

Chapitre 2

Approche discrète

Nous proposons de consacrer ce chapitre à une étude de l'influence de la distribution de taille de pores sur les propriétés acoustiques des milieux poreux.

Ceux-ci sont en effet rarement constitués de pores de section constante, et sont plutôt l'objet de discontinuités de type étranglement ou encore "coude". Nous définissons ainsi une première catégorie de distribution, dite en série. Nous envisagerons une seconde où les pores ont des caractéristiques (physiques et acoustiques) différentes. Nous parlerons alors de distribution en parallèle.

Pour traiter cette analyse, nous utiliserons une modélisation relativement simple où le pore est assimilé à une série de conduits élémentaires de natures différentes.

Une approche similaire a été adoptée par Champoux et Stinson [Champoux *et al.*, 1992] qui définissent des fonctions complexes de densité et de compressibilité à l'échelle microscopique d'un conduit élémentaire et d'un pore, puis les généralisent à l'échelle macroscopique du milieu poreux en supposant que tous les pores sont identiques et que les effets associés aux discontinuités sont négligeables. Ces quantités sont sensées qualifier et quantifier complètement les propriétés acoustiques de milieux poreux. Ces auteurs proposent ainsi une formulation des paramètres caractérisant physiquement le milieu poreux qui prend en compte les changements de section le long du pore. Ils supposent alors que la pression est constante lorsque l'équation de continuité est intégrée (Hypothèse H1) et que le débit acoustique n'est pas modifié lorsque l'on considère l'équation du mouvement (Hypothèse H2). Ces hypothèses appliquées à l'échelle du pore, nous conduisent à introduire deux paramètres supplémentaires sensibles aux changements de section.

Notre approche s'inspire de cette modélisation. Nous ne travaillerons toutefois que dans le régime des hautes fréquences où l'épaisseur de la couche limite

visqueuse est inférieure aux dimensions transversales du pore. Nous considérons toutefois de grandes longueurs d'onde devant les dimensions caractéristiques du pore. Le problème est exprimé en terme de matrices de transfert reliant les pressions et vitesses moyennes de part et d'autre du matériau poreux. En utilisant un développement en puissance de $(k_o E_p)^{1/2}$ ($k_o = \omega/c_o$ est le nombre d'onde et E_p l'épaisseur du milieu poreux que l'on désire étudier), nous parvenons à enrichir l'approche de Champoux en tenant compte de l'influence des discontinuités et en introduisant deux paramètres supplémentaires qui caractérisent non seulement les changements de section, mais également l'ordre selon lequel les conduits élémentaires sont distribués. Nous montrons également que les hypothèses H1 et H2 ne sont plus valables au second ordre lorsque qu'elles s'appliquent à l'échelle d'un pore. Ces propos seront développés pour le modèle en série.

Celui-ci sera généralisé, par l'analyse du modèle en parallèle où le milieu poreux est constitué de pores de natures différentes. Nous tacherons d'en définir les propriétés acoustiques et de proposer de nouvelles formulations pour les paramètres physiques, qu'ils soient classiques ou supplémentaires.

Dans un premier temps, nous tacherons de définir la matrice de transfert d'un pore tortueux (§2.1). Celle-ci est obtenue en calculant pour chaque conduit élémentaire une matrice de transfert microscopique, par une intégration des équations de continuité et du mouvement sur le volume correspondant. Les discontinuités sont représentées de la même manière. La matrice recherchée est alors donnée par le produit des matrices élémentaires.

Les résultats établis dans cette première partie seront généralisés à l'échelle du matériau où tous les pores sont supposés identiques (§2.2). Nous tacherons d'identifier les paramètres classiques, ainsi que ceux liés à la distribution de taille de pores. L'expression de l'impédance de surface d'un matériau reposant sur un fond rigide sera alors proposée pour le régime des hautes fréquences, dans le cadre d'une distribution en série.

Une démarche similaire sera adoptée pour la distribution en parallèle où nous considérerons des pores de natures différentes (§2.3). Nous utiliserons une formulation en terme de matrices d'admittances qui se prêtent mieux à ce type de problème. Nous travaillerons dans l'esprit de l'approche Champoux&Stinson en appliquant les propriétés H1 et H2 à l'échelle du pore et parvenons ainsi à généraliser les écritures des paramètres caractérisant le milieu poreux. Dans ces conditions, nous obtenons une expression de l'impédance de surface pour un régime fréquentiel large.

Par la suite, nous ferons référence à certains modèles présentés en première partie. Ceux-ci seront dit classiques lorsqu'ils se contentent d'utiliser des para-

mètres traditionnels (porosité, tortuosité et résistance à l'écoulement de l'air) et généralisés lorsqu'ils font appel à des quantités supplémentaires.

Il est utile de préciser que la définition de l'impédance (1.51) obtenue au chapitre précédent peut s'appliquer dans le cadre d'une modélisation en série ou en parallèle. Elle fournit d'ailleurs les mêmes résultats, mais ne permet pas d'identifier simplement les paramètres physiques macroscopiques. C'est la raison pour laquelle nous avons privilégié une formulation matricielle.

2.1 Matrice de transfert d'un pore tortueux

Le pore tortueux est assimilé à une série de M conduits droits dont la section peut varier de manière aléatoire. En raison de la faible influence de la forme du pore, nous supposons que toutes les sections sont circulaires pour nous limiter uniquement à l'influence des changements de dimensions transversales. Par la suite, pour toutes les quantités associées à un conduit élémentaire droit, nous affecterons un indice j et noterons S_j et Δz_j respectivement la section et la longueur correspondante.

Nous donnerons dans un premier temps l'écriture de la matrice de transfert associée à un conduit élémentaire et à une discontinuité pour les généraliser à l'échelle d'un pore. Ces expressions seront proposées pour le régime des basses et hautes fréquences. Les résultats obtenus seront étendus à l'échelle macroscopique du matériau dans la section suivante où nous tacherons de retrouver des paramètres classiques et d'en introduire de nouveaux associés aux discontinuités.

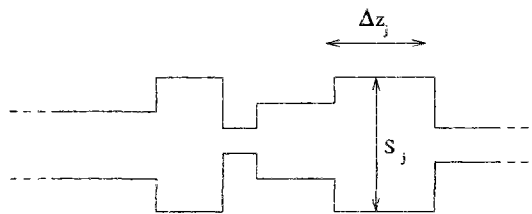


FIG. 2.1 - Pore tortueux

2.1.1 Matrice de transfert d'un conduit élémentaire droit

Lorsqu'il s'agit d'un fluide viscothermique, les densités et compressibilités classiques sont substituées par des grandeurs complexes équivalentes (§1.2.3.2).

Dans ces conditions l'expression des équations du mouvement et de continuité sont données par les relations (I.2.80) et (I.2.81) que nous rappelons ci-dessous :

$$i \omega \rho(\omega) \langle v_z \rangle = - \frac{\partial p}{\partial z} \quad (2.1)$$

$$i \omega C(\omega) p = - \frac{\partial \langle v_z \rangle}{\partial z} \quad (2.2)$$

Ces équations sont intégrées sur un volume V_j entre deux sections $S_j(z)$ et $S_j(z + \Delta z_j)$. Pour l'équation de continuité, nous obtenons :

$$i\omega \int_{V_j} C(\omega) p(z) dV_j + \int_{S_j(z+\Delta z_j)} \langle v_z \rangle (z + \Delta z_j) dS_j - \int_{S_j(z)} \langle v_z \rangle (z) dS_j = 0 \quad (2.3)$$

La section étant constante, nous pouvons sortir la compressibilité de l'intégrale. Nous supposons que la pression varie peu sur une petite longueur Δz_j (Hypothèse H1) et en introduisant le débit acoustique q , il vient :

$$i \omega C(\omega) p(z) S_j \Delta z_j + q(z + \Delta z_j) - q(z) = 0 \quad (2.4)$$

L'équation du mouvement (2.1) est traitée de manière identique :

$$i \omega \int_{V_j} \rho(\omega) \langle v_z \rangle (z) dV_j + \int_{S_j(z+\Delta z_j)} p(z + \Delta z_j) dS_j - \int_{S_j(z)} p(z) dS_j = 0 \quad (2.5)$$

La densité complexe est constante pour une fréquence donnée et en supposant que le débit acoustique varie peu sur une longueur Δz_j (Hypothèse H2), nous obtenons en définitive :

$$i \omega \rho(\omega) q(z) \Delta z_j + \{p(z + \Delta z_j) - p(z)\} S_j = 0 \quad (2.6)$$

Il est important de souligner que les hypothèses H1 et H2 sont appliquées à l'échelle d'un conduit élémentaire et qu'elles signifient que le gradient des grandeurs acoustiques est linéaire. La matrice de transfert élémentaire (notée $\underline{T}_j$) relie les pressions et débits acoustiques de part et d'autre du conduit. En utilisant les équations (2.4) et (2.6), la relation matricielle recherchée s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} p(z + \Delta z_j) \\ q(z + \Delta z_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -i \omega \rho(\omega) \frac{\Delta z_j}{S_j} \\ -i \omega C(\omega) S_j \Delta z_j & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p(z) \\ q(z) \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Les expressions des fonctions complexes densité et compressibilité ont été établies précédemment (§I.2.5.4) :

$$\rho(\omega) = \frac{\rho_o}{F(\lambda)} \quad (2.8)$$

$$C(\omega) = \frac{1}{\gamma P_o} \{ \gamma - (\gamma - 1) F(\lambda_T) \} \quad (2.9)$$

La matrice de transfert élémentaire peut être approchée dans le régime des basses et hautes fréquences en utilisant les approximations de la fonction F (caractéristique des perturbations visqueuses et thermiques) que nous avons développées dans les sections (§I. 2.5.5) et (§I. 2.5.6). Ces gammes fréquentielles sont bien sûr définies par rapport à l'épaisseur de la couche limite visqueuse, mais nous travaillons toujours dans le régime des grandes longueurs d'ondes devant les dimensions du pore. Les approximations seront donc données sous la forme d'un développement en puissance de $(k_o E_p)^{1/2}$ ($k_o = \omega/c_o$ est le nombre d'onde et E_p l'épaisseur du milieu poreux que l'on désire étudier) qui est une quantité petite devant 1 pour une épaisseur de matériau petite devant la longueur d'onde:

• Basses fréquences :

Dans ce régime ($\lambda \ll 1$) la fonction $F(\lambda)$ est approchée par $\frac{i \lambda^2}{8}$ lorsqu'il s'agit d'une section circulaire. Avec $\lambda = R \left(\frac{\rho_o \omega}{\eta} \right)^{1/2}$ et $\lambda_T = \lambda N_{pr}^{1/2}$ les fonctions complexes densité et compressibilité deviennent :

$$\rho(\omega) = -\frac{i 8 \eta}{\omega R_j^2} \quad (2.10)$$

$$C(\omega) = \frac{1}{\gamma P_o} \left\{ \gamma - i (\gamma - 1) R_j^2 \frac{\rho_o \omega N_{pr}}{8 \eta} \right\} \quad (2.11)$$

où R_j désigne le rayon de la section circulaire élémentaire S_j . La matrice de transfert élémentaire est obtenue en reportant les expressions ci-dessus dans la relation matricielle (2.7) :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{T_j}} = & \begin{bmatrix} 1 & -\frac{8 \eta}{R_j^2} \frac{\Delta z_j}{S_j} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + k_o E_p \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{i c_o}{P_o E_p} S_j \Delta z_j & 0 \end{bmatrix} \\ & + (k_o E_p)^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\gamma - 1}{\gamma P_o} R_j^2 \frac{\rho_o c_o^2 N_{pr}}{8 \eta E_p^2} S_j \Delta z_j & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Nous obtenons ainsi un développement en puissance de $(k_o E_p)^{1/2}$, où les effets thermiques ne se manifestent qu'à l'ordre 4.

• Hautes fréquences :

Nous rappelons l'expression approchée de la fonction caractéristique F pour les hautes fréquences ($\lambda \gg 1$) donnée par l'équation (§I.2.158) :

$$F(\lambda) = 1 - \frac{2i}{\lambda \sqrt{-i}} \quad (2.13)$$

Cette écriture est obtenue en utilisant une approximation des fonctions de Bessel pour λ grand devant 1. Nous la reportons dans les écritures des fonctions complexes de densité (2.8) et de compressibilité (2.9) :

$$\rho(\omega) = \rho_o \left\{ 1 - (1 - i) \frac{\sqrt{2}}{\lambda} \right\} \quad (2.14)$$

$$C(\omega) = \frac{1}{\gamma P_o} \left\{ \gamma - (\gamma - 1) \left(1 + (1 - i) \frac{\sqrt{2}}{\lambda \sqrt{N_{pr}}} \right) \right\} \quad (2.15)$$

où une convention de signe considérant une partie imaginaire positive pour $\sqrt{-i}$ a été choisie. En injectant ces expressions approchées dans la relation matricielle (2.7), nous obtenons un développement en puissance de $(k_o E_p)^{1/2}$ pour la matrice de transfert élémentaire, dans le régime des hautes fréquences :

$$\begin{aligned} & \underline{\underline{T_j}} = \underline{\underline{1}} \\ & -(i+1)(k_o E_p)^{1/2} \left[\begin{array}{cc} 0 & \left(\frac{2\eta \rho_o c_o}{E_p} \right)^{1/2} \frac{\Delta z_j}{R_j S_j} \\ \frac{\gamma-1}{\gamma P_o} \left(\frac{2\eta c_o}{\rho_o N_{pr} E_p} \right)^{1/2} \frac{S_j \Delta z_j}{R_j} & 0 \end{array} \right] \\ & -i(k_o E_p) \left[\begin{array}{cc} 0 & \frac{\rho_o c_o}{E_p} \frac{\Delta z_j}{S_j} \\ \frac{c_o}{E_p \gamma P_o} S_j \Delta z_j & 0 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (2.16)$$

$\underline{\underline{1}}$ désigne la matrice identité.

2.1.2 Matrice de transfert d'une discontinuité

Les discontinuités que nous considérons sont de type changement de section. Il s'agit d'un problème qui a été abondamment étudié par de nombreux auteurs et le lecteur pourra se reporter à une publication de Garcia [Garcia *et al.*, 1986]

pour une revue suffisamment large des méthodes existantes. Pour notre part, nous nous limiterons à en donner les principaux résultats.

Nous supposons que les dissipations thermiques et visqueuses correspondantes sont négligeables en raison de la petite longueur de la discontinuité. Dans ces conditions, et pour les basses fréquences où le seul mode propagatif est le mode plan, ces discontinuités peuvent être caractérisées par une simple inductance. Ceci se traduit par une continuité des débits et un saut de pression.

La figure (2.2) illustre la discontinuité considérée. On note p_o^I et p_o^{II} la pression de part et d'autre de la discontinuité, a et b les rayons des conduits correspondants ($a \geq b$).

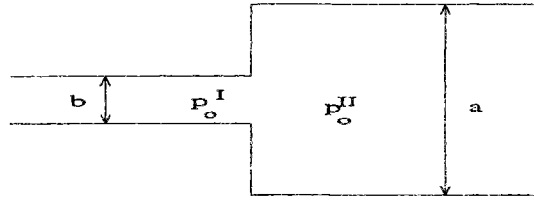


FIG. 2.2 - Discontinuité de type changement de section

La matrice de transfert s'écrit :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} p_o^I \\ q_o^I \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & -i \omega \rho_c L \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_o^{II} \\ q_o^{II} \end{bmatrix} \\ &= \underline{\underline{1}} + k_o E_p \begin{bmatrix} 0 & -i \frac{\rho_o L c_o}{E_p} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_o^{II} \\ q_o^{II} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.17)$$

L est une quantité qui traduit le couplage entre les modes plans et les modes supérieurs (évanescents) générés par la discontinuité. Selon Kergomard [Kergomard *et al.*, 1987], cette grandeur est quasiment indépendante de la fréquence, dans la mesure où celle-ci est inférieure à $0.9 f_c$ (f_c fréquence de coupure du mode plan). Il s'agit donc d'une grandeur purement inductive qui peut être estimée dans le régime des très basses fréquences par des méthodes analytiques ou encore numériques. La formulation la plus populaire revient à Karal qui utilise l'approximation du piston plan pour une section circulaire:

$$L(\tilde{\alpha}) = \frac{8}{3\pi^2 b} H(\tilde{\alpha}) \quad \text{avec } \tilde{\alpha} \in [0, 1] \quad (2.18)$$

avec

$$H(\tilde{\alpha}) = \frac{3\pi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_1^2(x_m \tilde{\alpha})}{(x_m \tilde{\alpha}) [x_m J_0(x_m)]^2} \quad (2.19)$$

$\tilde{\alpha} = b/a$ désigne le rapport des rayons des guides de part et d'autre de la discontinuité et x_m les zéros de la fonction de Bessel d'ordre 1. H est une fonction décroissante entre 1 et 0.

La discontinuité que nous avons considérée suppose un élargissement de section. Lorsqu'il s'agit d'une réduction du rayon, l'écriture de l'inductance (2.18) reste valable dans la mesure où a désigne le plus grand rayon et b le plus petit.

Notons que pour des discontinuités de type 'coude', la singularité peut être représentée également par une inductance si nous supposons que le volume de la discontinuité est négligeable. Il est cependant difficile d'obtenir une forme analytique pour cette inductance lorsqu'il s'agit d'un angle quelconque.

2.1.3 Assemblage de la matrice de transfert

Le pore est constitué d'une série de jonctions biportées (Figure 2.3). Celles-ci définies pour un conduit élémentaire ou encore une discontinuité sont associées chacune à une matrice de transfert élémentaire.

L'assemblage se fait par une multiplication de ces matrices, en utilisant la continuité des pressions et débits entre deux jonctions successives. Nous supposons que le pore est discrétisé en M conduits auxquels nous affecterons un indice j ($1 \leq j \leq M$). Nous noterons $\underline{\underline{T}}_j$ la matrice de transfert associée au guide j et $\underline{\underline{T}}_{j,j-1}$, celle qui caractérise la discontinuité entre les deux conduits successifs d'indice j et $j-1$. Nous obtenons ainsi une matrice de transfert microscopique, notée $\underline{\underline{T}}_p$, reliant les pressions et débits acoustiques en entrée et sortie du pore :

$$\begin{bmatrix} p_M \\ q_M \end{bmatrix} = \underline{\underline{T}}_p \begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$= \prod_{j=M}^1 \underline{\underline{T}}_j \underline{\underline{T}}_{j,j-1} \begin{bmatrix} p_0 \\ q_0 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

où p_0, p_M, q_0 et q_M sont les pressions et débits acoustiques en entrée et sortie de pore. Le produit matriciel est défini de la manière suivante :

$$\prod_{j=M}^1 \underline{\underline{A}}_j = \underline{\underline{A}}_M \underline{\underline{A}}_{M-1} \underline{\underline{A}}_{M-2} \dots \underline{\underline{A}}_2 \underline{\underline{A}}_1 \quad (2.22)$$

et assimile $\underline{\underline{T}}_{1,0}$ à la matrice identité.

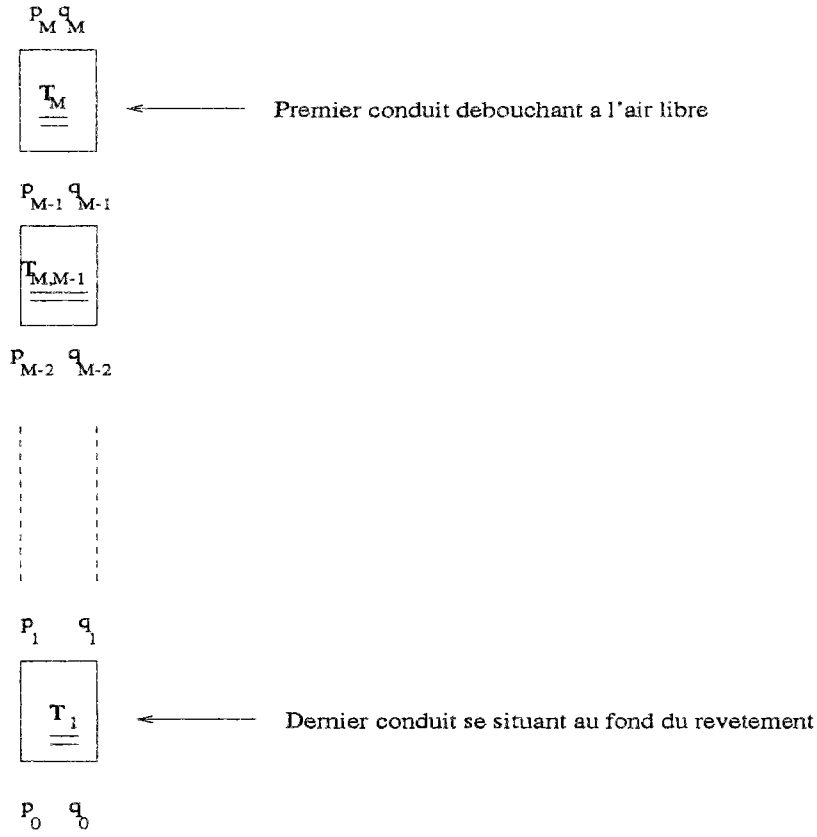


FIG. 2.3 - Chaîne de jonctions biportes

En utilisant les développements (2.16) et (2.17), nous en déduisons l'expression de la matrice de transfert pour les hautes fréquences, au second ordre:

$$\underline{\underline{T_p}} = \underline{\underline{1}} + (k_o E_p)^{1/2} \underline{\underline{A_p}} + k_o E_p \underline{\underline{B_p}} \quad (2.23)$$

Les matrices de premier ($\underline{\underline{A_p}}$) et second ordre ($\underline{\underline{B_p}}$) sont données par les écritures suivantes :

$$\underline{\underline{A_p}} = -(i+1) \begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{2\eta\rho_o c_o}{E_p} \right)^{1/2} \sum_{j=1}^M \frac{\Delta z_j}{R_j S_j} \\ \frac{\gamma-1}{\gamma P_o} \left(\frac{2\eta c_o}{\rho_o N_{pr} E_p} \right)^{1/2} \sum_{j=1}^M \frac{S_j \Delta z_j}{R_j} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$\underline{\underline{B_p}} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & -i \frac{\rho_o c_o}{E_p} \sum_{j=1}^M \left[\frac{\Delta z_j}{S_j} + L_{j,j-1} \right] \\ -i \frac{c_o}{\gamma P_o E_p} \sum_{j=1}^M S_j \Delta z_j & \bar{\beta} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

$L_{j,j-1}$ désigne l'inductance associée à la matrice de transfert $\underline{\underline{T_{j,j-1}}}$. Bien entendu, nous avons $L_{1,0} = 0$. Les paramètres $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ traduisent des changements de pressions et de débits acoustiques qui n'apparaissent pas lorsque l'on considère que les hypothèses H1 et H2 s'appliquent à l'échelle d'un pore. Ils ne dépendent que de la géométrie du pore, du désordre qui lui est associé et sont donnés par les écritures suivantes :

$$\bar{\alpha} = i \frac{4\eta c_o (\gamma - 1)}{\gamma P_o E_p} \frac{1}{\sqrt{N_{pr}}} \sum_{j=1}^M \frac{\Delta z_j}{R_j S_j} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{S_k \Delta z_k}{R_k} \quad (2.26)$$

$$\bar{\beta} = i \frac{4\eta c_o (\gamma - 1)}{\gamma P_o E_p} \frac{1}{\sqrt{N_{pr}}} \sum_{j=1}^M \frac{S_j \Delta z_j}{R_j} \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\Delta z_k}{R_k S_k} \quad (2.27)$$

Il semble donc que les hypothèses H1 et H2 valables pour un conduit élémentaire de petite longueur, peuvent être généralisées à l'échelle d'un pore (et nous le verrons par la suite à l'échelle du milieu poreux) si nous nous limitons à l'ordre 1. Dans ce cas les termes de la diagonale de la matrice de transfert sont égaux à 1.

Le développement de la matrice de transfert $\underline{\underline{T_p}}$ peut être obtenu également pour les basses fréquences en utilisant la définition (2.21) et l'expression (2.12) pour un conduit élémentaire. Nous nous limiterons à l'ordre 0 qui sera suffisant pour obtenir par la suite une estimation de la résistance au passage de l'air.

$$\underline{\underline{T_p}} = \begin{bmatrix} 1 & -\sum_{j=1}^M \frac{8\eta}{R_j^2} \frac{\Delta z_j}{S_j} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

2.2 Milieu poreux constitué de pores identiques

Les résultats obtenus à l'échelle microscopique du pore seront étendus à l'échelle du matériau poreux, moyennant l'introduction de paramètres macroscopiques caractérisant le milieu considéré. Nous évoquerons une première situation

où tous les pores sont supposés identiques (modèle en série), pour traiter dans la section suivante, le cas qui considère une dispersion dans leur distribution (modèle en parallèle).

2.2.1 Ecriture de la matrice de transfert

Cette modélisation est dite en série, puisque tous les pores sont identiques et que les discontinuités se succèdent les unes après les autres. Le passage micro-macro s'effectue en substituant le débit acoustique à une extrémité du pore par la vitesse moyenne macroscopique $\bar{v}_m$ associée au milieu poreux, à la même extrémité. Cette vitesse est définie comme le rapport du débit total par la surface de l'éprouvette. En notant N le nombre de pores par surface S_t de milieu poreux, nous obtenons :

$$\bar{v}_m^i = \frac{N q_i}{S_t} \quad \text{pour } i = 0 \text{ et } i = M \quad (2.29)$$

En effectuant le changement de variable (2.29), nous obtenons une formulation macroscopique des matrices de transfert (notée $\underline{\underline{T}}_m$) reliant les pressions et vitesses moyennes de part et d'autre de l'éprouvette de matériau poreux :

- Basses fréquences :

$$\underline{\underline{T}}_m = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{S_t}{N} \sum_{j=1}^M \frac{8\eta}{R_j^2} \frac{\Delta z_j}{S_j} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

- Hautes fréquences :

$$\underline{\underline{T}}_m = \underline{\underline{1}} + (k_o E_p)^{1/2} \underline{\underline{A}}_m + (k_o E_p) \underline{\underline{B}}_m \quad (2.31)$$

avec :

$$\underline{\underline{A}}_m = - (i + 1) \begin{bmatrix} 0 & \frac{S_t}{N} \left(\frac{2\eta\rho_o c_o}{E_p} \right)^{1/2} \sum_{j=1}^M \frac{\Delta z_j}{R_j S_j} \\ \frac{N}{S_t} \frac{\gamma - 1}{\gamma P_o} \left(\frac{2\eta c_o}{\rho_o N_{pr} E_p} \right)^{1/2} \sum_{j=1}^M \frac{S_j \Delta z_j}{R_j} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

$$\underline{\underline{B_m}} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} & -i \frac{S_t}{N} \frac{\rho_o c_o}{E_p} \sum_{j=1}^M \left[\frac{\Delta z_j}{S_j} + L_{j,j-1} \right] \\ -i \frac{N}{S_t} \frac{c_o}{\gamma P_o E_p} \sum_{j=1}^M S_j \Delta z_j & \bar{\beta} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

De manière à identifier les paramètres macroscopiques, nous proposons d'écrire l'expression de la matrice de transfert d'un milieu poreux en utilisant les formulations des fonctions macroscopiques de densité ρ^m et de compressibilité C^m que propose Attenborough [Attenborough, 1993] (l'exposant signifie qu'il s'agit de quantités macroscopiques).

Comme le suggère Champoux [Champoux *et al.*, 1992] (§I.2.6.2), nous supposons que les propriétés H1 et H2 s'appliquent à l'échelle du pore et donc du milieu poreux. Nous pouvons en déduire le développement pour les hautes fréquences de la matrice de transfert macroscopique $\underline{\underline{\tilde{T}_m}}$ (la notation $\sim$ est réservée aux quantités issues du modèle classique) reliant les pressions et vitesses aux extrémités de l'éprouvette poreuse :

$$\underline{\underline{\tilde{T}_m}} = \underline{\underline{1}} + (k_o E_p)^{1/2} \underline{\underline{\tilde{A}_m}} + (k_o E_p) \underline{\underline{\tilde{B}_m}} \quad (2.34)$$

avec :

$$\underline{\underline{\tilde{A}_m}} = -\frac{i+1}{2} \begin{bmatrix} 0 & (\rho_o k_s R_s c_o E_p \Omega)^{1/2} \frac{1}{\Omega} \\ \frac{(\gamma-1) \Omega}{\gamma P_o} \left(\frac{R_s \Omega c_o E_p}{k_s \rho_o N_{pr}} \right)^{1/2} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

$$\underline{\underline{\tilde{B}_m}} = -i \begin{bmatrix} 0 & \frac{\rho_o k_s c_o}{\Omega} \\ \frac{c_o \Omega}{\gamma P_o} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Pour les basses fréquences, une écriture approchée pour les fonctions complexes de densité et de compressibilité macroscopiques et l'utilisation des propriétés H1 et H2, nous donne l'expression de la matrice de transfert macroscopique $\underline{\underline{\tilde{T}_m}}$, à l'ordre 0 :

$$\underline{\underline{\tilde{T}_m}} = \begin{bmatrix} 1 & -R_s E_p \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

2.2.2 Identification des paramètres macroscopiques

Il s'agit de donner une définition des paramètres classiques (porosité, tortuosité et résistance à l'écoulement de l'air) et d'identifier des paramètres additionnels caractérisant les discontinuités ainsi que l'ordre qui leur est associé.

◇ Paramètres classiques

- Porosité :

Elle est définie par le rapport du volume des vides par le volume total de l'éprouvette :

$$\Omega = \frac{N \sum_{j=1}^M S_j \Delta z_j}{S_t E_p} \quad (2.38)$$

où E_p désigne l'épaisseur de l'éprouvette. Cette définition peut être établie autrement en identifiant les matrices d'ordre 2 pour le modèle discret en série $\underline{\underline{B_m}}$ (2.33) et le modèle classique $\underline{\underline{\tilde{B}_m}}$ (2.36).

- Résistance à l'écoulement de l'air :

Il s'agit d'une quantité intrinsèque qui peut être estimée à fréquence nulle. Nous définirons dans un premier temps une résistance à l'écoulement élémentaire R_{s_j} , qui sera généralisée à l'échelle macroscopique. En utilisant la définition (I.1.1), la résistance d'un conduit élémentaire s'écrit :

$$R_{s_j} = \frac{S_j (p_{j-1} - p_j)}{q_{j-1} \Delta z_j} \quad (2.39)$$

Pour $\omega = 0$ et d'après le développement de la matrice de transfert élémentaire (2.12), nous obtenons :

$$R_{s_j} = \frac{8 \eta}{R_j^2} \quad (2.40)$$

A l'échelle macroscopique, la résistance à l'écoulement de l'air est donnée par la relation suivante :

$$R_s = \frac{p_o - p_N}{E_p \bar{v}_m^o} \quad (2.41)$$

En reportant l'expression de la résistance à l'écoulement de l'air élémentaire (2.40) dans le développement de la matrice de transfert macroscopique (2.30), nous obtenons pour $\omega = 0$:

$$R_s = \frac{S_t}{N E_p} \sum_{j=1}^M R_{s_j} \frac{\Delta z_j}{S_j} \quad (2.42)$$

Cette expression aurait pu être obtenue autrement, en identifiant les termes d'ordre 0 dans les développements pour les basses fréquences donnés par les modèles discret en série (2.30) et classique (2.37).

• Tortuosité :

Lorsque nous identifions les matrices d'ordre 2 $\underline{\underline{\tilde{B}_m}}$ et $\underline{\underline{B_m}}$ calculées pour le modèle classique (2.36) et le modèle discret en série (2.33), nous retrouvons l'écriture de la porosité établie précédemment (2.38). Cette identification nous permet également d'obtenir une nouvelle définition pour la tortuosité :

$$k_s = \frac{\Omega S_t}{N E_p} \sum_{j=1}^M \left[\frac{\Delta z_j}{S_j} + L_{j,j-1} \right] \quad (2.43)$$

Celle-ci prend en compte la nature sinueuse des pores et la présence d'étranglements.

◇ Paramètres associés aux discontinuités

Ce sont des quantités qui interviennent à l'ordre 1 dans le développement pour les hautes fréquences de la matrice de transfert macroscopique. Comme nous le constatons dans l'expression de $\underline{\underline{B_m}}$, les deux premiers (composantes [1,2] et [2,1] de la matrice $\underline{\underline{B_m}}$) sont essentiellement associés aux changements de sections, tandis que les seconds $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ complètent l'information précédente par l'ordre selon lequel la distribution des conduits élémentaires est effectuée.

Notons par ailleurs que la matrice $\underline{\underline{B_m}}$ vérifie les propriétés H1 et H2 pour des quantités $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ nulles. Cela se traduit par le fait que le débit acoustique est constant lorsque nous intégrons l'équation du mouvement sur le volume d'un pore (et non plus sur le volume d'un conduit élémentaire) et que la pression ne varie pas lorsque l'équation de continuité est intégrée sur le même volume. Ce sont les hypothèses utilisées par le modèle Champoux&Stinson (§1.2.6.2), et il n'est donc pas étonnant de retrouver les paramètres obtenus par ces auteurs si nous négligeons l'influence des discontinuités.

A l'ordre 2, et uniquement lorsque $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ sont nuls, le problème peut donc se traiter comme le suggère Champoux. Cette approche consiste à utiliser les

fonctions macroscopiques classiques de densité et de compressibilité pour les généraliser par l'introduction de deux paramètres s_t et s_v associés séparément aux effets visqueux et thermiques. Les nombres sans dimensions λ et λ_T deviennent :

$$\lambda = s_v \left(\frac{8k_s \rho_o \omega}{R_s \Omega} \right)^{1/2} \quad (2.44)$$

$$\lambda_T = s_t \left(\frac{8k_s \rho_o \omega N_{pr}}{R_s \Omega} \right)^{1/2} \quad (2.45)$$

Nous en déduisons une nouvelle matrice d'ordre 1 (notée $\underline{\underline{\tilde{A}_{Gm}}}$) issue du modèle classique généralisé et qui se substitue à $\underline{\underline{\tilde{A}_m}}$:

$$\underline{\underline{\tilde{A}_{Gm}}} = -\frac{i+1}{2} \begin{bmatrix} 0 & s_v (\rho_o k_s R_s c_o E_p \Omega)^{1/2} \frac{1}{\Omega} \\ \frac{(\gamma-1) \Omega}{\gamma P_o s_t} \left(\frac{R_s \Omega c_o E_p}{k_s \rho_o N_{pr}} \right)^{1/2} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

En identifiant les matrices $\underline{\underline{\tilde{A}_{Gm}}}$ et $\underline{\underline{\tilde{A}_m}}$, nous obtenons l'expression des paramètres s_t et s_v :

$$s_t = \left(\frac{\Omega R_s}{k_s} \right)^{1/2} \frac{\sum_{j=1}^M S_j \Delta z_j}{\sum_{j=1}^M R_{s_j}^{1/2} S_j \Delta z_j} \quad (2.47)$$

$$s_v = \left(\frac{k_s}{\Omega R_s} \right)^{1/2} \frac{\sum_{j=1}^M R_{s_j}^{1/2} \frac{\Delta z_j}{S_j}}{\sum_{j=1}^M \left[\frac{\Delta z_j}{S_j} + L_{j,j-1} \right]} \quad (2.48)$$

Ces expressions sont semblables à celles que propose Champoux, si nous considérons des discontinuités de faible influence ($L_{j,j-1} = 0$). On montre par ailleurs, que le rapport $\frac{s_t}{s_v}$ est toujours supérieur à 1 [Annexe C], ce qui est en contradiction avec les valeurs qu'obtient Attenborough [Attenborough, 1993] en ajustant les résultats du modèle en série à des mesures expérimentales. Nous reviendrons plus en détail sur cette remarque, dans le prochain chapitre, où nous tacherons d'expliquer ces différences.

En appliquant les hypothèses H1 et H2 uniquement à l'échelle du conduit élémentaire, une formulation du problème en termes de matrices de transfert permet de dégager deux paramètres supplémentaires $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ associés à la distribution de taille de conduits élémentaires et au désordre. C'est donc principalement l'influence du désordre qui remet en cause l'application des propriétés H1 et H2 à l'échelle du pore et par conséquent du milieu poreux. La matrice de transfert $\underline{\underline{T}}_m$ est donc enrichie lorsque l'on tient compte des contributions du désordre à travers les paramètres $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$.

2.2.3 Impédance de surface

Lorsque le milieu poreux repose sur un fond rigide, l'impédance de surface est obtenue en calculant au niveau de la surface en contact avec l'air libre, le rapport de la pression par la vitesse macroscopique moyenne :

$$Z^s = \frac{p_M}{\bar{v}_m^M} \quad (2.49)$$

La condition de rigidité impose une vitesse acoustique nulle à l'autre extrémité de l'éprouvette ($\bar{v}_m^0 = 0$). Nous utilisons résultats établis précédemment (2.34)(2.31)(2.46) et les grandeurs acoustiques recherchées s'écrivent de la manière suivante :

$$p_M = \left(1 + \omega \frac{c_o}{E_p} \bar{\alpha}\right) p_0 \quad (2.50)$$

$$\bar{v}_m^M = -i\omega \frac{E_p \Omega}{\gamma P_o} p_0 - (i+1) \omega^{1/2} \frac{\gamma-1}{2\gamma P_o s_t} \left(\frac{R_s \Omega}{k_s \rho_o N_{pr}}\right)^{1/2} E_p \Omega p_0 \quad (2.51)$$

Nous en déduisons l'expression de l'impédance de surface :

$$Z^s = - \frac{\gamma P_o \left(1 + \omega \frac{c_o}{E_p} \bar{\alpha}\right)}{\left[i \omega + (i+1) \omega^{1/2} \frac{\gamma-1}{2s_t} \left(\frac{R_s \Omega}{k_s \rho_o N_{pr}}\right)^{1/2}\right] E_p \Omega} \quad (2.52)$$

Dans le régime des hautes fréquences l'écriture de l'impédance de surface ne retient donc que les deux paramètres supplémentaires $\bar{\alpha}$ et s_t .

Bien entendu l'écriture de l'impédance peut être obtenue à l'aide de la définition établie au chapitre précédent. Par cette méthode nous aurions obtenu le même résultat, mais nous avons privilégié un formalisme matriciel car il nous permet d'identifier simplement les paramètres physiques.

2.3 Milieu poreux constitué de pores de natures différentes

Nous avons développé dans la section précédente une modélisation acoustique de milieu poreux qui considère des pores sujets à de fortes discontinuités. Elle suppose toutefois que tous les pores sont identiques. Nous proposons d'étendre les résultats obtenus, à une situation où les pores sont de natures différentes et d'obtenir la matrice de transfert macroscopique correspondante. Pour la différencier des autres modélisations, nous parlerons d'approche en parallèle. En identifiant celle-ci au modèle classique généralisé, nous en déduirons une nouvelle formulation des paramètres classiques et supplémentaires.

Introduisons dans un premier temps quelques notations qui nous seront utiles par la suite. Nous noterons F , le nombre de types de pores. Chaque type est caractérisé physiquement par une porosité, tortuosité et résistance à l'écoulement qui lui est propre. Pour chaque famille de pores, nous affecterons un nombre de pores N_k ($k = 1, N$). Par la suite, l'exposant k sera consacré aux quantités associées à la famille de pore de type k . Nous simplifierons l'exposé en écrivant la matrice de transfert microscopique d'un pore de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} p_M^k \\ q_M^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^k & b^k \\ c^k & d^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_o^k \\ q_o^k \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Le développement (2.23) pour les hautes fréquences, nous donne l'expression des coefficients de la matrice de transfert :

$$a^k = 1 + (k_o E_p) \bar{\alpha}^k \quad (2.54)$$

$$d^k = 1 + (k_o E_p) \bar{\beta}^k \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} b^k &= -(i+1) (k_o E_p)^{1/2} \left(\frac{2\eta\rho_o c_o}{E_p} \right)^{1/2} \sum_{j=1}^M \frac{\Delta z_j^k}{R_j^k S_j^k} \\ &\quad - i (k_o E_p) \frac{\rho_o c_o}{E_p} \sum_{j=1}^M \left[\frac{\Delta z_j^k}{S_j^k} + L_{j,j-1}^k \right] \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} c^k &= -(i+1) (k_o E_p)^{1/2} \left(\frac{2\eta c_o}{\rho_o N_{pr} E_p} \right)^{1/2} \frac{\gamma-1}{\gamma P_o} \sum_{j=1}^M \frac{S_j^k \Delta z_j^k}{R_j^k} \\ &\quad - i (k_o E_p) \frac{c_o}{\gamma P_o E_p} \sum_{j=1}^M S_j^k \Delta z_j^k \end{aligned} \quad (2.57)$$

2.3.1 Passage micro-macro

Le réseau poreux est constitué de biportes en parallèle. Puisqu'il s'agit de pores de natures différentes, il est préférable de formuler le problème en terme de matrices admittances pour les représenter. Il existe une correspondance entre les matrices de transfert T et d'admittance Y . En effet un biporte peut être caractérisé par :

- Sa matrice de transfert reliant les pressions et débits aux extrémités du biporte:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

- Sa matrice admittance reliant les pressions aux débits :

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

où p_1 , p_2 , q_1 et q_2 sont les pressions et débits aux extrémités du biporte. La matrice admittance peut s'exprimer en fonction des éléments de la matrice transfert :

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_{22}}{A_{12}} & \frac{A_{12}A_{21} - A_{11}A_{22}}{A_{12}} \\ \frac{1}{A_{12}} & -\frac{A_{11}}{A_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

et réciproquement, la matrice de transfert s'écrit en fonction des éléments de la matrice admittance :

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ q_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{Y_{22}}{Y_{21}} & \frac{1}{Y_{21}} \\ \frac{Y_{21}Y_{12} - Y_{11}Y_{22}}{Y_{21}} & \frac{Y_{11}}{Y_{21}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_2 \\ q_2 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

Nous utilisons la relation de correspondance (2.60) pour obtenir la matrice admittance correspondant à la matrice de transfert d'un pore (2.53) :

$$\begin{bmatrix} q_M^k \\ q_o^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d^k}{b^k} & \frac{c^k b^k - a^k d^k}{b^k} \\ \frac{1}{b^k} & -\frac{a^k}{b^k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_M^k \\ p_o^k \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

La matrice admittance macroscopique est obtenue en introduisant le débit total aux extrémités de l'éprouvette poreuse :

$$q_i^T = \sum_{k=1}^F N_k q_i^k \quad \text{pour } i = o \text{ ou } i = N \quad (2.63)$$

Pour les grandes longueurs d'ondes, nous avons montré au chapitre précédent (§II.1.2.2) une faible variation de la pression sur la surface du matériau en contact avec l'air libre. Nous estimons donc qu'elle est uniforme. Ainsi pour $k = 1, F$:

$$p_M^T = p_M^k \quad (2.64)$$

$$p_o^T = p_o^k \quad (2.65)$$

Dans ces conditions, la matrice admittance macroscopique s'écrit de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} q_M^T \\ q_o^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^F N_k \frac{d^k}{b^k} & \sum_{k=1}^F N_k \frac{c^k b^k - a^k d^k}{b^k} \\ \sum_{k=1}^F N_k \frac{1}{b^k} & -\sum_{k=1}^F N_k \frac{a^k}{b^k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_M^T \\ p_o^T \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

En utilisant la relation de correspondance (2.61), nous obtenons la matrice de transfert macroscopique équivalente :

$$\begin{bmatrix} p_M^T \\ q_M^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_o^T \\ q_o^T \end{bmatrix} \quad (2.67)$$

En utilisant la notation $\mathbf{E}(\theta) = \sum_{k=1}^F N_k \theta^k$, les composantes A , B , C et D sont définis par :

$$A = \frac{\mathbf{E}\left(\frac{a}{b}\right)}{\mathbf{E}\left(\frac{1}{b}\right)} \quad (2.68)$$

$$B = \frac{1}{\mathbf{E}\left(\frac{1}{b}\right)} \quad (2.69)$$

$$C = \mathbf{E}\left(\frac{c b - a d}{b}\right) + \frac{\mathbf{E}\left(\frac{d}{b}\right) \mathbf{E}\left(\frac{a}{b}\right)}{\mathbf{E}\left(\frac{1}{b}\right)} \quad (2.70)$$

$$D = \frac{\mathbf{E}\left(\frac{d}{b}\right)}{\mathbf{E}\left(\frac{1}{b}\right)} \quad (2.71)$$

Nous proposons à présent de bâtir un modèle à l'ordre 1, le plus général possible en considérant des pores différentes et susceptible de fournir une nouvelle interprétation des paramètres s_t et s_v .

Nous supposons donc que les propriétés H1 et H2 s'appliquent à l'échelle d'un pore. Dans ces conditions, les éléments a^k et d^k de la matrice de transfert microscopique se simplifient :

$$a^k = 1 \quad (2.72)$$

$$d^k = 1 \quad (2.73)$$

Ces simplifications sont reportées dans l'expression de la matrice de transfert macroscopique (2.67), et transforment les éléments A , D et C :

$$A = 1 \quad (2.74)$$

$$D = 1 \quad (2.75)$$

$$C = \mathbf{E}(c) \quad (2.76)$$

Nous en proposons à présent un développement en puissance de $(k_o E_p)^{1/2}$ (pour les hautes fréquences) qui nous sera utile pour identifier les paramètres physiques. Il est obtenu simplement pour la composante C :

$$C = (k_o E_p)^{1/2} \mathbf{E}(c_1) + (k_o E_p) \mathbf{E}(c_2) \quad (2.77)$$

avec :

$$c_1^k = -(i+1) \left(\frac{2\eta c_o}{\rho_o N_{pr} E_p} \right)^{1/2} \frac{\gamma-1}{\gamma P_o} \sum_{j=1}^M \frac{S_j^k \Delta z_j^k}{R_j^k} \quad (2.78)$$

$$c_2^k = -i \frac{c_o}{\gamma P_o E_p} \sum_{j=1}^M S_j^k \Delta z_j^k \quad (2.79)$$

L'expression de B est développée en puissance de $(k_o E_p)^{1/2}$ en substituant b^k par :

$$b^k = (k_o E_p)^{1/2} b_1^k + (k_o E_p) b_2^k \quad (2.80)$$

avec

$$b_1^k = -(i+1) \left(\frac{2\eta \rho_o c_o}{E_p} \right)^{1/2} \sum_{j=1}^M \frac{\Delta z_j^k}{R_j^k S_j^k} \quad (2.81)$$

$$b_2^k = -i \frac{\rho_o c_o}{E_p} \sum_{j=1}^M \left[\frac{\Delta z_j^k}{S_j^k} + L_{j,j-1}^k \right] \quad (2.82)$$

En effectuant le changement de variable (2.80), la composante B devient :

$$B = \frac{1}{\mathbf{E} \left(\frac{1}{(k_o E_p)^{1/2} b_1^k + (k_o E_p) b_2^k} \right)} \quad (2.83)$$

Nous effectuons un développement en $(k_o E_p)^{1/2}$ au voisinage de 0, et nous obtenons à l'ordre 2 :

$$B = \frac{1}{\mathbf{E} \left(\frac{1}{b_2} \right)} \left\{ (k_o E_p)^{1/2} \frac{\mathbf{E} \left(\frac{b_1}{b_2^2} \right)}{\mathbf{E} \left(\frac{1}{b_2} \right)} + (k_o E_p) \right\} \quad (2.84)$$

2.3.2 Identification des paramètres macroscopiques

Notre ambition est de généraliser l'écriture des paramètres classiques (Ω , k_s , R_s) et supplémentaires (s_t et s_v) obtenus pour des milieux où les pores sont supposés identiques à des milieux homogènes qui considèrent toutefois des pores de différents types. Ces quantités seront obtenues par une identification entre le modèle en parallèle et le modèle classique généralisé.

◇ Paramètres classiques

- Résistance au passage de l'air :

Elle est obtenue aux très basses fréquences, par une identification des développements à l'ordre 0 des matrices de transfert macroscopiques correspondant aux modèles discret en parallèle et classique généralisé.

Le développement à l'ordre 0 de la matrice de transfert microscopique d'un pore (2.28) nous donne l'expression des éléments b^k et c^k :

$$b^k = -\sum_{j=1}^M R_{s_j}^k \frac{\Delta z_j^k}{S_j^k} \quad (2.85)$$

$$c^k = 0 \quad (2.86)$$

$R_{s_j}^k$ est la résistance correspondant au conduit élémentaire d'indice j associé à la famille de pores de type k . En notant b_o^k le terme d'ordre 0 correspondant à la composante b^k , nous obtenons l'expression de la matrice de transfert macroscopique moyennant l'utilisation des équations (2.69) et (2.74)- (2.76) :

$$\begin{bmatrix} p_M^T \\ q_M^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\mathbf{E}\left(\frac{1}{b_o}\right)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_o^T \\ q_o^T \end{bmatrix} \quad (2.87)$$

Nous introduisons la vitesse moyenne macroscopique aux extrémités de l'éprouvette :

$$\bar{v}_m^i = \frac{q_i^T}{S_t} \quad \text{pour } i = o \text{ et } i = M \quad (2.88)$$

En effectuant le changement de variable ci-dessus, la matrice de transfert reliant les pressions et vitesses macroscopiques s'écrit :

$$\begin{bmatrix} p_M^T \\ \bar{v}_m^M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{S_t}{\mathbf{E}\left(\frac{1}{b_0}\right)} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_c^T \\ \bar{v}_m^c \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

Nous identifions cette matrice à la matrice d'ordre 0 du modèle classique (2.37) pour en déduire une expression de la résistance au passage de l'air :

$$R_s = - \frac{S_t}{E_p \mathbf{E}\left(\frac{1}{b_0}\right)} \quad (2.90)$$

Nous nous inspirons de l'expression de la résistance à l'écoulement définie pour un milieu constitué de pores identiques (2.42) de manière à définir une résistance partielle R_s^k associée à la famille de pore de type k :

$$R_s^k = \frac{S_t}{N_k E_p} \sum_{j=1}^M R_{s_j}^k \frac{\Delta z_j^k}{S_j^k} \quad (2.91)$$

La quantité que nous recherchons s'écrit donc en fonction des résistances partielles :

$$R_s = \frac{1}{\frac{F}{\sum_{k=1}^M \frac{1}{R_s^k}}} \quad (2.92)$$

• Porosité et tortuosité

Leurs expressions sont obtenues en identifiant les matrices d'ordre 2 pour les modèles en parallèle et classique généralisé. A l'ordre 2, les éléments de la matrice de transfert du milieu poreux sont déduits des équations (2.84) et (2.76) :

Nous substituons le débit total par la vitesse macroscopique moyenne (2.88), et nous identifions la matrice d'ordre 2 obtenue à la matrice correspondante pour le modèle classique généralisé (2.36). Nous obtenons ainsi une définition pour la porosité et la tortuosité :

$$\Omega = i \frac{\gamma P_o}{E_p S_t} \mathbf{E}(c_2) \quad (2.93)$$

Nous reportons l'écriture de c_2^k (2.79) et la porosité s'écrit comme le rapport du volume des vides sur le volume total de l'éprouvette :

$$\Omega = \frac{\sum_{k=1}^F N_k \sum_{j=1}^M S_j^k \Delta z_j^k}{E_p S_t} \quad (2.94)$$

La tortuosité est donné par :

$$k_s = i \frac{\Omega}{\rho_o E_p} \frac{S_t}{\mathbf{E} \left(\frac{1}{b_2} \right)} \quad (2.95)$$

b_2^k est substitué par son expression (2.82) :

$$k_s = \frac{\Omega}{E_p} \frac{S_t}{\sum_{k=1}^F \frac{N_k}{\sum_{j=1}^M \left[\frac{\Delta z_j^k}{S_j^k} + L_{j,j-1}^k \right]}} \quad (2.96)$$

◇ Paramètres associés au désordre

Ils sont obtenus en identifiant les matrices d'ordre 1 issues du modèle classique généralisé et du modèle en parallèle. Les composantes d'ordre 1 de ce dernier modèle sont déduites des relations (2.77) et (2.84). En les comparant aux composantes de la matrice (2.46), nous obtenons une nouvelle formulation pour les paramètres s_t et s_v :

$$s_v = -\frac{2}{i+1} \frac{\Omega S_t}{(\rho_o k_s R_s c_o E_p \Omega)^{1/2}} \frac{\mathbf{E} \left(\frac{b_1}{b_2^2} \right)}{\left[\mathbf{E} \left(\frac{1}{b_2} \right) \right]^2} \quad (2.97)$$

$$s_t = -\frac{i+1}{2} \left(\frac{\Omega R_s c_o E_p}{k_s N_{pr} \rho_o} \right)^{1/2} \frac{\Omega S_t (\gamma - 1)}{\gamma P_o \mathbf{E}(c_1)} \quad (2.98)$$

Nous reportons l'écriture des composantes b_1^k (2.81) et b_2^k (2.82) et en utilisant la définition de la tortuosité (2.96), l'expression du paramètre s_v devient :

$$s_v = \left(\frac{k_s}{R_s \Omega} \right)^{1/2} \times \frac{\sum_{k=1}^F \frac{N_k \sum_{j=1}^M \left(R_{s_j}^k \right)^{1/2} \frac{\Delta z_j^k}{S_j^k}}{\left(\sum_{j=1}^M \left[\frac{\Delta z_j^k}{S_j^k} + L_{j,j-1}^k \right] \right)^2}}{\sum_{k=1}^F \frac{N_k}{\sum_{j=1}^M \left[\frac{\Delta z_j^k}{S_j^k} + L_{j,j-1}^k \right]}} \quad (2.99)$$

La définition de la porosité (2.94) associée à l'écriture de la composante d'ordre 1 c_1^k (2.78) nous donne une nouvelle expression pour s_t :

$$s_t = \left(\frac{R_s \Omega}{k_s} \right)^{1/2} \frac{\sum_{k=1}^F N_k \sum_{j=1}^M S_j^k \Delta z_j^k}{\sum_{k=1}^F N_k \sum_{j=1}^M \left(R_{s_j}^k \right)^{1/2} S_j^k \Delta z_j^k} \quad (2.100)$$

Les paramètres s_t et s_v ont été introduits initialement par Champoux. Nous avons pu les enrichir par l'influence des discontinuités, mais aussi par la prise en compte de pores de natures différentes. De plus, les quantités que nous proposons autorisent un régime large où le rapport $\frac{s_t}{s_v}$ peut être inférieur ou supérieur à 1, ce que ne permet pas les définitions précédentes (2.47) et (2.48) des paramètres supplémentaires. Nous reviendrons sur cette constatation au chapitre suivant où nous tacherons d'illustrer ces propos par quelques simulations en interprétant les différents régimes.

Que ce soit pour les paramètres classiques (Ω, R_s, k_s) ou encore pour ceux qui sont associés aux discontinuités (s_v, s_t) , les définitions que nous avons présentées sont compatibles avec le modèle en série. Il suffit en effet de considérer une seule famille de pores pour retrouver les résultats précédemment établis.

◇ **Récapitulation**

Pour le régime des très basses fréquences (par rapport à la fréquence de coupure du mode plan), les effets associés aux discontinuités peuvent, en première approximation, être négligés. Dans ces conditions, et en notant L_k la longueur du pore de type k , l'écriture des paramètres macroscopiques se présente sous une forme intégrale :

- Porosité :

$$\Omega = \frac{1}{E_p S_t} \sum_{k=1}^F N_k \int_0^{L_k} S^k dz \quad (2.101)$$

- Tortuosité :

$$\frac{1}{k_s} = \frac{E_p}{\Omega S_t} \sum_{k=1}^F \frac{N_k}{\int_0^{L_k} S^{k-1} dz} \quad (2.102)$$

- Résistance au passage de l'air :

$$\frac{1}{R_s} = \frac{E_p}{8\pi \eta S_t} \sum_{k=1}^F \frac{N_k}{\int_0^{L_k} S^{k-2} dz} \quad (2.103)$$

- Paramètre s_t :

$$s_t = \left(\frac{R_s \Omega}{k_s} \right)^{1/2} \frac{\sum_{k=1}^F N_k \int_0^{L_k} S^k dz}{\sum_{k=1}^F N_k \sqrt{8 \eta \pi} \int_0^{L_k} S^{k1/2} dz} \quad (2.104)$$

- Paramètre s_v :

$$s_v = \left(\frac{k_s}{R_s \Omega} \right)^{1/2} \times \frac{\sum_{k=1}^F \frac{N_k \sqrt{8 \eta \pi} \int_0^{L_k} S^{k-3/2} dz}{\left(\int_0^{L_k} S^{k-1} dz \right)^2}}{\sum_{k=1}^F \frac{N_k}{\int_0^{L_k} S^{k-1} dz}} \quad (2.105)$$

2.3.3 Impédance de surface

Celle-ci peut s'écrire pour une large gamme de fréquence. Il suffit de corriger les fonctions macroscopiques de densité et de compressibilité classiques (l'exposant m signifie qu'il s'agit de grandeurs macroscopiques) en utilisant les paramètres s_t et s_v . Nous rappelons l'expression de ces quantités que nous utiliserons au chapitre suivant pour valider les nouvelles formulations des paramètres macroscopiques classiques et supplémentaires :

$$\rho^m(\omega) = \frac{k_s \rho_c}{\Omega} \left[1 + \frac{R_s \Omega}{i \omega \rho_o k_s} G(\lambda) \right] \quad (2.106)$$

$$C^m(\omega) = \frac{\Omega}{\gamma P_o} \left[\gamma - (\gamma - 1) \left(1 + \frac{R_s \Omega}{i \omega \rho_o k_s \sqrt{N_{pr}}} G(\lambda_T) \right)^{-1} \right] \quad (2.107)$$

où les nombres sans dimension λ et λ_T sont corrigés par les paramètres s_t et s_v définis pour le modèle en parallèle :

$$\lambda = s_v \left(\frac{8 k_s \rho_o \omega}{R_s \Omega} \right)^{1/2} \quad (2.108)$$

$$\lambda_T = s_t \left(\frac{8 k_s \rho_o \omega N_{pr}}{R_s \Omega} \right)^{1/2} \quad (2.109)$$

Nous en déduisons l'écriture du nombre d'onde et de l'impédance caractéristique (§I.2) :

- Nombre d'onde :

$$m = i \omega [\rho^m(\omega) C^m(\omega)]^{1/2} \quad (2.110)$$

- Impédance caractéristique :

$$Z^c = \left[\frac{\rho^m(\omega)}{C^m(\omega)} \right]^{1/2} \quad (2.111)$$

Nous en déduisons l'impédance de surface :

$$Z^s = -i Z^c \cotg(im E_p) \quad (2.112)$$

2.4 Conclusion

Nous avons développé deux modélisations relativement simples permettant de traiter l'influence de discontinuités microscopiques sur les qualités acoustiques de milieux poreux.

La première dite en série consiste à discrétiser le pore en une série de conduits droits distribués aléatoirement. En formulant le problème en terme de matrices de transfert, il apparaît pour les hautes fréquences quatre paramètres supplémentaires qui corrigent les effets dus aux changements de sections et au désordre.

Une discrétisation fine du pore nous permet de préciser également le domaine de validité des propriétés H1 et H2. Celles-ci s'appliquent à l'échelle du pore si nous nous limitons à l'ordre 1. Les paramètres caractérisant les discontinuités n'apparaissent pas à ce niveau. Ceux-ci se manifestent à l'ordre 2 où il est nécessaire de limiter les propriétés H1 et H2 à l'échelle du conduit élémentaire.

Cette approche est intéressante car elle permet de retrouver les paramètres s_t et s_v introduits précédemment par le modèle Champoux&Stinson et d'en dégager deux autres $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ associés particulièrement au désordre. Il s'agit là d'une information importante puisqu'elle signifie que les qualités acoustiques d'un milieu poreux peuvent être différentes pour une même famille de conduits élémentaires, en modifiant leurs positions respectives le long du pore.

Parallèlement à cela, l'influence des discontinuités a été prise en compte à l'aide d'inductances. Nous parvenons ainsi à enrichir l'écriture des paramètres s_v et s_t en indiquant que les valeurs de ces quantités ne permettent qu'un rapport $\frac{s_t}{s_v}$ supérieur à 1.

De manière à obtenir un bon compromis entre généralité et rigueur, nous avons supposé que les propriétés H1 et H2 sont valables à l'échelle du pore dans le cadre du modèle en parallèle. Celui-ci consiste à généraliser le modèle en série à une situation où les pores sont de natures différentes. En formulant le problème en terme de matrices admittance puis de transfert, nous introduisons de nouvelles définitions pour les paramètres physiques macroscopiques. Ceux-ci prennent donc en compte la nature sinueuse et les étranglements du réseau poreux ainsi que la présence de pores différents.

L'écriture des fonctions macroscopiques de densité et de compressibilité ainsi que l'impédance est donnée pour un régime fréquentiel suffisamment large.

Le chapitre suivant illustrera ces résultats, et nous constaterons que la nouvelle formulation des paramètres supplémentaires donne un rapport $\frac{s_t}{s_v}$ qui évolue dans

un régime large, en étant supérieur à 1 lorsque les pores ont une géométrie voisine et inférieur à 1 lorsque ce n'est plus le cas.

Chapitre 3

Simulations

Ce chapitre sera consacré à quelques simulations permettant d'illustrer les résultats établis aux deux chapitres précédents. Nous nous intéresserons particulièrement aux milieux constitués de pores de natures différentes décrits par la modélisation dite en parallèle. Il s'agira de comparer le modèle discret supposé donner une solution exacte et le modèle classique généralisé par les paramètres supplémentaires s_t et s_v . Nous indiquerons ainsi les limites d'une approche généralisée et les avantages du modèle discret.

Nous donnerons dans un premier temps les principes du calcul de la solution discrète en rappelant les hypothèses qu'elle considère (§3.1). Celle-ci tient compte des caractéristiques du modèle en série et considère que le milieu poreux peut être constitué de pores différents, non connectés et de sections variables. Les effets associés aux discontinuités sont importants lorsque les fréquences considérées sont proches de la fréquence de coupure du mode plan [Sergent, 1996]. Pour un conduit de section circulaire et de rayon $0.001m$, celle-ci est de l'ordre de $6 \cdot 10^7 H_z$. Les fréquences que nous traiterons sont inférieures à $5000 H_z$. Aussi, nous supposons que les réflexions dues aux changements de sections sont négligeables et nous considérerons que les inductances qui leurs sont associées sont nulles.

Les premières simulations consisteront à appliquer le calcul discret à un milieu poreux constitué de pores de section constante, tous identiques (§3.2). Le calcul sera traité pour différentes longueurs de conduits élémentaires et nous constaterons que les propriétés H1 et H2 sont valables à l'échelle du pore uniquement, pour les basses fréquences et que le calcul discret nécessite un maillage suffisamment fin.

Nous aborderons alors l'analyse des différents modèles pour des milieux poreux composés de pores identiques et de section variable (§3.3). Ces variations seront calculées par l'intermédiaire d'une loi normale caractérisée par un écart-type faible. Les pores sont donc assimilés à des quasicylindres.