

Chapitre 2

Approche microscopique

S'inspirant des travaux de Rayleigh [Rayleigh, 1945], Zwikker et Kosten [Zwikker *et al.*, 1949] se sont intéressés à la propagation d'ondes acoustiques dans un milieu poreux constitué de pores identiques non connectés, parallèles, de section circulaire uniforme et perpendiculaires à la surface. Le squelette est supposé rigide et les propriétés acoustiques sont établies au niveau du pore. Zwikker et Kosten ont largement popularisé cette théorie. Il est vrai qu'un milieu poreux constitué de pores uniformes non connectés de section circulaire présente peu d'intérêt, mais ils estiment que le comportement devrait être similaire à celui de milieux plus complexes et par là même pourrait être amélioré après quelques modifications et réinterprétation de paramètres. Cette démarche repose sur la connaissance des caractéristiques acoustiques d'un guide d'onde de section circulaire. La solution exacte donnée par Kirchhoff [Kirchhoff, 1868] prend en compte les dissipations visqueuses et thermiques et reste valable quelque soit la fréquence ou le rayon de la section. Elle reste tout de même très compliquée pour de nombreuses applications. Zwikker et Kosten proposent une formulation approchée plus simple où les effets visqueux et thermiques sont traités séparément et résumés en terme de fonctions complexes de densité et de compressibilité. De nombreux auteurs ont depuis adopté cette théorie. Cependant cette approche n'a été justifiée qu'aux basses et hautes fréquences et le régime intermédiaire n'a pas pu être traité. Stinson [Stinson, 1991] montre que la solution exacte de Kirchhoff peut être réduite à la forme analytique donnée par Zwikker et Kosten en introduisant des simplifications appropriées à certains choix de rayons, de sections et de fréquences acoustiques. Il détermine ainsi de façon précise le régime dans lequel l'approche Zwikker et Kosten est valable.

D'autres traitements approximatifs ont été introduits. Ainsi Crandall [Crandall, 1926] considère la distribution des vitesses à travers une section lorsque la conductivité thermique est négligeable. Il obtient avec cette hypothèse un écoulement laminaire et les caractéristiques acoustiques peuvent être calculées. Daniels [Daniels, 1947] considère la conduction thermique dans un conduit

cylindrique et en déduit une relation entre écart de température et pression acoustique. Cette analyse suppose toutefois que les gradients thermiques sont négligeables le long de l'axe du cylindre.

Ces aspects approximatifs de la propagation peuvent être décrit en terme d'impédance et d'admittance [Mawardi, 1949] [Daniels, 1950] [Benade, 1968] [Russell *et al.*, 1993]. En effet lorsque la longueur d'onde est bien plus grande que les dimensions transverses du conduit, le mouvement de l'onde est analogue au flux de courant électrique dans une ligne de transmission. Le courant électrique s'identifie au débit acoustique, tandis que le potentiel électrique est l'analogue de la pression acoustique.

La section circulaire a été une géométrie prototype, et l'extension de la théorie à des sections non circulaires a été nécessaire. En effet, les milieux poreux réels ont rarement des pores de sections circulaires et certains auteurs [Attenborough, 1983] ont traduit le changement de géométrie par l'introduction d'un facteur de forme. Stinson [Stinson, 1991] estime par contre que certaines spécificités de la solution obtenue pour une section circulaire peuvent être appliquées à des conduits de forme arbitraire, et développe ainsi une procédure générale permettant le calcul des caractéristiques acoustiques. De façon à démontrer l'utilité de cette procédure, il développe la solution pour des sections rectangulaire, triangulaire, et de type fissure [Stinson *et al.*, 1992]. Cummings [Cummings, 1993] propose une méthode variationnelle applicable à des géométries plus complexes où les solutions analytiques sont limitées. Il en déduit des solutions approchées aux basses et hautes fréquences. Wilson [Wilson, 1993] développe un modèle reposant sur un formalisme de relaxation. Il estime que les dissipations visqueuses et thermiques sont des caractéristiques d'un processus de relaxation. Ce modèle a l'avantage de faire intervenir un paramètre en moins, et à la différence des modèles précédents n'utilise pas de fonction de Bessel et de Kelvin.

Les milieux poreux réels sont rarement constitués de pores de sections uniformes. Les milieux granulaires par exemple, qu'ils soient consolidés ou non n'ont pas de taille de pores constante, mais des dimensions qui varient de sections nulles à des sections de l'ordre du diamètre des grains. La détermination de la distribution de taille de pores a été l'objet de recherches de nombreux physiciens [Marshall *et al.*, 1979] [Pittman, 1984]. Yamamoto et Turgut [Yamamoto *et al.*, 1988] montrent qu'un milieu poreux avec une porosité donnée et une perméabilité donnée peut être décrit par une infinité de distributions de taille de pores et que la vitesse et l'atténuation de l'onde acoustique, insensibles à la distribution dans le domaine des basses et hautes fréquences, le sont fortement dans le domaine des fréquences intermédiaires. Leur modèle se base sur le traitement des effets visqueux de pores distribués selon une loi normale. Attenborough [Attenborough, 1993] généralise cette approche pour y inclure les effets

thermiques. Une autre formulation a été introduite par Stinson et Champoux [Champoux *et al.*, 1992] consistant à modéliser chaque pore comme une série de conduits uniformes de section et forme aléatoires, en négligeant les phénomènes associés aux jonctions de segment. L'application de ce modèle nécessite toutefois la connaissance du détail de la géométrie du pore. Pour des milieux complexes cette information n'est pas toujours accessible. Le modèle est alors généralisé par l'introduction de deux paramètres supplémentaires associés aux effets visqueux et thermiques qu'il convient d'ajuster. On peut également citer le modèle de Biot-Allard [Allard *et al.*, 1990] qui ne nécessite qu'un facteur de forme supplémentaire, mais qui semble être inefficace lorsque les variations de section sont très prononcées.

Une des particularités des milieux poreux réels provient également de la nature des parois de pores. Les auteurs considèrent généralement que celles-ci sont rigides. Arnott [Arnott *et al.*, 1991] apporte une contribution en étudiant les parois percées par des micropores non connectés aux pores voisins, ce qui se traduit par une impédance de paroi. Wilson [Wilson, 1993] dans le cadre du modèle de relaxation propose une extension à des surfaces de pores de type fractales. Toutefois ces modélisations n'ont été développées que pour des pores de section uniforme.

Les méthodes d'homogénéisation que nous venons d'évoquer reposent sur le principe de la moyenne et consistent à établir les propriétés acoustiques à l'échelle du pore. D'autres approches utilisent une hypothèse de périodicité de la structure hétérogène microscopique. Les champs de contraintes et de déformation sont alors périodiques et la résolution du problème se ramène à l'étude d'une cellule parallélépipédique composée d'une phase solide élastique et d'une phase fluide. Les lois macroscopiques sont obtenues pour une dimension de la période spatiale petite devant la longueur caractéristique des phénomènes macroscopiques qui est la longueur d'onde [Lévy *et al.*, 1977] [Lévy, 1977, 78] (méthode asymptotique).

Cette démarche qui prend en compte les dissipations visqueuses et thermiques, permet de retrouver les conclusions de la théorie de Biot. Elle indique l'influence de la connection des pores [Lévy, 1979] et met en évidence l'existence de trois type d'ondes lorsque la phase solide est supposée élastique [Dupin et Lévy, 1980] [Lévy, 1977]. Elle généralise en outre la loi de Darcy classique pour un régime instationnaire qui fait intervenir une perméabilité dynamique. La filtration acoustique de l'air se fait comme si la matrice était rigide lorsque le fluide saturant est de densité bien plus petite que celle des parties solides. L'hypothèse de périodicité peut paraître à première vue contraignante, mais il semblerait que cette démarche supporte correctement les comparaisons avec les mesures expérimentales effectuées sur des milieux aléatoires [Suquet, 1982].

Nous utiliserons par la suite, la première méthode d'homogénéisation (principe de la moyenne) qui malgré ses limites d'applicabilité, permet de fournir des

estimations analytiques des qualités acoustiques pour des géométries de pore complexes.

Après un rappel des équations de Navier-Stokes (§2.1), nous écrivons les formulations exactes des vitesses et des grandeurs thermodynamiques (température, pression et densité) introduites dans la théorie de Kirchhoff (§2.2). Celles-ci seront analysées pour deux types d'écoulements (isotherme et adiabatique) de manière à dégager quelques caractéristiques susceptibles de simplifier la solution générale (§2.3).

Nous introduirons alors les fonctions complexes de densité et de compressibilité qui généralisent dans le cas d'un fluide limité dans l'espace, la densité et la compressibilité d'un fluide libre non dissipatif. Ces deux fonctions nous donneront très simplement une estimation de l'impédance et du nombre d'onde. Toutes ces grandeurs seront calculées pour une section circulaire.

En appliquant les mêmes simplifications aux équations de Navier-Stokes, nous généraliserons ces résultats à des formes arbitraires (§2.4), et à titre d'exemple les calculs seront entièrement traités pour des sections rectangulaires et triangulaires (§2.5).

Ces propos seront étendus à un milieu poreux constitué de pores identiques traversant tout le matériau (§2.6). Nous évoquerons alors une première situation où les pores sont considérés uniformes, pour traiter par la suite une autre où la taille varie en fonction de la profondeur du matériau.

2.1 Equations locales linéarisées - Modèle de Navier-Stokes

2.1.1 Variables microscopiques

Pour décrire l'état d'un fluide, on doit donner les vitesses microscopiques, ainsi que les distributions de grandeurs thermodynamiques que nous choisissons parmi la pression, la température, la densité et l'entropie. La nature d'un fluide étant précisée et connaissant deux grandeurs thermodynamiques en un point, les autres grandeurs s'obtiennent en ce point à l'aide d'équations d'état caractéristiques du fluide. Nous ne considérerons que de petites perturbations par rapport à un état ambiant caractérisé par :

$$\begin{aligned}
 P_o & : \text{pression atmosphérique} \\
 \rho_o & : \text{densité ambiante du fluide} \\
 T_o & : \text{température ambiante} \\
 S_o & : \text{entropie au repos} \\
 \vec{V}_o & : \text{vitesse nulle au repos}
 \end{aligned}$$

En présence de petites perturbations ces quantités deviennent en coordonnées cartésiennes:

$$P(x, y, z, t) = P_o + p(x, y, z, t) \quad (2.1)$$

$$\rho'(x, y, z, t) = \rho_o + \rho(x, y, z, t) \quad (2.2)$$

$$T(x, y, z, t) = T_o + \tau(x, y, z, t) \quad (2.3)$$

$$\vec{V}(x, y, z, t) = \vec{0} + \vec{v}(x, y, z, t) \quad (2.4)$$

$$S(x, y, z, t) = S_o + s(x, y, z, t) \quad (2.5)$$

Si nous supposons que la vitesse est définie par trois composantes vectorielles, le problème possède sept inconnues (p , \vec{v} , ρ , s et τ). Il ne peut être résolu qu'en introduisant sept relations données par les équations du mouvement, de conservation de la masse, de propagation de la chaleur et de deux relations qui expriment que l'entropie et la masse volumique sont des variables d'état (ds et $d\rho$ sont des différentielles totales exactes). Nous rappelons ci-dessous ces équations sous leurs formes locales. Elles seront utiles pour l'obtention de la solution exacte de Kirchhoff, mais également pour la recherche d'une formulation approchée.

2.1.2 Equation du mouvement

Elle s'exprime de la façon suivante :

$$\rho_o \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}(p) + \eta \Delta \vec{v} + \frac{\eta}{3} \overrightarrow{grad}(div(\vec{v})) \quad (2.6)$$

Nous supposons dans cette écriture que les dissipations visqueuses associées au mouvements de rotation et de vibration des molécules sont négligeables. Le coefficient de viscosité η que nous avons introduit, mesure l'intensité du phénomène d'amortissement par cisaillement dû à l'échange énergétique au niveau du mouvement de translation des molécules entre couches de fluides voisines animées de vitesses différentes.

2.1.3 Conservation de la masse

Elle exprime le fait que la variation de masse du fluide dans un volume élémentaire est due au flux de fluide sortant de la surface fermée limitant ce volume. Une fois linéarisée, elle s'écrit sous la forme locale de la façon suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_o div(\vec{v}) = 0 \quad (2.7)$$

2.1.4 Equation d'état pour la densité

Nous considérons que la densité est une fonction d'état (approximation linéaire) de la pression p et de la température τ :

$$\rho(p, \tau) = \left[\frac{\partial \rho}{\partial p} \right]_{\tau} p + \left[\frac{\partial \rho}{\partial \tau} \right]_p \tau \quad (2.8)$$

ou encore :

$$\rho(p, \tau) = -\rho_o \beta_o \tau + \frac{\rho_o}{K_o} p \quad (2.9)$$

β_o désigne le coefficient d'expansion thermique du fluide. Il mesure la variation relative de la masse volumique résultant d'une variation de la température d'une unité. Ce coefficient est défini par la relation suivante :

$$\beta = -\frac{1}{\rho'} \left[\frac{\partial \rho'}{\partial T} \right]_p \quad (2.10)$$

Au premier ordre près, il devient :

$$\beta_o = -\frac{1}{\rho_o} \left[\frac{\partial \rho}{\partial \tau} \right]_p \quad (2.11)$$

De même, le module d'incompressibilité isotherme K_o mesure la variation relative de la pression par unité de masse volumique dans un processus isotherme. Il est défini par :

$$K = \rho' \left[\frac{\partial P}{\partial \rho'} \right]_T \quad (2.12)$$

Au premier ordre, nous avons :

$$K_o = \rho_o \left[\frac{\partial p}{\partial \rho} \right]_\tau \quad (2.13)$$

Lorsque le gaz est dit thermiquement parfait, son équation d'état thermique $P = f(\rho', T)$ prend la forme suivante :

$$P = \rho' r T \quad (2.14)$$

où r est la constante des gaz parfaits définie par :

$$r = \frac{R}{\mathcal{M}} \quad (2.15)$$

On désigne ici par R , la constante universelle des gaz parfaits ($R = 8.314 \text{ J/}^\circ\text{K}$), et \mathcal{M} la masse molaire du gaz. En reportant la loi (2.14) dans les définitions du coefficient d'expansion thermique (2.10) et d'incompressibilité isothermique (2.12), nous obtenons :

$$\beta = \frac{1}{T} \quad (2.16)$$

$$K = P \quad (2.17)$$

soit au premier ordre :

$$\beta_o = \frac{1}{T_o} \quad (2.18)$$

$$K_o = P_o \quad (2.19)$$

L'équation d'état pour la densité se résume donc à la relation suivante :

$$\rho = -\frac{\rho_o}{T_o} \tau + \frac{\rho_o}{P_o} p \quad (2.20)$$

2.1.5 Equation d'état pour l'entropie

L'entropie est une fonction d'état (approximation linéaire) de la pression p et de la température τ :

$$s(p, \tau) = \left[\frac{\partial s}{\partial p} \right]_{\tau} p + \left[\frac{\partial s}{\partial \tau} \right]_p \tau \quad (2.21)$$

Par définition, nous avons :

$$c_p = T_o \left[\frac{\partial s}{\partial \tau} \right]_p \quad (2.22)$$

et d'après une relation de Maxwell [Landau *et al.*, 1989] :

$$\left[\frac{\partial s}{\partial p} \right]_{\tau} = - \left[\frac{\partial(1/\rho)}{\partial \tau} \right]_p = - \frac{\beta_o}{\rho_o} \quad (2.23)$$

Nous obtenons ainsi l'écriture suivante pour l'entropie :

$$s = \frac{c_p}{T_o} \tau - \frac{1}{T_o \rho_o} p \quad (2.24)$$

2.1.6 Equation de diffusion de la température

Elle est obtenue à l'aide de l'équation de Kirchhoff-Fourier linéarisée :

$$\rho_o T_o \frac{\partial s}{\partial t} = \tilde{\kappa} \Delta \tau \quad (2.25)$$

où $\tilde{\kappa}$ est le coefficient de conduction thermique. L'écriture de l'entropie (2.24) reportée dans l'équation de Kirchhoff-Fourier (2.25), nous fournit l'expression de l'équation de diffusion de la température :

$$\rho_o c_p \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} + \tilde{\kappa} \Delta \tau \quad (2.26)$$

2.1.7 Récapitulation

Le fluide étant caractérisé par cinq grandeurs (trois composantes de vitesse et deux grandeurs thermodynamiques), nous disposons à présent d'un nombre suffisant d'équations pour résoudre le problème de propagation dans un guide d'onde. Pour la commodité, nous rappelons les équations établies :

- Equation du mouvement

$$\rho_o \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}(p) + \eta \Delta \vec{v} + \frac{\eta}{3} \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}(\vec{v})) \quad (2.27)$$

– Equation de conservation de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_o \text{div}(\vec{v}) = 0 \quad (2.28)$$

– Equation d'état pour la densité

$$\rho = -\frac{\rho_o}{T_o} \tau + \frac{\rho_o}{P_o} p \quad (2.29)$$

– Equation d'état pour l'entropie

$$s = \frac{c_p}{T_o} \tau - \frac{1}{T_o \rho_o} p \quad (2.30)$$

– Equation de diffusion de la chaleur

$$\rho_o c_p \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial p}{\partial t} + \tilde{\kappa} \Delta \tau \quad (2.31)$$

Pour l'air, dans les conditions standard, les quantités $\eta, \tilde{\kappa}, \gamma, K_o, \beta, \rho_o$ et T_o valent [Lafarge, 1993]:

$$\begin{aligned} \eta &= 1.84 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-1} \\ \tilde{\kappa} &= 2.6 \cdot 10^{-2} \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1} \\ \gamma &= 1.4 \\ K_o &= P_o = 10^5 \text{ Pa} \\ \beta_o &= 1/T_o \text{ K}^{-1} \\ \rho_o &= 1.29 = \text{kg/m}^3 \\ T_o &= 294 \text{ K} \end{aligned} \quad (2.32)$$

2.2 Propagation dans un conduit de section circulaire - Solution exacte

La propagation d'onde dans un conduit uniforme de section circulaire est un problème fondamental qui se pose dans de nombreux domaines de l'acoustique. La solution exacte donnée par Kirchhoff au XIX siècle [Kirchhoff, 1868] peut se présenter sous une forme analytique suggérée par Zwicker et Kosten dans la mesure où le rayon de la section r_p est supérieur à 10^{-3} cm et que les fréquences acoustiques f soient telles que $r_p f^{3/2}$ soit inférieur à 10^6 $cm s^{-3/2}$ selon Stinson [Stinson, 1991]. Ces concepts seront exposés dans la section suivante (§2.3), où nous préciserons dans quelle mesure ils peuvent être étendus à des conduits de forme arbitraire.

Cette partie sera plutôt consacrée au développement de la solution de Kirchhoff sous sa forme initiale. Nous préciserons dans un premier temps les conditions aux limites utilisées sur les parois du guide, pour donner par la suite l'écriture de la solution (pression, vitesse, température et densité) telle que l'avait proposée Kirchhoff. Nous nous contenterons d'en donner l'expression sans détailler les calculs, le lecteur pourra se reporter à la publication de Kirchhoff pour plus d'explications.

Les résultats seront analysés pour deux types d'écoulement (adiabatique et isotherme) de manière à dégager quelques caractéristiques de la propagation susceptibles de simplifier la solution générale.

Notre ambition est d'appliquer par la suite les outils obtenus à un milieu poreux. Les résultats obtenus pour un conduit que nous assimilerons à un pore, seront alors généralisés à l'échelle macroscopique du milieu poreux. Le détail des variations à travers la section du pore des grandeurs recherchées n'est donc pas nécessaire et nous introduirons donc des grandeurs équivalentes moyennes.

2.2.1 Conditions aux limites

Le système d'équations couplées (2.27)-(2.32) pour les variables p , \vec{v} et τ est complété par les conditions aux limites aux parois :

$$\vec{v} = 0 \quad \text{et} \quad \tau = 0 \quad (2.33)$$

La condition $\vec{v} = 0$ est la condition d'adhérence du fluide visqueux. La condition $\tau = 0$ signifie que les parois restent à température ambiante et qu'il n'y a pas de saut de température interfacial entre le solide et le fluide. Elle repose essentiellement sur les deux circonstances suivantes. D'une part les solides sont généralement de bien meilleurs conducteurs de chaleur que les fluides. D'autre part, l'onde apporte de la chaleur au solide mais elle en extrait également périodiquement une partie dans son mouvement harmonique. En nous reportant à

Pierce [Pierce, 1981], les conditions suivantes assurent la validité des conditions aux limites (2.33):

$$(\rho_o c_p^f \tilde{\kappa})_{fluide} \ll (\rho_s c_p^s \tilde{\kappa}_s)_{solide} \quad (2.34)$$

$$(\tilde{\kappa} \rho_o c_p^f)^{1/2}_{fluide} \ll \omega^{1/2} (\rho_s c_p^s)_{solide} \left(\frac{V_s}{S} \right) \quad (2.35)$$

où S et V_s désignent respectivement la surface de contact fluide-solide, le volume occupé par le solide. La première condition provient de l'analyse de la réflexion d'une onde plane en incidence normale sur un demi espace de conductivité thermique finie. La seconde repose sur le calcul du flux de chaleur dans la phase solide où l'énergie est supposée uniformément répartie. Dans le cas de la laine de verre ces conditions sont respectées lorsque les fréquences sont supérieure à $1H_z$, ce qui est largement réalisé pour des applications acoustiques [Lafarge, 1993]. On peut calculer cette fréquence critique pour des enrobés drainants si nous assimilons ce type de milieux à un béton fibreux, de manière à calculer simplement la surface de contact fluide-solide. La chaleur spécifique c_p^s , la masse volumique ρ_s et la conductivité thermique du squelette sont données par :

$$c_p^s = 916.5 \text{ Jm}^{-3}\text{C}^{-1} \quad \rho_s = 2.5 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3} \quad \tilde{\kappa}_s = 1.75 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1} \quad (2.36)$$

Pour l'air, nous avons :

$$c_p^f = 10^3 \text{ Jm}^{-3}\text{C}^{-1} \quad \rho_o = 1.29 \text{ kg m}^{-3} \quad \tilde{\kappa}_f = 1.6 \cdot 10^{-2} \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1} \quad (2.37)$$

Le milieu poreux considéré d'épaisseur E_p , est constitué de pores identiques allant de la surface supérieure du matériau à la surface inférieure. De manière à simplifier le calcul, nous supposons que la tortuosité est égale à 1 (section uniforme et axe de chaque pore perpendiculaire à la surface du matériau). Pour calculer le rapport surface de contact par le volume solide, nous introduisons la porosité Ω et le rayon moyen des pores R . Lorsqu'il s'agit de pores à sections circulaires, en introduisant V_f le volume occupé par le fluide, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \left(\frac{V_s}{S} \right) &= \left(\frac{V_f}{S} \right) \left(\frac{V_s}{V_f} \right) \\ &= \frac{R}{2} \frac{1 - \Omega}{\Omega} \end{aligned} \quad (2.38)$$

Avec les valeurs numériques (2.36) pour le squelette et (2.37) pour l'air les deux membres de l'inégalité (2.34) prennent les valeurs suivantes :

$$(\rho_o c_p^f \tilde{\kappa})_{fluide} = 20.64 \quad (2.39)$$

$$(\rho_s c_p^s \tilde{\kappa}_s)_{solide} = 40 \cdot 10^5 \quad (2.40)$$

La première condition (2.34) est donc vérifiée. La seconde (2.35) associée au rapport volume par surface défini par l'équation (2.38) nous permet d'écrire la fréquence critique f_c au delà de laquelle l'inégalité (2.35) est vérifiée :

$$f_c = \frac{2 \Omega^2 \tilde{\kappa}_f \rho_o c_p^f}{\pi [\rho_s c_p^s R (1 - \Omega)]^2} \quad (2.41)$$

Pour une porosité de 20% ($\Omega = 0.2$) et un rayon moyen R égal à $0.1cm$, nous obtenons :

$$f_c \approx 2.54 \cdot 10^{-7} H_z \quad (2.42)$$

Cette fréquence est d'autant plus petite que le rayon est grand, on peut donc estimer que les conditions aux limites (2.33) sont valables quelque soit la fréquence.

2.2.2 Solution exacte

La théorie de Kirchhoff a été établie pour un conduit infiniment long à paroi rigide, de section circulaire et uniforme. Une hypothèse de symétrie cylindrique de la solution a été adoptée et une dépendance en fonction de la position longitudinale z et temporelle t de type $e^{i\omega t + mz}$ est choisie (m grandeur complexe appelée improprement nombre d'onde). Les équations de Navier-Stokes ainsi que les conditions aux limites sont valables quelque soit la géométrie du guide. Elles le sont en particulier lorsqu'il s'agit d'un conduit uniforme de section circulaire uniforme de rayon r_p .

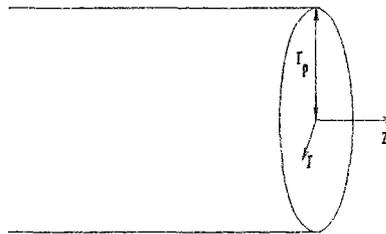


FIG. 2.1 - Conduit de section circulaire

En utilisant un système de coordonnées cylindriques, Kirchhoff décompose la vitesse sous la forme d'une composante radiale v_r et d'une composante longitudinale v_z (la direction axiale z et radiale r sont indiquées sur la figure (2.1)) et

montre, en utilisant une hypothèse de symétrie cylindrique de la solution, que les grandeurs acoustiques s'écrivent sous la forme suivante :

$$v_z = \left[A Q - A_1 m \left(\frac{i\omega}{\lambda_1} - \nu' \right) Q_1 - A_2 m \left(\frac{i\omega}{\lambda_2} - \nu' \right) Q_2 \right] e^{mz} \quad (2.43)$$

$$v_r = \left[-\frac{Am}{(i\omega/\nu) - m^2} \frac{dQ}{dr} - A_1 \left(\frac{i\omega}{\lambda_1} - \nu' \right) \frac{dQ_1}{dr} - A_2 \left(\frac{i\omega}{\lambda_2} - \nu' \right) \frac{dQ_2}{dr} \right] e^{mz} \quad (2.44)$$

$$\tau = (\gamma - 1) T_o (A_1 Q_1 + A_2 Q_2) e^{mz} \quad (2.45)$$

où $\nu = \eta/\rho_o$, $\nu' = \tilde{\kappa}/(\rho_o c_o)$ et les fonctions Q , Q_1 et Q_2 sont définies à l'aide de la fonction de Bessel d'ordre 0, par les relations suivantes :

$$Q = J_o [r(m^2 - i\omega/\nu)^{1/2}] \quad (2.46)$$

$$Q_1 = J_o [r(m^2 - \lambda_1)^{1/2}] \quad (2.47)$$

$$Q_2 = J_o [r(m^2 - \lambda_2)^{1/2}] \quad (2.48)$$

λ_1 et λ_2 sont respectivement les solutions de petit et grand module de l'équation du second degré en λ :

$$\lambda^2 \left[\frac{c_o^2 \nu'}{i\omega \gamma} + \frac{4}{3} \nu \nu' \right] - \lambda \left[c_o^2 + i\omega \left(\frac{4}{3} \nu + \nu' \right) \right] - \omega^2 = 0 \quad (2.49)$$

Le paramètre m est la constante de propagation. Il est évalué en posant v_z, v_r et τ nuls sur les parois du conduit. Cela nous donne un système de trois équations pour les inconnues A_1 , A_2 et A_3 . Pour obtenir une solution non triviale son déterminant doit être nul :

$$\begin{vmatrix} Q_p & -m \left(\frac{i\omega}{\lambda_1} - \nu' \right) Q_{1p} & -m \left(\frac{i\omega}{\lambda_2} - \nu' \right) Q_{2p} \\ -\frac{m}{(i\omega/\nu) - m^2} \frac{dQ}{dr_p} & -\left(\frac{i\omega}{\lambda_1} - \nu' \right) \frac{dQ_1}{dr_p} & -\left(\frac{i\omega}{\lambda_2} - \nu' \right) \frac{dQ_2}{dr_p} \\ 0 & Q_{1p} & Q_{2p} \end{vmatrix} = 0 \quad (2.50)$$

Dans cette expression, l'indice p indique une évaluation des quantités Q , Q_1 et Q_2 et de leurs dérivées par rapport au rayon, à la paroi du conduit, c'est à dire en $r = r_p$. Lorsque nous effectuons le calcul du déterminant, nous obtenons :

$$Q_p \left[-\left(\frac{i\omega}{\lambda_1} - \nu'\right) \frac{dQ_1}{dr_p} Q_{2p} + \left(\frac{i\omega}{\lambda_2} - \nu'\right) \frac{dQ_2}{dr_p} Q_{1p} \right] \quad (2.51)$$

$$+ \frac{m}{(i\omega/\nu) - m^2} \frac{dQ}{dr_p} \left[-m\left(\frac{i\omega}{\lambda_1} - \nu'\right) Q_{1p} Q_{2p} + m\left(\frac{i\omega}{\lambda_2} - \nu'\right) Q_{1p} Q_{2p} \right] = 0$$

Il se simplifie en divisant cette équation par $Q Q_1 Q_2$ et en utilisant la relation $\frac{1}{J_o} \frac{dJ_o}{dr} = \frac{d \ln(J_o)}{dr}$, pour parvenir à une expression réduite qui peut être résolue numériquement à l'aide de la méthode de Newton :

$$\frac{i\omega m^2}{(i\omega/\nu) - m^2} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \frac{d \ln Q}{dr_p} + \left(\frac{i\omega}{\lambda_1} - \nu' \right) \frac{d \ln Q_1}{dr_p} - \left(\frac{i\omega}{\lambda_2} - \nu' \right) \frac{d \ln Q_2}{dr_p} = 0 \quad (2.52)$$

Par ailleurs, les constantes A , A_1 et A_2 sont déterminées par les conditions aux limites, pour donner d'après Kirchhoff :

$$v_z = mB \left[-i\omega \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) Q_{1p} Q_{2p} Q + \left(\frac{i\omega}{\lambda_1} - \nu' \right) Q_p Q_{2p} Q_1 - \left(\frac{i\omega}{\lambda_2} - \nu' \right) Q_p Q_{1p} Q_2 \right] e^{mz} \quad (2.53)$$

$$v_r = B \left[\frac{i\omega m^2}{(i\omega/\nu) - m^2} \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) Q_{1p} Q_{2p} \frac{dQ}{dr} + \left(\frac{i\omega}{\lambda_1} - \nu' \right) Q_p Q_{2p} \frac{dQ_1}{dr} - \left(\frac{i\omega}{\lambda_2} - \nu' \right) Q_p Q_{1p} \frac{dQ_2}{dr} \right] e^{mz} \quad (2.54)$$

$$\tau = B(\gamma - 1) T_o Q_p (Q_{1p} Q_2 - Q_{2p} Q_1) \quad (2.55)$$

La constante B est donnée par :

$$B = -\frac{A_1}{Q_p Q_{2p}} \quad (2.56)$$

La densité et la pression acoustique s'obtiennent en utilisant l'équation de continuité (2.28) et l'équation d'état pour la densité (2.29) moyennant quelques manipulations :

$$\rho = \rho_o B Q_p \left[\left(\frac{\nu' \lambda_1}{i\omega} - 1 \right) Q_{2p} Q_1 - \left(\frac{\nu' \lambda_2}{i\omega} - 1 \right) Q_{1p} Q_2 \right] e^{mz} \quad (2.57)$$

$$p = P_o B Q_p \left[\left(\frac{\nu' \lambda_1}{i\omega} - \gamma \right) Q_{2p} Q_1 - \left(\frac{\nu' \lambda_2}{i\omega} - \gamma \right) Q_{1p} Q_2 \right] e^{mz} \quad (2.58)$$

2.2.3 Analyse des résultats

Les quantités v_z , v_r , τ et p ont été calculées pour un conduit de rayon 0.01 cm à la fréquence de $100 H_z$. La figure (2.2) représente les amplitudes des vitesses longitudinale et transversale ainsi que la densité, la pression et la température (normalisées par rapport à leur valeurs au repos) en fonction de la position radiale r .

Les mêmes quantités ont été calculées pour un conduit de rayon 0.1 cm à la fréquence de $10 k H_z$ (figure 2.3).

L'épaisseur de la couche limite visqueuse (notée δ_v) est calculée à l'aide de la relation $\delta_v = (2 \eta / \rho_f \omega)^{\frac{1}{2}}$. Elle est égale à $2.2 \cdot 10^{-2} \text{ cm}$ à $100 H_z$ et à $2.2 \cdot 10^{-3} \text{ cm}$ à $10 k H_z$. Le premier conduit est alors dit 'étroit' tandis que le second est 'large'.

Un certain nombre de traits ressortent de l'analyse des figures (2.2) (2.3). Nous constatons que la pression ne connaît pas de variation significative sur une section donnée que ce soit pour des conduits 'étroits' ou 'larges'. La variation se fait le long de l'axe de cylindre à travers le terme e^{mz} . On remarque également que la vitesse radiale v_r est négligeable devant la vitesse longitudinale v_z .

Densité et pression acoustique normalisées sont par contre comparables. Lorsqu'il s'agit d'un conduit 'étroit', sur une section donnée, $|\rho/\rho_o|$ et $|p/P_o|$ sont égaux et le processus est isothermique, c'est à dire que $|\tau/T_o|$ est négligeable devant les autres grandeurs mesurées. Lorsqu'il s'agit d'un conduit large, $|\rho/\rho_o|$ est plus petit que $|p/P_o|$ d'un facteur 1.4, mais les deux quantités sont égales à la paroi du tube. Dans ce cas le processus est adiabatique.

Calcul de grandeurs moyennes

Dans de nombreuses applications et en particulier l'étude des milieux poreux, le détail de la variation de la vitesse, de la densité et de la température à travers une section n'est pas nécessaire. Le résultat recherché est plutôt la moyenne de ces quantités à travers une section. Ainsi, pour une quantité $E(\vec{X})$, nous calculerons la moyenne $\langle E \rangle$:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{S} \int_S E(\vec{X}) \, dS \quad (2.59)$$

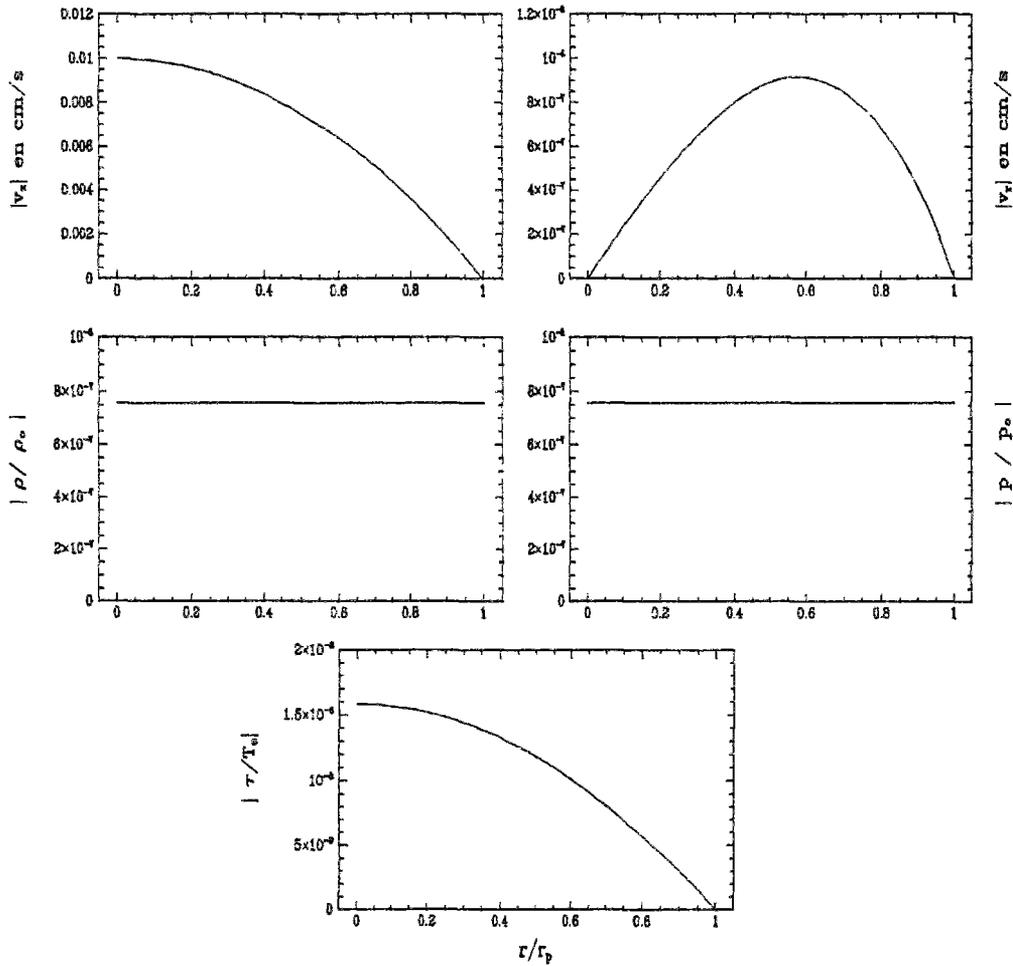


FIG. 2.2 - *Evaluation des grandeurs acoustiques en fonction de la position radiale pour un conduit de rayon 0.01cm à la fréquence de 100Hz - processus isotherme*

où nous avons noté S la surface de la section et \vec{X} le vecteur position. Nous utiliserons par la suite les moyennes de la vitesse longitudinale et de la densité. D'après (2.59), pour des sections circulaires, elles s'écrivent :

$$\langle v_z \rangle = \frac{1}{\pi r_p^2} \int_0^{r_p} 2 \pi r v_z(r) dr \quad (2.60)$$

$$\langle \rho \rangle = \frac{1}{\pi r_p^2} \int_0^{r_p} 2 \pi r \rho(r) dr \quad (2.61)$$

Les écritures de la vitesse (2.53) et de la densité (2.57) données par la théorie de Kirchhoff, sont reportées dans les équations (2.60) et (2.61), et sachant que

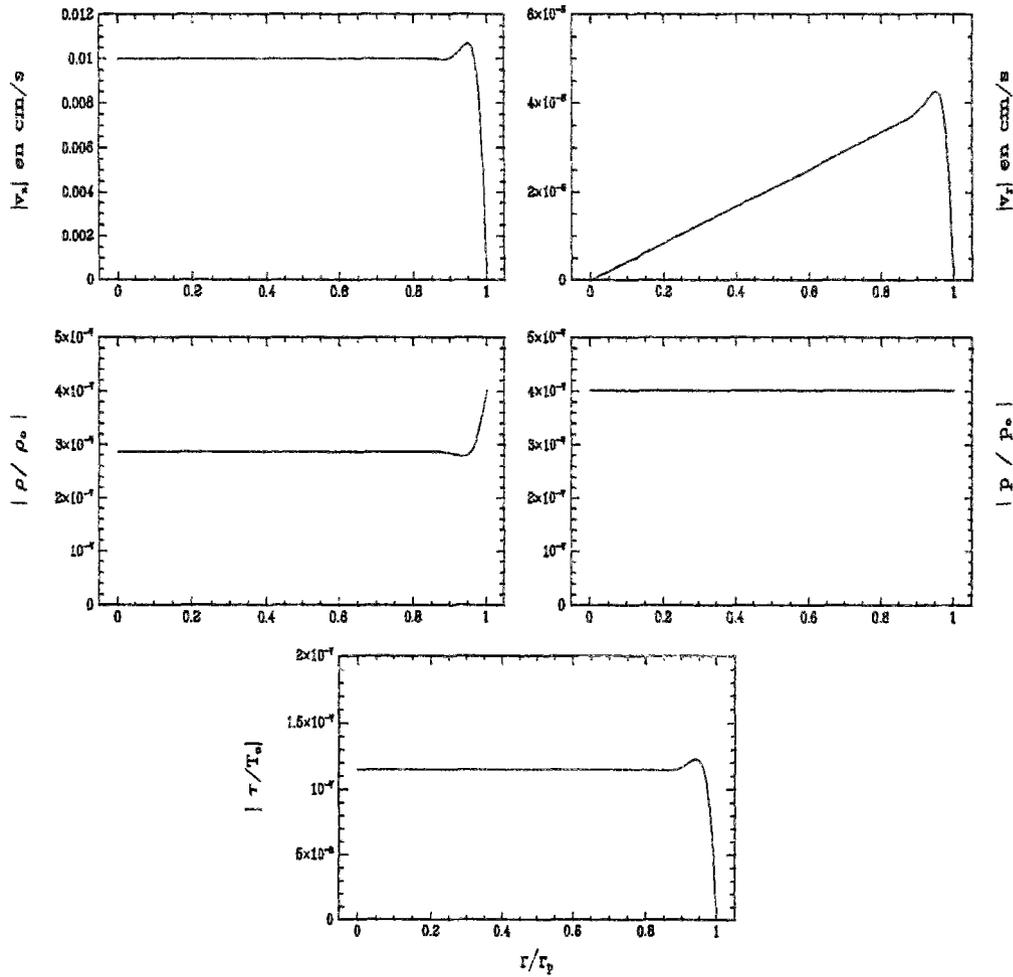


FIG. 2.3 - Evaluation des grandeurs acoustiques en fonction de la position radiale pour un conduit de rayon 0.1cm à la fréquence de 10kHz - processus adiabatique

$\int_0^a x J_0(x) dx = aJ_1(a)$, nous obtenons :

$$\langle v_z \rangle = -\frac{2mB}{r_p} \left[i\omega \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \frac{Q_{1p} Q_{2p} R_p}{(m^2 - i\omega/\nu)^{1/2}} - \left(\frac{i\omega}{\lambda_1} - \nu' \right) \frac{Q_p Q_{2p} R_{1p}}{(m^2 - \lambda_1)^{1/2}} + \left(\frac{i\omega}{\lambda_2} - \nu' \right) \frac{Q_p Q_{1p} R_{2p}}{(m^2 - \lambda_2)^{1/2}} \right] e^{mz} \quad (2.62)$$

$$\langle \rho \rangle = \rho_0 \frac{2BQ_p}{i\omega r_p} \left[\frac{\lambda_1 \nu' - i\omega}{(m^2 - \lambda_1)^{1/2}} Q_{2p} R_{1p} - \frac{\lambda_2 \nu' - i\omega}{(m^2 - \lambda_2)^{1/2}} Q_{1p} R_{2p} \right] e^{mz} \quad (2.63)$$

R , R_1 et R_2 sont des fonctions de Bessel d'ordre 1 définies par :

$$R = J_1 [r(m^2 - i\omega/\nu)^{1/2}] \quad (2.64)$$

$$R_1 = J_1 [r(m^2 - \lambda_1)^{1/2}] \quad (2.65)$$

$$R_2 = J_1 [r(m^2 - \lambda_2)^{1/2}] \quad (2.66)$$

Ces quantités ont pour indice p lorsqu'elles sont évaluées à la paroi, en $r = r_p$.

2.3 Propagation dans un conduit de section circulaire - Solution approchée

Nous avons obtenu une solution complète telle que l'avait décrite Kirchhoff. Toutefois, les équations obtenues restent compliquées et sont difficiles à appliquer. Une solution approchée a été développée par Zwikker et Kosten [Zwikker *et al.*, 1949], mais ceux-ci n'ont pu justifier leurs expressions qu'aux basses et hautes fréquences. Nous proposons de reprendre l'analyse de Stinson qui définit précisément le domaine de validité de cette approche.

Nous définirons ainsi le régime de rayons et fréquences envisagé, pour développer par la suite les simplifications que cette restriction apporte aux équations constituant la solution de Kirchhoff. Nous introduirons alors deux grandeurs complexes appelées fonction de densité et de compressibilité qui rendent compte des phénomènes visqueux et thermiques et en fonction desquels s'écrit simplement le nombre d'onde.

2.3.1 Approximation de la Solution de Kirchhoff

S'inspirant des travaux de Weston [Weston, 1953], Stinson [Stinson, 1991] estime que la solution complète peut être réduite à l'approximation Zwikker et Kosten dans le régime vérifiant les inégalités suivantes :

$$r_p f^{3/2} < 10^6 \text{ cm s}^{-3/2} \quad \text{et} \quad r_p > 10^{-3} \text{ cm} \quad (2.67)$$

Pour un rayon de l'ordre de 0.5 cm , les fréquences sont inférieures à $16000 H_z$. Bien entendu, plus le rayon est petit plus la gamme de fréquences autorisées est large. Avec $\nu = 0.151 \text{ cm}^2/\text{s}$ et $c_o = 34300 \text{ cm/s}$, nous avons pour les fréquences acoustiques inférieures à $10^8 H_z$:

$$\omega \nu / c_o^2 \ll 1 \quad (2.68)$$

Dans ce cas, les solutions λ_1 et λ_2 de l'équation du second degré (2.49), se simplifient pour donner :

$$\lambda_1 \approx -\frac{\omega^2}{c_o^2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 \approx \frac{i\omega\gamma}{\nu'} \quad (2.69)$$

Le détail des calculs est donné en annexe [B.1]. Pour l'air avec $\gamma = 1.4$ et $\nu' = 0.3 \text{ cm}^2/\text{s}$, nous avons :

$$|\lambda_1| \ll |\lambda_2| \quad (2.70)$$

Par ailleurs, Weston constate que l'argument de la fonction Q_1 est toujours très faible, inférieur à 0.1 pour les conduits 'larges' et 'étroits'. La figure (2.4) représente l'évolution de cet argument pour différentes fréquences et rayons vérifiant les critères du régime étudié (2.67). Il est clair que pour des fréquences de bruit routier (100 – 10000 H_z) et pour des rayons allant de 10^{-3} à 1 cm cette approximation est valable. Les termes qui impliquent cet argument sont donc approchés dans le régime étudié:

$$Q_1 \approx 1 \quad \text{et} \quad \frac{dQ_1}{dr} \approx -\frac{1}{2}(m^2 - \lambda_1) r \quad (2.71)$$

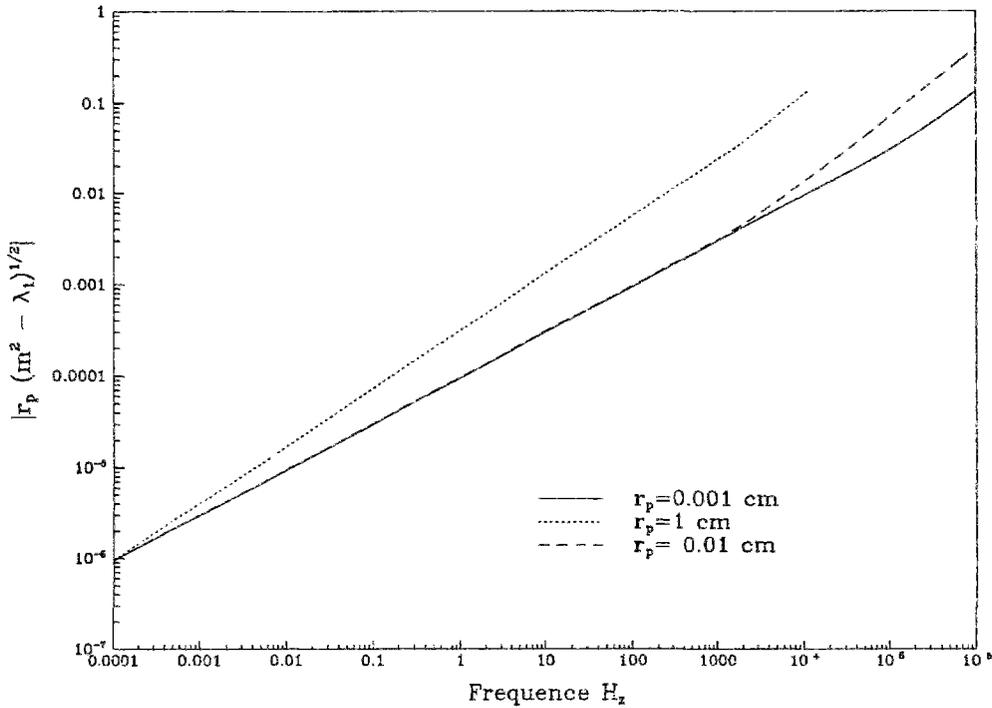
Avec ces approximations ((2.69) et (2.70)), l'écriture de la pression (2.58) prend une forme plus simple :

$$p \approx -P_o B \gamma Q_p Q_{2p} e^{mz} \quad (2.72)$$

La pression ne dépend plus de la variable r , elle reste donc constante à travers une section, ce qui n'est pas étonnant puisque les fréquences qui nous intéressent sont en dessous de la première fréquence de coupure au delà de laquelle les modes supérieurs se manifestent.

D'autres approximations peuvent être introduites. La figure (2.5) illustre l'évolution du nombre d'onde m . Le module de m^2 a été calculé en fonction de la fréquence pour différents rayons de section et comparé à $|\lambda_2|$ et $|i\omega/\nu|$. Il en ressort que pour un rayon supérieur à 10^{-3} cm nous avons :

$$|m^2| \ll |\lambda_2| \quad \text{et} \quad |m^2| \ll |i\omega/\nu| \quad (2.73)$$

FIG. 2.4 - Calcul de l'argument de la fonction Q_1

Ainsi pour le régime qui nous préoccupe m^2 est négligeable devant λ_2 et $i\omega/\nu$ dans les expressions de la solution complète. En appliquant l'ensemble de ces approximations à l'équation (2.52), la résolution par la méthode de Newton Raphson n'est plus nécessaire et nous obtenons une solution analytique pour la constante de propagation (Annexe [B.2]):

$$m^2 = -(\omega/c_o^2) \times \left\{ 1 + 2(\gamma - 1)(-i\omega\gamma/\nu')^{-1/2} G \left[r_p(-i\omega\gamma/\nu')^{1/2} \right] / r_p \right\} \\ \times \left\{ 1 - 2(-i\omega/\nu)^{-1/2} G \left[r_p(-i\omega\gamma/\nu)^{1/2} \right] / r_p \right\}^{-1} \quad (2.74)$$

La fonction G est définie par :

$$G[\zeta] = \frac{J_1(\zeta)}{J_0(\zeta)} \quad (2.75)$$

On constate dans l'écriture de la constante de propagation que les effets associés à la viscosité et à la thermoconductivité sont traités séparément à travers les termes ν et ν' . Les mêmes approximations peuvent être appliquées à la vitesse

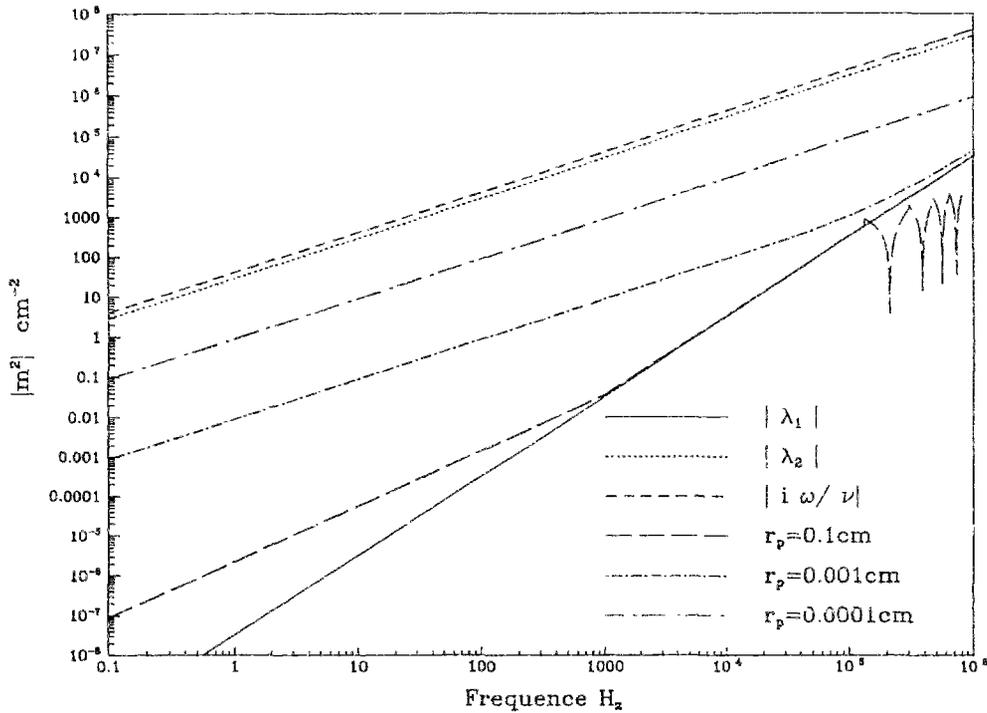


FIG. 2.5 - Comparaison de la constante de propagation et de trois paramètres $|\lambda_1|$, $|\lambda_2|$ et $|i\omega/\nu|$ introduits dans la théorie de Kirchhoff

longitudinale (2.62) et à la densité (2.63) moyennées à travers la section. Elles deviennent (Annexe [B.3]):

$$\langle v_z \rangle = \frac{m B c_o^2}{i\omega} Q_{2p} \left[Q_p - 2 \left(\frac{-i\omega}{\nu} \right)^{-1/2} \frac{R_p}{r_p} \right] e^{mz} \quad (2.76)$$

$$\langle \rho \rangle = -\rho_o B Q_p \left[Q_{2p} + 2(\gamma - 1) \left(\frac{-i\omega\gamma}{\nu'} \right)^{-1/2} \frac{R_{2p}}{r_p} \right] e^{mz} \quad (2.77)$$

2.3.2 Fonctions complexes de densité et de compressibilité

Dans un fluide libre, avec l'approximation où les pertes sont négligeables, le mouvement obéit aux relations suivantes:

$$\rho_o^l \frac{\partial v^l}{\partial t} = - \overrightarrow{\text{grad}} p^l \quad (2.78)$$

$$\frac{1}{K_o^l} \frac{\partial p^l}{\partial t} = - \operatorname{div} \vec{v}^l \quad (2.79)$$

où \vec{v}^l , p^l , ρ_o^l et $\frac{1}{K_o^l}$ désignent respectivement la vitesse, la pression, la densité et le module de compressibilité du fluide libre. Ces équations sont obtenues simplement à partir des relations de Navier-Stokes en supprimant les dissipations.

Pour un fluide limité dans l'espace, les équations (2.78) et (2.79) peuvent être maintenues en introduisant les densité et compressibilité effectives du fluide. Du fait de l'existence de phénomènes irréversibles de pertes, nous considérons que les fonctions qui généralisent les constantes physiques du fluide libre ρ_o^l et $\frac{1}{K_o^l}$ sont complexes. Nous les notons $\rho(\omega)$ et $C(\omega)$, et les réponses linéaires (2.78) et (2.79) sont alors définies par les relations suivantes, avec les notations de notre problème :

$$i \omega \rho(\omega) \langle v_z \rangle = - \overrightarrow{\operatorname{grad}} p \quad (2.80)$$

$$i \omega C(\omega) p = - \operatorname{div} \langle v_z \rangle \quad (2.81)$$

La pression connaît une dépendance suivant l'axe z de type e^{mz} . La fonction densité complexe s'écrit donc :

$$\rho(\omega) = - \frac{mp}{i\omega \langle v_z \rangle} \quad (2.82)$$

Les expressions de la vitesse (2.76) de la pression (2.72) sont alors reportées pour obtenir :

$$\rho(\omega) = \rho_o \left\{ 1 - \frac{2}{r_p} \left(\frac{-i\omega}{\nu} \right)^{-1/2} G \left[r_p (-i\omega/\nu)^{1/2} \right] \right\}^{-1} \quad (2.83)$$

La densité complexe ne prend en compte que les contributions visqueuses à travers le terme ν ($\nu = \eta/\rho_o$, η coefficient de viscosité de l'air).

L'équation (2.81) est transformée en utilisant l'équation de continuité (2.28) :

$$\rho_o C(\omega) p = \langle \rho \rangle \quad (2.84)$$

Nous en déduisons une définition de la compressibilité complexe :

$$C(\omega) = \frac{\langle \rho \rangle}{\rho_o p} \quad (2.85)$$

En reprenant de nouveau l'écriture de la pression (2.72) et celle de la densité moyenne (2.77), nous obtenons une nouvelle formulation pour la fonction compressibilité complexe :

$$C(\omega) = \frac{1}{\gamma P_o} \left\{ 1 + \frac{2}{r_p} (\gamma - 1) \left(\frac{-i\omega\gamma}{\nu'} \right)^{-1/2} G \left[r_p (-i\omega\gamma/\nu')^{1/2} \right] \right\} \quad (2.86)$$

La fonction de compressibilité dépend de la conduction thermique, mais pas de la viscosité. Cette dépendance se manifeste par le paramètre ν' ($\nu' = \tilde{\kappa}(\rho_o/c_v)$, $\tilde{\kappa}$ coefficient de conduction thermique). On remarque également que le nombre d'onde défini par la relation (2.74) implique des termes que l'on retrouve dans les écritures des fonctions complexes de densité et de compressibilité. Son expression peut donc se simplifier en y injectant les fonctions complexes :

$$m^2 = -\omega^2 \rho(\omega) C(\omega) \quad (2.87)$$

Les principaux résultats de ce paragraphe sont les expressions approchées de la constante de propagation (2.87) et des fonctions complexes de densité et de compressibilité données par les équations (2.83) et (2.86). Ces deux dernières fonctions généralisent pour un fluide limité, les constantes physiques du fluide libre que sont la densité ρ_o et la compressibilité $1/K_o$.

Ces résultats représentent une simplification considérable de la solution complète de Kirchhoff dans un régime de fréquence acoustique et de rayon de conduit suffisamment large. Ils sont bien entendu valables pour une section circulaire, et nous tâcherons de les généraliser à des formes arbitraires dans le chapitre suivant.

2.4 Généralisation à des conduits de forme arbitraire

Nous allons développer une procédure générale, permettant de calculer les caractéristiques acoustiques de conduits uniformes, de section arbitraire. Cette procédure est appropriée au régime introduit précédemment (2.67) qui correspond à des conduits 'étroits' et 'larges' selon la classification de Weston qui évoque également les conduits dits 'très larges' et 'très étroits'. Nous avons vu que la solution de Kirchhoff peut être considérablement simplifiée dans le régime étudié. Stinson suppose que ces simplifications peuvent être appliquées aux équations générales de Navier-Stokes, pour différentes formes de sections.

Nous rappellerons donc les caractéristiques de la propagation obtenues à partir de l'analyse des résultats de la solution de Kirchhoff (§2.2.3) pour en dégager quelques approximations que nous supposerons applicables aux équations de Navier-Stokes. Nous donnerons par la suite une méthode générale permettant de

calculer les fonctions complexes de densité et de compressibilité pour un conduit de forme arbitraire et à titre d'exemple, nous développerons les solutions pour des sections circulaires, rectangulaires et triangulaires.

2.4.1 Equations simplifiées

Trois principaux traits ressortent de l'étude d'un conduit de section circulaire :

- La pression acoustique ne varie pas de façon significative sur une section (figures 2.2 et 2.3). Nous supposons donc qu'elle ne dépend que de la composante longitudinale z .
- La densité et la pression normalisées sont comparables en amplitude. Ces deux grandeurs sont égales lors d'un processus isotherme et diffèrent d'un facteur $\gamma = 1.4$ dans le cas adiabatique (figures 2.2 et 2.3). Nous supposons par la suite qu'elles sont toujours égales :

$$\frac{\rho}{\rho_o} \approx \frac{p}{P_o} \quad (2.88)$$

- La constante de propagation peut être négligée par rapport à d'autres termes. Nous supposons alors que $|m^2|$ est négligeable par rapport à $|i\omega/\nu|$ et $|i\omega\gamma/\nu|$ pour le régime de conduits étroits et larges (figure 2.5).

Ces trois hypothèses seront appliquées à des conduits de formes quelconques. La composante z de l'équation du mouvement (2.27) s'écrit pour une dépendance temporelle de type $e^{i\omega t}$:

$$\Delta v_z - \frac{i\omega}{\nu} v_z = \frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ p - \frac{\eta}{3} \operatorname{div} \vec{v} \right\} \quad (2.89)$$

Cette équation peut se simplifier en négligeant le terme en divergence. En effet d'après l'équation de conservation de la masse (2.28), ce terme peut s'écrire :

$$-\frac{1}{3} \eta \operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{3} \frac{i\omega\eta}{\rho_o} \rho \quad (2.90)$$

En utilisant la définition de la célérité du son adiabatique $c_o^2 = \gamma P_o/\rho_o$, et l'approximation (2.88), nous obtenons :

$$-\frac{1}{3} \eta \operatorname{div} \vec{v} \approx \frac{i\omega\nu\gamma}{3c_o^2} p \quad (2.91)$$

Pour le régime de fréquences et de rayons (2.67), l'approximation $\omega\nu/c_o^2 \ll 1$, montre que le terme en divergence peut être négligé devant la pression acoustique dans l'écriture de la composante z de l'équation du mouvement (2.89). Rappelons que la vitesse, la pression acoustique et la température ont une dépendance en z de type e^{mz} . Dans ces conditions l'équation de la dynamique devient :

$$\Delta_t v_z + m^2 v_z - \frac{i\omega}{\nu} v_z = \frac{m}{\eta} p \quad (2.92)$$

Δ_t est le laplacien transversal. Avec l'approximation $|m^2| \ll |i\omega/\nu|$, elle se simplifie :

$$\Delta_t v_z - \frac{i\omega}{\nu} v_z = \frac{m}{\eta} p \quad (2.93)$$

Nous effectuons une démarche similaire pour l'équation de diffusion de la chaleur (2.31). Nous rappelons que la dépendance suivant la direction de propagation est de type e^{mz} . En calculant les dérivées temporelles, l'équation de la chaleur devient :

$$\Delta_t \tau + m^2 \tau - \frac{i\omega\rho_o c_p}{\tilde{\kappa}} \tau = -\frac{i\omega}{\tilde{\kappa}} p \quad (2.94)$$

En introduisant $\nu' = \tilde{\kappa}/(\rho_o c_v)$ et le rapport des chaleurs spécifiques $\gamma = c_p/c_v$, l'approximation $|m^2| \ll |i\omega\gamma/\nu'|$ simplifie l'expression de l'équation de diffusion :

$$\Delta_t \tau - \frac{i\omega\gamma}{\nu'} \tau = -\frac{i\omega}{\tilde{\kappa}} p \quad (2.95)$$

2.4.2 Méthode de résolution

La vitesse et la température ont les mêmes conditions aux limites et vérifient des équations de formes identiques. Le problème à deux équations (2.93) et (2.95) et deux inconnues (v_z, τ) peut alors être réduit à une seule équation générale vérifiée par une inconnue Ψ commune à la vitesse et la température. Si nous définissons la variable Ψ par :

$$v_z = -\frac{m}{i\omega\rho_o} p \Psi \quad (2.96)$$

L'équation du mouvement (2.93) devient :

$$\Delta_t \Psi - \frac{i\omega}{\xi} \Psi = -\frac{i\omega}{\xi} \quad (2.97)$$

où $\xi = \nu$. L'équation de la chaleur (2.95) peut être traité de manière similaire, si nous posons:

$$\tau = \frac{\nu'}{\gamma \bar{k}} p \Psi \quad (2.98)$$

L'équation de diffusion de la chaleur se met alors sous la forme (2.97), avec $\xi = \nu'/\gamma$. L'équation (2.97) (dont l'inconnue est Ψ) permet ainsi de déterminer les caractéristiques acoustiques d'un conduit de forme quelconque, du moment que l'on trouve une solution s'annulant sur le périmètre de la section. Les quantités qui nous intéressent sont plutôt les moyennes sur une section. Nous introduisons donc la fonction F qui représente la moyenne sur une section de la fonction Ψ :

$$F(\xi) = \langle \Psi \rangle \quad (2.99)$$

Les quantités recherchées, c'est à dire vitesse, température se mettent donc sous la forme suivante:

$$\langle v_z \rangle = - \frac{m}{i\omega \rho_o} p F(\nu) \quad (2.100)$$

$$\langle \tau \rangle = \frac{\nu'}{\gamma \bar{k}} p F\left(\frac{\nu'}{\gamma}\right) \quad (2.101)$$

La densité s'obtient à l'aide de l'équation d'état (2.29). Sa moyenne s'écrit :

$$\langle \rho \rangle = -\frac{\rho_o}{T_o} \langle \tau \rangle + \frac{\rho_o}{P_o} p \quad (2.102)$$

Lorsque la moyenne de la température (2.101) y est injectée, nous obtenons :

$$\langle \rho \rangle = \frac{\rho_o}{P_o} p - \frac{\rho_o \nu'}{T_o \gamma \bar{k}} p F\left(\frac{\nu'}{\gamma}\right) \quad (2.103)$$

Nous rappelons que les fonctions complexes de densité et de compressibilité définies par (2.82) et (2.85) s'écrivent :

$$\rho(\omega) = -\frac{m p}{i\omega \langle v_z \rangle} \quad (2.104)$$

$$C(\omega) = \frac{\langle \rho \rangle}{\rho_o p} \quad (2.105)$$

L'expression de la densité est obtenue en substituant dans (2.104) l'écriture de la vitesse moyenne donnée par l'équation (2.100) :

$$\rho(\omega) = \frac{\rho_o}{F(\nu)} \quad (2.106)$$

Pour la compressibilité, nous reportons l'expression de la densité moyenne (2.103) dans l'équation (2.105), en substituant ν' par sa valeur $\tilde{\kappa}/(\rho_o c_v)$:

$$C(\omega) = \frac{1}{P_o} - \frac{1}{\rho_o T_o c_v} \frac{1}{\gamma} F\left(\frac{\nu'}{\gamma}\right) \quad (2.107)$$

Nous utilisons la relation thermodynamique $c_p - c_v = P_o/\rho_o T_o$ [Landau *et al.*, 1989] qui, divisée par la chaleur spécifique à volume constant devient :

$$\frac{1}{\rho_o T_o c_v} = \frac{\gamma - 1}{P_o} \quad (2.108)$$

La fonction compressibilité complexe est alors donnée par la relation suivante :

$$C(\omega) = \frac{1}{\gamma P_o} \left[\gamma - (\gamma - 1) F\left(\frac{\nu'}{\gamma}\right) \right] \quad (2.109)$$

La constante de propagation s'obtient à l'aide de l'équation de conservation de la masse (2.28), moyennée à travers la section, en supposant qu'il n'y a qu'une composante longitudinale de la vitesse :

$$i \omega \langle \rho \rangle = - \rho_o m \langle v_z \rangle \quad (2.110)$$

Celle-ci peut se transformer pour se mettre sous la forme suivante :

$$m^2 = \omega^2 \frac{m p}{i \omega \langle v_z \rangle} \frac{\langle \rho \rangle}{\rho_o p} \quad (2.111)$$

En utilisant les définitions des fonctions complexes de densité (2.104) et de compressibilité (2.105), le nombre d'onde se formule de la manière suivante :

$$m^2 = - \omega^2 \rho(\omega) C(\omega) \quad (2.112)$$

ce qui semble être en accord avec la solution obtenue pour une section circulaire. L'impédance caractéristique peut aussi s'écrire en terme de fonction F . Si

l'on s'intéresse à une onde se propageant dans la direction $-\vec{z}$, l'impédance est définie par :

$$Z^c = - \frac{P}{\langle v_z \rangle} \quad (2.113)$$

La vitesse est substituée par son expression (2.100) :

$$Z^c = \frac{i\omega\rho_o}{mF(\nu)} \quad (2.114)$$

En utilisant la définition de la densité complexe (2.106) et de la constante de propagation (2.112), l'impédance devient :

$$Z^c = \left[\frac{\rho(\omega)}{C(\omega)} \right]^{1/2} \quad (2.115)$$

Nous reportons les écritures des fonctions complexes de densité (2.106) et de compressibilité (2.109) en utilisant la définition de la célérité du son adiabatique $c_o^2 = \gamma P_o / \rho_o$, pour obtenir finalement :

$$Z^c = \frac{\rho_o c_o}{F(\nu)^{1/2} \left[\gamma - (\gamma - 1) F\left(\frac{\nu'}{\gamma}\right) \right]^{1/2}} \quad (2.116)$$

2.5 Application de la procédure générale

La section précédente fut consacrée à la recherche d'une formulation approchée de la solution de Kirchoff pour une section arbitraire. Nous avons pu constater que cela consiste à simplifier les équations de Navier-Stokes pour un régime de fréquences précis. Nous avons obtenu une équation différentielle pour la vitesse et la température dont les conditions aux limites dépendent de la géométrie. Ces deux quantités s'expriment en fonction de F qui caractérise la géométrie considérée. Sa connaissance suffit pour en déduire les grandeurs acoustiques recherchées à savoir la densité et la compressibilité et à travers elles, l'impédance et le nombre d'onde.

Nous proposons de calculer la fonction génératrice F pour des géométries précises et d'en étudier l'influence. Nous envisagerons ainsi trois types de sections : circulaire, rectangulaire et triangulaire.

2.5.1 Section circulaire

La solution a déjà été obtenue à la section (2.3.2). Nous allons tenter de la retrouver à l'aide de la procédure générale. Lorsqu'il n'y a pas de dépendance angulaire l'équation différentielle (2.97), s'écrit dans un repère cylindrique:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\Psi}{dr} \right) - \frac{i\omega}{\xi} \Psi = -\frac{i\omega}{\xi} \quad (2.117)$$

La solution vérifiant la condition aux limites $\Psi(r_p) = 0$ est donnée par [Stinson, 1991]:

$$\Psi(r) = 1 - \frac{J_0(r(-i\omega/\xi)^{1/2})}{J_0(r_p(-i\omega/\xi)^{1/2})} \quad (2.118)$$

La moyenne à travers la section est calculée à l'aide de la définition (2.59):

$$F(\xi) = 1 - \frac{2}{(-i\omega/\xi)^{1/2} r_p} G [(-i\omega/\xi)^{1/2} r_p] \quad (2.119)$$

Nous rappelons que G est le rapport de la fonction de Bessel d'ordre 1 par la fonction de Bessel d'ordre 0. En injectant l'écriture de F dans les équations (2.106) et (2.109), nous retrouvons les expressions de la densité (2.83) et de la compressibilité (2.86) obtenues par le passé.

2.5.2 Section rectangulaire

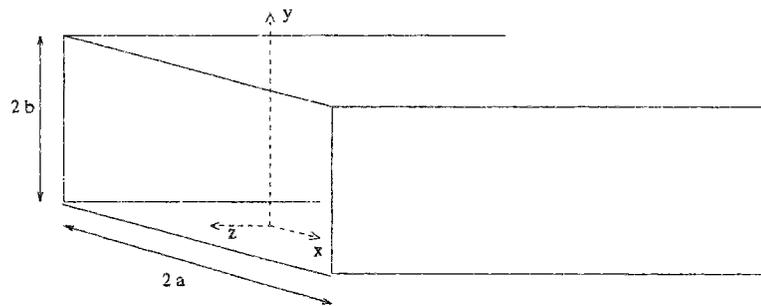


FIG. 2.6 - Conduit de section rectangulaire

Nous choisissons un système de coordonnées cartésiennes, où l'axe z est confondu avec l'axe du cylindre et les axes x et y définissent les dimensions transverses du conduit. Nous notons $2a$ (dans la direction x) et $2b$ (dans la direction

y) les dimensions transverses du cylindre. Dans ce repère, l'équation différentielle (2.97) et les conditions aux limites pour la vitesse et la température se formulent de la façon suivante :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{i\omega}{\xi} \Psi = -\frac{i\omega}{\xi} \\ \Psi(x, y) = 0 \quad \text{pour } x = \pm a \text{ et } y = \pm b \end{cases} \quad (2.120)$$

La fonction Ψ est recherchée sous la forme d'une sommation infinie de solutions élémentaires qui constituent une base orthogonale :

$$\Psi(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{kn} \cos(\alpha_k x) \cos(\beta_n y) \quad (2.121)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \alpha_k = (k + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{a} \\ \beta_n = (n + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{b} \end{cases} \quad (2.122)$$

L'expression (2.121) de Ψ injectée dans l'équation différentielle (2.120) donne :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{kn} (\alpha_k^2 + \beta_n^2 + \frac{i\omega}{\xi}) \cos(\alpha_k x) \cos(\beta_n y) = \frac{i\omega}{\xi} \quad (2.123)$$

Les coefficients A_{kn} sont alors déterminés en utilisant l'orthogonalité des fonctions cosinus. L'équation (2.123) est donc multipliée par $\cos(\alpha_k x) \cos(\beta_n y)$ de part et d'autre de l'égalité, et intégrée à travers la section rectangulaire avec x allant de $-a$ à a et y de $-b$ à b . Nous obtenons en définitive :

$$A_{kn} = \frac{i\omega}{\xi ab} \frac{4(-1)^k (-1)^n}{\alpha_k \beta_n (\alpha_k^2 + \beta_n^2 + \frac{i\omega}{\xi})} \quad (2.124)$$

Nous obtenons ainsi, l'expression de la fonction Ψ solution du système d'équations (2.120) :

$$\Psi(x, y) = \frac{4i\omega}{\xi ab} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (-1)^n \cos(\alpha_k x) \cos(\beta_n y)}{\alpha_k \beta_n (\alpha_k^2 + \beta_n^2 + \frac{i\omega}{\xi})} \quad (2.125)$$

La moyenne à travers la section s'écrit :

$$F(\xi) = \frac{1}{4ab} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \Psi(x, y) dx dy \quad (2.126)$$

$$F(\xi) = \frac{4i\omega}{\xi a^2 b^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_k^2 \beta_n^2 (\alpha_k^2 + \beta_n^2 + \frac{i\omega}{\xi}))^{-1} \quad (2.127)$$

Les fonctions de densité et de compressibilité s'obtiennent à l'aide des relations générales (2.106) et (2.109) :

$$\rho(\omega) = \rho_0 \frac{\nu a^2 b^2}{4i\omega} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_k^2 \beta_n^2 (\alpha_k^2 + \beta_n^2 + \frac{i\omega}{\nu}) \right]^{-1} \right\}^{-1} \quad (2.128)$$

$$C(\omega) = \frac{1}{P_0} \left\{ 1 - \frac{4i\omega(\gamma - 1)}{\nu' a^2 b^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_k^2 \beta_n^2 (\alpha_k^2 + \beta_n^2 + \frac{i\omega\gamma}{\nu'}) \right]^{-1} \right\} \quad (2.129)$$

L'impédance caractéristique et la constante de propagation s'obtiennent à l'aide des relations (2.115) et (2.112).

Dans le cas d'une fente, c'est à dire pour $a \gg b$, l'écriture (2.127) de la fonction F peut se simplifier. En développant les calculs, elle devient :

$$F(\xi) = \frac{4i\omega}{\xi a^2 b^2} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[(k + \frac{1}{2})^2 (n + \frac{1}{2})^2 \frac{\pi^6}{a^2 b^4} \right. \\ \left. \times \left\{ (k + \frac{1}{2})^2 \frac{b^2}{a^2} + (n + \frac{1}{2})^2 + \frac{ib^2\omega}{\pi^2 \xi} \right\} \right]^{-1} \quad (2.130)$$

Nous négligeons le terme $\frac{b^2}{a^2}$ devant les autres quantités :

$$F(\xi) \approx \frac{4i\omega b^2}{\xi \pi^6} \sum_{k=0}^{\infty} (k + \frac{1}{2})^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} (n + \frac{1}{2})^{-2} \left[(n + \frac{1}{2})^2 + \frac{i\omega b^2}{\xi \pi^2} \right]^{-1} \quad (2.131)$$

ou encore, en évaluant les deux sommations :

$$F(\xi) \approx 1 - \left(\frac{i\omega b^2}{\xi} \right)^{-1/2} \tanh \left(\frac{i\omega b^2}{\xi} \right)^{1/2} \quad (2.132)$$

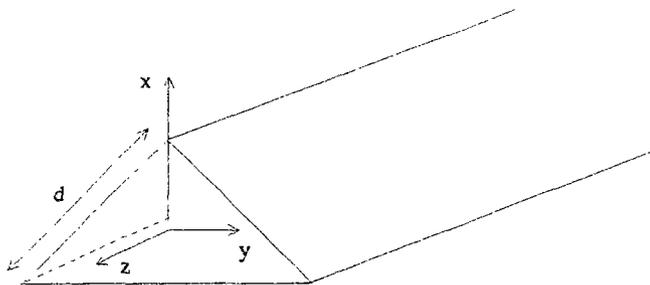


FIG. 2.7 - Conduit de section triangulaire

2.5.3 Section triangulaire

La section triangulaire sera supposée équilatérale de longueur de coté d . Nous travaillons ici aussi en coordonnées cartésiennes, x et y définissant les dimensions transverses et z l'axe du cylindre. Le problème se traite comme dans le cas d'une section rectangulaire par la recherche d'une solution s'exprimant sous la forme d'une sommation infinie de solutions élémentaires s'annulant sur la paroi du conduit:

$$\Psi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n f_n(x, y) \quad (2.133)$$

avec

$$\begin{aligned} f_n(x, y) &= \sin \left[\frac{2\beta_n y}{\sqrt{3}} \right] \sin \left[\beta_n \left(x + \frac{y}{\sqrt{3}} \right) \right] \sin \left[\beta_n \left(x - \frac{y}{\sqrt{3}} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \sin \left[\frac{4\beta_n y}{\sqrt{3}} \right] - \sin \left[2\beta_n \left(x + \frac{y}{\sqrt{3}} \right) \right] \right. \\ &\quad \left. + \sin \left[2\beta_n \left(x - \frac{y}{\sqrt{3}} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.134)$$

et $\beta_n = \frac{n\pi}{d}$. Les paramètres B_n sont identifiés en injectant l'écriture de la solution (2.133) dans l'équation différentielle (2.120) vérifiée par la fonction Ψ , et en utilisant l'orthogonalité des fonctions $f_n(x, y)$. Nous obtenons en définitive la fonction moyenne de Ψ à travers une section:

$$F(\xi) = 1 - \frac{3}{\varepsilon} \coth(\varepsilon) + \frac{3}{\varepsilon^2} \quad (2.135)$$

où $\varepsilon^2 = \frac{3}{16} \frac{i\omega d^2}{\xi}$. Les fonctions densité et compressibilité s'obtiennent à partir des équations (2.106) et (2.109).

2.5.4 Remarque-Récapitulation

Les auteurs expriment en général leurs modèles en introduisant les nombres sans dimensions λ et λ_T caractéristiques des perturbations visqueuses et thermiques. Ceux ci sont définis par :

$$\begin{aligned}\lambda &= R \left(\frac{\rho_o \omega}{\eta} \right)^{1/2} \\ &= \frac{\sqrt{2}R}{\delta_v}\end{aligned}\tag{2.136}$$

$$\begin{aligned}\lambda_T &= R \left(\frac{\rho_o \omega c_p}{\tilde{\kappa}} \right)^{1/2} \\ &= \frac{\sqrt{2}R}{\delta_T} \\ &= \lambda N_{pr}^{1/2}\end{aligned}\tag{2.137}$$

avec $N_{pr} = \eta c_p / \tilde{\kappa}$ le nombre de Prandtl. δ_v et δ_T sont respectivement les épaisseurs des couches limites visqueuses et thermiques, R grandeur caractéristique de la dimension transverse du conduit. Par définition R est deux fois le rayon hydraulique, ce dernier étant le rapport de la surface par le périmètre du cylindre. R est égal au rayon r_p pour une section circulaire, à $ab/(a+b)$ pour une section rectangulaire (b pour une fissure) et $d/2\sqrt{3}$ pour une section triangulaire. Avec ces notations les fonctions densité et compressibilité s'écrivent :

$$\rho(\omega) = \frac{\rho_o}{F(\lambda)}\tag{2.138}$$

$$C(\omega) = \frac{1}{\gamma P_o} \{ \gamma - (\gamma - 1) F(\lambda_T) \}\tag{2.139}$$

La fonction F est définie pour chaque géométrie par :

- Section circulaire :

$$F(\lambda) = 1 - \frac{2}{\lambda\sqrt{-i}} G\left(\lambda\sqrt{-i}\right)\tag{2.140}$$

- Section de type fissure :

$$F(\lambda) = 1 - \frac{2}{\lambda\sqrt{i}} \tanh\left(\frac{\lambda}{2}\sqrt{i}\right)\tag{2.141}$$

- Section triangulaire :

$$F(\lambda) = 1 - \frac{2}{\lambda\sqrt{i}} \coth\left(\frac{3\lambda}{2}\sqrt{i}\right) - i \frac{4}{3\lambda^2}\tag{2.142}$$

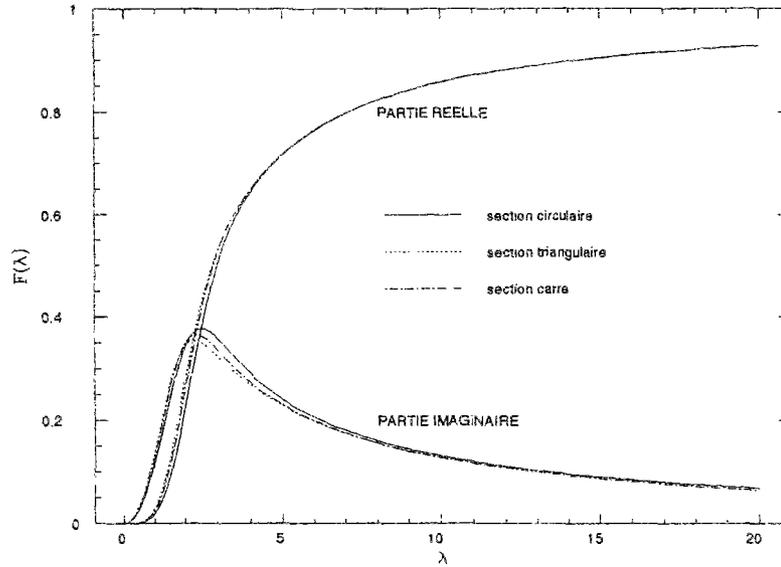


FIG. 2.8 - Evolution de la fonction F pour trois types de géométries

La figure (2.8) représente l'évolution des parties réelles et imaginaires de la fonction F pour trois sections différentes (circulaire, carrée, triangulaire). Les résultats sont semblables pour les trois géométries. On peut donc estimer que la propagation des ondes est insensible à la forme du pore pour un même rayon hydraulique, dans le régime de rayons et fréquences (2.67) où nous travaillons.

2.5.5 Comportement pour les hautes fréquences

Nous proposons d'établir pour les hautes fréquences une solution valable quelque soit la forme de la section. Comme nous l'avons évoqué par le passé, il s'agit de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \Delta_t \Psi - \frac{i\omega}{\xi} \Psi = -\frac{i\omega}{\xi} & \text{sur } S \\ \Psi = 0 & \text{sur } \partial S \end{cases} \quad (2.143)$$

De manière à simplifier l'intégration, nous découpons la surface S en N surfaces élémentaires S_i de manière à ce que la frontière ∂S commune à la frontière ∂S_i soit une portion droite. Si la discrétisation est suffisamment fine, la résolution du système (2.143) dans le domaine S peut se ramener à une résolution dans un domaine élémentaire S_i . En utilisant le système de coordonnées (x_i, y_i) introduit

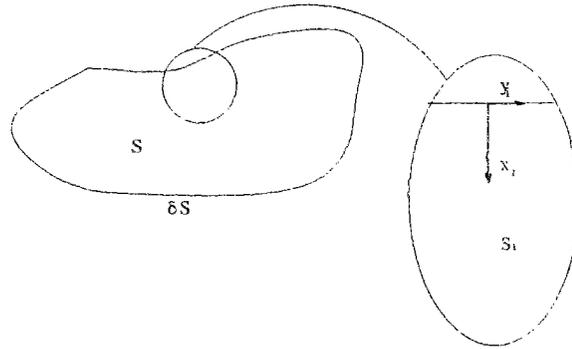


FIG. 2.9 - Description de la discrétisation

dans la figure (2.9), il suffit de résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \right) \Psi(x_i, y_i) - \frac{i\omega}{\xi} \Psi(x_i, y_i) = -\frac{i\omega}{\xi} \text{ sur } S_i \\ \Psi(0, y_i) = 0 \text{ sur } \partial S \cap \partial S_i \end{cases} \quad (2.144)$$

Nous introduisons la fonction Φ définie par :

$$\Phi = \Psi - 1 \text{ sur } S_i \quad (2.145)$$

Le système (2.144) se simplifie :

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \right) \Phi(x_i, y_i) - \frac{i\omega}{\xi} \Phi(x_i, y_i) = 0 \text{ sur } S_i \\ \Psi(0, y_i) = -1 \text{ sur } \partial S \cap \partial S_i \end{cases} \quad (2.146)$$

Nous recherchons des solutions à variables séparables sous la forme suivante :

$$\Phi(x_i, y_i) = f(x_i) g(y_i) \quad (2.147)$$

Nous reportons cette relation dans le système (2.146) qui devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x_i^2} g(y_i) + \frac{\partial^2 g(y_i)}{\partial y_i^2} f(x_i) - \frac{i\omega}{\xi} f(x_i) g(y_i) = 0 \text{ sur } S_i \\ f(0) g(y_i) = -1 \text{ sur } \partial S \cap \partial S_i \end{cases} \quad (2.148)$$

De la condition aux limites, nous déduisons que la fonction g est constante et non nulle. L'équation aux dérivées partielles se réduit donc à l'expression suivante :

$$\frac{\partial^2 f(x_i)}{\partial x_i^2} - \frac{i\omega}{\xi} f(x_i) = 0 \text{ sur } S_i \quad (2.149)$$

La solution est donnée par la relation suivante :

$$f(x_i) = A \exp\left(i\sqrt{-\frac{i\omega}{\xi}} x_i\right) \quad (2.150)$$

En utilisant la condition aux limites (2.148), nous obtenons :

$$\Phi(x_i) = -\exp\left(i\sqrt{-\frac{i\omega}{\xi}} x_i\right) \quad (2.151)$$

Nous en déduisons la solution recherchée :

$$\Psi(x_i) = 1 - \exp\left(i\sqrt{-\frac{i\omega}{\xi}} x_i\right) \quad (2.152)$$

Celle-ci est intégrée sur la surface S de manière à en dégager une moyenne :

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{S} \int_S \Psi \, dS \\ &= \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N \int_{S_i} \Psi(x_i) \, dy_i dx_i \\ &= \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N y_i \left\{ rm_i - \int_0^{rm_i} \exp\left(i\sqrt{-\frac{i\omega}{\xi}} x_i\right) dx_i \right\} \end{aligned} \quad (2.153)$$

où nous avons noté rm_i une dimension caractéristique de la surface S_i suivant la direction x_i . Cette dimension peut s'interpréter comme un rayon moyen de la section. L'écriture (2.150) de la solution est reportée :

$$F = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N y_i \left\{ rm_i - \left[\left(i\sqrt{-\frac{i\omega}{\xi}} \right)^{-1} \exp\left(i\sqrt{-\frac{i\omega}{\xi}} x_i \right) \right]_0^{rm_i} \right\} \quad (2.154)$$

Pour les hautes fréquences, c'est à dire pour le domaine fréquentiel où l'inégalité $\sqrt{\frac{\omega \, rm_i^2}{\xi}} \gg 1$ est vérifiée, cette expression se simplifie :

$$F = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^N \left\{ rm_i y_i + \left(i \sqrt{-\frac{i\omega}{\xi}} \right)^{-1} y_i \right\} \quad (2.155)$$

Or $S = \sum_{i=1}^N rm_i y_i$ et le périmètre de la section est donné par $P = \sum_{i=1}^N y_i$. En reportant ces relations dans l'équation (2.155), nous obtenons en définitive :

$$F = 1 + \frac{P}{S} \left(i \sqrt{-\frac{i\omega}{\xi}} \right)^{-1} \quad (2.156)$$

Cette expression montre que pour les hautes fréquences, l'influence de la géométrie ne se manifeste qu'à travers le rapport périmètre par la surface. De manière à valider cette écriture, nous nous proposons de la comparer aux expressions (2.140), (2.141) et (2.142) calculées pour des sections circulaire, rectangulaire et triangulaire. Pour $\xi = \eta/\rho_o$, (2.156) devient :

$$F = 1 + \frac{P}{S} \left(i \sqrt{-i} \sqrt{\frac{\omega\rho_o}{\eta}} \right)^{-1} \quad (2.157)$$

Le domaine fréquentiel est alors défini par l'inégalité $rm_i \gg \sqrt{\frac{\eta}{\rho_o \omega}}$, c'est à dire pour les dimensions transversales de conduit plus grandes que l'épaisseur de la couche limite visqueuse.

- Section circulaire

Pour les hautes fréquences ($\lambda \gg 1$), et en choisissant une convention de signe où la partie imaginaire de $\sqrt{-i}$ est positive, le rapport des fonctions de Bessel $G(\lambda\sqrt{-i})$ est approché par i . Dans ces conditions, l'écriture (2.140) de la fonction F associée à une section circulaire devient :

$$F(\lambda) = 1 - \frac{2i}{\lambda\sqrt{-i}} \quad (2.158)$$

Nous reportons l'expression de λ en fonction du rayon hydraulique (2.136) :

$$F = 1 - \frac{2i}{R\sqrt{-i} \sqrt{\frac{\omega\rho_o}{\eta}}} \quad (2.159)$$

Le rayon hydraulique est défini comme étant deux fois le rapport de la surface par le périmètre, l'équation (2.159) devient :

$$F = 1 + \frac{P}{S} \frac{1}{i\sqrt{-i} \sqrt{\frac{\omega\rho_o}{\eta}}} \quad (2.160)$$

On retrouve ainsi la formulation générale (2.157) établie pour une section quelconque.

- Section de type fente

Pour les hautes fréquences, le terme $\tanh\left(\frac{\lambda}{2}\sqrt{i}\right)$ introduit dans l'expression (2.141) de F associée à une section rectangulaire est approché par 1. Cette écriture se simplifie donc lorsque les fréquences sont grandes :

$$F(\lambda) = 1 - \frac{2}{\lambda\sqrt{i}} \quad (2.161)$$

En utilisant la convention de signe où la partie imaginaire de $\sqrt{-i}$ est positive, on montre que $i\sqrt{-i} = -\sqrt{i}$. λ est substitué par son écriture en fonction du rapport périmètre par surface :

$$F = 1 + \frac{P}{S} \frac{1}{i\sqrt{-i} \sqrt{\frac{\omega\rho_o}{\eta}}} \quad (2.162)$$

- Section de type triangulaire

Ici aussi le terme $\coth\left(\frac{3\lambda}{2}\sqrt{i}\right) - i\frac{4}{3\lambda^2}$ de l'expression associée à la section triangulaire tend vers 1 pour les hautes fréquences, ce qui réduit l'équation (2.142) à la relation suivante :

$$F(\lambda) = 1 - \frac{2}{\lambda\sqrt{i}} \quad (2.163)$$

On obtient alors une expression identique à celle correspondant à la section rectangulaire (2.161). En utilisant les mêmes remarques, on montre alors que l'on retrouve l'expression générale (2.157).

2.5.6 Comportement pour les basses fréquences

Il s'agit d'établir une forme générale pour la fonction F , dans le domaine des basses fréquences et pour une forme de section quelconque. Le système (2.143) à résoudre se simplifie :

$$\begin{cases} \Delta_t \Psi = 0 & \text{sur } S \\ \Psi = 0 & \text{sur } \partial S \end{cases} \quad (2.164)$$

On obtient donc un problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace, dont l'unique solution est $\Psi = 0$. La fonction F , moyenne de Ψ sur la section est donc nulle. Ce résultat est en accord avec les formulations (2.140), (2.141) et (2.142) obtenues pour des sections circulaire, rectangulaire et triangulaire, comme le montre l'analyse suivante :

- Section circulaire

Pour les basses fréquences, c'est à dire pour $\lambda \ll 1$, les fonctions de Bessel d'ordre 0 et 1 peuvent être approchées :

$$J_0(\lambda\sqrt{-i}) = 1 + \frac{1}{4} i \lambda^2 - \frac{1}{64} \lambda^4 \quad (2.165)$$

$$J_1(\lambda\sqrt{-i}) = \frac{1}{2} \lambda\sqrt{-i} \left(1 + \frac{1}{8} i \lambda^2 - \frac{1}{192} \lambda^4 \right) \quad (2.166)$$

En effectuant un développement à l'ordre 5, l'écriture (2.140) de la fonction F associée à une section circulaire est transformée :

$$F(\lambda) = i \frac{\lambda^2}{8} + \frac{1}{48} \lambda^4 + O(5) \quad (2.167)$$

A l'ordre 1, on peut estimer qu'elle est nulle.

- Section rectangulaire

Nous effectuons un développement limité ($\lambda \ll 1$) de l'expression (2.141) associée à une forme rectangulaire. Nous obtenons à l'ordre 5 :

$$F(\lambda) = \frac{1}{12} i \lambda^2 + \frac{1}{120} \lambda^4 + O(5) \quad (2.168)$$

Soit une fonction nulle si nous retenons que les termes d'ordre 1.

- Section triangulaire

Le développement limité à l'ordre 5 de l'écriture F (2.142) définie pour une section triangulaire est donné par la relation suivante :

$$F(\lambda) = \frac{3}{20} i \lambda^2 + \frac{9}{280} \lambda^4 + O(5) \quad (2.169)$$

La fonction F est donc nulle pour les basses fréquences, si nous ne retenons que les termes du premier ordre.

2.6 Impédance de surface

Les résultats obtenus pour un conduit cylindrique seront généralisés à un milieu poreux par l'introduction de grandeurs macroscopiques caractérisant physiquement le matériau. Les pores, tous identiques et non connectés, sont supposés partir de la surface supérieure vers la surface inférieure du matériau. Nous traiterons dans un premier temps un matériau où les pores sont de section uniforme pour présenter par la suite un modèle à section de pore variable.

2.6.1 Matériau poreux à section de pore uniforme

Les pores tortueux considérés ont une section circulaire uniforme. La tortuosité est schématisée par une inclinaison de la direction de propagation microscopique x par rapport à la direction macroscopique X qui oriente le chargement (onde plane en incidence normale)

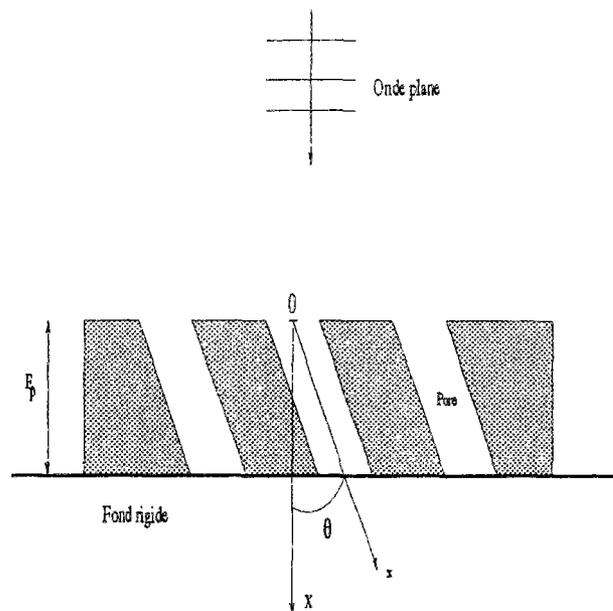


FIG. 2.10 - *Matériau poreux à pores tortueux de section uniforme*

Seules les contributions des vitesses microscopiques suivant la direction X sont retenues à l'échelle macroscopique. Rappelons la définition de la densité complexe (2.80) :

$$i\omega\rho(\omega)v_m = -\frac{dp}{dx} \quad (2.170)$$

où la vitesse longitudinale moyennée sur la section $\langle v_z \rangle$ et l'axe du cylindre z ont été notés v_m et x .

La composante suivant la direction de propagation macroscopique X de la vitesse microscopique est donnée par :

$$v_X = v_m \cos \theta \quad (2.171)$$

De plus, les dérivées suivant les directions x et X sont reliées par :

$$\frac{d}{dX} = \frac{1}{\cos\theta} \frac{d}{dx} \quad (2.172)$$

$1/\cos^2\theta$ n'est rien d'autre que le coefficient de tortuosité, que nous noterons par la suite k_s . A l'aide de (2.171) et (2.172) l'équation (2.170) s'écrit dans la direction de propagation macroscopique :

$$-\frac{dp}{dX} = i\omega\rho(\omega)k_s v_X \quad (2.173)$$

Nous définissons ainsi une nouvelle fonction densité complexe qui prend en compte les effets associés à la tortuosité :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &= \rho k_s \\ &= \frac{\rho_o k_s}{F(\lambda)} \end{aligned} \quad (2.174)$$

La compressibilité complexe n'est pas modifiée par la tortuosité du pore. Elle est donc donnée par l'équation (2.139) :

$$C(\omega) = \frac{1}{\gamma P_o} \{ \gamma - (\gamma - 1) F(\lambda_T) \} \quad (2.175)$$

Nous rappelons que la fonction complexe F , les nombres sans dimensions λ et λ_T caractéristiques des perturbations visqueuses et thermiques s'écrivent pour une section circulaire uniforme :

$$F(\lambda) = 1 - \frac{2}{\lambda\sqrt{-i}} G(\lambda\sqrt{-i}) \quad (2.176)$$

$$\lambda = R \left(\frac{\rho_o \omega}{\eta} \right)^{1/2} \quad (2.177)$$

$$\lambda_T = \lambda N_{pr}^{1/2} \quad (2.178)$$

Pour une section circulaire, le rayon hydraulique R est égal au rayon r_p de la section du pore. Cette information n'est pas accessible à l'échelle macroscopique, mais elle peut être déduite de la résistance au passage de l'air.

Nous notons E_p l'épaisseur du milieu poreux, l la longueur du pore et N le nombre de pores par unité de surface. Avec ces notations la porosité est donnée par :

$$\Omega = \frac{N\pi r_p^2}{\cos \theta} \quad (2.179)$$

La résistance au passage de l'air est définie par :

$$R_s = \frac{\Delta p}{E_p D} \quad (2.180)$$

Δp et D sont respectivement la différence de pression à laquelle est soumise l'éprouvette et le flux d'air par unité de surface. Ce flux s'exprime en fonction de la porosité et de la composante suivant la direction macroscopique de la vitesse de la manière suivante :

$$D = v_X \Omega \quad (2.181)$$

La résistance au passage de l'air est une grandeur intrinsèque. Elle peut donc être estimée dans le régime des basses fréquences. Dans ces conditions, les fonctions de Bessel d'ordre 0 et 1 sont approchées, et la fonction F (2.176) introduite dans la définition de la densité complexe (2.174) se simplifie. D'après l'approximation (2.167), nous obtenons à l'ordre 2 :

$$F(\lambda) = i \frac{\lambda^2}{8} \quad (2.182)$$

En substituant λ par son expression en fonction du rayon du pore (2.177), l'équation (2.173) devient pour les basses fréquences :

$$-\frac{dp}{dX} = \frac{i \rho_o}{i r_p^2 \frac{\rho_o}{8\eta}} k_s v_X \quad (2.183)$$

Soit :

$$-\frac{dp}{dX} = \frac{8 \eta}{r_p^2} k_s v_X \quad (2.184)$$

Nous en déduisons le saut de pression Δp :

$$\Delta p = \frac{8\eta k_s}{r_p^2} E_p v_X \quad (2.185)$$

Les équations exprimant le saut de pression (2.185) et le flux d'air (2.181) sont reportées dans la définition de la résistance au passage de l'air (2.180) :

$$R_s = \frac{8\eta k_s}{r_p^2 \Omega} \quad (2.186)$$

Le rayon du pore r_p s'exprime donc en fonction de grandeurs macroscopiques :

$$r_p^2 = \frac{8\eta k_s}{R_s \Omega} \quad (2.187)$$

Le nombre sans dimension λ s'écrit alors :

$$\lambda = \left(\frac{8 k_s \rho_o \omega}{R_s \Omega} \right)^{1/2} \quad (2.188)$$

Nous obtenons ainsi les écritures des fonctions complexes de densité (2.174) et de compressibilité (2.175) en terme de grandeurs macroscopiques (résistance à l'écoulement de l'air, tortuosité et porosité) pour un pore tortueux. L'impédance caractéristique et le nombre d'onde s'obtiennent à l'aide des relations (2.115) et (2.112) :

$$Z^c = \left[\frac{\tilde{\rho}(\omega)}{C(\omega)} \right]^{1/2} \quad (2.189)$$

$$m^2 = -\omega^2 \tilde{\rho}(\omega) C(\omega) \quad (2.190)$$

Si le pore se termine en $X = E_p$ par une surface rigide, l'impédance en $X = 0$ est donnée par [Annexe B.4] :

$$\begin{aligned} Z(0) &= \frac{p(0)}{v_X(0)} \\ &= -i Z^c \cot g(imE_p) \end{aligned} \quad (2.191)$$

où $p(0)$ et $v_X(0)$ désignent respectivement la pression et la composante normale de la vitesse à la surface du matériau dans le milieu poreux.

Nous disposons à présent de tous les outils nécessaires pour calculer l'impédance de surface. Celle-ci est définie par le rapport de la pression par la vitesse normale. Ces grandeurs que nous noterons p^s et v^s sont calculées à l'air libre, au

niveau de la surface du matériau. Pour un matériau poreux reposant sur un fond rigide, elles s'obtiennent en utilisant les conditions aux limites en $X = 0$:

- Continuité de la pression :

$$p^s = p(0) \quad (2.192)$$

- Continuité des débits :

Dans le milieu poreux, en $X = 0$, le débit D par unité de surface est donné par :

$$D = \Omega v_X(0) \quad (2.193)$$

A l'air libre, toujours au niveau de la surface du matériau, le débit par unité de surface n'est rien d'autre que la vitesse v^s de l'onde. Nous avons donc :

$$v^s = \Omega v_X(0) \quad (2.194)$$

Les conditions aux limites (2.192) et (2.194), nous donnent ainsi l'écriture de l'impédance de surface que nous noterons Z^s :

$$\begin{aligned} Z^s &= \frac{p^s}{v^s} \\ &= \frac{p(0)}{\Omega v_X(0)} \end{aligned} \quad (2.195)$$

En reportant la définition de l'impédance d'un pore (2.191), nous obtenons:

$$Z^s = -i \frac{Z^c}{\Omega} \cotg(imE_p) \quad (2.196)$$

Pour résumer, lorsque le milieu poreux considéré repose sur un fond rigide, pour des pores identiques de section uniforme traversant tout le matériau dans direction de propagation macroscopique, l'impédance de surface est donnée par :

$$Z^s = -i \left[\frac{\tilde{\rho}(\omega)}{\Omega^2 C(\omega)} \right]^{1/2} \cotg [-\omega(\tilde{\rho}(\omega)C(\omega))^{1/2} E_p] \quad (2.197)$$

Avec :

- Ω :porosité

- E_p : épaisseur du milieu poreux
- ω : pulsation ($\omega = 2\pi f$ avec f fréquence)
- $\tilde{\rho}$: fonction complexe de densité associée aux dissipations visqueuses

$$\tilde{\rho}(\omega) = \frac{\rho_o k_s}{F(\lambda)} \quad (2.198)$$

- C : fonction complexe de compressibilité associée aux dissipations thermiques

$$C(\omega) = \frac{1}{\gamma P_o} \{\gamma - (\gamma - 1) F(\lambda_T)\} \quad (2.199)$$

- F : fonction caractérisant la géométrie de la section du pore. Pour une section circulaire :

$$F(\lambda) = 1 - \frac{2}{\lambda\sqrt{-i}} G\left(\lambda\sqrt{-i}\right) \quad (2.200)$$

- N_{pr} : nombre de Prandtl
- λ : nombre sans dimension caractérisant les perturbations visqueuses

$$\lambda = \left(\frac{8 k_s \rho_o \omega}{R_s \Omega}\right)^{1/2} \quad (2.201)$$

- λ_T : nombre sans dimension caractérisant les perturbations thermiques

$$\lambda_T = \left(\frac{8 k_s \rho_o \omega N_{pr}}{R_s \Omega}\right)^{1/2} \quad (2.202)$$

- ρ_o : masse volumique de l'air
- k_s : tortuosité
- R_s : résistance à l'écoulement de l'air

Bien entendu, nous avons modélisé la tortuosité par une inclinaison constante des pores par rapport à la direction de propagation macroscopique X . Toutefois, les auteurs estiment généralement que tout pore tortueux (dont l'inclinaison varie en fonction de la position géométrique) peut être ramené à un pore droit d'inclinaison constante si l'on retient comme définition de la tortuosité le rapport de la longueur du pore par l'épaisseur de l'éprouvette. De plus, les calculs ont été traités pour une section circulaire, mais ils peuvent être généralisés à d'autres sections par l'utilisation de fonctions F adéquates (§2.5). Cependant, nous avons

pu constater que la forme de la section a une faible influence pour le régime de fréquences et de rayons considéré (§2.5.4). Ce point de vue est confirmé par les résultats numériques des travaux d'Attenborough [Attenborough, 1993] de Wilson [Wilson, 1993] et de Cummings [Cummings, 1993]. Signalons également que les fonctions complexes de densité et de compressibilité sont des grandeurs microscopiques. De nombreux auteurs définissent des grandeurs équivalentes, à l'échelle macroscopique pour calculer l'impédance de surface.

2.6.2 Matériau poreux à section de pore variable

La tortuosité ne se limite plus à une simple mesure de la sinuosité, mais tient compte des étranglements. Aussi certains auteurs ont tenté d'enrichir les écritures des fonctions de densités et de compressibilité par l'introduction de paramètres additionnels tout en supposant des pores identiques.

Stinson et Champoux [Champoux *et al.*, 1992] prennent en compte le changement de section le long du pore, en modélisant celui-ci comme une série de conduits uniformes, chaque conduit élémentaire ayant une forme et une taille particulière. Cette démarche est intéressante, car elle montre que les fonctions complexes de densité et de compressibilité dépendent de la géométrie du pore de différentes manières. La densité complexe (qui caractérise les perturbations visqueuses) est fortement influencée par la présence de conduits étroits tandis que la compressibilité complexe (caractérisant les perturbations thermiques) est plutôt sensible à la présence de conduits larges. Devant l'impossibilité de définir de façon précise la géométrie des pores dans les milieux couramment utilisés, ils suggèrent de généraliser ce modèle par l'introduction de deux paramètres supplémentaires associés séparément aux effets visqueux et thermiques et qu'il convient d'ajuster en fonction de la distribution de taille de pore.

Le modèle de Biot-Allard [Allard, 1993] n'utilise qu'un paramètre supplémentaire, mais semble moins efficace que le modèle précédent lorsque les discontinuités sont prononcées.

Toujours dans le cadre de la théorie de Biot, et en ne retenant que les dissipations visqueuses, Yamamoto [Yamamoto *et al.*, 1988] donne l'expression de la perméabilité pour une distribution de taille de pores selon une loi normale. Il montre ainsi que pour une perméabilité donnée, nous pouvons avoir une infinité de distribution et que la propagation des ondes (lentes, rapides et de cisaillement) n'est pas influencée par le désordre pour les basses et très hautes fréquences, mais l'est fortement dans le régime des fréquences intermédiaires.

Attenborough [Attenborough, 1993] généralise cette approche pour y inclure les dissipations thermiques, dans le cadre d'une modélisation microscopique où le squelette est supposé rigide.

Il propose par ailleurs une autre approche qui consiste à généraliser les fonctions de densité et de compressibilité établies précédemment par l'introduction d'un paramètre supplémentaire.

Nous distinguons ainsi quatre modèles généralisés qui ont pour objectif d'établir une écriture enrichie pour les fonctions de densité et de compressibilité. En utilisant la relation (2.197), ces quantités sont suffisantes pour obtenir une estimation de l'impédance de surface. Nous proposons de les décrire brièvement en donnant l'expression des quantités recherchées :

◇ Modèle de Biot-Allard

Il consiste à déduire de la théorie de Biot, une écriture pour la fonction complexe de densité :

$$\tilde{\rho}(\lambda) = \rho_o k_s \left\{ 1 + \frac{R_s \Omega}{i k_s \rho_o \omega} \mathcal{F}(\lambda) \right\} \quad (2.203)$$

avec

$$\mathcal{F} = -\frac{1}{4} \frac{\lambda \sqrt{-i} G(\lambda \sqrt{-i})}{1 - \frac{2}{\lambda \sqrt{-i}} G(\lambda \sqrt{-i})} \quad (2.204)$$

Pour la compressibilité, le modèle utilise l'écriture (2.199). Il est généralisé en corrigeant les termes sans dimension λ et λ_T :

$$\lambda = s_B \left(\frac{8 k_s \rho_o \omega}{R_s \Omega} \right)^{1/2} \quad \lambda_T = s_B \left(\frac{8 k_s \rho_o \omega N_{pr}}{R_s \Omega} \right)^{1/2} \quad (2.205)$$

où s_B est utilisé comme une quantité à ajuster et qui est sensée prendre en compte la complexité du réseau poreux.

◇ Modèles d'Attenborough

◇ Le premier consiste à utiliser les fonctions densité et compressibilité données par les équations (2.198) et (2.199). Celles-ci ne sont pas applicables lorsque le pore n'a pas une section circulaire uniforme. Aussi, il se propose de les généraliser en modifiant les nombre λ et λ_T par l'introduction d'un paramètre supplémentaire s_A :

$$\lambda = s_A \left(\frac{8 k_s \rho_o \omega}{R_s \Omega} \right)^{1/2} \quad \lambda_T = s_A \left(\frac{8 k_s \rho_o \omega N_{pr}}{R_s \Omega} \right)^{1/2} \quad (2.206)$$

Les approches d'Attenborough et de Biot-Allard sont donc semblables, mais utilisent des fonctions de densité différentes. Celles-ci sont identiques uniquement lorsqu'il s'agit d'un pore section circulaire uniforme.

◊ Le second modèle s'inspire de la théorie de Biot et des travaux de Yamamoto pour considérer une distribution de tailles de pores selon une loi normale tout en prenant en compte les perturbations visqueuses et thermiques. Il introduit la longueur Φ qui caractérise la taille de la section et qui est défini par :

$$\Phi = -\log_2 r \quad (2.207)$$

où r rayon du pore est exprimé en *mm*. En notant σ l'écart-type, $e(r)$ la densité de distribution, la loi de distribution s'écrit :

$$f(\Phi) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-(\Phi - \bar{\Phi})^2/2\sigma^2] \quad (2.208)$$

$$\int_0^\infty e(r) dr = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Phi) d\Phi = 1 \quad (2.209)$$

Il parvient en définitive à proposer de nouvelles écritures pour les fonctions complexes de densité et de compressibilité :

$$\tilde{\rho}(\lambda) = \rho_o k_s \left\{ 1 + \frac{R_s \Omega}{i k_s \rho_o \omega} \tilde{\mathcal{F}}(\lambda) \right\} \quad (2.210)$$

$$C(\omega) = \frac{1}{\gamma P_o} \left\{ \gamma - \frac{\gamma - 1}{k_s \left\{ 1 + \frac{R_s \Omega}{i k_s \rho_o \omega} \tilde{\mathcal{F}}(\lambda N_{pr}^{1/2}) \right\}} \right\} \quad (2.211)$$

où pour une section circulaire, la fonction $\tilde{\mathcal{F}}$ dite de correction de viscosité est donnée par :

$$\tilde{\mathcal{F}}(\omega) = \frac{-2\eta}{\Omega R_s} \frac{\int_0^\infty \frac{e(r)}{r^2} \lambda \sqrt{-i} G(\lambda \sqrt{-i}) dr}{\int_0^\infty e(r) \left[1 - \frac{2}{\lambda \sqrt{-i}} G(\lambda \sqrt{-i}) \right] dr} \quad (2.212)$$

Ce modèle repose sur une description du milieu poreux utilisant quatre paramètres : porosité Ω , tortuosité k_s , résistance au passage de l'air R_s et écart type

σ . Ce paramètre quantifie le désordre autour d'une taille moyenne de section. Il est obtenu par une technique de porosimétrie au mercure ou encore lorsque les moyens expérimentaux ne le permettent pas, par un ajustement par rapport aux mesures expérimentales de l'impédance. Malgré sa richesse cette modélisation à l'inconvénient de ne pas donner de solution analytique simple, comme ce fut le cas pour une section de pore constante. En effet le calcul des intégrales (2.212) ne peut se faire que par des méthodes numériques et l'utilisation d'autres géométries de sections ne présente pas pour autant un avantage. Attenborough propose toutefois (pour des pores de type fissure) des solutions dans le régime des basses et hautes fréquences où l'intégration se traite analytiquement.

◇ Modèle de Champoux et Stinson

Il consiste à discrétiser le pore en une série de conduits droits de section circulaire et à négliger les effets associés aux discontinuités. Le modèle suppose des pores tous identiques, et considère que la pression et le débit ne varient pas lorsque les équations de continuité et du mouvement sont respectivement intégrées sur le volume du pore. Ils obtiennent ainsi de nouvelles écritures discrètes pour les fonctions de densité et de compressibilité. Celles-ci sont comparées aux fonctions équivalentes issues du modèle de Biot-Allard classique de manière à identifier des expressions pour deux paramètres additionnels notés s_ρ et s_K .

Le modèle de Biot-Allard est alors modifié en utilisant ces deux quantités qui corrigeront séparément les fonctions de densité et de compressibilité à travers les nombres sans dimensions λ et λ_T :

$$\lambda = s_\rho \left(\frac{8 k_s \rho_o \omega}{R_s \Omega} \right)^{1/2} \quad (2.213)$$

$$\lambda_T = s_K \left(\frac{8 k_s \rho_o \omega N_{pr}}{R_s \Omega} \right) \quad (2.214)$$

Ce modèle a été validé pour un milieu poreux composé de pores identiques et à section variable. Cependant, Attenborough remarque que les formulations théoriques des paramètres s_ρ et s_K ne sont pas toujours pertinentes.

2.7 Conclusion

Nous avons considéré une théorie modélisant la propagation dans un milieu poreux à squelette rigide en utilisant une méthode d'homogénéisation reposant sur le principe de la moyenne. Cette démarche utilise une simplification des équations de Navier-Stokes pour un régime de fréquences et de rayons suffisamment large. Ces simplifications sont issues d'une analyse des résultats de la solution de Kirchhoff.

Une nouvelle formulation de l'équation du mouvement et de transfert de la chaleur nous a permis d'introduire les fonctions complexes de densité et de compressibilité dont la connaissance suffit pour prédire le comportement acoustique, à travers le nombre d'onde et l'impédance caractéristique. Ces fonctions ont également l'avantage de traiter séparément les effets associés aux phénomènes visqueux et thermiques. Les calculs ont été développés pour différentes formes de section, mais il semblerait que l'influence de ce paramètre soit négligeable. La première partie de ce chapitre fut donc consacrée à rechercher l'écriture du nombre d'onde et de l'impédance d'un conduit.

Dans une seconde partie, ces résultats ont été généralisés à un milieu poreux par un passage "micro-macro" associant la taille du pore à la résistance au passage de l'air et à la porosité, puis la longueur à la tortuosité. Nous en avons déduit une nouvelle formulation des fonctions complexes de densité et de compressibilité en retenant dans un premier temps, des pores de section uniforme (modèle à trois paramètres).

En utilisant les conditions aux limites à la surface du matériau et pour une onde plane en incidence normale, nous obtenons l'expression de l'impédance de surface.

Nous avons ensuite présenté différents modèles (à quatre ou cinq paramètres) susceptibles de prendre en compte les variations de la section du pore. Certains sont issus de la théorie de Biot. Nous avons toutefois fait le choix de les inclure dans ce chapitre dans la mesure où ils s'expriment en termes de fonctions de densité et de compressibilité.

On pourrait être tenté de compliquer davantage ce modèle, en considérant par exemple que la matrice est viscoélastique, ou encore en introduisant des connections entre les pores, mais nous pensons que cette complication risque de se prolonger indéfiniment et sans espoir d'aboutissement. Construire un modèle général, applicable à l'ensemble des matériaux poreux est en effet une tâche ardue et peut être même irréaliste. Il est par contre capital de tenir compte des conditions in situ et des paramètres importants dans la gamme de fréquences à considérer de manière à adapter l'outil de simulation au problème posé (en considérant par exemple la rigidité de la matrice, dans le cas des enrobés drainants). Ainsi, à chaque problème peut correspondre une théorie différente en fonction des paramètres physiques qui donnent lieu à des phénomènes observables.

Par ailleurs, pour des applications industrielles, il est essentiel pour un outil

de simulation de donner une information qualitative des phénomènes mis en jeu en utilisant un modèle aussi simple que possible. Cela sera l'objet du chapitre suivant, où nous tâcherons d'étudier l'influence des différents paramètres sur les qualités acoustiques des enrobés drainants.

On peut aussi s'interroger quant à l'utilité de la théorie de Biot. Pour un squelette élastique, celle-ci est d'un grand intérêt en retenant trois types d'onde (lentes, rapides et de cisaillements). Elle est donc profitable lorsqu'il s'agit par exemple d'étudier les propriétés pétrophysiques de roches poreuses souterraines et de leur contenu en fluide.

Pour un problème d'acoustique, où le squelette est supposé rigide, l'approche microstructurelle reste tout de même plus intéressante, par une étude fine des phénomènes, mais également par la prise en compte des dissipations thermiques.

Cette démarche à l'échelle du pore sera développée davantage en seconde partie du document où nous tâcherons d'affiner la description du réseau poreux en proposant ainsi une caractérisation acoustique plus riche.

Chapitre 3

Application aux enrobés drainants

Les enrobés drainants sont des couches de roulement placées en partie supérieure de la chaussées, en contact direct avec les véhicules. Cette technique qui apparaît pour la première fois au début des années cinquante en Angleterre fut par la suite l'objet de quelques campagnes d'expérimentations aux USA et en France. Après une période de balbutiement et encouragée par le développement des revêtement poreux dans les pays voisins (Belgique, Autriche, Pays Bas) cette méthode fut introduite en France au niveau de développement industriel depuis 1987. En 1992, on estimait que plus de 30 millions de mètres carrés ont été mis en oeuvre sur l'ensemble du réseau routier français.

Cette technique avait comme objectif initial d'offrir un maximum de sécurité aux usagers du réseau routier en supprimant l'aquaplanage et les projections d'eau par temps de pluie par une bonne évacuation des eaux. Il s'est avéré par la suite que ce type de revêtement a également des propriétés acoustiques intéressantes en réduisant le bruit de roulement à la source et en absorbant une partie avec un gain de l'ordre de 3 à 6dB. Il est maintenant admis qu'au delà de 50 km/h, le bruit de roulement est prédominant et que les contributions des bruits moteur, d'échappement et aérodynamiques deviennent négligeables, du moins pour les véhicules légers.

On estime généralement que les principaux processus générateurs de bruit de roulement se décomposent en trois mécanismes [Bar *et al.*, 1993] :

- bruit d'impact des sculptures du pneumatique sur la chaussée. Ce phénomène génère du bruit dans le domaine des basses et moyennes fréquences (125 – 1000 Hz). Il est d'autant plus important que la surface du revêtement est irrégulière.
- bruit lié au phénomène de compression/décompression (air pumping) de