

## Chapitre 2

# Approche par variables d'état

Ces modèles supposent que l'histoire passée n'intervient que par la valeur actuelle d'un certain nombre de variables, les variables d'état, dont l'évolution est régie par une équation d'évolution [Sidoroff, 1975<sub>a</sub>]. Dans ce groupe, on réunit les modèles basés sur une approche par potentiels à l'image des travaux de Weber [Weber, 1968] et de Sidoroff [Sidoroff, 1976] ainsi que les principaux modèles rhéologiques tels que le modèle de Maxwell ou celui de Burger.

### 2.1 Les modèles rhéologiques

Les modèles rhéologiques que l'on va décrire ci-dessous correspondent à des matériaux viscoélastiques solides ou liquides. On peut trouver leur description dans [Germain, 1973], [Eringen, 1967], [Mandel, 1977]. Ces modèles sont obtenus en combinant des ressorts et des amortisseurs, permettant ainsi de donner une interprétation des différentes variables d'état apparaissant dans le modèle. On cherchera, à chaque fois, à choisir convenablement les variables d'état et on définira les potentiels d'énergie libre  $\Psi$  et de dissipation  $\phi$ . Le comportement d'un matériau est entièrement décrit par les variables d'état  $\underline{\underline{\chi}} = (\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\chi}}_2, \dots, \underline{\underline{\chi}}_r)$  et les fonctions convexes  $\Psi(\underline{\underline{\chi}})$  et  $\phi(\underline{\underline{\dot{\chi}}})$ . La loi d'évolution s'écrit:

$$\text{I.35} \quad \left( \underline{\underline{\sigma}} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}, \left( -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\chi}}_i} \right)_{i=2 \dots r} \right) \in \partial \phi(\underline{\underline{\dot{\chi}}})$$

où le sous-différentiel  $\partial \phi$  est défini par:

#### ♥ Définition 2.1 Sous-différentiel

Le sous-différentiel de  $\Psi$  en  $u$  est le sous-ensemble  $\partial \Psi(u)$  de l'espace topologique  $X^*$  dual de l'espace vectoriel  $X$  où est définie  $\Psi$ ; il est défini par [Le Tallec, 1990]:

$$\partial\Psi(u) = \{u^* \in X^*, \langle u^*, v - u \rangle \leq \Psi(v) - \Psi(u), \forall v \in X\}$$

De plus, pour un amortisseur linéaire  $\eta_i$ , de déformation  $\varepsilon_i$ , le potentiel de dissipation  $\phi_i$  vaut:

$$\phi_i = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_i \eta_i \dot{\varepsilon}_i$$

### 2.1.1 Le modèle de Maxwell

Il est décrit par deux variables d'état, la déformation linéarisée totale ( $\underline{\underline{\varepsilon}}$ ) et une déformation irréversible  $\underline{\underline{\varepsilon}}_i$ , qui peut être vue comme la déformation d'un amortisseur fictif contenu dans le matériau (figure 2.1).

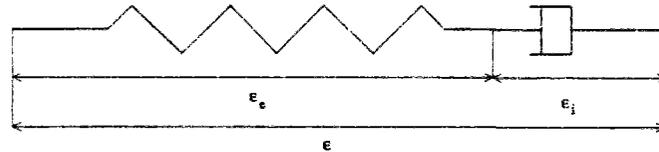


FIG. 2.1 - *Modèle rhéologique de Maxwell*

Avec ces variables, on peut définir le potentiel d'énergie libre  $\Psi$  et le potentiel de dissipation  $\phi$  par (en isotherme):

$$\Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}_i) = \frac{1}{2\rho} (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}_i) : \underline{\underline{\underline{A}}} : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}_i) \quad \text{I.36}$$

$$\phi(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_i) = \phi(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_i)$$

où  $\underline{\underline{\underline{A}}}$  est un tenseur d'élasticité d'ordre 4 défini positif.

Les lois de comportement s'écrivent, après élimination de  $\underline{\underline{\varepsilon}}_i$  et en supposant le tenseur d'élasticité  $\underline{\underline{\underline{A}}}$  indépendant du temps:

$$\underline{\underline{\varepsilon}}_i = \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\underline{A}}}^{-1} : \underline{\underline{\sigma}} \quad \text{I.37}$$

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_i - \underline{\underline{\underline{A}}}^{-1} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \in \partial\phi^*(\underline{\underline{\sigma}})$$

où  $\partial\phi^*$  est le dual de  $\partial\phi$ .

**Remarque 2.1** *La notation tensorielle précédente est à prendre avec précaution. Dans le cas tridimensionnel, si le matériau est isotrope, on fait une décomposition des tenseurs en une partie volumétrique et une partie déviatorique. S'il est anisotrope, on se place dans les axes principaux.*

Cette loi est l'écriture classique (en particulier pour un traitement numérique) de la loi de comportement des matériaux viscoélastiques de Maxwell. Elle permet de prédire le comportement des matériaux de Maxwell soit en relaxation (évolution de la contrainte de traction en fonction du temps pour une élongation imposée) soit en fluage (évolution de la déformation en fonction du temps pour une contrainte imposée) (figure 2.2). On remarque un fluage infini, ce qui montre qu'un tel matériau se comporte comme un fluide.

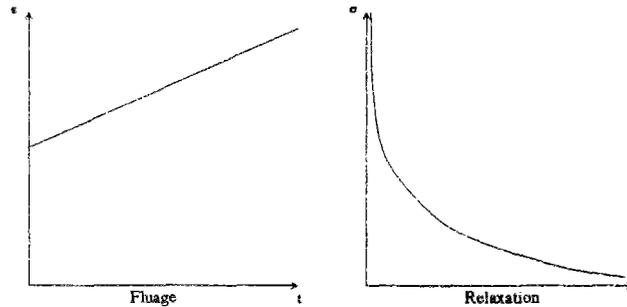


FIG. 2.2 - *Fluage et relaxation pour un matériau de Maxwell*

### 2.1.2 Le modèle de Burger généralisé

Ce modèle rhéologique est composé de ressorts et d'amortisseurs selon le schéma de la figure (2.3).

Il est obtenu en choisissant trois variables d'état:

- la déformation linéarisée totale  $\underline{\underline{\varepsilon}}$
- les déformations irréversibles  $\underline{\underline{\varepsilon}}_1$  et  $\underline{\underline{\varepsilon}}_3$  associées à deux amortisseurs fictifs.

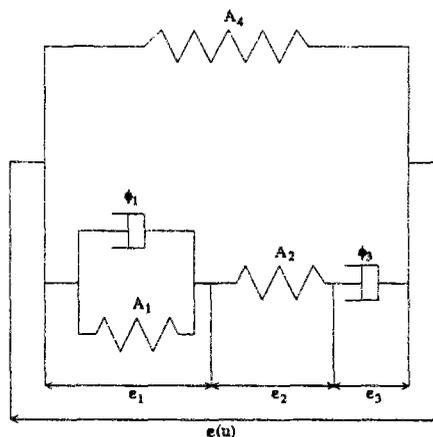


FIG. 2.3 - *Modèle rhéologique de Burger*

On définit alors, comme pour le matériau de Maxwell, le potentiel d'énergie libre  $\Psi$  et le potentiel de dissipation  $\phi$ :

$$\begin{aligned} \Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\varepsilon}}_1) &= \frac{1}{2\rho} \underline{\underline{\varepsilon}} : \underline{\underline{A}}_4 : \underline{\underline{\varepsilon}} + \frac{1}{2\rho} \underline{\underline{\varepsilon}}_1 : \underline{\underline{A}}_1 : \underline{\underline{\varepsilon}}_1 \\ \text{I.38} \quad &+ \frac{1}{2\rho} (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}_1 - \underline{\underline{\varepsilon}}_3) : \underline{\underline{A}}_2 : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}_1 - \underline{\underline{\varepsilon}}_3) \end{aligned}$$

$$\phi(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_1, \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_3) = \phi_1(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_1) + \phi_3(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_3)$$

Les lois de comportement s'écrivent alors, en vertu de la relation (I.35):

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{A}}_4 : \underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{A}}_2 : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}_1 - \underline{\underline{\varepsilon}}_3) &= 0 \\ \text{I.39} \quad -\underline{\underline{A}}_1 : \underline{\underline{\varepsilon}}_1 + \underline{\underline{A}}_2 : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}_1 - \underline{\underline{\varepsilon}}_3) &\in \partial\phi_1(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_1) \\ \underline{\underline{A}}_2 : (\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}_1 - \underline{\underline{\varepsilon}}_3) &\in \partial\phi_3(\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}_3) \end{aligned}$$

On peut donc prédire le comportement en relaxation et en fluage pour de tels matériaux (figure 2.4). Dans ce cas, le fluage est limité ce qui montre que ce type de matériau se comporte comme un solide avec deux temps de relaxation différents.

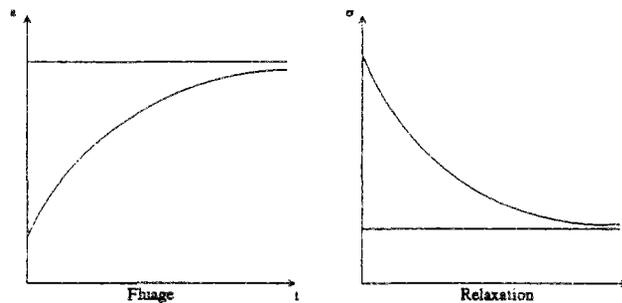


FIG. 2.4 - Fluage et relaxation pour un matériau de Burger

Ce modèle de Burger généralisé regroupe un certain nombre de cas particuliers comme le montre la figure 2.5.

### 2.1.3 Conclusion

Ces modèles rhéologiques ont l'inconvénient d'être limités aux cas des petites déformations en raison de la décomposition additive des différentes grandeurs constitutives.

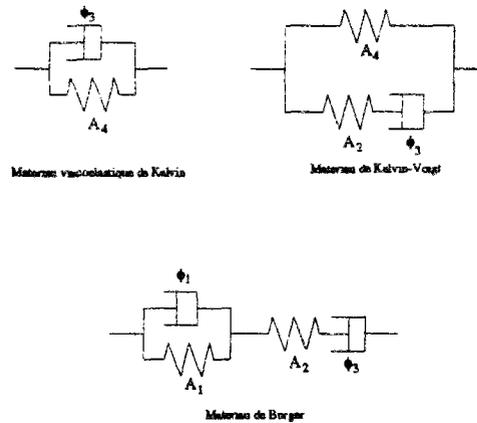


FIG. 2.5 - Cas particuliers du modèle de Burger

## 2.2 Le modèle de Weber

Weber [Weber, 1974] décrit les comportements viscoélastiques (ou viscoplastiques) par l'expression d'une énergie libre  $\Psi$  en fonction de la température, du tenseur de Cauchy-Green droit  $\underline{\underline{C}}$  et de variables d'état  $\chi_1, \chi_2 \dots \chi_N$ . Il effectue les hypothèses suivantes:

- les variables d'état sont les composantes d'un tenseur symétrique d'ordre 2,  $\underline{\underline{\chi}}$
- le matériau est isotrope
- le volume du matériau est égal à 1 dans toute configuration relâchée
- le milieu est isotherme

Il suppose que les variables d'état sont régies par la loi d'évolution:

$$\text{I.40} \quad \dot{\chi}_i = \frac{d\chi_i}{dt} = -\mathbb{C}_{ij} \frac{\partial \Psi}{\partial \chi_j}$$

alors que la contrainte de Piola-Kirchhoff 1 (ou tenseur de contrainte de Bousinesq)  $\underline{\underline{K}}$  est donnée par:

$$\text{I.41} \quad \underline{\underline{K}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{F}}}$$

Weber décompose le gradient de transformation  $\underline{\underline{F}}$  en une partie élastique  $\underline{\underline{F}}^e$  et une partie anélastique  $\underline{\underline{F}}^a$  ( $\det \underline{\underline{F}}^a = 1$ ) qui permet de passer de la configuration de référence à la configuration relâchée (voir Sidoroff [Sidoroff, 1974], [Sidoroff, 1975<sub>a</sub>], [Sidoroff, 1975<sub>b</sub>], [Sidoroff, 1976]). L'hypothèse d'isotropie des configurations relâchées conduit à identifier le tenseur  $\underline{\underline{\chi}}$  à  $\underline{\underline{F}}^{a^{-1}} \cdot {}^t\underline{\underline{F}}^{a^{-1}} = \underline{\underline{C}}^{a^{-1}}$ .

$\Psi$  est alors une fonction isotrope des tenseurs  $\underline{\underline{C}}$  et  $\underline{\underline{\chi}}$  et peut s'écrire sous la forme [Weber, 1974]:

$$\text{I.42} \quad \Psi(\underline{\underline{F}}, \underline{\underline{\chi}}) = \frac{\lambda}{2} (\xi - \eta)^2 + \mu \operatorname{tr}(\underline{\underline{\Lambda}}^2)$$

avec:

$$\begin{cases} \xi &= \log [\det(\underline{\underline{F}})] \\ \eta &= \frac{\mu}{3\lambda} \log [\det(\underline{\underline{\chi}})] = 0 \text{ puisque } \det(\underline{\underline{\chi}}) = 1 \\ \underline{\underline{\Lambda}} &= \frac{1}{2} \log(\underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{\chi}} \cdot {}^t\underline{\underline{F}}) \text{ tenseur de déformation logarithmique} \end{cases}$$

Par conséquent, la loi d'évolution du tenseur de variables d'état  $\underline{\underline{\chi}}$  s'écrit:

$$\text{I.43} \quad \dot{\underline{\underline{\chi}}} = -C \underline{\underline{\chi}} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\chi}}} \cdot \underline{\underline{\chi}}$$

où  $C$  est une fonction isotrope de  $\underline{\underline{\Lambda}}$  ou du tenseur de contrainte de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}$  à valeurs positives ou nulles. Si  $C$  est strictement positive, alors le comportement ainsi défini est celui d'un fluide viscoélastique, sinon, c'est celui d'un solide viscoplastique au sens de Weber (viscoélastique sans élasticité instantanée).

D'autre part, le comportement identifié par les relations (I.42) et (I.43) est conforme au principe d'objectivité, au second principe de la thermodynamique et au principe d'Onsager et est invariant dans tout changement de configuration de référence, à condition que le volume soit constant.

#### ◇ Limitations

Les limitations d'un tel modèle viennent du fait que le choix d'une seule variable d'état tensorielle peut s'avérer insuffisante pour la représentation des matériaux visqueux, et ce, au même titre que les modèles à un seul état intermédiaire.

## 2.3 Le modèle de Sidoroff

Sidoroff [Sidoroff, 1974] développe la notion d'état intermédiaire à partir de laquelle il construit une classe de milieux viscoélastiques non linéaires. Ces modèles généralisent aux grandes déformations les modèles rhéologiques classiques (Maxwell, Kelvin...). La configuration intermédiaire est définie comme une configuration relâchée, obtenue par une relaxation instantanée des contraintes, ce qui n'a de sens que pour les milieux à élasticité instantanée. Conformément à la

théorie des grandes déformations, il introduit, comme variable d'état, la déformation anélastique  $\underline{\underline{\mathbb{F}}}^a$  (ou la déformation élastique  $\underline{\underline{\mathbb{F}}}^e$ ), et décompose le gradient de transformation sous forme multiplicative (figure 2.6):  $\underline{\underline{\mathbb{F}}} = \underline{\underline{\mathbb{F}}}^e \cdot \underline{\underline{\mathbb{F}}}^a$

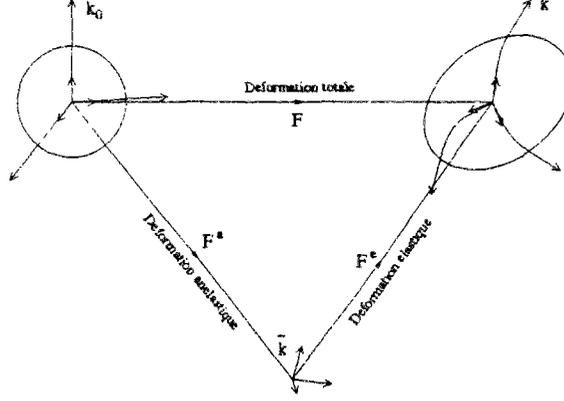


FIG. 2.6 - Configuration intermédiaire

L'énergie libre  $\Psi$  est alors fonction des variables  $(\underline{\underline{\mathbb{F}}}, \theta)$ ,  $\theta$  étant la température, et de la variable d'état  $\underline{\underline{\mathbb{F}}}^a$  (ou  $\underline{\underline{\mathbb{F}}}^e$ ):

$$\text{I.44} \quad \Psi = \Psi(\underline{\underline{\mathbb{F}}}, \underline{\underline{\mathbb{F}}}^a, \theta)$$

Quant à l'inégalité de Clausius-Duhem, elle s'écrit:

$$\text{I.45} \quad \Phi = -\rho(\dot{\Psi} + s\dot{\theta}) + \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\mathbb{L}}} - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla \theta}{\theta} \geq 0$$

En remplaçant (I.44) dans (I.45), on obtient comme expression de la dissipation:

$$\text{I.46} \quad \Phi = \left( \underline{\underline{\sigma}} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\mathbb{F}}}} \cdot {}^t \underline{\underline{\mathbb{F}}} \right) : \underline{\underline{\mathbb{L}}} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\mathbb{F}}}^a} \cdot {}^t \underline{\underline{\mathbb{F}}}^a : \underline{\underline{\mathbb{L}}}^a - \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla \theta}{\theta} - \rho \left( s + \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} \geq 0$$

où  $\underline{\underline{\mathbb{L}}}^a = \dot{\underline{\underline{\mathbb{F}}}^a} \cdot \underline{\underline{\mathbb{F}}}^{a-1}$ .

Sidoroff [Sidoroff, 1974] suppose que les déformations (totale et anélastique) et la conduction thermique sont seules responsables de la dissipation. D'où:

$$\text{I.47} \quad \begin{cases} s = -\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \\ \Phi = \underline{\underline{\sigma}}^v : \underline{\underline{\mathbb{L}}} + \underline{\underline{\Sigma}}^a : \underline{\underline{\mathbb{L}}}^a + \mathbf{J}_q \cdot \nabla \theta \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{avec } \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^e + \underline{\underline{\sigma}}^v, \underline{\underline{\sigma}}^e = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\mathbb{F}}}} \cdot {}^t \underline{\underline{\mathbb{F}}}, \underline{\underline{\Sigma}}^a = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\mathbb{F}}}^a} \cdot {}^t \underline{\underline{\mathbb{F}}}^a, \mathbf{J}_q = -\frac{\mathbf{q}}{\theta}$$

En formalisme lagrangien, la dissipation  $\Phi$  se met sous la forme:

$$\text{I.48} \quad \Phi_0 = \frac{\rho_0}{\rho} \Phi = \underline{\underline{\mathbb{S}}}^v : \dot{\underline{\underline{\mathbb{A}}}} + \underline{\underline{\mathbb{S}}}^a : \dot{\underline{\underline{\mathbb{A}}}^a} + \mathbf{J}_h \cdot \text{grad } \theta \geq 0$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\mathbb{S}}} = \underline{\underline{\mathbb{S}}}^e + \underline{\underline{\mathbb{S}}}^v, \underline{\underline{\mathbb{S}}}^e = 2\rho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\mathbb{C}}}}, \underline{\underline{\mathbb{S}}}^a = -2\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\mathbb{C}}}^a} \\ \underline{\underline{\Delta}}^a = \frac{1}{2} ({}^t \underline{\underline{\mathbb{F}}}^a \cdot \underline{\underline{\mathbb{F}}}^a - \underline{\underline{\mathbf{1}}}) \\ \underline{\underline{\text{grad}}} \theta = {}^t \underline{\underline{\mathbb{F}}} \cdot \nabla \theta \\ \underline{\underline{\mathbf{J}}}_h = -\frac{\underline{\underline{\mathbf{h}}}}{\theta}, \underline{\underline{\mathbf{h}}} \text{ étant le flux de chaleur dans la configuration de référence} \end{array} \right.$$

alors qu'en formalisme eulérien, elle s'écrit:

$$\text{I.49} \quad \Phi = \underline{\underline{\sigma}}^v : \underline{\underline{\mathbb{D}}} + \underline{\underline{\sigma}}^a : \underline{\underline{\mathbb{D}}}^a + \underline{\underline{\mathbf{J}}}_q \cdot \underline{\underline{\mathbf{g}}} \geq 0$$

avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}}^e = \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}^v = 2\rho \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\mathbb{B}}}} \cdot \underline{\underline{\mathbb{B}}} + \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\mathbb{B}}}^e} \cdot \underline{\underline{\mathbb{B}}}^e \right) \\ \underline{\underline{\sigma}}^a = 2\rho \underline{\underline{\mathbb{V}}}^e \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\mathbb{V}}}^e} \cdot \underline{\underline{\mathbb{V}}}^e \\ \underline{\underline{\mathbb{D}}} \text{ tenseur taux de déformations} \\ \underline{\underline{\mathbb{D}}}^a \text{ tenseur taux de déformations anélastiques} \end{array} \right.$$

Grâce aux relations d'Onsager, on montre que, pour un milieu isotrope, il y a découplage entre les dissipations thermique et mécanique [Sidoroff, 1974]. La dissipation mécanique est une fonction scalaire isotrope des tenseurs  $\underline{\underline{\mathbb{B}}}$ ,  $\underline{\underline{\mathbb{B}}}^e$ ,  $\underline{\underline{\mathbb{D}}}$  et  $\underline{\underline{\mathbb{D}}}^a$ , quadratique par rapport à  $\underline{\underline{\mathbb{D}}}$  et  $\underline{\underline{\mathbb{D}}}^a$ . On en conclut que le milieu isotrope le plus général est défini par 211 fonctions ( $\Psi$  et 210 fonctions reliant la dissipation mécanique aux variables tensorielles décrites précédemment et dont elle dépend) de 11 variables. Le nombre de ces fonctions diminue lorsque le matériau est supposé incompressible.

Sidoroff [Sidoroff, 1976] note cependant qu'un tel formalisme, bien que très approprié à une étude théorique, n'est pas le formalisme idéal pour des applications pratiques qui nécessitent le calcul explicite (et peu commode) de la décomposition polaire de  $\underline{\underline{\mathbb{F}}}$  ( $\underline{\underline{\mathbb{F}}} = \underline{\underline{\mathbb{V}}} \cdot \underline{\underline{\mathbb{R}}}$ ).

## 2.4 Viscoélasticité tridimensionnelle en déformations finies

Ce modèle, développé par Simo [Simo, 1987], est basé sur les caractéristiques suivantes:

- cas anisotrope

- découplage de la déformation en une partie volumétrique et une partie déviatorique: décomposition multiplicative du gradient de transformation
- pas de restriction sur les fonctions de relaxation
- recouvrement de l'élasticité finie pour les processus très lents et très rapides: par exemple, avec des modèles classiques de l'élasticité caoutchoutique (Mooney-Rivlin [Rivlin, 1951] ou Blatz-Ko [Brockman, 1986]).

### 2.4.1 Théorie linéaire

Soit  $\Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\chi}})$  l'énergie libre définie par:

$$\text{I.50} \quad \Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\chi}}) = \Psi^0(\text{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}) + \bar{\Psi}^0(\underline{\underline{e}}) - \underline{\underline{\chi}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + \Psi_I(\underline{\underline{\chi}})$$

avec:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi^0(\text{tr}\underline{\underline{\varepsilon}}) : \text{partie volumétrique de l'énergie élastique initiale emmagasinée} \\ \bar{\Psi}^0(\underline{\underline{e}}) : \text{partie déviatorique de l'énergie élastique initiale emmagasinée} \\ \underline{\underline{e}} = \text{dev} [\underline{\underline{\varepsilon}}] : \text{déviateur du tenseur de déformation dans la configuration actuelle} \\ \underline{\underline{\chi}} : \text{tenseur des variables d'état} \\ \Psi_I : \text{potentiel interne, c'est à dire qui ne dépend que des variables d'état} \end{array} \right.$$

Le second principe de la thermodynamique donne:

$$\text{I.51} \quad \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \Psi(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\chi}})}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}} \equiv \underline{\underline{\sigma}}^0 - \underline{\underline{\chi}} \text{ avec } \underline{\underline{\sigma}}^0 = \frac{\partial \Psi^0(\underline{\underline{\varepsilon}})}{\underline{\underline{\varepsilon}}}$$

On obtient ainsi une décomposition additive du tenseur des contraintes en une contrainte initiale  $\underline{\underline{\sigma}}^0$  et une contrainte hors équilibre  $\underline{\underline{q}}$ .

### 2.4.2 Extension au cas non linéaire

Pour définir les réponses volumétrique et déviatorique dans le domaine non linéaire, on introduit la grandeur cinématique suivante [Simo, 1987]:

$$\underline{\underline{\mathbb{F}}} = J^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{\bar{\mathbb{F}}}} \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} J = \det \underline{\underline{\mathbb{F}}} \\ \underline{\underline{\bar{\mathbb{F}}}} = J^{-\frac{1}{3}} \underline{\underline{\mathbb{F}}} \end{array} \right.$$

On associe à  $\underline{\underline{\mathbb{F}}}$  et  $\underline{\underline{\bar{\mathbb{F}}}}$  les tenseurs de Cauchy-Green droits correspondants  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$  et  $\underline{\underline{\bar{\mathbb{C}}}}$  et les tenseurs de déformation lagrangiens  $\underline{\underline{\Delta}}$  et  $\underline{\underline{\bar{\Delta}}}$  respectivement:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\mathbb{C}}} = J^{-\frac{2}{3}} \underline{\underline{\mathbb{C}}} \equiv {}^t \underline{\underline{\mathbb{F}}} \cdot \underline{\underline{\mathbb{F}}} \\ \underline{\underline{\Delta}} = \frac{1}{2} [\underline{\underline{\mathbb{C}}} - \underline{\underline{\mathbb{I}}}] \end{cases}$$

où  $\underline{\underline{\mathbb{I}}}$  est le tenseur métrique dans la configuration de référence (en coordonnées cartésiennes,  $\mathbb{I}_{IJ} = \delta_{IJ}$ ).

Par analogie avec le cas linéaire, Simo [Simo, 1987] postule une fonction d'énergie libre  $\Psi(\underline{\underline{\Delta}}, \underline{\underline{\chi}})$  de la forme:

$$\text{I.52} \quad \Psi(\underline{\underline{\Delta}}, \underline{\underline{\chi}}) = \Psi^0(J) + \bar{\Psi}^0(\underline{\underline{\Delta}}) - \underline{\underline{\chi}} : \underline{\underline{\Delta}} + \Psi_I(\underline{\underline{\chi}})$$

L'inégalité de Clausius-Duhem  $\left(-\dot{\Psi} + \frac{1}{2} \underline{\underline{\Pi}} : \dot{\underline{\underline{\mathbb{C}}}} \geq 0\right)$  conduit à, dans le cas isotherme:

$$\text{I.53} \quad \begin{cases} - \frac{\partial \Psi(\underline{\underline{\Delta}}, \underline{\underline{\chi}})}{\partial \underline{\underline{\chi}}} : \dot{\underline{\underline{\chi}}} \geq 0 \\ \underline{\underline{\Pi}} = \frac{\partial \Psi(\underline{\underline{\Delta}}, \underline{\underline{\chi}})}{\partial \underline{\underline{\Delta}}} \end{cases}$$

Sachant que  $\frac{\partial J}{\partial \underline{\underline{\mathbb{C}}}} = \frac{J}{2} \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{-1}$ , on obtient:

$$\text{I.54} \quad \frac{\partial \bar{\Psi}^0(\underline{\underline{\Delta}})}{\partial \underline{\underline{\Delta}}} \equiv \frac{\partial \underline{\underline{\mathbb{C}}}}{\partial \underline{\underline{\mathbb{C}}}} \equiv J^{-\frac{2}{3}} \left[ \underline{\underline{\mathbb{1}}} - \frac{1}{3} \underline{\underline{\mathbb{C}}} \otimes \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{-1} \right]$$

Les relations (I.52), (I.53) et (I.54) conduisent à la loi de comportement suivante:

$$\text{I.55} \quad \underline{\underline{\Pi}} = Jp \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{-1} + J^{-\frac{2}{3}} \text{DEV} \left[ \frac{\partial \bar{\Psi}^0(\underline{\underline{\Delta}})}{\partial \underline{\underline{\Delta}}} - \underline{\underline{\chi}} \right]$$

avec:

$$\begin{cases} p \equiv \frac{d\Psi^0(J)}{dJ} & \text{est la pression hydrostatique} \\ \text{DEV} [\cdot] = (\cdot) - \frac{1}{3} [\underline{\underline{\mathbb{C}}} : (\cdot)] \cdot \underline{\underline{\mathbb{C}}}^{-1} & \text{est le déviateur dans la configuration de référence} \end{cases}$$

De la même façon, on a:

$$\text{I.56} \quad \underline{\underline{\sigma}} = p \underline{\underline{\mathbb{1}}} + \frac{1}{J} \text{dev} \left[ \underline{\underline{\mathbb{F}}} \cdot \left\{ \frac{\partial \bar{\Psi}^0(\underline{\underline{\Delta}})}{\partial \underline{\underline{\Delta}}} - \underline{\underline{\chi}} \right\} \cdot {}^t \underline{\underline{\mathbb{F}}} \right]$$

## 2.5 Le modèle viscohyperélastique

Ce modèle [Johnson *et al.*, 1991<sub>a</sub>] est basé sur le modèle solide de Maxwell généralisé dans lequel tous les ressorts sont hyperélastiques.

### 2.5.1 Le modèle linéaire de Maxwell généralisé pour les solides

On considère le modèle solide unidimensionnel de la figure 2.7.

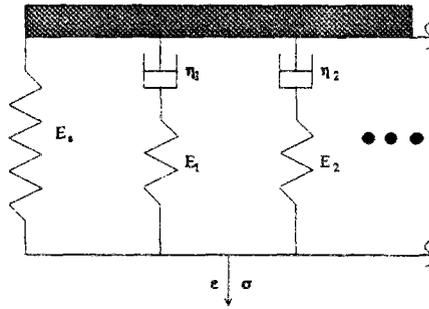


FIG. 2.7 - Modèle linéaire de Maxwell généralisé

Si on impose une déformation  $\underline{\varepsilon}_0$  à  $t = 0$ , on trouve comme contrainte:

$$\text{I.57} \quad \underline{\sigma}(t) = \underline{\varepsilon}_0 E_s + \underline{\varepsilon}_0 E_1 e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \underline{\varepsilon}_0 E_2 e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \dots$$

où  $\tau_i = \frac{\eta_i}{E_i}$  est le  $i^{\text{ème}}$  temps de relaxation,  $E_i$  le module de dissipation du  $i^{\text{ème}}$  élément,  $\eta_i$  le coefficient du  $i^{\text{ème}}$  amortisseur,  $E_s$  le module d'élasticité à l'équilibre,  $\underline{\sigma}$  la contrainte mesurée et  $\underline{\varepsilon}$  la déformation mesurée. Les variables d'état sont les déformations anélastiques dans chaque élément. Le passage du modèle discret au continu se fait par la notion de spectre de fluage ou de relaxation. On peut alors écrire la contrainte sous la forme:

$$\text{I.58} \quad \underline{\sigma}(t) = \underline{\varepsilon}_0 E_s + \underline{\varepsilon}_0 \int_{\tau} E(\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau$$

En posant,  $\psi(t) = \int_{\tau} E(\tau) e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau$ , le problème discret à déformation imposée de la figure (2.8) a une contrainte donnée par:

$$\begin{aligned} \text{I.59} \quad \underline{\sigma}(t) &= \left( \Delta \underline{\varepsilon}_0 + \Delta \underline{\varepsilon}_1 H(t - t_1) + \dots \right) E_s \\ &+ \Delta \underline{\varepsilon}_0 \psi(t) + \Delta \underline{\varepsilon}_1 \psi(t - t_1) H(t - t_1) + \dots \end{aligned}$$

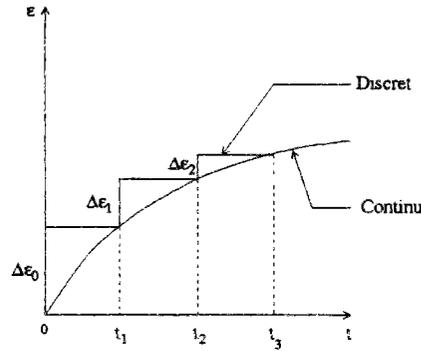


FIG. 2.8 - Déformation imposée discrète et continue

où  $H(t - a)$  est la fonction de Heaviside.

Lorsque les sauts de déformation (cas discret) deviennent très faibles, le problème continu de la figure (2.8) génère une contrainte donnée par:

$$I.60 \quad \underline{\underline{\sigma}}(t) = \underline{\underline{\varepsilon}}_0 E_s + \int_0^t \phi(t - \xi) \frac{d\underline{\underline{\varepsilon}}(\xi)}{d\xi} d\xi$$

avec  $\phi(t - a) = \psi(t - a) H(t - a)$

### 2.5.2 Le modèle viscohyperélastique

On considère le modèle de Maxwell non linéaire à trois branches de la figure 2.9. L'élongation et la densité d'énergie de la branche élastique non linéaire sont respectivement  $\lambda_E$  et  $W_E$ . La densité d'énergie de l'élément dissipatif non linéaire est  $W_L$  et les constantes des amortisseurs non linéaires sont  $\eta_E$  et  $\eta_L$ . A chaque instant  $t$ , la contrainte totale  $\underline{\underline{\sigma}}$  est donnée par:

$$I.61 \quad \underline{\underline{\sigma}}(t) = \underline{\underline{\sigma}}_E(t) + \underline{\underline{\sigma}}_{\eta_E}(t) + \underline{\underline{\sigma}}_L(t)$$

où  $\underline{\underline{\sigma}}_E$  et  $\underline{\underline{\sigma}}_L$  sont les contraintes dans les branches élastique et dissipative (non linéaire) et  $\underline{\underline{\sigma}}_{\eta_E}$  la contrainte due à l'amortisseur non linéaire dans la branche de gauche (figure 2.9).

On suppose que les éléments non linéaires élastique et dissipatif sont régis par des densités d'énergie hyperélastique. Si la déformation est quasistatique, la branche sans amortisseur fournit la réponse hyperélastique non linéaire (à l'équilibre). Pour un essai de relaxation, l'élément dissipatif hyperélastique fournit une contrainte visqueuse supplémentaire à celle de l'équilibre.

Les différentes grandeurs sont déterminées à partir des résultats expérimentaux de Mc Guirt et Lianis [McGuirt & Lianis, 1970]. En traçant la courbe, pour un essai de relaxation d'élongation  $\lambda$ , représentant la somme des contraintes dans les éléments hyperélastiques et celle représentant la contrainte à l'équilibre, on

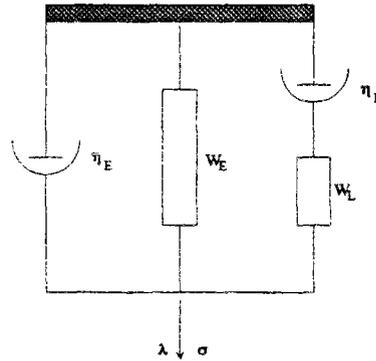


FIG. 2.9 - Modèle non linéaire de Maxwell

obtient la courbe de la contrainte dans l'élément dissipatif en fonction de l'élongation. Celle-ci étant approximativement une droite et l'élément de type Mooney-Rivlin (de densité d'énergie  $W = C_{10} (I_1^C - 3) + C_{01} (I_2^C - 3)$ ), Johnson et Quigley [Johnson *et al.*, 1991<sub>a</sub>] obtiennent l'expression approchée de la contrainte  $\sigma_L$  de l'élément dissipatif quand celui-ci subit une élongation  $\lambda_L$ :

$$\text{I.62} \quad \sigma_L = 2 \left( \lambda_L^2 - \frac{1}{\lambda_L} \right) \left( C_{10} + \frac{C_{01}}{\lambda_L} \right)$$

Pour déterminer  $\eta_L$ , Johnson et Quigley [Johnson *et al.*, 1991<sub>a</sub>] procèdent de la façon suivante. A un instant donné  $t$ , ils considèrent les trois configurations de la figure 2.10 et déterminent les forces  $f$  et  $g$  par les relations:

$$\begin{cases} f = f_E + f_L \\ g = 2A_L \left( \lambda_g^2 - \frac{1}{\lambda_g} \right) \left( \frac{\partial W_L}{\partial I_1^C} + \frac{1}{\lambda_g} \frac{\partial W_L}{\partial I_2^C} \right) \end{cases}$$

avec

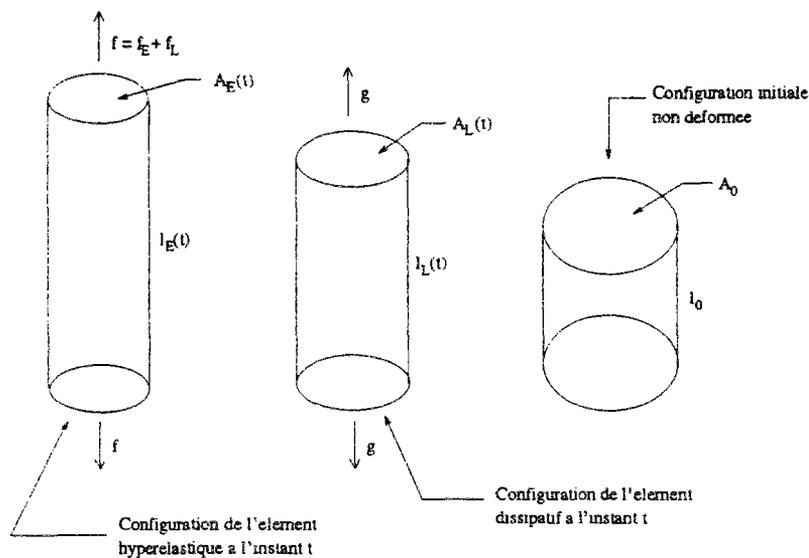
$$\text{I.63} \quad f_{i(i=E,L)} = 2A_i \left( \lambda_i^2 - \frac{1}{\lambda_i} \right) \left( \frac{\partial W_i}{\partial I_1^C} + \frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial W_i}{\partial I_2^C} \right)$$

$\eta_L$  et  $\eta_E$  sont déterminés en supposant les lois d'évolution suivantes:

$$\text{I.64} \quad -\eta_L \frac{\partial g}{\partial \lambda_L} \dot{\lambda}_L = g$$

$$\text{I.65} \quad -\eta_E \frac{\partial f_E}{\partial \lambda_E} \dot{\lambda}_E = f_{\eta_E}$$

Une fois  $f_{\eta_E}$  déterminée, l'identification de  $\eta_L$  se fait en minimisant l'erreur (par balayage sur  $\eta_L$ ) entre la contrainte calculée et celle mesurée expérimentalement [McGuirt & Lianis, 1970].

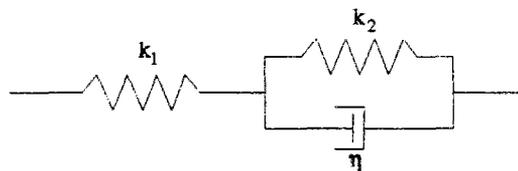
FIG. 2.10 - *Eléments hyperélastiques unidimensionnels*

## 2.6 Le modèle à cinq paramètres

Ce modèle est basé sur la généralisation du modèle à trois paramètres (viscoélasticité linéaire) pour la prise en compte des effets non linéaires et de la dépendance en temps des différents tenseurs. L'identification du modèle se fait par des essais de torsion sur un cylindre.

### 2.6.1 Le modèle à trois paramètres

On considère le modèle à trois paramètres de la figure 2.11 [Hausler & Sayir, 1995] (modèle de Zener).

FIG. 2.11 - *Le modèle à trois paramètres pour les solides*

En uniaxial, ce modèle est régi par l'équation suivante:

$$\text{I.66} \quad m \dot{\sigma} + \sigma = 2n \dot{\varepsilon} + 2c \varepsilon$$

où  $\sigma$  est la contrainte uniaxiale,  $\varepsilon$  la déformation infinitésimale correspondante et les coefficients  $m$ ,  $n$  et  $c$  dépendent des paramètres  $k_1$ ,  $k_2$  et  $\eta$  du modèle selon les relations:

$$m = \frac{\eta}{k_1 + k_2}, \quad 2n = \frac{k_2 \eta}{k_1 + k_2}, \quad 2c = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Afin de généraliser la relation (I.66) au cas tridimensionnel en déformations finies, on remplace la déformation  $\underline{\underline{\epsilon}}$  et sa dérivée par le tenseur de déformation  $\underline{\underline{\mathbb{G}}}$  et le tenseur taux de déformation  $\underline{\underline{\mathbb{D}}}$  respectivement:

$$\text{I.67} \quad \begin{cases} \underline{\underline{\mathbb{G}}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbb{B}}} - \underline{\underline{\mathbf{1}}}) \\ \underline{\underline{\mathbb{D}}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{\mathbb{L}}} + {}^t\underline{\underline{\mathbb{L}}}) \text{ avec } \underline{\underline{\mathbb{L}}} \text{ gradient de vitesse} \end{cases}$$

Le matériau étant supposé homogène, isotrope et incompressible, la loi de comportement s'écrit:

$$\text{I.68} \quad m \underline{\underline{\mathbb{T}}}^\circ + \underline{\underline{\mathbb{T}}} = 2n \underline{\underline{\mathbb{D}}} + 2c \underline{\underline{\mathbb{G}}}$$

avec  $\underline{\underline{\mathbb{T}}}$  tel que  $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{\mathbf{1}}} + \underline{\underline{\mathbb{T}}}$  où  $p$  est la pression hydrostatique et  $\underline{\underline{\mathbb{T}}}^\circ$  une des dérivées objectives de  $\underline{\underline{\mathbb{T}}}$ .

**Remarque 2.2** *Le passage du modèle en petites déformations à celui en grandes déformations est très approximatif, voire faux, car il suppose l'additivité des déformations et non une décomposition multiplicative.*

## 2.6.2 Identification expérimentale

Sur le cylindre de la figure 2.12, on applique un chargement en torsion. Les points du cylindre dans la configuration de référence en coordonnées cylindriques  $R, \Phi, Z$  sont transformés en points de coordonnées  $r, \phi, z$  en effectuant une rotation d'angle  $\alpha Z$  de chaque section perpendiculaire à l'axe  $Z$  (figure 2.12).

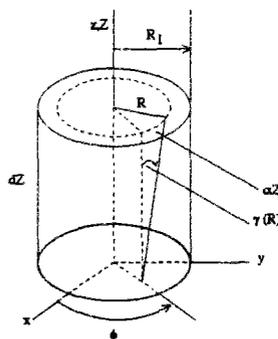


FIG. 2.12 - Essai de torsion d'un cylindre

La déformation est donnée par:

$$r = R \quad \phi = \Phi + \alpha Z \quad 0 \leq R \leq R_1 \quad 0 \leq \Phi \leq 2\pi \quad 0 \leq Z \leq H$$

Dans ce système de coordonnées, le gradient de transformation  $\underline{\underline{F}}$  s'écrit:

$$\underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ avec } \gamma(R, t) = \alpha(t)R$$

Le moment de torsion  $M$  et la force normale  $N$  agissant sur le cylindre sont définis respectivement par:

$$\text{I.69} \quad M(t) = \int_0^{R_1} 2\pi R^2 T_{\phi z} dR, \quad N(t) = \int_0^{R_1} 2\pi R (T_{zz} - p) dR$$

Les différentes constantes du matériau sont déterminées par des essais en petites déformations, par la pente à l'origine du moment de torsion, par la variation de rigidité du matériau et par la réponse en temps.

### 2.6.3 Le modèle à cinq paramètres

Afin de faire apparaître la dépendance en temps du moment de torsion  $M$  et de la force normale  $N$ , on peut ajouter en parallèle au modèle à trois paramètres, un modèle de Maxwell. On obtient le modèle à cinq paramètres [Hausler & Sayir, 1995] de la figure 2.13.

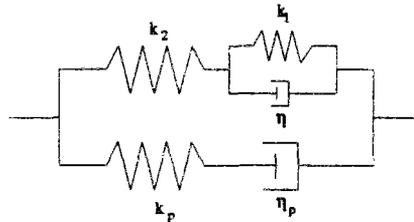


FIG. 2.13 - Le modèle à cinq paramètres

Dans le cas linéaire unidimensionnel, la contrainte  $\sigma_p$  ajoutée à  $\sigma$  (équation (I.66)) est définie par:

$$\text{I.70} \quad m_p \dot{\sigma}_p + \sigma_p = 2n_p \dot{\varepsilon} + 2c \varepsilon$$

On obtient, de la même façon, les expressions des moment et force additionnels  $M_p(t)$  et  $N_p(t)$ :

$$\text{I.71} \quad \begin{aligned} m_p \dot{M}_p + M_p &= n_{p0} \dot{\alpha} I_0 \\ m_p \dot{N}_p + N_p &= -m_p \dot{\alpha} M_p + \frac{\pi R_1^4}{4} (2r \alpha \dot{\alpha} + s \dot{\alpha}^2) \end{aligned}$$

où  $I_0$  est une fonctionnelle de  $\alpha(t)$ .

Le moment  $M_t(t)$  et la force normale  $N_t(t)$  résultants sont alors donnés par:

$$M_t(t) = M(t) + M_p(t) \quad \text{et} \quad N_t(t) = N(t) + N_p(t)$$

#### 2.6.4 Limitations

Ce modèle, bien que caractérisant le comportement viscoélastique non linéaire et le couplage entre la non linéarité et la réponse temporelle, présente les limitations suivantes:

- il y a 13 paramètres à identifier [Hausler & Sayir, 1995],
- le modèle n'a été validé que dans le cas de la torsion ce qui n'est pas suffisant pour établir sa validité pour d'autres modes expérimentaux,
- le passage petites déformations-grandes déformations est physiquement incorrect.

### 2.7 Conclusion

L'avantage de cette approche par variables d'état est le nombre limité de paramètres définissant le comportement viscoélastique. En revanche, ces modèles se divisent en deux groupes selon leurs limites. Les modèles rhéologiques sont purement unidirectionnels et s'appliquent plutôt à la viscoélasticité linéaire. Les modèles avec configuration intermédiaire sont pratiques dans le cas où une seule variable interne est suffisante, ce qui, comme constaté fréquemment d'un point de vue expérimental, est souvent insuffisant. La multiplicité des variables d'état, donc des configurations intermédiaires, complique énormément la démarche et rend l'identification expérimentale très périlleuse.

C'est pour ces raisons que nous adopterons une approche par potentiel pour développer notre modèle en prenant soin de limiter le nombre de paramètres à identifier.