

Chapitre III

Composition Asynchrone

Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié un concept de modularité “verticale”, à savoir le raffinement hiérarchique par remplacement de modules par des modules équivalents. Ici nous considérons un concept de modularité “horizontale”, c-à-d, la composition des modèles. Il existe deux façons naturelles de composer des réseaux de Petri: la fusion de transitions et la fusion de places.

La fusion de transitions correspond à la synchronisation d'événements par (multi-)rendez-vous. Elle a déjà fait l'objet de nombreux travaux qui posent le problème de déterminer le comportement d'un système à partir des comportements de ses composants, ou de trouver sous quelles conditions des propriétés du système (vivacité, caractère borné) peuvent être déduites de celles de ses composants. Mazurkiewicz[41] montre que la composition des ensembles de traces de deux réseaux est égal à l'ensemble des traces du réseau composé; Winskel[66] étudie le problème dans le cadre des catégories où la composition de deux réseaux par fusion de transitions correspond au produit; Souissi[51,52] étudie la conservation de la vivacité dans la composition de deux réseaux à travers un médium de communication et la composition par rendez-vous multiples ordonnés; Valmari[59] propose une méthode de composition des graphes d'états correspondant à la composition par fusion de transitions: on associe à chaque composant son graphe qu'on réduit par des transformations conservant une certaine relation d'équivalence, puis on compose les graphes réduits. (voir aussi l'introduction du chapitre précédent.)

Ici nous étudions la composition par fusion de places que nous appelons composition asynchrone par opposition à la fusion de transitions qui est une synchronisation d'événements.

L'étude de la composition par fusion de places (notée \otimes) est plus difficile que

celle de la composition par fusion de transitions (notée $|$) car, si Σ_1 et Σ_2 sont deux systèmes P/T, les projections du graphe des marquages de $\Sigma_1|\Sigma_2$ sont inclus dans les graphes de marquages de Σ_1 et Σ_2 , cette propriété n'étant pas vérifiée par $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$.

Cette opération admet plusieurs interprétations: le séquençement, l'alternative ou l'itération sont obtenues par des fusions de places quand les places sont considérées comme les préconditions et les postconditions d'une action (Kotov[37]); quand on fusionne des places représentant des ressources des systèmes, la fusion s'interprète comme un partage de ressources ou un multiplexage si les places représentent l'état repos d'une unité.

Dans le cas général, nous obtenons essentiellement la conservation des flots, et celle des espaces d'accueil quand leur accessibilité est indépendante des places partagées. En particulier, ce résultat implique que la composition de deux réseaux à interface ouverte robuste est un OI-réseau robuste.

La difficulté du problème a déjà été mise en évidence par d'autres travaux. Dans [53], Souissi étudie la conservation de la vivacité lors de la composition de réseaux par fusion de places, et est amené à supposer des conditions de monotonie de vivacité des réseaux. Petrucci[45] présente un algorithme de construction du graphe des marquages de la composition de deux réseaux: dans le cas de la composition par fusion de places, l'algorithme est plus complexe et construit implicitement plusieurs graphes pour chacun des composants.

La relation entre un réseau composé et ses composants étant assez décevante dans le cas général, nous étudions la composition de réseaux appartenant à des classes plus restreintes, et nous nous intéressons à des propriétés particulières: nous considérons le problème du partage de ressources et la preuve modulaire de la propriété "il est toujours possible de libérer les ressources."

Dans [33], Holt développe une théorie des systèmes et des catégories de ressources en vue d'étudier les propriétés de blocages. Il distingue deux types de ressources: les renouvelables et les consommables.

Les ressources consommables sont disponibles en nombre infini et ne sont pas réutilisables (messages, signaux): leur partage est modélisé par la fusion de places représentant des canaux, et donc initialement vides.

Les ressources renouvelables sont disponibles en nombre fini et le processus qui les utilise les libère quand il n'en a plus besoin (imprimantes, variable de sémaphore); leur partage est modélisé par la fusion de places bornées par leur marquage initial.

Quelques analyses du problème d'allocation de ressources au moyen des réseaux de Petri existent centrées autour de l'algorithme d'Habermann[28] et celui du banquier[21]. Lautenbach et Thiagarajan[39] ont considéré des processus séquen-

tiels modélisés par des réseaux cycliques, et ont montré que l'ajout de certaines places empêchent le franchissement des séquences qui ne sont pas "fiables" (qui mènent à un blocage) et celles-ci seulement. Tazza[56] reprend le problème sur une classe de réseaux plus générale, où la stratégie d'allocation n'est plus optimale (c-à-d, certaines séquences fiables sont aussi interdites): il étudie alors quantitativement la déviation par rapport à l'optimum. Hauschildt et Valk[32] étudient à partir d'une représentation au moyen d'un réseau de Petri de l'algorithme du banquier, et dérivent des formules caractérisant les états fiables (qui ne mènent pas à un blocage).

Nous n'étudions pas de stratégie d'allocation de ressources, mais des conditions que doivent vérifier les réseaux dans leurs demandes et libérations de ressources pour éviter l'interblocage. Le résultat principal de ce chapitre est une solution du problème d'interblocage dans les systèmes à ressources renouvelables, basée sur un ordonnancement des ressources. Notre solution diffère de la solution classique en ce qu'il existe des choix dans les suites de demandes de ressources.

Dans la première section, nous examinons les propriétés élémentaires de cette composition: relation entre les langages des composants et celui du composé, ainsi que les propriétés relatives aux flots. Nous énonçons un premier résultat sur la conservation d'espace d'accueil dans certaines conditions.

Dans la deuxième section, la classe des réseaux à ressources renouvelables est définie: il s'agit de réseaux où on distingue un ensemble de places (ressources) bornées par leur marquage initial. Nous montrons alors que la relation entre les comportements des composants et celui du composé devient plus étroite.

Dans la troisième section, nous définissons la classe des réseaux à ressources ordonnées: ce sont des réseaux à ressources renouvelables, où les ressources sont ordonnées et il est toujours possible de libérer une ressource de rang k sans demander des ressources de rang $j \leq k$. Nous montrons alors que dans un tel réseau, il est toujours possible de libérer toutes les ressources. De plus, cette classe est fermée par composition ce qui implique que cette propriété est conservée.

L'originalité de cette solution réside dans le fait que nous considérons des processus avec choix, car sinon, ces hypothèses d'ordonnancement coïncident avec celles de la solution classique quand les processus sont linéaires.

La quatrième section esquisse rapidement une extension des différentes opérations et définitions aux réseaux colorés.

III-1 Composition par fusion de places

Cette section étudie certaines propriétés générales de la composition par fusion de places: quelques résultats sur relations entre un système et ses composants en ce qui concerne les séquences franchissables, les invariants, les places implicites et les espaces d'accueil.

III-1.1 Définition et comportement

Nous appelons la composition par fusion de places composition asynchrone par opposition à la fusion des transitions qui est une synchronisation d'événements. Graphiquement, l'opération consiste à superposer les places communes aux deux réseaux; pour les réseaux marqués, les places fusionnées doivent avoir le même marquage initial, car les deux systèmes partagent les mêmes ressources et n'apportent pas chacun ses ressources. La figure III-1 résume l'opération et fixe les notations.

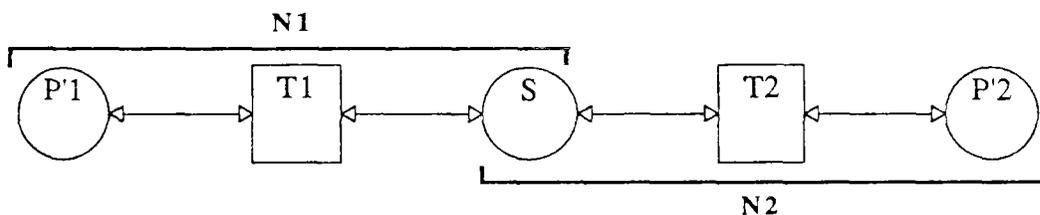


Figure III-1: Composition asynchrone

Définition III-1 (Composition asynchrone de réseaux)

La composition asynchrone de deux réseaux $N_i = (P_i, T_i; W_i)$, $i = 1, 2$, est définie par:

$$N_1 \otimes N_2 = (P, T; W)$$

où

- $P = P_1 \cup P_2$
- $T = T_1 \uplus T_2$ (T est l'union disjointe de T_1 et T_2)
- $W = W_1 \cup W_2$

Définition III-2 (Composition asynchrone de systèmes)

La composition asynchrone de deux systèmes $P/T, (N_i; M_{0i})$, $i = 1, 2$, tels que

$$M_{01} \downarrow_{P_1 \cap P_2} = M_{02} \downarrow_{P_1 \cap P_2}$$

est définie par

$$(N_1; M_{01}) \otimes (N_2; M_{02}) = (N_1 \otimes N_2; M_0)$$

où

$$M_0 \downarrow_{P_i} = M_{0i} \downarrow_{P_i}$$

Dans la suite, on notera $P_1 \cap P_2 = S$ et $P'_i = P_i \setminus S$.

La proposition suivante montre la différence fondamentale entre la composition par fusion de transitions et celle par fusion de places.

Dans la composition par fusion de transitions (qu'on notera $|$), si $M \xrightarrow{\sigma} M'$ dans $N_1 | N_2$ alors $M_i \xrightarrow{\sigma_i} M'_i$ où $M_i = M \downarrow_{P_i}$, $\sigma_i = \sigma \downarrow_{T_i}$ et $M'_i = M' \downarrow_{P_i}$; autrement dit la projection du graphe des marquages de $\Sigma_1 | \Sigma_2$ sur les places et les transitions de Σ_i est un sous-graphe du graphe de Σ_i (où $\Sigma_i = (N_i; M_{0i})$).

Cette relation est fautive dans la composition par fusion de places.

La figure III-2 montre un exemple de client-serveur ayant un compteur qui mémorise le nombre de requêtes traitées; CTR est la place modélisant le compteur.

Dans $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$, on a pour tout n , $CI + SI \xrightarrow{\sigma} CI + SI + n.CTR$ pour $\sigma = (er.rr.ea.ra)^n$; or dans Σ_2 rien n'est franchissable à partir de SI mais $SI + n.R \xrightarrow{\sigma_2} SI + n.CTR + n.A$ où $\sigma_2 = (rr.ea)^n$.

Donc le marquage qui permet le franchissement de $\sigma \downarrow_{T_i}$ dans N_i dépend de M et de σ , et M et M_i sont égaux uniquement sur P_i privé des places partagées.

Cela signifie que le comportement du système résultant de la composition ne se déduit pas du comportement des composants, d'où la difficulté d'étudier cette composition et le besoin de mettre des restrictions pour obtenir une relation entre le réseau composé et ses composants. Ce sera l'objet de la section suivante avec les réseaux à ressources renouvelables.

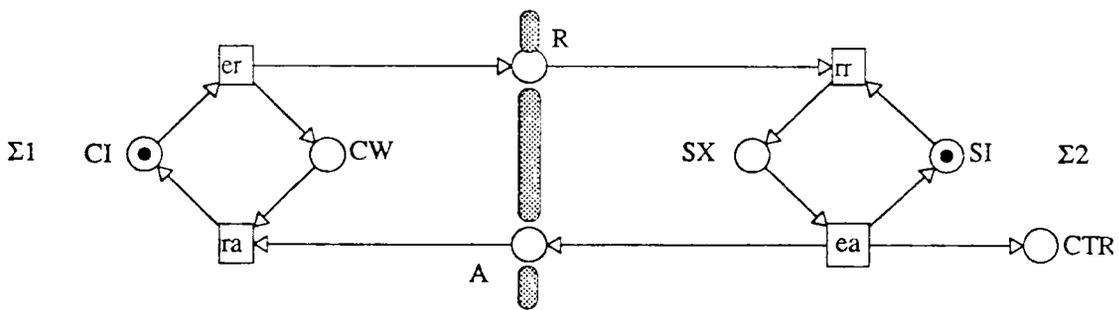


Figure III-2: Composition et comportement

Proposition III-1 (Composition et comportement) Soit Σ_1 et Σ_2 deux systèmes P/T , $\sigma \in L(\Sigma_1 \otimes \Sigma_2)$ et $M_0 \xrightarrow{\sigma} M$.

En général

$$\sigma \downarrow_{T_i} \notin L(\Sigma_i)$$

mais il existe $M'_{0i} \in \mathbf{N}^{P_i}$ dépendant de σ , tel que

$$M'_{0i} \xrightarrow{\sigma_i} M'_i, \text{ où } \sigma_i = \sigma \downarrow_{T_i}$$

$$M'_i \downarrow_{P'_i} = M \downarrow_{P'_i} \wedge M'_i \downarrow_S \geq M \downarrow_S$$

(idem pour M'_{0i} et M_0).

Preuve Si $M_0 \xrightarrow{\sigma} M$, on définit M'_{0i} en ajoutant au marquage initial de Σ_i toutes les productions dans les places partagées des transitions de σ appartenant à T_j (où $\{i,j\}=\{1,2\}$):

$$\forall p \in P_i, M'_{0i}(p) = M_{0i}(p) + \sum_{t \in T_j} \bar{\sigma}(t) W(t, p)$$

où $\bar{\sigma}(t)$ est le nombre d'occurrences de t dans σ .

Il est alors facile de vérifier que $M'_{0i} \xrightarrow{\sigma_i} M'_i$ et que les relations entre M'_i et M sont vraies. \square

III-1.2 Invariants structurels

Les invariants inductifs sont des outils de preuve importants. Certains de ces invariants se déduisent de la structure du réseau, c-à-d de la matrice d'incidence ou des matrices *Pre* et *Post*.

Proposition III-2 (Invariants structurels) Soit X_i la matrice d'incidence, de *Pre* ou de *Post* de N_i , et X la matrice correspondante de $N_1 \otimes N_2$. Soit $\mathcal{R} \subseteq \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}$, $a_i \subseteq \mathbf{Z}^{P'_i}$, $a \subseteq \mathbf{Z}^S$ et $b \in \mathbf{Z}^{T_i}$.

Alors pour tout $d \in \mathbf{Z}$ on a:

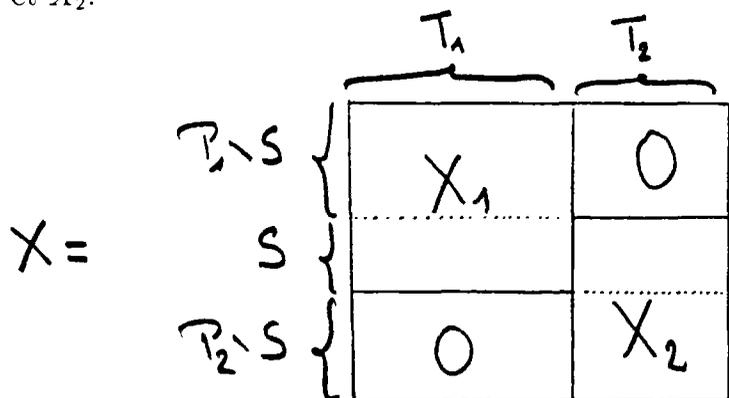
(i)

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, 2\}, \forall t \in T_i, \left(\sum_{p \in P'_i} a_i(p) X_i(p, t) + \sum_{p \in S} a(p) X_i(p, t) \right) \mathcal{R} d \\ \Downarrow \\ \forall t \in T_1 \cup T_2, \left(\sum_{p \in P'_1} a_1(p) X(p, t) + \sum_{p \in S} a(p) X(p, t) + \sum_{p \in P'_2} a_2(p) X(p, t) \right) \mathcal{R} d \end{aligned}$$

(ii)

$$\forall p \in P_1, \left(\sum_{t \in T_1} b(t) X_1(p, t) \right) \mathcal{R} d \Rightarrow \forall p \in P_1 \cup P_2 \left(\sum_{t \in T_1} b(t) X(p, t) \right) \mathcal{R} d$$

Preuve La preuve est immédiate comme le montre la construction de X à partir de X_1 et X_2 :



□

(i) concerne les invariants de place: si \mathcal{R} est l'égalité et $d = 0$, alors $f \in \mathbb{N}^P$ est un flot de $N_1 \otimes N_2$ si et seulement si $f \downarrow_{P_i}$ est un flot de N_i pour $i = 1, 2$. Autrement dit, on peut composer deux flots s'ils ont mêmes coefficients sur les places partagées. En particulier, les flots de N_i dont le support ne contient pas des places partagées, sont conservés dans $N_1 \otimes N_2$. Si \mathcal{R} est la relation \geq (ou \leq), il s'agit des invariants d'inégalité.

(ii) concerne les invariants de transition ou "rythmes": un rythme de N_1 est évidemment un rythme de $N_1 \otimes N_2$ mais il peut exister des rythmes de $N_1 \otimes N_2$ dont les projections sur T_1 et T_2 ne soient pas des rythmes. Il en est de même pour les séquences croissantes.

Dans l'exemple de la figure III-3, $A + B + C$ est un flot de N_1 et $B + C + D$ un flot de N_2 : comme les coefficients sur $\{B, C\}$ sont les mêmes dans les deux réseaux, on en déduit que $A + B + C + D$ est un flot de $N_1 \otimes N_2$.

$2A + B + 2C$ est un flot de N_3 et $B + C + D$ un flot de N_4 : comme les coefficients de C sont différents dans les deux réseaux, on ne peut pas en déduire de flot; mais $A + B + C \geq 0$ est vrai dans N_3 et donc on en déduit que $A + B + C + D \geq 0$ est vrai dans $N_3 \otimes N_4$, c-à-d, $M(A) + M(B) + M(C) + M(D) \geq k$ est un invariant inductif de $N_3 \otimes N_4$.

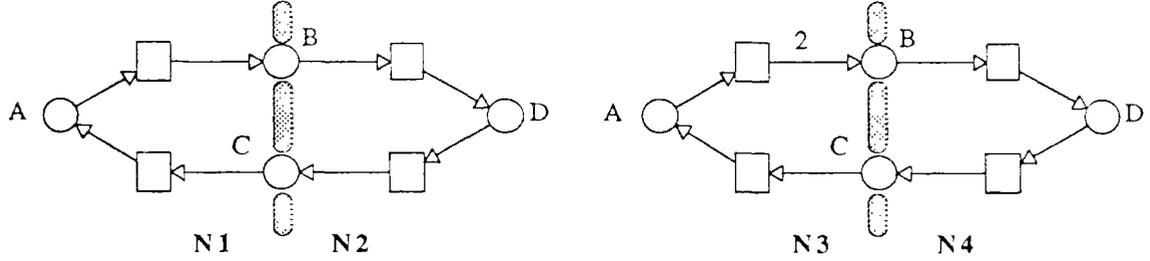


Figure III-3: Invariants structurels

III-1.3 Conservation de place implicite

Les places implicites (structurelles) éta. déterminées par des propriétés linéaires de la matrice d'incidence et du marquage initial, le résultat précédent permet de déduire des conditions de conservation de place implicite lors de la composition. La définition de place implicite donnée ici est inspirée de Silva[17].

Définition III-3 (Place implicite) Soit $(N; M_0)$ un système P/T et $p_0 \in P$. On dit que p_0 est une place implicite par rapport à (I, f) où $I \subseteq P \setminus \{p_0\}$ et $f \in \mathbf{N}^{I \cup \{p_0\}}$ ssi

$$\forall t \in T, f(p_0)C(p_0, t) - \sum_{p \in I} f(p)C(p, t) \geq 0$$

$$\forall t \in T, f(p_0)M_0(p_0) - \sum_{p \in I} f(p)M_0(p) \geq f(p_0)W(p_0, t) - \sum_{p \in I} f(p)W(p, t)$$

Quand une place partagée est implicite pour les deux réseaux, et qu'elle l'est par rapport aux mêmes places partagées avec les mêmes coefficients dans les deux réseaux, cette place est implicite dans le réseau obtenu par composition. Donc cette place partagée peut être supprimée, ce qui simplifie l'analyse du réseau composé.

Corollaire III-1 (Conservation de place implicite) Soit $\Sigma_i(N_i; M_{0i})$ deux systèmes P/T , et $s_0 \in S = P_1 \cap P_2$.

Si s_0 est implicite par rapport à (I, f) où $I \subseteq S$, dans Σ_1 et Σ_2 , alors s_0 est implicite par rapport à (I, f) dans $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$.

Preuve On suppose que $s_0 \in S$ est implicite par rapport à (I, f) dans les deux réseaux (et donc $I \subseteq S$).

$$\forall i \in \{1, 2\}, \forall t \in T_i, f(s_0)C_i(s_0, t) - \sum_{p \in I} f(p)C_i(p, t) \geq 0$$

Par application de la proposition III-2, on obtient

$$\forall t \in T_1 \cup T_2, f(s_0)C(s_0, t) - \sum_{p \in I} f(p)C(p, t) \geq 0$$

De même, de

$$\forall i \in \{1, 2\}, \forall t \in T_i, f(s_0)M_{0i}(p_0) - \sum_{p \in I} f(p)M_{0i}(p) \geq f(s_0)W_i(p_0, t) - \sum_{p \in I} f(p)W_i(p, t)$$

en notant que

$$d = f(s_0)M_{01}(p_0) - \sum_{p \in I} f(p)M_{01}(p) = f(s_0)M_{02}(p_0) - \sum_{p \in I} f(p)M_{02}(p)$$

car $M_{01} \downarrow_S = M_{02} \downarrow_S$, on déduit

$$\forall t \in T_1 \cup T_2, f(s_0)M_0(p_0) - \sum_{p \in I} f(p)M_0(p) \geq f(s_0)W(p_0, t) - \sum_{p \in I} f(p)W(p, t)$$

□

III-1.4 Conservation d'espaces d'accueil

La dernière propriété examinée est celle d'espace d'accueil. Pour avoir une conservation de cette propriété lors de la composition, nous supposons une certaine indépendance vis-à-vis des places partagées et donc de leurs transitions sorties. Nous considérons donc des $(T \setminus S^\bullet)$ -espaces d'accueil, c-à-d accessibles sans franchir des transitions en sortie des places partagées, et accessibles pour une classe de marquages initiaux, c-à-d si l'environnement avec lequel est composé le réseau vérifie certaines propriétés.

Proposition III-3 (Conservation d'espaces d'accueil) *Soit $(N_i; M_{0i})$ deux systèmes P/T , $MI_i \subseteq \mathbf{N}^{P_i}$ et $E_i \subseteq \mathbf{N}^{P'_i}$.*

On note $(N; M_0) = (N_1; M_{01}) \otimes (N_2; M_{02})$.

Si

$$\forall M_i \in MI_i, E_i \uparrow^{P_i} \text{ est un } (T_i \setminus S^\bullet)\text{-espace d'accueil de } (N_i; M_i)$$

et

$$\forall \sigma \in L((N; M_0)), \exists M'_{0i} \in MI_i, (M'_{0i} \downarrow_{P'_i} = M_{0i} \downarrow_{P'_i}) \wedge (\sigma \downarrow_{T_i} \in L((N_i; M'_{0i})))$$

alors

$$E_1 \uparrow^P \cap E_2 \uparrow^P \text{ est un } (T \setminus S^\bullet)\text{-espace d'accueil de } (N_1; M_{01}) \otimes (N_2; M_{02})$$

Notons que l'existence d'un M'_{0i} tel que $\sigma \downarrow_{T_i} \in L((N_i; M'_{0i}))$ est vraie d'après la proposition III-1, mais la contrainte supplémentaire est $M_i \in MI_i$.

Preuve Soit $\sigma \in T^*$ tel que $M_0 \xrightarrow{\sigma} M$. On veut montrer qu'il existe s tel que $M \xrightarrow{s} m \in E_1 \uparrow^P \cap E_2 \uparrow^P$.

Par hypothèse, il existe $M'_{01} \in MI_1$ tel que $M'_{01} \downarrow_{P'_1} = M_{01} \downarrow_{P'_1}$ et $M'_{01} \xrightarrow{s_1} M'_1$. Comme $E_1 \uparrow^{P_1}$ est un $(T_1 \setminus S^*)$ -espace d'accueil de $(N_1; M'_{01})$, il existe $s_1 \in (T_1 \setminus S^*)^*$ telle que $M'_1 \xrightarrow{s_1} M''_1 \in E_1 \uparrow^{P_1}$. Or $M \downarrow_{P'_1} = M'_1 \downarrow_{P'_1}$ et donc $M \xrightarrow{s_1} Q_1$ où $Q_1 \downarrow_{P_2} = M \downarrow_{P_2}$ et $Q_1 \downarrow_{P'_1} \in E_1$.

De même, à partir de Q_1 , il existe une séquence $s_2 \in (T_2 \setminus S^*)^*$ telle que $Q_1 \xrightarrow{s_2} Q_2$, avec $Q_2 \downarrow_{P'_1} = Q_1 \downarrow_{P'_1}$ et $Q_2 \downarrow_{P'_2} \in E_2$: donc $m = Q_2 \in E_1 \uparrow^P \cap E_2 \uparrow^P$ et $s = s_1 s_2$. \square

Corollaire III-2 (Composition d'OI-réseaux robustes)

Soit $(N_i; ITF_i; STB_i; M_{0i})$ deux réseaux à interface ouverte robuste tels que $(P_1 \cap P_2) \subseteq (ITF_1 \cap ITF_2)$.

Alors $(N; ITF; STB; M_0)$ est un OI-réseau robuste où

- $(N; M_0) = (N_1; M_{01}) \otimes (N_2; M_{02})$
- $ITF = ITF_1 \cup ITF_2$
- $STB = STB_1 \uparrow^P \cap STB_2 \uparrow^P$ où $P = P_1 \cup P_2$

Preuve On applique la proposition précédente, en prenant $MI_i = \{M_{0i}\} \uparrow^{P_i}$ et $E_i = STB_i$. \square

En fait, ce résultat aurait pu être déduit directement de la caractérisation des OI-réseaux robustes de la proposition II-2. Nous avons voulu montrer qu'il est aussi une conséquence de la proposition III-3.

III-2 Réseaux à ressources renouvelables

Dans cette section nous étudions les propriétés de la composition de réseaux par fusion de places marquées et bornées par leur marquage initial. Dans ce cas, le comportement du système global est la composition des comportements de ses composants.

Nous commençons par définir une classe de réseaux où on distingue un ensemble de places bornées par leur marquage initial. Ces places sont interprétées comme modélisant des ressources renouvelables, d'où le nom de ces réseaux.

Définition III-4 (Réseaux à ressources renouvelables) Un réseau à ressources renouvelables est un triplet $RRN = (N; M_0; RES)$ où

- $(N; M_0) = (P, T; W; M_0)$ est un système place/transition
- $RES \subseteq P$ est l'ensemble des ressources de RRN vérifiant: pour tout $r \in RES$, r est bornée par $M_0(r)$ dans $(N; M_0)$.

L'ensemble des réseaux à ressources renouvelables est noté \mathcal{RRN} .

La composition de deux réseaux à ressources renouvelables est un réseau à ressources renouvelables et donc un nombre arbitraire de réseaux peut être composé.

La composition de deux réseaux à ressources renouvelables se fait par fusion de places appartenant uniquement à RES . Dans ces hypothèses, la projection d'une séquence du langage de la composition des deux réseaux est une séquence du langage d'un composant (contrairement au cas général: cf. la proposition III-1).

Définition III-5 (Composition sur \mathcal{RRN}) La composition asynchrone de deux réseaux à ressources renouvelables tels que

$$RES_1 \cap RES_2 = P_1 \cap P_2$$

est définie par

$$(N_1; M_{01}; RES_1) \otimes (N_2; M_{02}; RES_2) = (N; M_0; RES)$$

où

- $(N; M_0) = (N_1; M_{01}) \otimes (N_2; M_{02})$
- $RES = RES_1 \cap RES_2 = P_1 \cap P_2$

Proposition III-4 (Fermeture de \mathcal{RRN} par composition) Soient deux réseaux à ressources renouvelables $(N_i; M_{0i}; RES_i)$.

Alors $(N_1; M_{01}; RES_1) \otimes (N_2; M_{02}; RES_2) \in \mathcal{RRN}$ et

$$M_0 \xrightarrow{\sigma} M \Rightarrow \exists \sigma_i, \exists M_i, M_{0i} \xrightarrow{\sigma_i} M_i$$

$$\sigma_i = \sigma \downarrow_{T_i} \wedge M_i \downarrow_{P_i} = M \downarrow_{P_i} \wedge M_i \downarrow_{RES} \geq M \downarrow_{RES}$$

et plus précisément

$$M \downarrow_{RES} = M_1 \downarrow_{RES} + M_2 \downarrow_{RES} - M_0 \downarrow_{RES}$$

Preuve On prouve par récurrence sur la longueur de σ l'assertion suivante ($\{i, j\} = \{1, 2\}$):

Si $M_0 \xrightarrow{\sigma} M$, alors $M_{0i} \xrightarrow{\sigma_i} M_i$, où $\sigma_i = \sigma \downarrow_{T_i}$ et $M_i(p) = M(p)$ pour $p \in P'_i$, et $M_i(p) = M(p) - C_j(p, \sigma_j)$ pour $p \in RES$ (se rappeler que $C_j(p, \sigma_j) = M_j(p) - M_0(p) \leq 0$ sur RES , car $p \in RES$ est bornée par son marquage initial).

Pour $\sigma = \lambda$, c'est trivial.

Pas de récurrence. Supposons $M_0 \xrightarrow{\sigma} M \xrightarrow{t} M'$, $\sigma' = \sigma t$. Si $t \in T_1$, alors $M_1 \xrightarrow{t}$ et donc $M_{01} \xrightarrow{\sigma_1 t} M'_1$ et $M_{02} \xrightarrow{\sigma_2} M'_2 = M_2$ avec $M'_i \downarrow_{P'_i} = M' \downarrow_{P'_i}$; il reste à montrer $M_i(p) = M(p) - C_j(p, \sigma_j)$ pour $p \in RES$.

Si $t \notin \bullet RES \cup RES \bullet$ pas de problème.

Si $t \in \bullet RES \cup RES \bullet$, alors $M'(p) = M(p) + C_1(p, t)$ et $M'_1(p) = M_1(p) + C_1(p, t)$ pour $p \in RES$. Par conséquent, $M'_1(p) - M'(p) = M_1(p) - M(p) = C_2(p, \sigma_2) = C_2(p, \sigma'_2)$ pour $p \in RES$, et $M'_2(p) = M_2(p) = M(p) - C_1(p, \sigma_1) = M(p) + C_1(p, t) - C_1(p, \sigma_1 t) = M'(p) - C_1(p, \sigma'_1)$ pour $p \in RES$. \square

Un blocage d'un réseau à ressources renouvelables n'est pas un marquage où toutes les transitions sont mortes mais un marquage qui ne permet pas de libérer toutes les ressources, ie, les ramener à leur état initial.

Donc un réseau à ressources renouvelables est dit sans R-interblocage si l'ensemble des états où les ressources sont libres est un espace d'accueil.

Définition III-6 (R-interblocage) $(N; M_0; RES) \in \mathcal{RRN}$ est dit sans R-interblocage ssi

$$FREE = \{M \in \mathcal{N}^P; \forall r \in RES, M(r) = M_0(r)\}$$

est un espace d'accueil de $(N; M_0)$.

III-3 Réseaux à Ressources Ordonnées

Dans cette section, nous définissons une sous-classe des réseaux à ressources renouvelables sans R-interblocage et telle que la composition de deux réseaux de cette classe appartienne à cette classe. Cette classe est l'ensemble des réseaux à ressources ordonnées.

Une solution simple et classique au problème de l'interblocage est la partition des ressources en classes ordonnées et l'obligation pour chaque processus de demander les ressources dont il a besoin en respectant l'ordre.

La solution que nous proposons consiste aussi à ordonner les ressources, mais le système n'est pas obligé de suivre un certain ordre dans ses demandes, mais

doit pouvoir toujours prendre une porte de sortie et libérer les ressources qu'il détient si jamais il y a risque d'interblocage, et dans sa "sortie," il peut continuer à demander des ressources mais en respectant l'ordre cette fois. Il existe donc des choix dans les suites de demandes de ressources, contrairement aux solutions classiques. Cette solution coïncide avec la solution classique pour les processus linéaires (séquentiels sans choix).

Cette condition est exprimée par une propriété d'espace d'accueil: il est toujours possible de libérer une ressource sans demander au cours de la libération des ressources de rang inférieur (mais avec la possibilité de demander des ressources de rang supérieur).

Définition III-7 (Réseaux à ressources ordonnées) U_n réseau à ressources ordonnées est un quadruplet $(N; M_0; RES; (RES_i)_{i=1,n})$ où

- $(N; M_0; RES) \in \mathcal{RRN}$
- $(RES_i)_{i=1,n}$ est une partition ordonnée de RES
- $\forall i, \forall r \in RES_i, FREE(r) = \{M \in \mathbb{N}^P; M(r) = M_0(r)\}$ est un $T(r)$ -espace d'accueil, où $T(r) = T \setminus (\bigcup_{j \leq i} RES_j^*)$

L'ensemble des réseaux à ressources ordonnées est noté \mathcal{RRO} .

La figure III-4 montre un exemple de réseau à ressources ordonnées: il existe une séquence où S_1 est demandée avant S_2 ($t_1 t_2 t_3 t_4$) et une autre où S_2 est demandée avant S_1 ($t_5 t_6$); mais dans la séquence où S_2 est demandée avant S_1 , il est toujours possible de continuer dans le bon ordre, en particulier de libérer S_2 en demandant S_3 ($t_8 t_9$).

D'abord nous montrons qu'un réseau à ressources ordonnées (RRO) est sans R-interblocage (en tant que réseau à ressources renouvelables), puis que la composition de deux RRO ayant mêmes ressources avec le même ordre est un RRO, ce qui prouve l'absence d'R-interblocage lors de la composition.

Proposition III-5 (RRO et R-interblocage)

Si $(N; M_0; RES; (RES_i)_{i=1,n}) \in \mathcal{RRO}$, alors $(N; M_0; RES)$ est sans R-interblocage.

Preuve On montre par récurrence sur k que $E_k = \bigcap_{1 \leq j \leq k} \bigcap_{r \in RES_j} FREE(r)$ est un espace d'accueil.

$k = 1$. Comme $FREE(r)$ est un $(T \setminus RES_1^*)$ -espace d'accueil pour $r \in RES_1$, on peut ramener une ressource de rang 1 à son état initial sans changer l'état des autres ressources de rang 1 et donc $E_1 = \bigcap_{r \in RES_1} FREE(r)$ est un espace d'accueil.

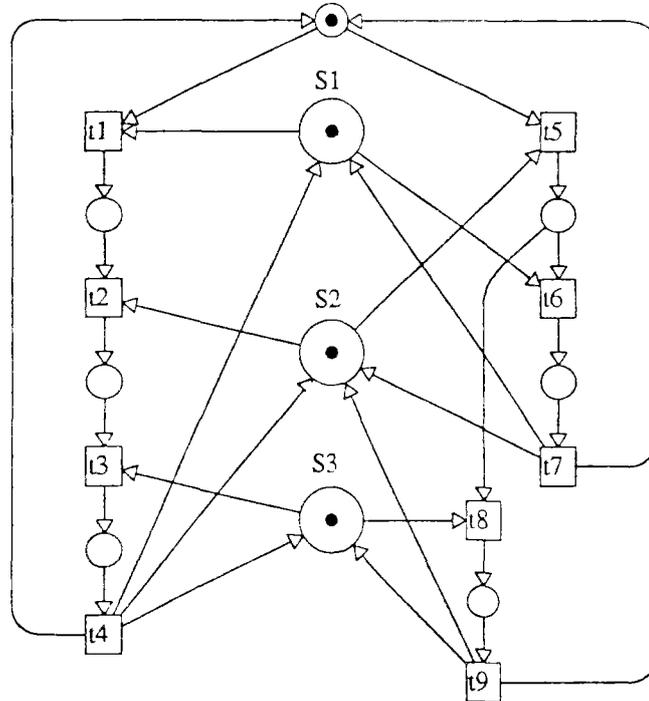


Figure III-4: Réseau à ressources ordonnées

. Pas de récurrence. Si E_k est un espace d'accueil, comme

$$FREE(r) \text{ est un } (T \setminus \bigcup_{1 \leq j \leq k+1} RES^*)\text{-espace d'accueil pour } r \in RES_{k+1}$$

on peut atteindre $\bigcap_{r \in RES_{k+1}} FREE(r)$ sans faire décroître le marquage des places de $\bigcup_{1 \leq j \leq k+1} RES_j$, et donc atteindre E_{k+1} . Donc E_n est un espace d'accueil. \square

La composition de deux réseaux à ressources ordonnées est sans R-interblocage, car on peut toujours libérer les ressources de la classe la plus grande, disons de rang n , sans rien demander. Puis on peut libérer les ressources de rang $n - 1$ sans demander de ressources de rang inférieur mais éventuellement en demandant des ressources de rang n . A la fin de cette opération, les ressources de rang $n - 1$ sont libres mais celles de rang n ne le sont peut-être plus: mais on peut toujours libérer les ressources de rang n sans rien demander. Ainsi on atteint un état où les ressources des rangs n et $n - 1$ sont libres. Et ainsi de suite...

Proposition III-6 (\mathcal{RRO} et composition) Soit deux réseaux à ressources ordonnées $(N_j; M_{0j}; RES; (RES_i)_{i=1,n})_{j=1,2}$ ayant mêmes ressources et mêmes partitions avec le même ordre, alors

$$((N_1; M_{01}; RES) \otimes (N_2; M_{02}; RES); (RES_i)_{i=1,n}) \in \mathcal{RRO}$$

Preuve On montre par récurrence descendante sur $k \leq n$ que

$$E_k = \bigcap_{j=k}^n \bigcap_{r \in RES_j} FREE(r)$$

est un A_k -espace d'accueil où $A_k = T \setminus (\bigcup_{1 \leq l \leq k} RES_l^*)$.

$k = n$. La preuve repose sur l'idée que chaque réseau peut libérer les ressources de rang n qu'il détient sans demander aucune ressource supplémentaire, et ainsi on atteint E_n .

Si $M_0 \xrightarrow{\sigma} M$, on veut montrer qu'il existe $s \in T_n^*$ telle que $M \xrightarrow{s} Q \in E_n$. D'après la proposition III-4, pour $i = 1, 2$, $M_{0i} \xrightarrow{\sigma_i} M_i$; puisque $(N_i; M_{0i}) \in \mathcal{RR}\mathcal{O}$, il existe $\sigma'_i \in (T_i \setminus \bigcup_{1 \leq l \leq n} RES_l^*)^*$, telle que

$$M_i \xrightarrow{\sigma'_i} M'_i \in FREE_i(RES_n)$$

Comme $M \downarrow_{P_i} = M_i \downarrow_{P_i}$ et σ'_i ne contient pas de transition $\in RES^*$, alors

$$M \xrightarrow{\sigma'_i} M' \xrightarrow{\sigma'_2} Q \in FREE(RES_n)$$

D'où $s = \sigma'_1 \sigma'_2$.

Pas de récurrence. Si $M_0 \xrightarrow{u} Q$, alors par hypothèse de récurrence, $Q \xrightarrow{v} M \in E_k$ avec $v \in A_k$. On note $s = uv$.

D'après la proposition III-4, pour $i = 1, 2$, $M_{0i} \xrightarrow{\sigma_i} M_i$, avec $M_i \in E_k \downarrow_{P_i}$ et donc $M_i(r) = M_{0i}(r)$ pour $r \in \bigcup_{k \leq j \leq n} RES_j$.

Puisque les deux réseaux sont dans $\mathcal{RR}\mathcal{O}$, pour $r_0 \in RES_{k-1}$, il existe σ_i , telle que $M_i \xrightarrow{\sigma_i} M'_i \in FREE_i(r_0)$, avec $\sigma_i \in A_{k_1}$.

Alors $M \xrightarrow{\sigma_1 \sigma_2} M' \in FREE(r_0)$, puis par application de l'hypothèse de récurrence, il existe $w \in A_k \subseteq A_{k-1}$, telle que $M' \xrightarrow{w} M'' \in E_k \cap FREE(r_0)$: donc à partir de $M \in E_k$ on atteint $E_k \cap FREE(r_0)$ par la séquence $\sigma_1 \sigma_2 w \in A_{k-1}$.

On recommence cette opération pour les autres places de RES_{k-1} , et on obtient ainsi une séquence $y \in A_{k-1}$ telle que $Q \xrightarrow{y} Q' \in E_{k-1}$. \square

III-4 Composition de réseaux colorés

Le seul point à ajouter à la définition de la composition asynchrone de réseaux ordinaires pour obtenir celle des réseaux colorés est la définition des domaines de couleurs: on prend $D(p) = D_i(p)$ si $p \in P_i$, en exigeant que les places partagées

aient même domaine dans les deux réseaux, c-à-d $\forall p \in S, D_1(p) = D_2(p)$. Dans ces conditions le réseau composé déplié est égal à la composition des réseaux dépliés.

Pour les réseaux à ressources ordonnées, on prend exactement la même définition. Il reste à montrer qu'à tout réseau coloré à ressources ordonnées, on peut associer un réseau ordinaire à ressources ordonnées. Si RES est l'ensemble des ressources du réseau coloré, et $(RES_i)_{i=1,n}$ sa partition ordonnée, on prend pour le réseau déplié, $RES' = \{(p, c); p \in RES, c \in D_i(p)\}$ et $RES'_i = \{(p, c); p \in RES_i, c \in D_i(p)\}$ et on vérifie qu'alors le même ordre convient.

Le multiplexage d'unités entre plusieurs utilisateurs revient souvent à partager les places représentant l'état oisif de ces unités entre plusieurs réseaux identiques. On obtient ainsi une coloration supplémentaire du réseau d'origine: le domaine de toutes les places sauf celles partagées, devient égal à $D(p) \times \{1, \dots, n\}$.

Conclusion

La composition par fusion de places a pour avantage essentiel de conserver les flots. Toutefois, dans le cas général, il n'y a pas de relation entre les comportements des composants et celui du réseau total. Il n'est donc possible d'obtenir des propriétés de conservation qu'en introduisant des conditions supplémentaires sur le comportement vis-à-vis des places partagées. Nous avons obtenu la conservation des espaces d'accueil (Proposition III-3) quand leur accessibilité est indépendante des places partagées, et la conservation des comportements (Proposition III-4) quand les places partagées sont bornées par leur marquage initial (réseaux à ressources renouvelables).

Nous arrivons à déduire l'absence de R-interblocage du réseau total uniquement en considérant les composants, dans la classe des réseaux à ressources ordonnées. Cette classe est assez restreinte, mais la preuve modulaire de l'absence de blocage est intrinsèquement difficile. La recherche d'autres propriétés plus faciles devrait aboutir à des classes de réseaux plus larges.

Des résultats de ce chapitre sont appliqués à la composition des réseaux réentrants, classe de réseaux définie dans le chapitre suivant.