$

et donc la fonction $p \mapsto K''_{\mu_p}(\theta_0)$ est continue à gauche $p = 2$.

$$
\begin{aligned}
\lim_{p\to 2^+}\left[K''_{\mu_p}(\theta_0)\right] &= \lim_{p\to 2^2}\left[1/\left(-(2-p)K_{\mu_p}(\theta_0)\right)\right]^{-p/(p-2)} \\
&= \lim_{p\to 2^+}\left[\frac{1}{(-(p-1)\theta_0)^{(2-p)/(1-p)}}\right]^{-p/(2-p)} \\
&= \lim_{p\to 2^+}\left[\frac{1}{-(p-1)\theta_0}\right]^{-p/(1-p)} \\
&= (1/\theta_0)^2 \\
&= \exp\left[2K_{\mu_{p=2}}(\theta_0)\right] \\
&= K''_{\mu_{p=2}}(\theta_0),
\end{aligned}
$$

d'où la continuité à droite de $p = 2$ et conclut la démonstration du Théorème 1.5.1. □

1.6 Schéma de caractérisations des *NST* et *MST*

La Table 1.6.1 ci-dessous décrit les différentes étapes de caractérisations des modèles *NST* et *MST* qu'on utilisera dans la suite de ce travail. En effet, les flèches en bleues décrivent les modèles considérés tandis que celles en rouges donnent la procédure de caractérisations. La flèche continue rouge de caractérisation par fonction variance généralisée est à détailler en Section 4.2. Notons que ces fonctions variances (généralisées) sont définies sur $M := K'(\Theta)$, où Θ est le domaine canonique de K.
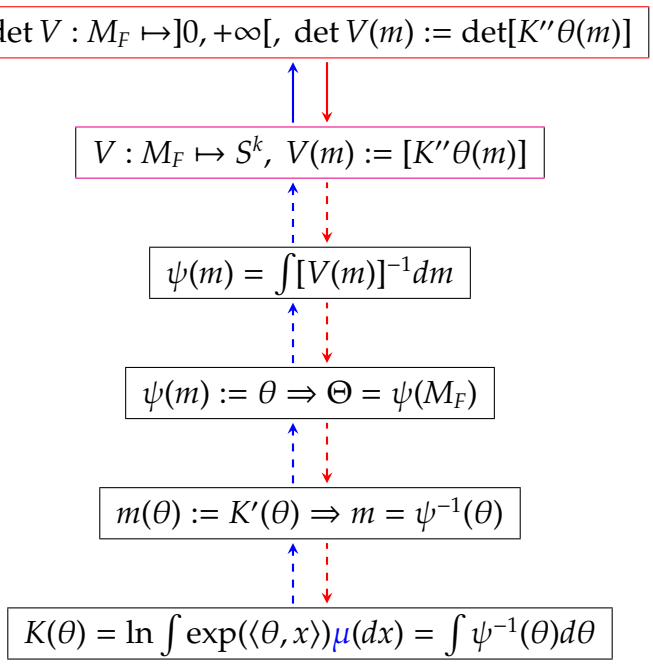
TABLE 1.6.1 – Schéma de caractérisations des *FEN*