

Chapitre 1

Approche macroscopique

1.1 Modèle de Biot

Nous proposons de développer les grandes lignes de la théorie de Biot qui a l'avantage de fournir une description générale et rigoureuse de la propagation des ondes dans les milieux poreux pour un squelette élastique. Nous présenterons une description du milieu poreux et nous donnerons une définition des paramètres utilisés couramment pour caractériser physiquement les matériaux poreux. Nous exposerons par la suite les hypothèses que suppose la théorie de Biot ainsi que les équations de propagation. Nous mettrons en évidence l'existence de deux ondes de compression (une lente, l'autre rapide) ainsi qu'une onde de cisaillement. Nous verrons par la suite dans quelle mesure les modèles à une onde (qui se propage dans le fluide) sont valables. Nous motiverons ainsi une modélisation acoustique des enrobés drainants par une approche microstructurale où le squelette est supposé rigide et cela sera le principal résultat recherché.

Nous n'insisterons pas sur l'établissement des lois de comportement de manière à introduire assez rapidement les équations de propagation. Le lecteur pourra se reporter aux références qui seront indiquées par la suite pour plus de détails.

1.1.1 Description d'un milieu poreux

Un milieu poreux saturé est constitué de deux phases. La première est l'espace poreux connecté saturé par un fluide et qui peut être le lieu de filtrations. Cet espace poreux connecté est supposé connexe. La seconde est la matrice qui se trouve définie comme l'espace complémentaire de l'espace poreux connecté. La matrice est composée de solides et éventuellement de pores. Toutefois, ceux-ci ne sont pas reliés à la porosité connectée et ne sont donc pas le lieu de filtrations. Cette porosité dite occluse est supposée négligeable et nous considérerons qu'elle fait partie de la matrice.

Nous représenterons le milieu poreux comme la superposition de deux milieux en interaction. Ainsi, dans un volume élémentaire $d\Omega$, entourant un point géométrique repéré par son vecteur position \mathbf{x} , coexistent deux particules (figure 1.1) :

- La particule squelette, constituée de la matrice et de l'espace poreux connecté, vidé de son fluide. Le squelette est le matériau que l'on obtiendrait en extrayant tout le fluide saturant de l'espace poreux connecté.

- La particule fluide, constituée du fluide saturant l'espace poreux connecté. Nous verrons par la suite, qu'à l'échelle macroscopique choisie pour décrire les phénomènes, ces deux milieux peuvent être considérés comme continus, c'est à dire que toutes les variables définies sur ces deux milieux varient peu entre deux points voisins.

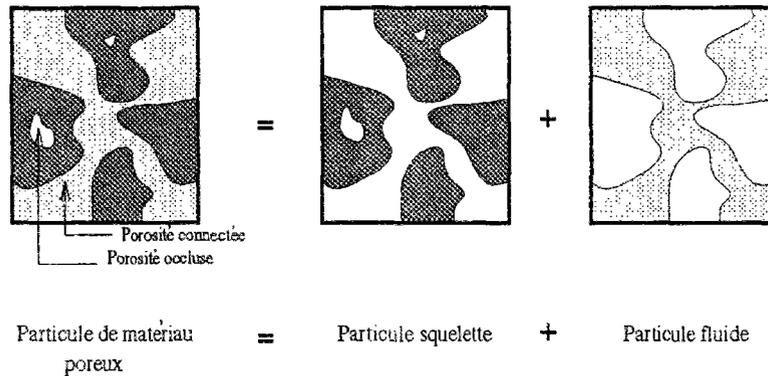


FIG. 1.1 - *Milieu poreux considéré comme la superposition de deux milieux*

1.1.2 Paramètres macroscopiques caractérisant le milieu poreux

La littérature met en évidence l'existence de trois paramètres (porosité, tortuosité et résistance au passage de l'air) susceptibles de caractériser le milieu poreux. Ceux-ci nous seront utiles également lorsque nous aborderons l'approche microscopique. Aussi, nous proposons de les développer en précisant leurs significations physiques et en présentant quelques techniques de mesures. Nous considérons que les pores sont saturés par de l'air et nous préférons présenter la perméabilité relative à travers la résistance au passage de l'air qui est souvent utilisée pour modéliser les propriétés acoustiques de milieux poreux.

◇ Porosité

La porosité notée Ω , est par définition le rapport du volume des vides au volume total de l'éprouvette. Cette grandeur peut être mesurée [Beranek, 1942] à l'aide d'une procédure qui repose sur les propriétés d'un gaz parfait à température constante. Ce système consiste à insérer l'éprouvette de volume total V_t (ayant pour composante V_a pour la partie fluide et V_s pour la matrice) dans un container de volume $V_t + V_o$ (figure 1.2). Le volume résiduel V_o est connu et on modifie mécaniquement le volume de l'ensemble à l'aide d'un piston tout en mesurant la pression résultante. Du rapport de la variation de volume ΔV par la variation de pression ΔP , la loi de Boyle nous permet de calculer le volume d'air dans le container, et donc le volume de l'air saturant le matériau poreux. Connaissant le volume total de l'éprouvette, la porosité peut être calculée.

Champoux [Champoux *et al.*, 1991] enrichit cette technique en mesurant les variations de pression à l'aide de transducteurs sensibles aux faibles perturbations, et en contrôlant minutieusement la variation de volume ΔV . Il obtient ainsi rapidement une estimation de la porosité avec une erreur inférieure à 1% pour une large gamme de matériaux et de porosités.

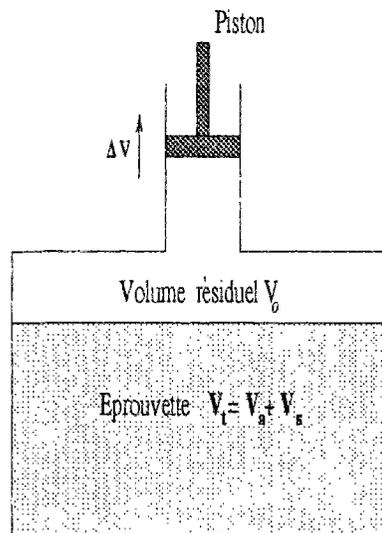


FIG. 1.2 - Mesure de la porosité

◇ Tortuosité

La tortuosité notée q , k_s ou α ($q^2 = \alpha$) selon les auteurs (appelée aussi facteur de forme de la structure et noté K dans la modélisation phénoménologique) est introduite pour des raisons de nature très différente. La première de nature géométrique est liée au caractère sinueux du réseaux poreux qui fait que les

vitesse microscopiques des différents points dans cet espace ont des directions très distinctes (figure 1.3-a). La seconde raison se manifeste même quand le réseau ne présente pas de courbure et est due à la nature visqueuse de l'écoulement de l'air.

Ainsi dans une même section le module de la vitesse est relativement important au centre et nul au bord (figure 1.3-b). De façon à prendre en compte explicitement le changement d'orientation de pore à section uniforme, Attenborough [Attenborough, 1982] définit la tortuosité comme étant le rapport de la longueur totale du pore par l'épaisseur de l'éprouvette (lorsqu'il s'agit d'un milieu poreux constitué de pores identiques). Ainsi pour un milieu constitué de pores identiques et parallèles inclinés d'un angle θ par rapport à la normale de la surface, la tortuosité est égale à $1/\cos \theta$. Pour des géométries plus complexes le concept de tortuosité doit être généralisé. Johnson [Johnson *et al.*, 1982] [Johnson *et al.*, 1986] [Johnson *et al.*, 1987] dans le cadre de la théorie de Biot propose une évaluation de cette quantité, et montre qu'il s'agit d'une grandeur purement géométrique indépendante de la densité de fluide et de solide. Utilisant les travaux de Brown [Brown, 1980], il en déduit une procédure expérimentale permettant de mesurer la tortuosité par une technique de conductivité électrique. A ce propos, nous pouvons également nous reporter aux travaux de Walsh [Walsh *et al.*, 1984], Carman [Carman, 1961], Champoux [Champoux *et al.*, 1991].

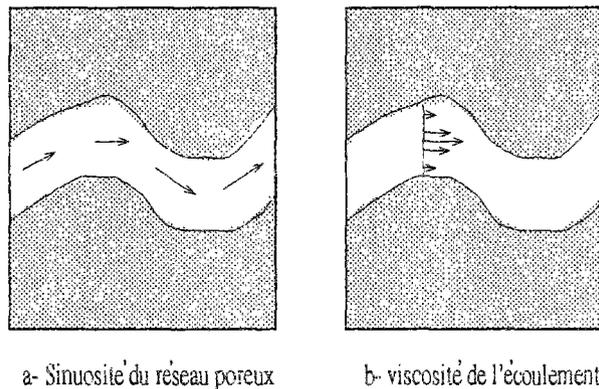


FIG. 1.3 - Notion de tortuosité

◇ Résistance au passage de l'air

Considérons une éprouvette de surface S et d'épaisseur E_p (figure 1.4). Soit Q le flux d'air traversant l'éprouvette soumise à une différence de pression ΔP . L'ISO (DIS 46-38) propose comme définition de la résistance à l'écoulement la quantité $\Delta P/(Q/S)$. En introduisant la vitesse moyenne $u = Q/S$, nous définissons alors la résistance au passage de l'air par unité de longueur que nous noterons R_s :

$$R_s = \frac{1}{E_p} \frac{\Delta P}{u} \quad (1.1)$$

L'écoulement de l'air dans un milieu poreux homogène et isotrope peut être également décrit par la loi de Darcy. En notant κ la perméabilité intrinsèque et η le coefficient de viscosité, celle-ci s'écrit :

$$u = \frac{\kappa \Delta P}{\eta E_p} \quad (1.2)$$

R_s est donc lié au coefficient de viscosité de l'air et à la perméabilité κ intrinsèque par la relation :

$$R_s = \frac{\eta}{\kappa} \quad (1.3)$$

Notons d'ailleurs que la résistance au passage de l'air n'est rien d'autre que l'inverse de la perméabilité hydraulique \mathcal{K} utilisée en mécanique des milieux poreux.

On distingue deux types de techniques pour mesurer la résistance au passage de l'air : Les méthodes directes et les méthodes comparatives. Les méthodes directes consistent à mesurer séparément le saut de pression et le flux d'air et à en calculer le rapport afin d'en déduire R_s . Les systèmes décrits par Morse [Morse *et al.*, 1941] et Brown [Brown *et al.*, 1942] sont de ce type.

Les techniques comparatives utilisent une résistance au passage de l'air calibrée placée en série avec l'échantillon à tester. Si le flux d'air est constant à travers la ligne, le rapport des sauts de pression des éléments de la ligne est égal au rapport des résistances. La valeur de la résistance calibrée peut être obtenue par des modèles théoriques précis ou encore par des mesures directes. Les variations de pression sont mesurées à l'aide de manomètres [Gemant, 1941] ou encore de transducteurs tandis que le flux est maintenu stable en utilisant un contrôleur électronique de flux [Stinson *et al.*, 1988]. L'utilisation de composants électroniques a l'avantage de fournir rapidement des résultats précis.

1.1.3 Ondes de Biot

◇ Hypothèses

Décrire le milieu de manière continue signifie que les propriétés physiques varient de manière continue d'un point à un autre. Appliquer les concepts de

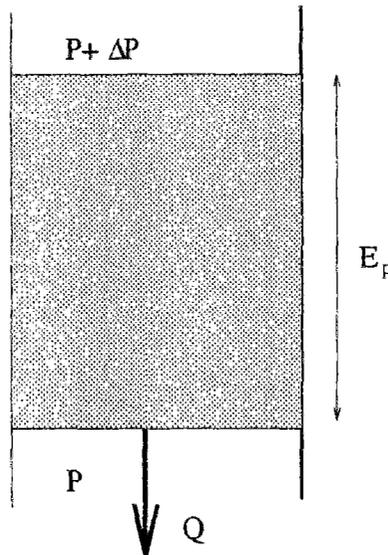


FIG. 1.4 - Résistance à l'écoulement de l'air

la Mécanique des Milieux Continus aux milieux poreux macroscopiques consiste donc à n'étudier que les basses fréquences pour lesquelles les dimensions des pores où s'effectue l'écoulement sont très petites devant la longueur d'onde. Nous obtenons alors un comportement macroscopiquement homogène insensible aux discontinuités microscopiques. Nous supposons de petites perturbations aussi bien pour le squelette que pour le fluide en considérant une matrice élastique, isotrope et des dissipations d'origines visqueuses uniquement.

◇ Equations de propagation

Les équations de propagation sont données par Biot [Biot, 1956]. Elles s'obtiennent en reportant les relations constitutives reliant les contraintes aux déformations dans les équations du mouvement [Bourbié, Coussy, Zinszner, 1986]:

$$\overrightarrow{\text{grad}} (P \operatorname{div} \mathbf{u} + Q \operatorname{div} \mathbf{U}) - \mu \overrightarrow{\text{rot}} \overrightarrow{\text{rot}} \mathbf{u} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{11} \mathbf{u} + \rho_{12} \mathbf{U}) + b \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \mathbf{U}) \quad (1.4)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} (Q \operatorname{div} \mathbf{u} + R \operatorname{div} \mathbf{U}) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\rho_{12} \mathbf{u} + \rho_{22} \mathbf{U}) - b \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \mathbf{U}) \quad (1.5)$$

Les quantités \mathbf{u} et \mathbf{U} sont respectivement les vecteurs déplacement moyen du squelette, de l'air et μ le module de cisaillement classique. P , Q et R désignent les coefficients d'élasticité de Biot. Ils s'expriment en fonction des modules d'incompressibilité du squelette K_o , de la matrice K_s et du fluide K_{fl} :

$$P = \frac{(1 - \Omega)[1 - \Omega - \frac{K_o}{K_s}]K_s + \Omega \frac{K_s}{K_{fl}} K_o}{1 - \Omega - \frac{K_o}{K_s} + \Omega \frac{K_s}{K_{fl}}} + \frac{4}{3}\mu \quad (1.6)$$

$$Q = \frac{[1 - \Omega - \frac{K_o}{K_s}]\Omega K_s}{1 - \Omega - \frac{K_o}{K_s} + \Omega \frac{K_s}{K_{fl}}} \quad (1.7)$$

$$R = \frac{\Omega^2 K_s}{1 - \Omega - \frac{K_o}{K_s} + \Omega \frac{K_s}{K_{fl}}} \quad (1.8)$$

Les coefficients ρ_{11} , ρ_{12} et ρ_{22} s'expriment en fonction des masses volumiques du fluide ρ_f , et de la matrice ρ_s :

$$\rho_{11} = (1 - \Omega)\rho_s + \Omega\rho_f(k_s - 1) \quad (1.9)$$

$$\rho_{22} = \Omega\rho_f k_s \quad (1.10)$$

$$\rho_{12} = \Omega\rho_f(1 - k_s) \quad (1.11)$$

Le coefficient b s'exprime en fonction de la perméabilité relative à l'air :

$$b = \frac{\Omega^2}{\mathcal{K}(\omega)} \quad (1.12)$$

Cette quantité dépend ici de la fréquence. Il s'agit d'une grandeur statique uniquement pour un écoulement de type de type Poiseuille qui n'est possible que pour les basses fréquences ou encore pour un nombre de Reynolds inférieur à 5772 [Huerre, 1992]. Biot met en évidence de manière qualitative le caractère dynamique de la perméabilité relative en corrigeant le coefficient de viscosité par l'introduction d'un facteur multiplicatif \mathcal{F} , fonction de la fréquence. Cette fonction est obtenue par des considérations à l'échelle du pore, en comparant une quantité physique représentant le rapport de la contrainte de cisaillement appliquée sur les parois du pore par la vitesse de filtration moyenne pour un écoulement

oscillatoire et pour un écoulement de Poiseuille. Biot calcule cette fonction pour une section circulaire uniforme de rayon r_p et propose la formulation suivante lorsqu'il s'agit d'une dépendance temporelle de type $e^{i\omega t}$:

$$\mathcal{F}(\omega) = -\frac{1}{4} \frac{r_p \left[\frac{-i\omega\rho_f}{\eta} \right]^{1/2} \frac{J_1 \left(r_p \left[\frac{-i\omega\rho_f}{\eta} \right]^{1/2} \right)}{J_0 \left(r_p \left[\frac{-i\omega\rho_f}{\eta} \right]^{1/2} \right)}}{1 - \frac{2}{r_p \left[\frac{-i\omega\rho_f}{\eta} \right]^{1/2} \frac{J_1 \left(r_p \left[\frac{-i\omega\rho_f}{\eta} \right]^{1/2} \right)}{J_0 \left(r_p \left[\frac{-i\omega\rho_f}{\eta} \right]^{1/2} \right)}}} \quad (1.13)$$

J_0 et J_1 sont les fonctions de Bessel d'ordre 0 et 1. En corrigeant la viscosité, la perméabilité devient une grandeur dynamique pour les hautes fréquences :

$$\mathcal{K}(\omega) = \frac{\kappa}{\eta \mathcal{F}(\omega)} \quad (1.14)$$

Bien entendu, pour les basses fréquences, la fonction \mathcal{F} tend vers 1 et on retrouve la définition de la perméabilité statique.

Notons tout de même que la dimension caractéristique du pore (r_p) est une grandeur microscopique qui peut être déduite de grandeurs macroscopiques (perméabilité intrinsèque et porosité). Pour conclure sur cet aspect dynamique de la perméabilité, il convient de souligner qu'il peut être mis en évidence de manière rigoureuse par les méthodes d'homogénéisation reposant sur la périodicité de la structure microscopique [Lévy, 1978] [Lévy, 1979].

◇ Ondes de compression

Examinons dans un premier temps des ondes irrotationnelles telles que les déplacements dérivent d'un potentiel scalaire :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\text{grad}} \Phi_1 \\ \overrightarrow{\text{grad}} \Phi_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi \quad (1.15)$$

En injectant le vecteur potentiel dans les équations du mouvement (1.4) et (1.5), nous obtenons une équation de propagation :

$$\underline{\underline{R}} \nabla^2 \Phi = \underline{\underline{A}} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \underline{\underline{M}} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (1.16)$$

Les matrices $\underline{\underline{R}}$, $\underline{\underline{M}}$ et $\underline{\underline{A}}$ sont respectivement les matrices de rigidité, de masse et d'atténuation. Elles sont données par :

$$\underline{\underline{R}} = \begin{pmatrix} P & Q \\ Q & R \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

$$\underline{\underline{M}} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{12} & \rho_{22} \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} b & -b \\ -b & b \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

Nous nous intéressons à des ondes harmoniques planes de pulsation ω et de constante de propagation k se propageant dans la direction Ox . Elles s'écrivent :

$$\Phi_1 = \Phi_{1o} e^{-i(kx - \omega t)} \quad (1.20)$$

$$\Phi_2 = \Phi_{2o} e^{-i(kx - \omega t)} \quad (1.21)$$

Φ_{1o} et Φ_{2o} sont des constantes. On reporte les expressions (1.20) et (1.21) des potentiels dans le système d'équations de propagation (1.16). Nous obtenons un système à deux équations pour Φ_{1o} et Φ_{2o} :

$$(-k^2 \underline{\underline{R}} - i\omega \underline{\underline{A}} + \omega^2 \underline{\underline{M}}) \Phi = \mathbf{0} \quad (1.22)$$

Ce système a un déterminant nul afin d'éviter une solution triviale et donne l'équation de dispersion liant k^2 à ω :

$$k^4(RP - Q^2) - k^2[\omega^2(P\rho_{22} + R\rho_{11} - 2Q\rho_{12}) - i\omega b(P + R + 2Q)] + \omega^4(\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2) - i\omega^3 b(\rho_{11} + \rho_{22} + 2\rho_{12}) = 0 \quad (1.23)$$

Nous obtenons ainsi pour k deux solutions possibles. Celles-ci sont complexes en raison des phénomènes d'atténuation. Deux ondes peuvent donc se propager dans le matériau aussi bien dans la phase fluide que dans la phase solide. Nous noterons respectivement k_R , k_L les constantes de propagation associées à l'onde dont la vitesse de phase est la plus grande, dite de première espèce et à l'onde lente de seconde espèce dont la vitesse est la plus faible. On montre [Biot, 1956] que lorsque le couplage entre la matrice et le fluide est important, les mouvements correspondent à des déplacements du squelette et du fluide en phase et

de même amplitude pour l'onde rapide et en opposition de phase pour l'onde lente. L'onde de seconde espèce est donc fortement amortie par la viscosité. Cependant si le couplage est suffisamment faible, on pourra estimer que l'une des deux ondes se propage dans le squelette et l'autre dans le fluide. Zwikker et Kosten [Zwikker *et al.*, 1949] évoquent une situation intermédiaire caractérisée par un découplage partiel. Cet état intermédiaire est caractérisé par une situation où la densité du squelette est plus importante que celle du fluide saturant. Lorsque que la matrice se met en vibration, celle-ci entraîne l'air saturant dans son mouvement et l'onde se propage dans les deux phases. Cependant, la faible densité de l'air l'empêche de transmettre son mouvement à la phase solide et dans ce cas l'onde se propage uniquement dans la phase fluide.

Une onde va donc se propager dans les phases solide et fluide tandis que l'autre se propage principalement dans le fluide.

Ils proposent ainsi une fréquence caractéristique f_c au dessus de laquelle le découplage partiel se manifeste :

$$f_c = \frac{\Omega^2 R_s}{2\pi(1 - \Omega)\rho_s} \quad (1.24)$$

Notons que ce découplage entre la phase solide et la phase fluide est évoqué également dans les méthodes l'homogénéisation [Dupin et Lévy, 1980] qui indiquent pour densité massique du fluide petite devant celle des parties solides que la filtration acoustique de l'air saturant se fait comme si la matrice était rigide.

◇ Ondes de cisaillement

On considère une onde isovolumique telle que :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{U} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overrightarrow{\text{rot}} \Psi_1 \\ \overrightarrow{\text{rot}} \Psi_2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{\text{rot}} \Psi \quad (1.25)$$

Ψ est un vecteur potentiel. Les équations de propagation (1.4) (1.5) deviennent pour des ondes harmoniques :

$$\nabla^2 \Psi_1 + \frac{\omega^2}{\mu} \frac{\tilde{\rho}_{11}\tilde{\rho}_{22} - \tilde{\rho}_{12}^2}{\tilde{\rho}_{22}} \Psi_1 = 0 \quad (1.26)$$

$$\Psi_1 \tilde{\rho}_{12} + \Psi_2 \tilde{\rho}_{22} = 0 \quad (1.27)$$

où nous avons posé :

$$\tilde{\rho}_{11} = \rho_{11} - \frac{ib}{\omega} \quad (1.28)$$

$$\tilde{\rho}_{22} = \rho_{22} - \frac{ib}{\omega} \quad (1.29)$$

$$\tilde{\rho}_{12} = \rho_{12} + \frac{ib}{\omega} \quad (1.30)$$

Les déplacements du fluide et du solide sont proportionnels l'un à l'autre. Le fluide ne reprenant pas les cisaillements, il n'influence donc l'onde que par des effets d'inertie.

1.1.4 Impédance de surface

Nous recherchons l'impédance de surface d'un matériaux poreux saturé par de l'air, d'épaisseur E_p et reposant sur une surface rigide. L'impédance est par définition le rapport de la pression par la composante normale de vitesse au niveau de la surface du matériau. On soumet ce matériau à une onde plane en incidence normale suivant la direction $0x$ (figure 1.5).

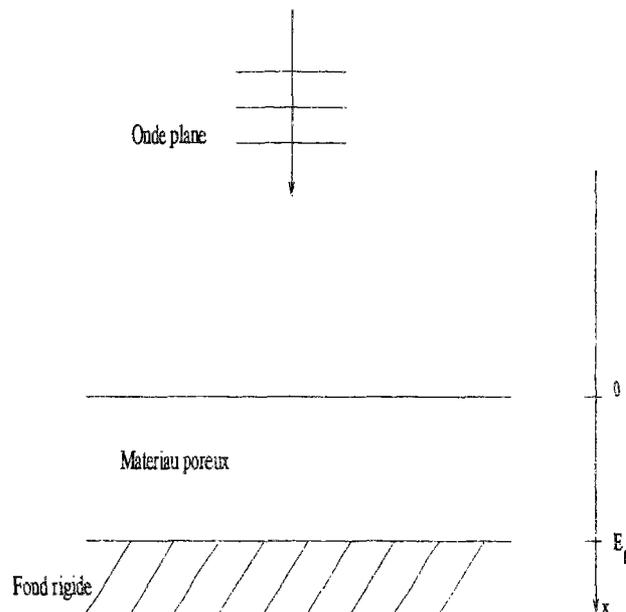


FIG. 1.5 - *Matériau poreux soumis à une onde plane en incidence normale*

Les symétries du problème nous permettent de nous affranchir de l'onde de cisaillement qui ne se propage pas. Nous n'envisagerons ainsi que la propagation

des ondes de compression dans la direction de l'axe $0x$. De façon à situer dans quel milieu les ondes se propagent Allard [Allard *et al.*, 1990] introduit le rapport des déplacements de l'air et de la phase solide créés par le passage des ondes:

$$r = \frac{U_x}{u_x} \quad (1.31)$$

U_x et u_x sont respectivement les composantes suivant l'axe $0x$ des vecteurs déplacements du fluide \mathbf{U} et du squelette \mathbf{u} . Pour des mouvements harmoniques avec une dépendance temporelle $e^{i\omega t}$, ces composantes sont données par :

$$u_x = u_o e^{-i(kx-\omega t)} \quad (1.32)$$

$$U_x = U_o e^{-i(kx-\omega t)} \quad (1.33)$$

u_o et U_o sont des constantes.

En reportant les écritures des déplacements du fluide (1.33) et du solide (1.32) dans les équations de propagation (1.4) et (1.5), nous obtenons une nouvelle formulation pour le rapport r :

$$r = \frac{\omega^2 \rho_{12} + i b \omega - k^2 Q}{k^2 R - \omega^2 \rho_{22} + i b \omega} \quad (1.34)$$

Allard introduit également les impédances caractéristiques définies par le rapport force/vitesse par unité de surface de matériau pour le squelette Z_1 et pour l'air Z_2 . Elles s'obtiennent en utilisant les relations constitutives qui se formulent de la manière suivante [Allard *et al.*, 1990]:

$$\underline{\underline{\tau}}^s = (P - 2\mu) \operatorname{div} \mathbf{u} \underline{\underline{1}} + Q \operatorname{div} \mathbf{U} \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\varepsilon}} \quad (1.35)$$

$$\underline{\underline{\tau}}^f = -\Omega p \underline{\underline{1}} = Q \operatorname{div} \mathbf{u} \underline{\underline{1}} + R \operatorname{div} \mathbf{U} \underline{\underline{1}} \quad (1.36)$$

$\underline{\underline{\tau}}^s$ et $\underline{\underline{\tau}}^f$ désignent respectivement la contrainte associée au squelette et à l'air saturant. p est la pression acoustique dans le matériau poreux. En notant $\mathbf{n} = (-1, 0, 0)$ la normale extérieure à la surface supérieure du milieu poreux, les forces par unité de surface qui s'exercent sur le squelette F^s et sur le fluide F^f sont données par :

$$\mathbf{F}^s = \underline{\underline{\tau}}^s \cdot \mathbf{n} \quad \text{et} \quad \mathbf{F}^f = \underline{\underline{\tau}}^f \cdot \mathbf{n} \quad (1.37)$$

c'est à dire :

$$F^s = -\tau_{11}^s(x) \quad \text{et} \quad F^f = -\tau_{11}^f(x) \quad (1.38)$$

A partir de l'écriture des contraintes (1.35), (1.36) et de la définition des forces (1.38), nous obtenons pour des ondes harmoniques :

$$F^s = ik [Pu_x + QU_x] \quad \text{et} \quad F^f = ik [Qu_x + RU_x] \quad (1.39)$$

Les vitesses s'écrivent :

$$\dot{u}_x = i\omega u_x \quad \text{et} \quad \dot{U}_x = i\omega U_x \quad (1.40)$$

Moyennant l'introduction du rapport des déplacements de l'air et du solide r , les impédances Z_1 et Z_2 se formulent de la manière suivante :

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{F^s}{\dot{u}_x} \\ &= \frac{k}{\omega} (P + Qr) \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$\begin{aligned} Z_2 &= \frac{F^f}{\dot{U}_x} \\ &= \frac{k}{\omega} \left(R + \frac{Q}{r} \right) \end{aligned} \quad (1.42)$$

En substituant k à k_R et k_L dans les équations (1.34), (1.41) et (1.42), nous obtenons r_R , Z_1^R et Z_2^R associés à l'onde rapide et r_L , Z_1^L , Z_2^L associés à l'onde lente.

Lorsque l'on s'intéresse à un milieu poreux reposant sur un fond rigide, les déplacements du squelette et de l'air sont données par :

$$u(x) = u_i^L e^{-ik_L x} + u_r^L e^{ik_L x} + u_i^R e^{-ik_R x} + u_r^R e^{ik_R x} \quad (1.43)$$

$$U(x) = r_L [u_i^L e^{-ik_L x} + u_r^L e^{ik_L x}] + r_R [u_i^R e^{-ik_R x} + u_r^R e^{ik_R x}] \quad (1.44)$$

où la dépendance en temps $e^{i\omega t}$ est sous entendue. Les déplacements u_i^L , u_r^L , u_i^R et u_r^R introduits sont associés aux ondes lentes (exposant L) et rapides (exposant R) pour des ondes incidentes (indice i) ou réfléchies (indice r). Nous en déduisons les vitesses du squelette et du fluide :

$$\dot{u}(x) = V_i^L e^{-ik_L x} + V_r^L e^{ik_L x} + V_i^R e^{-ik_R x} + V_r^R e^{ik_R x} \quad (1.45)$$

$$\dot{U}(x) = r_L [V_i^L e^{-ik_L x} + V_r^L e^{ik_L x}] + r_R [V_i^R e^{-ik_R x} + V_r^R e^{ik_R x}] \quad (1.46)$$

où les quantités V_i^L , V_r^L , V_i^R et V_r^R représentent les vitesses du squelette associées aux ondes incidentes (indice i), réfléchies (indice r) pour les ondes rapides

(exposant R) et lentes (exposant L). Ces vitesses sont associées aux déplacements par :

$$V_a^b = i \omega u_a^b \quad \text{avec } a = i, r \text{ et } b = L, R \quad (1.47)$$

Les déplacements des parties solides (1.43) et du fluide (1.44) sont reportés dans les écritures des contraintes τ_{11}^s et τ_{11}^f obtenues à partir des équations (1.35) et (1.36). Nous introduisons les impédances caractéristiques $Z_1^R, Z_1^L, Z_2^R, Z_2^L$ obtenues à partir des définitions (1.41) et (1.42) pour des ondes rapides et lentes, puis en exprimant les déplacements en fonction des vitesses associées (1.47), les contraintes deviennent :

$$\begin{aligned} \tau_{11}^s(x) = & -Z_1^L [V_i^L e^{-ik_L x} - V_r^L e^{ik_L x}] \\ & - Z_1^R [V_i^R e^{-ik_R x} - V_r^R e^{ik_R x}] \end{aligned} \quad (1.48)$$

$$\begin{aligned} \tau_{11}^f(x) = & -Z_2^L r_L [V_i^L e^{-ik_L x} - V_r^L e^{ik_L x}] \\ & - Z_2^R r_R [V_i^R e^{-ik_R x} - V_r^R e^{ik_R x}] \end{aligned} \quad (1.49)$$

En notant p^s et v^s la pression et la vitesse de l'air au voisinage de la surface supérieure du matériau poreux (figure 1.5), les conditions aux limites en $x = 0$ se formulent [Deresiewicz, 1963] :

- Continuité des contraintes :

$$\tau_{11}^f(0) = -\Omega p(0) = -\Omega p^s \quad (1.50)$$

$$\tau_{11}^s(0) = -(1 - \Omega)p^s \quad (1.51)$$

- Continuité des vitesses :

$$v^s = \Omega \dot{U}_x(0) + (1 - \Omega) \dot{u}_x(0) \quad (1.52)$$

- Rigidité du fond ($x = E_p$):

$$\dot{U}(E_p) = \dot{u}(E_p) = 0 \quad (1.53)$$

L'impédance de surface Z est donnée par :

$$Z^s = \frac{p^s}{v^s} \quad (1.54)$$

Ces conditions aux limites sont appliquées aux contraintes (1.48), (1.49) et aux vitesses (1.45) (1.46) en substituant la pression p^s par $Z^s v^s$:

$$-(1 - \Omega)Z^s v^s = -Z_1^L V_i^L (1 + e^{-2ik_L E_p}) - Z_1^R V_i^R (1 + e^{-2ik_R E_p}) \quad (1.55)$$

$$\begin{aligned} v^s &= V_i^L (1 - e^{-2ik_L E_p}) (\Omega r_L + 1 - \Omega) \\ &+ V_i^R (1 - e^{-2ik_R E_p}) (\Omega r_R + 1 - \Omega) \end{aligned} \quad (1.56)$$

$$\begin{aligned} -\Omega Z^s v^s &= -Z_2^L r_L V_i^L (1 + e^{-2ik_L E_p}) \\ &- Z_2^R r_R V_i^R (1 + e^{-2ik_R E_p}) \end{aligned} \quad (1.57)$$

Nous obtenons un système à trois équations (1.55)-(1.57) pour les inconnues v^s , V_i^L et V_i^R . Pour éviter une solution triviale, le déterminant de ce système doit être nul et son calcul nous donne l'écriture de l'impédance de surface :

$$\begin{aligned} Z^s &= \frac{p^s}{v^s} \\ &= -i \frac{(Z_1^L Z_2^R r_R - Z_2^L Z_1^R r_L)}{D} \end{aligned} \quad (1.58)$$

avec un dénominateur D donné par :

$$\begin{aligned} D &= [-(1 - \Omega) Z_2^L r_L + \Omega Z_1^L] [r_R \Omega + (1 - \Omega)] \tan k_R E_p \\ &+ [(1 - \Omega) Z_2^R r_R - \Omega Z_1^R] [r_L \Omega + (1 - \Omega)] \tan k_L E_p \end{aligned} \quad (1.59)$$

Allard traite l'exemple d'une mousse plastique à forte porosité reposant sur un sol dur et calcule l'impédance de surface en prenant en considération les deux ondes de compression, puis uniquement l'onde lente qui se propage essentiellement dans l'air au dessus de la fréquence critique de découplage partiel. Les résultats ne sont pas modifiés pour toutes les fréquences au dessus f_c ce qui signifie que seule l'onde lente se propageant dans l'air contribue à la propagation du son dans le matériau. Les modèles à une onde peuvent donc s'appliquer à des matériaux à structure souple mais à faible résistance au passage de l'air ou encore à structure rigide ($\mathbf{u} = 0$) pour lesquels les informations sur les paramètres de rigidité ne sont plus indispensables.

Dans ces conditions le nombre d'onde est donnée par l'équation de propagation (1.5) en prenant $\mathbf{u} = 0$:

$$k_L^2 R U_x = \omega^2 \rho_{22} U_x - i b \omega U_x \quad (1.60)$$

soit :

$$k_L^2 = \frac{1}{R} [\omega^2 \rho_{22} - i b \omega] \quad (1.61)$$

où rappelons le $\rho_{22} = \Omega \rho_f k_s$, et $b = \Omega^2 / \mathcal{K}$ ou encore $b = \Omega^2 R_s \mathcal{F}$. Le coefficient de Biot R est déduit de la définition (1.8). Pour un squelette rigide, c'est à dire K_s très grand, il devient :

$$R = \Omega K_{fl} \quad (1.62)$$

L'impédance mécanique Z_2^L est déduite de (1.42) en prenant $1/r = 0$:

$$Z_2^L = \frac{k_L}{\omega} R \quad (1.63)$$

Les écritures des vitesses (1.46) et des contraintes (1.49) associées au fluide se simplifient :

$$\dot{U}(x) = U_i^L e^{-ik_L x} + U_r^L e^{ik_L x} \quad (1.64)$$

$$\tau_{11}^f(x) = -Z_2^L [U_i^L e^{-ik_L x} - U_r^L e^{ik_L x}] \quad (1.65)$$

Les quantités U_i^L , U_r^L , représentent les vitesses associées respectivement à l'onde incidente et à l'onde réfléchie pour des mouvements lents.

Les conditions aux limites (1.50)-(1.53) deviennent :

- Continuité des contraintes :

$$\tau_{11}^f(0) = -\Omega p(0) = -\Omega p^s \quad (1.66)$$

- Continuité des vitesses :

$$v^s = \Omega \dot{U}_x(0) \quad (1.67)$$

- Rigidité du fond :

$$\dot{U}(E_p) = 0 \quad (1.68)$$

Cette condition de rigidité nous permet d'exprimer l'amplitude de l'onde réfléchie en fonction de l'amplitude de l'onde incidente :

$$U_r^L = -U_i^L e^{-i2k_L E_p} \quad (1.69)$$

Nous en déduisons les écritures de la pression p^s et de la vitesse v^s :

$$p^s = \frac{Z_2^L}{\Omega} U_i^L [1 + e^{-ik_L E_p}] \quad (1.70)$$

$$v^s = \Omega U_i^L [1 - e^{-ik_L E_p}] \quad (1.71)$$

L'impédance de surface définie par (1.54) se simplifie pour un squelette rigide :

$$Z^s = -i \frac{Z_2^L}{\Omega^2} \frac{1}{\tan k_L E_p} \quad (1.72)$$

Pour résumer et utilisant des paramètres qui caractérisent physiquement le milieu poreux, l'impédance de surface est donnée par :

$$Z^s = -i \frac{k_L K_{fl}}{\Omega \omega} \cot g k_L E_p \quad (1.73)$$

avec :

- k_L : nombre d'onde ($k_L^2 = \frac{\omega}{K_{fl}} [\omega \rho_f k_s - i \Omega R_s \mathcal{F}]$)
- Ω : porosité
- R_s : Résistance au passage de l'air
- k_s : tortuosité
- K_{fl} : module d'incompressibilité de l'air
- ρ_f : masse volumique de l'air
- ω : pulsation ($\omega = 2\pi f$ où f est la fréquence)
- E_p : épaisseur de milieu poreux
- \mathcal{F} : fonction corrigeant la viscosité pour les hautes fréquences. Pour des pores de section circulaire, \mathcal{F} est donné par :

$$\mathcal{F}(\lambda) = -\frac{\lambda \sqrt{-i} G(\lambda \sqrt{-i})}{4 [1 - 2 G(\lambda \sqrt{-i}) / \lambda \sqrt{-i}]} \quad (1.74)$$

où nous avons noté $G = J_1/J_0$ et $\lambda = r_p (\omega \rho_f / \eta)^{1/2}$. r_p , rayon de la section peut être relié aux grandeurs macroscopiques caractérisant physiquement le matériau par la relation suivante [Zwikker *et al.*, 1949]:

$$r_p^2 = \frac{8k_s \eta}{\Omega R_s} \quad (1.75)$$

Il suffit donc de connaître la nature du fluide saturant (module d'incompressibilité, masse volumique) ainsi que les caractéristiques physiques (épaisseur, porosité, tortuosité et résistance au passage de l'air) du milieu poreux pour en déduire les propriétés acoustiques. Le modèle de Biot-Allard représente donc une simplification considérable de la théorie générale lorsque le matériau est supposé à squelette rigide.

1.2 Modèle phénoménologique

Ce modèle s'inscrit dans le cadre de l'approche macroscopique et consiste à assimiler le milieu poreux à un fluide homogène, isotrope, compressible et dissipatif [Hamet, 1988] [Hamet, 1992]. Nous proposons de développer les grandes lignes de cette démarche.

Les dissipations considérées sont d'origine visqueuses et thermiques et traduisent les échanges énergétiques entre l'air saturant et le squelette. Le modèle utilise les paramètres macroscopiques introduits précédemment pour décrire physiquement le matériau poreux. Nous rappelons qu'il s'agit de la porosité Ω , de la résistance au passage de l'air R_s et de la tortuosité qui est notée K dans le modèle considéré.

Les équations fondamentales sont données par la conservation de la masse, la conservation de la quantité du mouvement et la relation de compressibilité, qui elle-même résulte de l'équation de conduction de la chaleur et de l'équation d'état. L'équation de propagation en est déduite [Annexe A]:

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad (1.76)$$

où p représente la pression acoustique. Le nombre d'onde k est défini par :

$$k = k_o \sqrt{K} \gamma \sqrt{1 - i \frac{f_\eta}{f}} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{1}{1 - i \frac{f_\tau}{f}}} \quad (1.77)$$

$k_o = \omega/c_o$, où c_o est la célérité du son à l'air libre. f_η et f_τ ont la dimension d'une fréquence et sont définis par :

$$f_\eta = \frac{R_s \Omega}{2 \pi \rho_o N_{pr}} \quad f_\tau = \frac{R_s}{2 \pi \rho_o K} \quad (1.78)$$

Pour une onde plane se propageant dans la direction des x croissants ($p = p_+ e^{ikx}$, $u = u_+ e^{ikx}$), l'impédance caractéristique est donnée par :

$$Z^c = \rho_o c_c \frac{1}{\Omega} \frac{K}{\gamma} \frac{\sqrt{1 - i \frac{f_\eta}{f}}}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{1}{1 - i \frac{f_\tau}{f}}}} \quad (1.79)$$

Le modèle met donc en évidence l'existence de deux fréquences caractéristiques f_η et f_τ ($f_\eta \ll f_\tau$) associées respectivement aux phénomènes visqueux et

thermiques. Ces quantités définissent trois domaines de fréquences :

- Le domaine des basses fréquences ($f < f_\eta$) où le processus est isotherme.
- Le domaine des hautes fréquences $f_\tau < f$ pour lequel le processus est adiabatique.
- Le domaine des fréquences intermédiaires ($f_\eta < f < f_\tau$) où le processus évolue entre les deux états.

Le nombre d'onde et l'impédance caractéristique sont suffisants pour obtenir l'impédance de surface d'un matériau poreux d'épaisseur donnée. La simplicité des résultats est tout à fait adapté aux optimisations dans la pratique et permet de traiter ce problème de manière analytique [Hamet, 1988].

1.3 Conclusion

Nous avons présenté deux théories modélisant la propagation des ondes dans un milieu poreux.

La première dite de Biot, considère que le squelette est élastique et fait l'hypothèse d'adiabaticité des transformations, ce qui permet de négliger les dissipations thermiques. Elle repose sur les principes de la mécanique des milieux continus et n'est valable que pour des longueurs d'ondes grandes devant les dimensions caractéristiques des conduits où s'effectue l'écoulement. Les paramètres utilisés sont la porosité, la résistance au passage de l'air et la tortuosité. Elle possède un domaine d'application plus large que les modèles proposés par les approches phénoménologiques ou microstructurelles (échelle du pore) car elle met en évidence la propagation de trois ondes (deux ondes de compression, une lente l'autre rapide et une onde de cisaillement).

L'originalité de cette modélisation réside principalement dans la prédiction de l'onde lente qui n'existe pas dans un milieu continu, isotrope, classique.

Une modélisation simplifiée ne retenant que l'onde lente a été suggérée pour des fréquences supérieures à la fréquence de découplage partiel entre le squelette et l'air saturant les pores. Au delà de cette fréquence, nous pouvons estimer que le squelette est rigide, si nous nous intéressons uniquement à la propagation du son dans le matériau. Dans ce cas, le squelette est immobile et les paramètres caractérisant la rigidité sont inutiles. Notons que les méthodes de l'homogénéisation qui reposent sur l'hypothèse d'une périodicité des solutions en utilisant une formulation asymptotique permettent de trouver des lois de comportements et des conclusions proches de celles que fournit la théorie de Biot [Dupin et Lévy, 1980] [Lévy, 1978].

Pour des matériaux poreux de type enrobés drainants de masse volumique 2.10^3 Kg/m^3 , de porosité 0.2 et de résistance au passage de l'air 200 KN s m^{-4} (choisie volontairement grande), la fréquence critique est égale à $0.79H_z$. Les pro-

priétés acoustiques des couches de roulement poreuses peuvent donc être établies à partir d'un modèle à une onde et en particulier par une approche microscopique où le squelette est supposé rigide pour le problème considéré. Nous développerons cette théorie dans le chapitre suivant.

La seconde théorie dite phénoménologique, suppose justement que la phase solide est rigide. Elle assimile le milieu poreux à un fluide compressible dissipatif et utilise pour décrire le matériau, quasiment les mêmes paramètres que le modèle de Biot. Cette modélisation a l'avantage de prendre en compte les dissipations thermiques qui jouent un rôle important pour le régime des hautes fréquences ($f > f_\tau$). Elle permet en outre, d'interpréter aisément les phénomènes mis en jeu et la simplicité des équations en fait un outil pratique pour un problème d'optimisation de l'absorption.

Cependant ces deux théories ne permettent pas de décrire finement les paramètres physiques, et de proposer des méthodes pour les mesurer. Pour cela, il est nécessaire d'aborder le problème à l'échelle du pore, en utilisant une approche microscopique. Nous verrons par la suite, que cette démarche introduit des paramètres supplémentaires qui enrichissent la description du réseau poreux et qui ne sont pas accessibles par une approche macroscopique.

Chapitre 2

Approche microscopique

S'inspirant des travaux de Rayleigh [Rayleigh, 1945], Zwikker et Kosten [Zwikker *et al.*, 1949] se sont intéressés à la propagation d'ondes acoustiques dans un milieu poreux constitué de pores identiques non connectés, parallèles, de section circulaire uniforme et perpendiculaires à la surface. Le squelette est supposé rigide et les propriétés acoustiques sont établies au niveau du pore. Zwikker et Kosten ont largement popularisé cette théorie. Il est vrai qu'un milieu poreux constitué de pores uniformes non connectés de section circulaire présente peu d'intérêt, mais ils estiment que le comportement devrait être similaire à celui de milieux plus complexes et par là même pourrait être amélioré après quelques modifications et réinterprétation de paramètres. Cette démarche repose sur la connaissance des caractéristiques acoustiques d'un guide d'onde de section circulaire. La solution exacte donnée par Kirchhoff [Kirchhoff, 1868] prend en compte les dissipations visqueuses et thermiques et reste valable quelque soit la fréquence ou le rayon de la section. Elle reste tout de même très compliquée pour de nombreuses applications. Zwikker et Kosten proposent une formulation approchée plus simple où les effets visqueux et thermiques sont traités séparément et résumés en terme de fonctions complexes de densité et de compressibilité. De nombreux auteurs ont depuis adopté cette théorie. Cependant cette approche n'a été justifiée qu'aux basses et hautes fréquences et le régime intermédiaire n'a pas pu être traité. Stinson [Stinson, 1991] montre que la solution exacte de Kirchhoff peut être réduite à la forme analytique donnée par Zwikker et Kosten en introduisant des simplifications appropriées à certains choix de rayons, de sections et de fréquences acoustiques. Il détermine ainsi de façon précise le régime dans lequel l'approche Zwikker et Kosten est valable.

D'autres traitements approximatifs ont été introduits. Ainsi Crandall [Crandall, 1926] considère la distribution des vitesses à travers une section lorsque la conductivité thermique est négligeable. Il obtient avec cette hypothèse un écoulement laminaire et les caractéristiques acoustiques peuvent être calculées. Daniels [Daniels, 1947] considère la conduction thermique dans un conduit