

# Comportement pseudo-élastique des AMF et modélisation phénoménologique

---

## Résumé

Afin de réduire l'amplitude des cycles limites qui se développent pendant l'instabilité de flottement, on se propose d'étudier l'influence d'un amortisseur hystérétique. Cet amortisseur est réalisé à l'aide de ressorts en alliage à mémoire de forme (AMF). Ces alliages possèdent, en régime pseudo-élastique, une force de rappel hystérétique prompte à dissiper une grande quantité d'énergie. Dans ce chapitre, nous commençons par rappeler les propriétés physiques essentielles des AMF et plus particulièrement leur régime pseudo-élastique. La force de rappel de ressorts de traction composés d'AMF est ensuite mesurée en régime pseudo-élastique. Enfin, une modélisation de ces observations à l'aide d'un modèle phénoménologique de Bouc-Wen est présentée.

## Sommaire

---

<b>4.1</b>	<b>Comportement des alliages à mémoire de forme . . . . .</b>	<b>62</b>
4.1.1	Une histoire de changement de phase . . . . .	62
4.1.2	Comportement pseudo-élastique des AMF . . . . .	63
4.1.3	Présentation des ressorts en AMF . . . . .	66
<b>4.2</b>	<b>Mesures de la force de rappel des ressorts en AMF . . . . .</b>	<b>66</b>
4.2.1	Comportement quasi-statique . . . . .	67
4.2.2	Comportement dynamique . . . . .	69
<b>4.3</b>	<b>Modèle de Bouc-Wen . . . . .</b>	<b>73</b>
4.3.1	Description du modèle . . . . .	74
4.3.2	Comparaison avec les mesures . . . . .	74

---

## 4.1 Comportement des alliages à mémoire de forme

Afin de réaliser l'amortisseur hystérétique, il a été choisi d'utiliser des ressorts en alliage à mémoire de forme (AMF). La première étude sur ce type d'alliage a été faite par Ölander [66] avec un assemblage d'or et de cadmium. On présente dans cette section les principes physiques du comportement des AMF et le mécanisme qui leur confère une grande capacité de dissipation d'énergie.

### 4.1.1 Une histoire de changement de phase

Les alliages à mémoire de forme sont des polycristaux ayant deux phases solides [67]. Une phase austénite, énergétiquement stable à haute température, dont la microstructure cristalline est schématisée Figure 4.1, et une phase martensite, énergétiquement stable à basse température, dont la microstructure est soit orientée, soit auto-accommodée, comme schématisé Figure 4.1. Pour passer d'une phase solide à l'autre, ces alliages subissent une transformation displacive, schématisée Figure 4.2, les atomes de la structure cristalline se déplacent les uns par rapport aux autres sans que les liaisons atomiques ne se brisent, contrairement aux transformations diffusives où il y a diffusion d'atomes. Cette capacité de changer de phase sans diffuser d'atomes est à l'origine du caractère « mémoire de forme » des AMF. La transformation displacive peut être provoquée en faisant varier la température de l'alliage ou en lui appliquant une contrainte. Dans tous les cas, le changement de phase se fait au prix d'un transfert thermique.



Figure 4.1 – Microstructures cristallines des alliages à mémoire de forme.

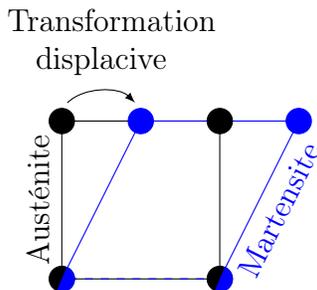


Figure 4.2 – Transformation displacive de la phase austénite à la phase martensite.

Afin de comprendre comment le passage d'une phase solide à l'autre s'effectue, on trace sur la Figure 4.3 le diagramme contrainte-température théorique d'un AMF. Les températures  $T_{A_d}$  et  $T_{A_f}$  sont respectivement les températures de début et de fin de la transformation austénitique et les températures  $T_{M_d}$  et  $T_{M_f}$  sont celles de début et de fin de la transformation martensitique. Le passage d'une phase de l'AMF à l'autre peut être illustré par l'exemple suivant : l'AMF est placé à une température supérieure à  $T_{A_f}$  sans contrainte (point 1 de la Figure 4.3), il est alors en phase austénite. Puis, à contrainte nulle, on refroidit l'AMF jusqu'à une température inférieure à  $T_{M_f}$ , point 2 de la Figure 4.3. Entre les températures  $T_{M_d}$  et  $T_{M_f}$ , la transformation martensitique s'effectue. L'AMF est alors en phase martensite auto-accommodée. Comme l'AMF n'est soumis à aucune contrainte, sa micro-structure n'a pas de direction privilégiée, ce qui justifie la dénomination auto-accommodée. Si maintenant une contrainte est appliquée à l'AMF, sa micro-structure va se déformer pour conduire à une phase de martensite orientée, point 3 de la Figure 4.3. C'est entre les étapes 2 et 3 que l'AMF peut être déformé de façon importante, en effet la déformation de l'alliage peut atteindre jusqu'à 10 %. Si l'AMF est maintenant chauffé à une température supérieure à  $T_{A_f}$ , il se trouve à nouveau dans sa phase austénite, point 4 de la Figure 4.3, et retrouve son état original. La transformation austénitique s'effectuant entre les températures  $T_{A_d}$  et  $T_{A_f}$ . C'est pour cela que ces alliages sont appelés à mémoire de forme, ils peuvent retrouver leur forme initiale après une importante déformation.

### 4.1.2 Comportement pseudo-élastique des AMF

En plus de retrouver leur forme originale après une grande déformation, les AMF ont un comportement pseudo-élastique, c'est à dire que leur module d'élasticité varie de façon réversible en fonction de leur teneur en austénite et en martensite. C'est ce comportement pseudo-élastique que l'on utilise dans le cadre de la thèse car il permet de dissiper une grande quantité d'énergie. Le comportement pseudo-élastique de l'AMF s'observe en lui appliquant une contrainte cyclique à

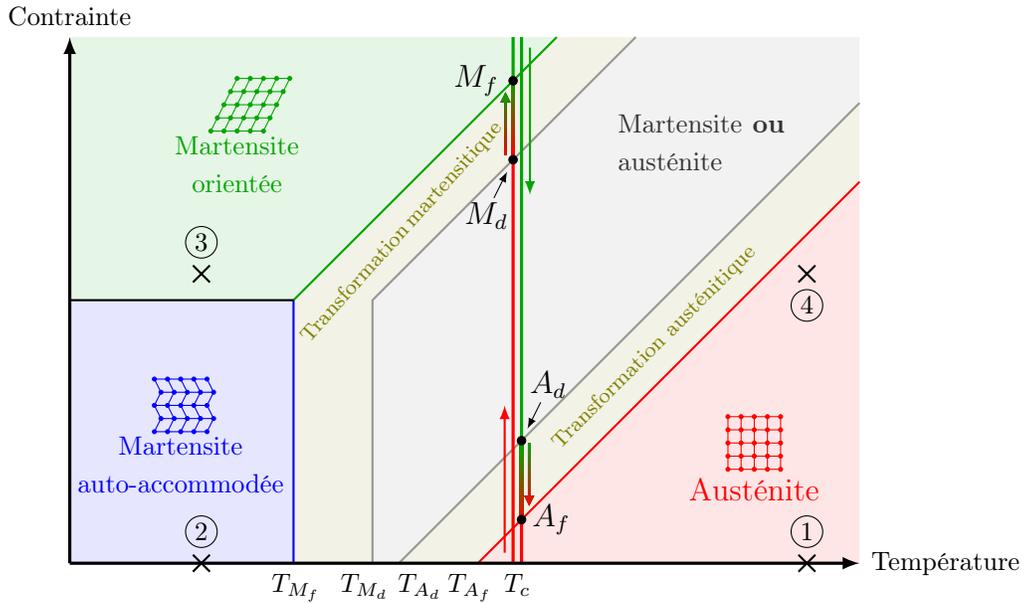


Figure 4.3 – Diagramme contrainte-température théorique d'un AMF.  $T_{A_d}$  et  $T_{A_f}$  sont respectivement les températures de début et de fin de la transformation austénitique et  $T_{M_d}$  et  $T_{M_f}$  sont celles de début et de fin de la transformation martensitique. Pour une contrainte cyclique à température constante,  $A_d$  et  $A_f$  sont respectivement le début et la fin de la transformation austénitique et  $M_d$  et  $M_f$  le début et la fin de la transformation martensitique.

une température constante  $T_c$ , comme représenté sur la Figure 4.3. Les points  $A_d$  et  $A_f$  désignent alors respectivement le début et la fin de la transformation austénitique et les points  $M_d$  et  $M_f$  le début et la fin de la transformation martensitique. Les étapes du chemin parcouru par l'AMF sous une contrainte cyclique pour une température  $T_c$  sont résumées dans le Tableau 4.1.

On peut remarquer deux faits notables. D'une part, entre  $M_d$  et  $M_f$  et entre  $A_d$  et  $A_f$ , la microstructure de l'AMF est composée à la fois d'austénite et de martensite. Dans cette configuration, la raideur de l'AMF est plus faible, ainsi le changement de phase s'accompagne d'un changement de raideur. D'autre part, les points  $A_f$  et  $M_d$  et les points  $A_d$  et  $M_f$  ne sont pas confondus. Cela signifie que lorsque le matériau est chargé puis déchargé, les changements de phase ne se font pas au même moment. La réponse de l'AMF est ainsi hystérétique. C'est ce comportement dont on tire parti pour le contrôle de l'instabilité de flottement car il permet de dissiper une grande quantité d'énergie.

Afin d'observer le comportement pseudo-élastique de l'AMF, on trace le chemin représenté en

Position sur le diagramme contrainte-température	Évolution de la contrainte	Composition cristallographique
Avant $M_d$	Croissante	Austénite
Entre $M_d$ et $M_f$	Croissante	Austénite + Martensite orientée
Après $M_f$	Décroissante	Martensite orientée
Entre $A_d$ et $A_f$	Décroissante	Martensite orientée + Austénite
Après $A_f$	Décroissante	Austénite

Tableau 4.1 – Étapes du chargement cyclique de l'AMF à la température  $T_c$  comme matérialisé sur le diagramme contrainte-température Figure 4.3

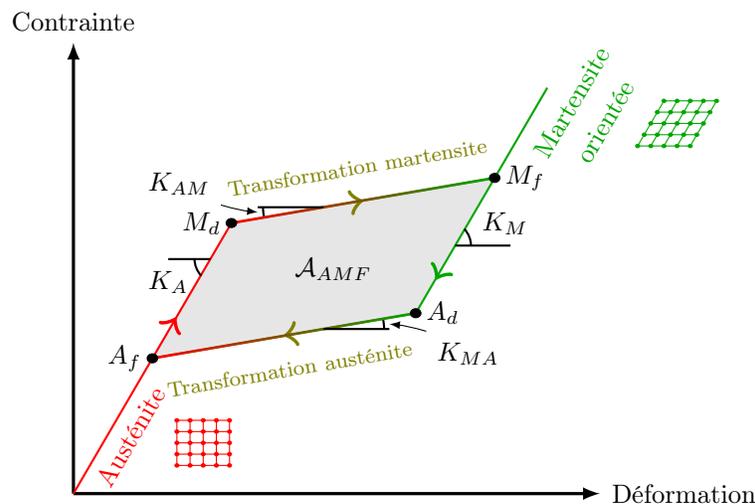


Figure 4.4 – Diagramme contrainte-déformation d'un AMF pour la température  $T_c$  comme représentée Figure 4.3.

Figure 4.3 dans le plan contrainte-déformation sur la Figure 4.4. La raideur en phase austénite est notée  $K_A$ , en phase martensite  $K_M$ , pendant la transformation martensitique  $K_{AM}$  et pendant la transformation austénitique  $K_{MA}$ . Les deux dernières raideurs correspondent à une coexistence d'austénite et de martensite. Ainsi, la boucle d'hystérésis de l'AMF est entièrement définie par les quatre raideurs  $K_A$ ,  $K_M$ ,  $K_{AM}$  et  $K_{MA}$  et les quatre points  $M_d$ ,  $M_f$ ,  $A_d$  et  $A_f$ .

L'énergie dissipée par l'AMF durant un cycle de déformation est égale à l'aire de sa boucle d'hystérésis, notée  $\mathcal{A}_{AMF}$ . Ainsi plus la déformation de l'AMF est importante, plus il dissipera d'énergie, cette énergie étant dissipée sous la forme d'échange thermique.

Afin d'activer le comportement hystérétique de l'AMF dans le cas d'une contrainte cyclique, il

faut que la contrainte dépasse  $M_d$  lorsqu'elle est croissante et qu'elle dépasse  $A_d$  lorsqu'elle est décroissante. De plus, pour que la boucle d'hystérésis de l'AMF soit maximale, il faut qu'au cours du cycle de chargement, l'AMF soit, lors de la charge minimum, en phase austénite et lors de la charge maximum, en phase martensite, afin de recouvrir toute sa boucle d'hystérésis.

### 4.1.3 Présentation des ressorts en AMF

Les alliages à mémoire de forme sont utilisés dans de nombreux contextes industriels [40], comme par exemple l'industrie médicale, le génie civil ou encore l'aéronautique. Concernant le contrôle de vibration, la plupart des travaux s'intéresse à la protection des structures de génie civil des excitations extérieures et principalement des tremblements de terre [78]. L'idée étant de faire travailler l'AMF lorsque la structure entre en vibration pour dissiper l'énergie de cette vibration. Les alliages à mémoire de forme peuvent être réalisés à partir de nombreux métaux différents (Cuivre, Zinc, Nickel, Aluminium, Titane, Fer, ...). Néanmoins, l'alliage le plus souvent utilisé est un assemblage de Nickel et de Titane, noté NiTi et souvent appelé sous sa dénomination commerciale Nitinol. Il est composé à environ moitié de Nickel et de Titane. Sa large utilisation peut-être justifiée par son relatif faible coût de fabrication, sa bonne résistance à la corrosion, sa compatibilité avec des applications biomédicales ou encore sa bonne résistivité électrique [40], ce qui est intéressant quand on veut le chauffer à l'aide d'un courant électrique.

Dans le cadre de la thèse, l'AMF a été fourni par l'entreprise Nimesis [65], ils s'agit d'un alliage NiTi contenant 56.46 % de Nickel et 43.34 % de Titane, la température de fin de transformation austénitique,  $T_{A_f}$ , est de 27°C. Afin de l'inclure dans le montage de flottement, l'AMF est utilisé sous forme de ressort de traction à spires jointives. Le diamètre extérieur du ressort est égal à 4 mm, sa longueur à 50 mm et le diamètre du fil du ressort à 0.5 mm. L'élongation du ressort en AMF provoque la torsion du fil le composant, ce qui déforme l'AMF et engendre le changement de phase. Une photographie des ressorts utilisés est donnée Figure 4.5.

Les ressorts en AMF sont utilisés à température ambiante ( $\sim 20^\circ\text{C}$ ), ce qui est en deçà de  $T_{A_f}$ . Ainsi, au repos, le ressort n'est pas uniquement composé d'austénite et l'entièreté de la boucle d'hystérésis du diagramme contrainte-déformation n'est pas parcourue. Néanmoins, le ressort ne pouvant travailler qu'en traction, il doit avoir une élongation moyenne non nulle et la contrainte minimale d'un cycle n'est ainsi pas forcément nulle. Ainsi, même si  $T_{A_f}$  était inférieure à la température ambiante, la boucle d'hystérésis de l'AMF ne serait pas entièrement parcourue.

## 4.2 Mesures de la force de rappel des ressorts en AMF

Avant d'utiliser les ressorts en AMF sur le montage de flottement, il faut connaître leur force de rappel, notée  $F_{NL}^{AMF}$ , et particulièrement sa dépendance au taux d'élongation et à la fréquence d'excitation du ressort. Pour cela des essais de traction ont été conduits. Tout d'abord en impo-

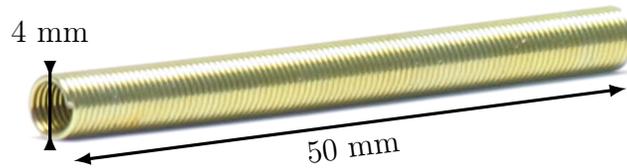


Figure 4.5 – Un des ressorts en AMF utilisé comme amortisseur hystérétique.

sant un chargement quasi-statique afin de connaître la dépendance de la force de rappel au taux d'élongation, puis en imposant un chargement dynamique afin de connaître la dépendance de la force de rappel à la fréquence d'excitation.

### 4.2.1 Comportement quasi-statique

Afin de réaliser les essais de traction quasi-statique on utilise le dispositif expérimental représenté sur la Figure 4.6. Il est composé d'un robot de déplacement auquel est attaché une extrémité du ressort afin de lui imposer son élongation suivant l'axe du ressort. L'autre extrémité du ressort est fixée à une balance servant à mesurer sa force de rappel. Ainsi, le robot impose une élongation au ressort, notée  $l(t)$ , et la balance mesure la force de rappel correspondante. L'évolution de  $l(t)$  en fonction du temps est représentée Figure 4.7.

Le robot de déplacement reste pendant le temps  $\delta t$  à chaque élongation, la mesure de la balance est acquise à la fin de  $\delta t$  puis le robot monte ou descend de la distance  $\delta l$ . Les mesures présentées ici ont été réalisées pour  $\delta t = 10 s$  et  $\delta l = 0.5$  ou  $1 mm$ . L'amplitude de  $l(t)$  est notée  $\Delta l$  et l'amplitude moyenne  $l_m$ , comme représenté sur la Figure 4.7. Les taux d'élongation sont notés  $\varepsilon$ , ils sont calculés par rapport à la longueur à vide du ressort, notée  $l_0$ . Les mesures ont été menées pour  $l(0) = l_m + \Delta l$ , courbe rouge sur la Figure 4.7,  $l(0) = l_m$ , courbe bleue sur la Figure 4.7 et  $l(0) = l_m - \Delta l$ , courbe noire sur la Figure 4.7.

On trace la force de rappel  $F_{NL}^{AMF}$  d'un ressort en AMF en fonction de son taux d'élongation  $\varepsilon$  sur la Figure 4.8(a) pour  $\varepsilon_m = 9.5$ ,  $\Delta \varepsilon = [1.2 \dots 4]$ ,  $\delta \varepsilon = 0.1$  et  $\varepsilon(0) = \varepsilon_m$ . Lorsque  $\Delta \varepsilon$  est faible, la raideur des ressorts en AMF varie peu car le changement de phase ne se fait pas complètement, on dit dans ce cas que l'AMF reste dans sa boucle interne car toute la boucle d'hystérésis n'est pas parcourue. Lorsque  $\Delta \varepsilon$  est important, la raideur des ressorts en AMF varie de façon importante car le changement de phase est plus conséquent, cela s'observe bien sur la plus grande boucle de la Figure 4.8(a).

Afin de quantifier l'énergie dissipée par les ressorts en AMF, ce qui est l'élément clé pour lequel ils sont utilisés ici, on utilise le taux d'amortissement introduit par Carpineto *et al.* [12], noté  $\zeta_{AMF}$ , et égal à

$$\zeta_{AMF} = \frac{\mathcal{A}_{AMF}}{K_G (2 \Delta l)^2},$$

où  $K_G$  est la raideur moyenne du ressort en AMF comme définie sur la Figure 4.8(a). On mesure cette quantité pour différents  $\Delta \varepsilon$  et  $\varepsilon_m$  sur la Figure 4.8(b).

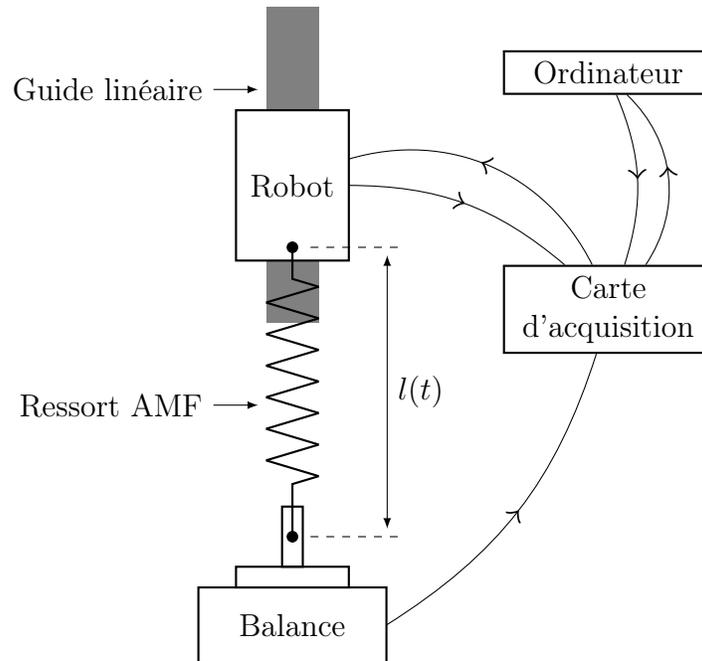


Figure 4.6 – Montage expérimental des essais de tractions quasi-statiques.

Alors que  $\zeta_{AMF}$  est faiblement influencé par le taux d'élongation moyen  $\varepsilon_m$ , il est directement proportionnel à l'amplitude du taux d'élongation  $\Delta \varepsilon$ . En effet pour que  $\zeta_{AMF}$  varie significativement, il faut que le changement de phase austénite-martensite se fasse le plus complètement possible, c'est à dire que la contrainte de l'AMF dépasse  $M_f$  et  $A_f$ , ce qui est obtenu en augmentant  $\Delta \varepsilon$ . C'est ainsi ce paramètre qui permet de maximiser la capacité d'amortissement du ressort en AMF.

Le changement de phase étant réalisé au prix d'un échange thermique entre l'AMF et le milieu extérieur, si l'AMF est contraint dynamiquement, il n'aura pas le temps d'évacuer la chaleur créée par le changement de phase. Il faut ainsi regarder l'influence de la fréquence d'excitation sur la force de rappel des ressorts en AMF, ce qui est présenté dans la section suivante.

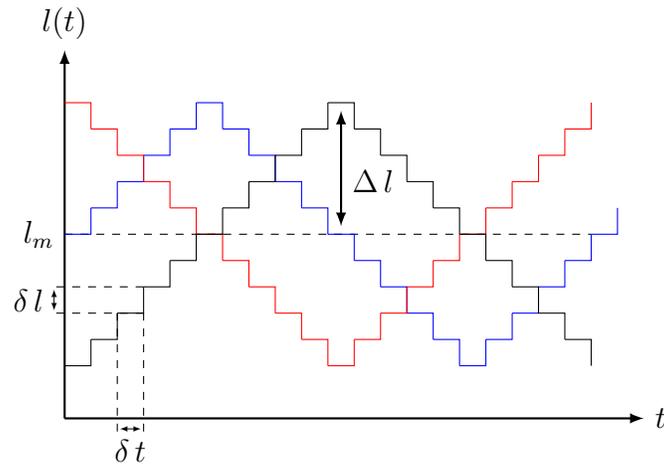
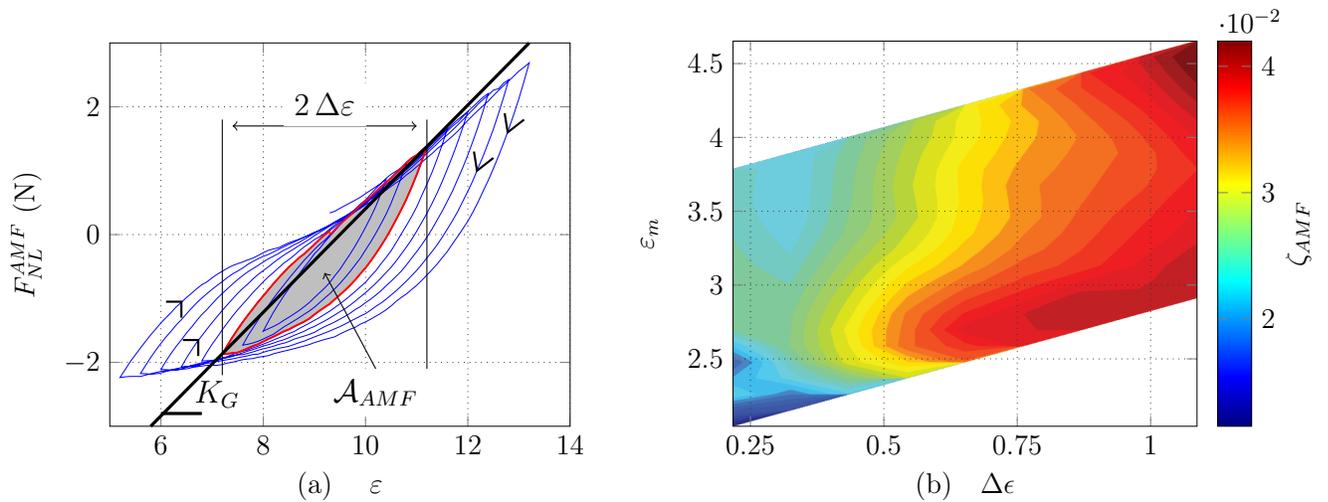


Figure 4.7 – Trois types d'élongations imposées au ressort lors des essais de traction quasi-statiques.

Figure 4.8 – Mesure quasi-statique de la force de rappel d'un ressort en AMF. (a) Exemple pour différentes amplitudes de chargement  $\Delta \varepsilon$ , un taux d'élongation moyen  $\varepsilon_m = 9.5$  et un pas de chargement  $\delta \varepsilon = 0.1$ . (b) Évolution du taux d'amortissement  $\zeta_{SMA}$  des ressorts en AMF en fonction de  $\Delta \varepsilon$  et  $\varepsilon_m$ .

### 4.2.2 Comportement dynamique

Afin de réaliser les essais de traction dynamique, on utilise le dispositif expérimental représenté sur la Figure 4.9. Il est composé d'un ensemble moteur-bielle-manivelle auquel est fixé une

extrémité du ressort en AMF et qui lui impose son élongation suivant son axe de traction, l'autre extrémité du ressort est fixée à un capteur de force PCB 208-C03 qui mesure sa force de rappel. Le déplacement de l'extrémité du ressort fixée à l'ensemble moteur-bielle-manivelle est mesuré à l'aide d'un micromètre optique Keyence LS-7070M. L'élongation imposée par le moteur au ressort est de la forme  $\varepsilon(t) = \varepsilon_m + \Delta\varepsilon \sin(2\pi f_e t)$ , où  $f_e$  est la fréquence d'excitation. On trace sur la Figure 4.10(a) la force de rappel du ressort en AMF pour une fréquence d'excitation  $f_e = 5$  Hz, une amplitude de taux d'élongation  $\Delta\varepsilon = 3$  et une élongation moyenne  $\varepsilon_m = 6$ , en comparaison avec un essai quasi-statique aux mêmes  $\Delta\varepsilon$  et  $\varepsilon_m$ .

La différence principale entre l'essai quasi-statique et l'essai dynamique est la taille de la boucle d'hystérésis, ce qui signifie que les ressorts en AMF sont moins à même de dissiper de l'énergie lorsqu'ils sont déformés dynamiquement. En effet, la transformation martensitique, qui est provoquée quand l'AMF est chargé, est exothermique. Ainsi, si le chargement est dynamique, la chaleur engendrée par cette transformation n'a pas le temps d'être évacuée et le changement de phase n'est plus isotherme. D'après la Figure 4.3, si la température augmente, la fin de la transformation martensitique, correspondant au point  $M_f$ , se fait à un niveau de contrainte plus élevé, ainsi la raideur  $K_{AM}$  est plus élevée. De même, lorsque l'AMF est déchargé, si la température engendrée par la transformation martensitique n'est toujours pas évacuée, le début de la transformation austénitique, correspondant au point  $A_d$ , se fait à un niveau de contrainte plus élevé. Puis, comme la transformation austénitique est endothermique, la température de l'AMF diminue et la fin de la transformation austénitique, correspondant au point  $A_f$ , se fait à un niveau de contrainte plus faible et  $K_{MA}$  est ainsi plus élevé que dans le cas isotherme. Pour résumer, si le chargement est dynamique les points  $M_f$  et  $A_d$  augmentent et le point  $A_f$  diminue. Cela a pour effet de diminuer l'aire de la boucle d'hystérésis de l'AMF.

Il a été observé dans la littérature [19, 37, 85, 99] que la taille de la boucle d'hystérésis passait par un maximum pour une fréquence d'excitation donnée, notée  $f_{opt}$  et généralement inférieure à  $10^{-1}$  Hz. Cette fréquence d'excitation est en fait liée au temps caractéristique de dissipation de la chaleur engendrée par la transformation martensitique. En effet, si à la fin de la transformation martensitique cette chaleur a été évacuée, le point  $A_d$  n'est pas plus élevé que pour une transformation isotherme. Dans ce cas, le point  $M_f$  est plus haut et le point  $A_f$  plus bas, ce qui a pour effet d'augmenter la taille de la boucle d'hystérésis. Un exemple tiré d'un article de He *et al.* [38] est donné comme illustration sur la Figure 4.11.

Dans notre étude, les ressorts en AMF sont utilisés aux fréquences de flottement ( $\sim 4$  Hz). Ainsi, c'est dans cette gamme de fréquences qu'il est intéressant de connaître le comportement des ressorts en AMF. Pour cela, on trace sur la Figure 4.10(b) l'évolution du taux d'amortissement  $\zeta_{AMF}$  des ressorts en AMF en fonction de la fréquence d'excitation  $f_e$ . Le taux d'amortissement  $\zeta_{AMF}$  est maximum pour la plus faible fréquence d'excitation mesurée puis diminue de façon monotone et se stabilise pour  $f_e \simeq 0.3$  Hz, ainsi il est raisonnable de penser que les fréquences d'excitation testées sont supérieures à  $f_{opt}$ .

Même si le taux d'amortissement des ressorts en AMF est moins important pour la fréquence

de flottement que pour des fréquences plus faibles, l'effet hystérétique est toujours présent et les ressorts en AMF restent un candidat intéressant pour le contrôle passif du flottement. De plus, la courbe présentée à la Figure 4.10(b) est valable uniquement pour le ressort utilisé dans les conditions de l'essai, qui correspondent aux conditions de l'expérience. Mais si le matériau, les caractéristiques géométriques du ressort ou l'environnement extérieur varient, cette courbe ne sera plus la même. Les ressorts en AMF ayant été commandés en début de thèse, leur comportement ainsi que leur plage de fonctionnement n'étaient alors pas encore connus. Ainsi, si la plage de fonctionnement des ressort en AMF est connue a priori, il est envisageable, dès la conception, d'améliorer encore leur capacité à contrôler l'instabilité de flottement.

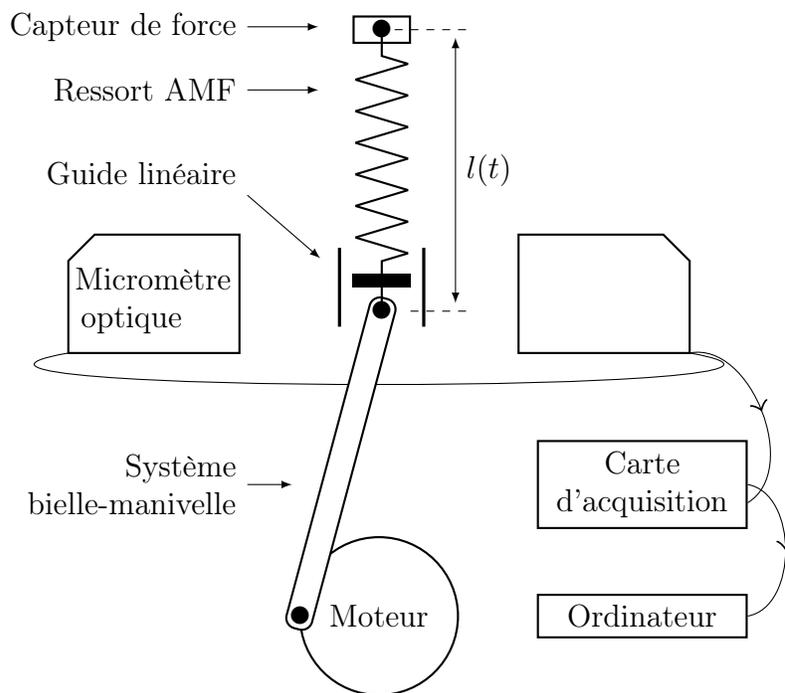


Figure 4.9 – Montage expérimental des essais de tractions dynamiques.

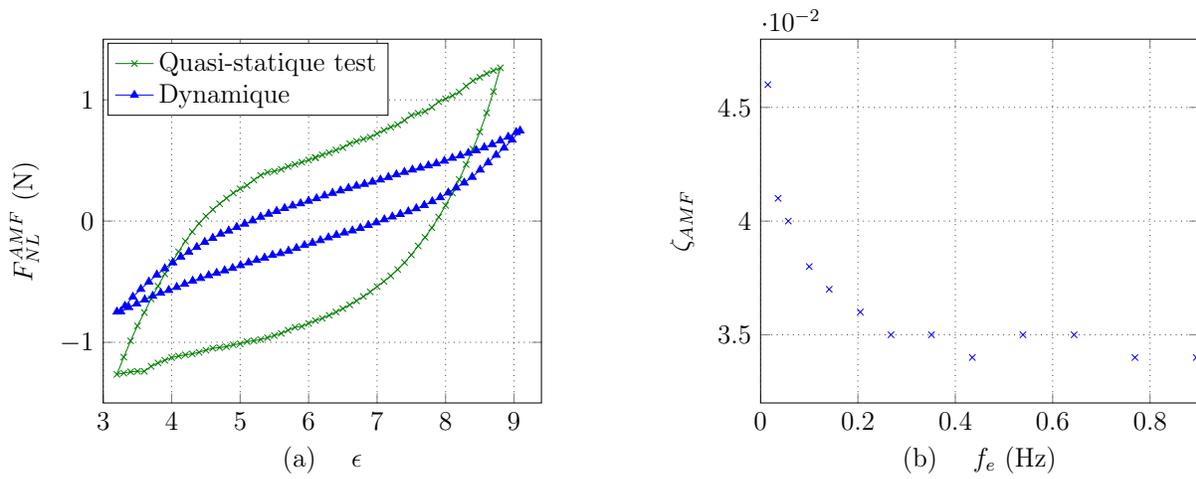


Figure 4.10 – Essai de traction des ressorts en AMF. (a) Comparaison entre un chargement quasi-statique et dynamique et (b) influence de la fréquence d’excitation  $f_e$  sur le taux d’amortissement  $\zeta_{AMF}$  du ressort en AMF.

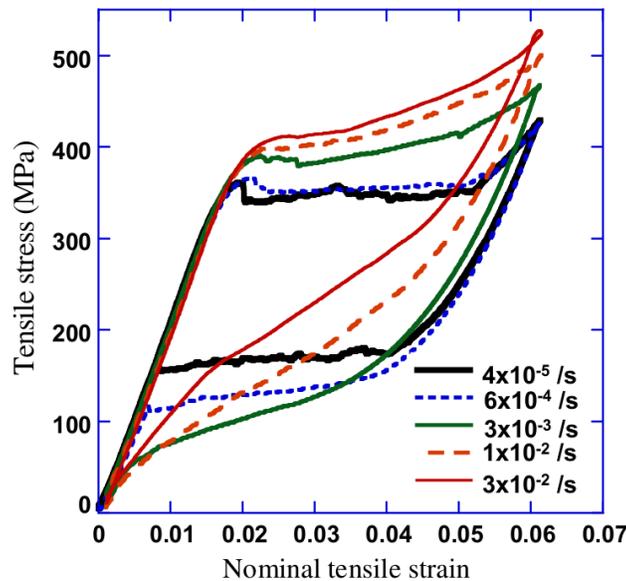


Figure 4.11 – Mesure de l’effet de la fréquence d’excitation sur la boucle d’hystérésis d’un AMF. La mesure a été réalisé par He *et al.* [38]. La fréquence d’excitation optimale  $f_{opt}$  correspond à la courbe verte.

## 4.3 Modèle de Bouc-Wen

Afin de modéliser l'influence des ressorts en AMF sur l'instabilité de flottement, il faut estimer leur force de rappel. De nombreuses études dans la littérature s'intéressent à la modélisation des AMF en régime pseudo-élastique [7, 45, 47, 67, 68, 74]. Ces modèles sont généralement des modèles tridimensionnels utilisant des lois thermodynamiques. De plus, ils utilisent des équations décrivant l'évolution de la fraction de martensite dans l'alliage, les échanges de chaleur et les forces thermodynamiques provenant d'un pseudo-potential de dissipation qui peut inclure des fonctions critères décrivant les transformations de phase, comme expliqué par exemple par M. Ould Moussa [68]. Ces modèles, bien que décrivant fidèlement le comportement mécanique des AMF, sont relativement lourds d'utilisation. D'autant plus que l'AMF n'est pas déformé de manière homogène. En effet, c'est l'élongation du ressort qui cause sa déformation en provoquant la torsion du fil le composant. Ainsi, l'AMF est principalement déformé sur la partie extérieure de sa section et il faut alors prendre en compte la façon dont l'AMF est déformé en fonction de l'élongation du ressort. Cela complique ainsi encore plus la prédiction de la force de rappel des ressorts en AMF par les modèles cités précédemment.

Contrairement à cette approche, il a été choisi au cours de la thèse de recourir à un modèle phénoménologique estimant directement la force de rappel des ressorts en AMF. Une première stratégie a été de modéliser directement les différentes raideurs de la force de rappel des ressorts en AMF à l'aide de sections de droites. Ainsi, en fonction de l'élongation du ressort et de son « histoire », le modèle affecte la force de rappel correspondante en s'appuyant sur les sections de droites. L'utilisation de ce modèle a fait l'objet d'une publication [58] donnée en annexe, et est résumée dans la section 5.2. Bien que ce modèle reproduise bien le comportement global de la force de rappel de l'AMF, il n'estime pas assez fidèlement la force de rappel des ressorts en AMF utilisés dans cette étude. En effet, il ne prend pas en compte le fait que même pour une élongation faible, la force de rappel des ressorts en AMF est hystérétique, ce qui est notamment montré sur la Figure 4.8. Or cela est déterminant lorsque les ressorts en AMF sont utilisés pour contrôler le flottement. En effet, plus tôt les ressorts en AMF ont un comportement hystérétique, plus le mouvement du profil sera amorti rapidement. Il est ainsi essentiel de modéliser correctement le comportement des ressorts en AMF pour des faibles taux d'élongations.

Pour ces raisons, nous nous sommes tournés vers des modèles hystérétiques de la littérature. Il en existe un grand nombre, on peut citer notamment celui de Duhem [22], de Dahl [15] ou encore de Bouc et Wen [9, 98]. Tous ces modèles font intervenir des formulations différentielles et utilisent des fonctions discontinues. Le modèle retenu est celui de Bouc-Wen, en effet ce modèle a déjà été utilisé par Carboni [11] pour modéliser la force de rappel d'un dispositif utilisant des fils en AMF et a donné des résultats satisfaisants. Pour identifier les coefficients de ce modèle phénoménologique, les mesures présentées section 4.2 sont utilisées.

### 4.3.1 Description du modèle

La formulation retenue pour la force de rappel  $F_{NL}^{AMF}$  provenant du modèle de Bouc-Wen s'écrit

$$F_{NL}^{AMF}(h, t) = k_E h + k_3 h^3 + z(t), \quad (4.1)$$

où  $k_E$  représente la raideur globale de l'AMF et  $k_3$  le comportement potentiellement raidissant ou assouplissant de la force de rappel aux grandes amplitudes. Le comportement hystérétique est modélisé à l'aide de la fonction  $z(t)$ , qui est calculée à partir de l'équation différentielle de premier ordre suivante,

$$\dot{z} = [k_D - |z|^n(\gamma + \beta \text{sign}(\dot{h}z))] \dot{h}, \quad (4.2)$$

où  $k_D$  contribue de manière analogue à  $k_E$  à la raideur globale de la force de rappel. D'autre part,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $n$  sont les coefficients modélisant la forme de la boucle d'hystérésis de  $F_{NL}^{AMF}$ . Le coefficient  $\beta$  permet de modifier la valeur de  $K_A$ , le coefficient  $\gamma$  celle de  $K_{AM}$  et  $n$  le rapport entre  $K_A$  et  $K_{AM}$ . Finalement  $\text{sign}()$  désigne la fonction signe.

La force de rappel prédite par le modèle de Bouc-Wen est symétrique, ce qui signifie que les raideurs  $K_A$  et  $K_M$  sont supposées égales de même que les raideurs  $K_{AM}$  et  $K_{MA}$ . Ainsi  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $n$  influent sur toutes les parties de la boucle d'hystérésis. Le caractère symétrique de la force de rappel des ressorts en AMF a bien été observé expérimentalement pour les différentes élongations testées, l'hypothèse de symétrie du modèle de Bouc-Wen n'est donc pas gênante. Il est néanmoins possible, en prenant une expression modifiée du modèle de Bouc-Wen, de simuler des forces de rappel asymétriques [84].

Les coefficients  $k_D$ ,  $k_E$ ,  $k_3$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $n$  sont ajustés à l'aide de la fonction de minimisation sous contrainte non linéaire *fmincon* de Matlab. La fonction coût à minimiser est la différence au carré entre les prédictions du modèle et les essais présentés dans la section 4.2. Il est à noter que les coefficients du modèle de Bouc-Wen correspondent à une précontrainte  $\varepsilon_m$  et à une fréquence d'excitation  $f_e$  donnée. En effet, il n'y a pas d'élément dans le modèle qui prend en compte le comportement thermomécanique de l'AMF et sa fraction d'austénite.

### 4.3.2 Comparaison avec les mesures

Un exemple du résultat de la procédure décrite dans la section précédente est donné sur la Figure 4.12 où la force de rappel quasi-statique d'un ressort en AMF mesurée et estimée par le modèle de Bouc-Wen pour  $\varepsilon_m = 3$  et  $\Delta\varepsilon = 0.8, 1.2$  et  $1.8$  sont tracées. Les paramètres utilisés sont regroupés dans le Tableau 4.2. La force de rappel des ressorts en AMF est très bien estimée par le modèle, et ce, aux différentes amplitudes du taux de délongation. De plus, le comportement hystérétique est bien observé pour des faibles amplitudes d'élongation et les passages de  $K_A$  à  $K_{AM}$ , ainsi que de  $K_M$  à  $K_{MA}$ , ne sont pas abruptes. Ce qui est le cas lorsque le modèle par sections de droites est utilisé.

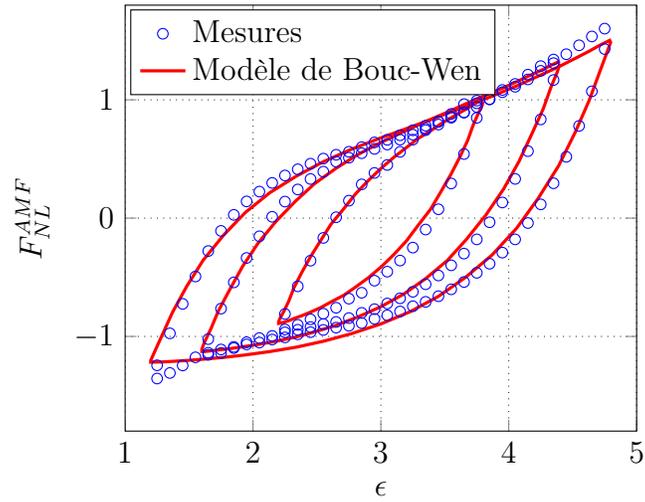


Figure 4.12 – Force de rappel des ressorts en AMF pour un chargement quasi-statique avec  $\Delta\varepsilon = 0.8, 1.2$  et  $1.8$  et  $\varepsilon_m = 3$ .

$k_D$ [ $kg.s^{-2}$ ]	$k_E$ [ $kg.s^{-2}$ ]	$k_3$ [ $kg.m^{-2}.s^{-2}$ ]	$\beta$	$\gamma$	$n$
138	0	$8.7 \cdot 10^3$	154	0	1

Tableau 4.2 – Coefficients du modèle de Bouc-Wen utilisé pour la configuration présentée sur la Figure 4.12

Dans le chapitre suivant, ces ressorts sont intégrés au montage de flottement présenté à la section 2.1.1 afin d'étudier leur influence sur l'instabilité de flottement. Puis, la modélisation de l'aile en flottement avec les ressorts en AMF est présentée.

