

# Chapitre 1

## Approche fonctionnelle

Dans cette catégorie, on regroupe les modèles basés sur une représentation fonctionnelle des contraintes, de l'énergie libre et de l'entropie (c'est à dire qu'elles dépendent de l'histoire des déformations et de la température [Sidoroff, 1975<sub>a</sub>]) en partant des modèles linéaires (Coleman et Noll [Coleman & Noll, 1961a]) pour arriver aux modèles non linéaires (Lockett [Lockett, 1972]). Nous évoquerons ensuite la notion de temps réduit introduite par Schapery [Schapery, 1969] avant de terminer par le modèle de Christensen [Christensen, 1980] qui est une extension de l'hyperélasticité à la viscoélasticité.

### 1.1 Viscoélasticité linéaire finie

Dans le cadre des modèles viscoélastiques par approche fonctionnelle, on se restreint au cas isotherme. Le point de départ de ces modèles est la relation (.31) liant l'histoire des contraintes à celle des déformations que nous rappelons ci-dessous:

$$\text{I.1} \quad \underline{\underline{\Pi}}(t) = \mathcal{F} \left[ \begin{array}{c} t \\ \underline{\underline{\Delta}}(\tau) \\ \tau = -\infty \end{array} \right]$$

En réécrivant cette relation en terme de contrainte de Cauchy, comme l'ont fait Green et Rivlin [Green & Rivlin, 1957], [Pipkin, 1964], on obtient:

$$\text{I.2} \quad \underline{\underline{\sigma}}(t) = \frac{1}{J} \underline{\underline{\mathbb{F}}}(t) \cdot \underline{\underline{\Pi}}(t) \cdot {}^t\underline{\underline{\mathbb{F}}}(t) = \frac{1}{J} \underline{\underline{\mathbb{F}}}(t) \cdot \mathcal{F} \left[ \begin{array}{c} t \\ \underline{\underline{\Delta}}(\tau) \\ \tau = -\infty \end{array} \right] \cdot {}^t\underline{\underline{\mathbb{F}}}(t)$$

Pour supprimer la difficulté issue des grandes déformations, Green et Rivlin [Green & Rivlin, 1957], [Pipkin, 1964] ont superposé ces grandes déformations à de petites déformations, de telle sorte que la réponse globale du matériau puisse être considérée comme linéaire.

◇ **Petites déformations superposées à de grandes déformations**

Si les déformations sont suffisamment petites, le comportement peut être considéré comme linéaire, même si elles sont superposées à de grandes déformations. Notons  $\underline{\underline{\Delta}}_0$  cette grande déformation. Green et Rivlin expriment alors la loi de comportement, écrite en contrainte de Cauchy, en fonction de trois tenseurs, relatifs à la déformation  $\underline{\underline{\Delta}}_0$ , qu'ils définissent ainsi:

$$\text{I.3} \quad \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\mathbb{F}}}_{ip}^0(t) = \frac{\partial x_i(t)}{\partial x_p^0} \\ 2\underline{\underline{\Delta}}_{ij}^0(\tau) = \frac{\partial x_k(\tau)}{\partial x_i^0} \frac{\partial x_k(\tau)}{\partial x_j^0} - \delta_{ij} \\ \underline{\underline{\mathbb{B}}}_{ij}^0 = \frac{\partial x_i^0}{\partial X_p} \frac{\partial x_j^0}{\partial X_p} \end{array} \right.$$

où  $x_i^0(X_p)$  sont les coordonnées de la particule  $X_p$  à un instant particulier de la déformation  $\underline{\underline{\Delta}}_0$ .

En termes de  $\underline{\underline{\Delta}}^0(\tau)$  et  $\underline{\underline{\mathbb{B}}}^0(\tau)$ , la relation développée à l'ordre 1 (I.2), écrite en contrainte de Cauchy, pour des petites déformations superposées à de grandes déformations dans un matériau initialement isotrope, prend la forme [Pipkin & Rivlin, 1961]:

$$\text{I.4} \quad \underline{\underline{\sigma}}(t) = \underline{\underline{\mathbb{F}}}^0(t) \cdot \left\{ \underline{\underline{T}}_0(\underline{\underline{\mathbb{B}}}^0) + \underline{\underline{T}}_1 \left[ \begin{array}{c} \underline{\underline{\Delta}}^0(\tau) \\ \tau = -\infty \end{array} ; \underline{\underline{\mathbb{B}}}^0 \right] \right\} \cdot {}^t \underline{\underline{\mathbb{F}}}^0(t)$$

où  $\underline{\underline{T}}_0$  est une fonction tensorielle des invariants de  $\underline{\underline{\mathbb{B}}}^0$  et  $\underline{\underline{T}}_1$  une fonctionnelle des invariants de  $\underline{\underline{\mathbb{B}}}^0$  et de l'histoire de  $\underline{\underline{\Delta}}^0$ .

**Remarque 1.1** *On remarque que le déterminant  $J$  de  $\underline{\underline{\mathbb{F}}}$  de la relation (I.2) n'apparaît pas dans la relation (I.4). Il est tout simplement inclus dans les termes  $\underline{\underline{T}}_{i(i=0,1)}$ .*

**Remarque 1.2** *La relation (I.4) peut être réécrite en contrainte de Piola-Kirchhoff 2, ce qui donne:*

$$\text{I.5} \quad \underline{\underline{\Pi}}(t) = \left\{ \underline{\underline{T}}_0(\underline{\underline{\mathbb{B}}}^0) + \underline{\underline{T}}_1 \left[ \begin{array}{c} \underline{\underline{\Delta}}^0(\tau) \\ \tau = -\infty \end{array} ; \underline{\underline{\mathbb{B}}}^0 \right] \right\}$$

Toutefois, cette vision est limitée par le fait que la déformation doit être petite. Pour pallier à cet inconvénient, Coleman et Noll ont considéré la configuration actuelle comme étant la configuration de référence (approche eulérienne) pour décrire l'histoire de la déformation car, souvent, soit on ne connaît pas la configuration de référence naturelle du matériau, soit il y a plusieurs états d'équilibre possibles sous contrainte nulle, soit la configuration naturelle n'est pas celle que l'on veut privilégier.

#### ◇ Le modèle de Coleman et Noll

Au lieu d'introduire un gradient de transformation et un tenseur «grandes déformations» définis par rapport à une grande déformation, Coleman et Noll [Coleman & Noll, 1961a] définissent une nouvelle mesure de déformation à partir du gradient relatif. Ils remplacent donc les relations (I.3) par:

$$\text{I.6} \quad \begin{cases} \underline{\underline{\mathbb{F}}}_t(\tau) = \left\{ \frac{\partial x_i(\tau)}{\partial x_j(t)} \right\} \\ \underline{\underline{\mathbb{C}}}_t(\tau) = {}^t\underline{\underline{\mathbb{F}}}_t(\tau) \underline{\underline{\mathbb{F}}}_t(\tau) \end{cases}$$

Selon la valeur de  $\tau$ , ces deux tenseurs prennent des valeurs particulières, à savoir:

$$\text{I.7} \quad \begin{cases} \underline{\underline{\mathbb{F}}}_t(\tau) = \left\{ \begin{array}{ll} \underline{\underline{\mathbb{F}}}^{-1} & \text{si } \tau > 0 \\ \underline{\underline{\mathbb{I}}} & \text{si } \tau \leq 0 \end{array} \right\} \\ \underline{\underline{\mathbb{C}}}_t(\tau) = \left\{ \begin{array}{ll} {}^t\underline{\underline{\mathbb{F}}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbb{F}}}^{-1} = \underline{\underline{\mathbb{B}}}^{-1} & \text{si } \tau > 0 \\ \underline{\underline{\mathbb{I}}} & \text{si } \tau \leq 0 \end{array} \right\} \end{cases}$$

Coleman et Noll [Coleman & Noll, 1961a] écrivent la loi de comportement en terme de tenseur de contrainte de Cauchy modifié  $\underline{\underline{\sigma}}(t) = {}^t\underline{\underline{\mathbf{R}}}(t) \cdot \underline{\underline{\sigma}}(t) \cdot \underline{\underline{\mathbf{R}}}(t)$  en fonction du tenseur  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}_t(\tau) = {}^t\underline{\underline{\mathbf{R}}}(t) \cdot \underline{\underline{\mathbb{C}}}_t(\tau) \cdot \underline{\underline{\mathbf{R}}}(t)$  ( $\underline{\underline{\mathbf{R}}}$  étant la rotation de la matière).

En utilisant la théorie des espaces de Hilbert, ils aboutissent à la loi de comportement, écrite à l'ordre 1, suivante:

$$\text{I.8} \quad \underline{\underline{\sigma}}(t) = \underline{\underline{T}}'_0(\underline{\underline{\mathbb{C}}}(t)) + \int_0^\infty \underline{\underline{T}}'_1(\underline{\underline{\mathbb{C}}}_t(t-s); \underline{\underline{\mathbb{C}}}(t)) ds$$

où  $\underline{\underline{T}}'_0$  et  $\underline{\underline{T}}'_1$  sont respectivement une fonction tensorielle et une fonctionnelle analogues à  $\underline{\underline{T}}_0$  et  $\underline{\underline{T}}_1$  mais qui dépendent des invariants de  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}$  et de l'histoire de  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}_t$ .

**Remarque 1.3** En récrivant la relation (I.8) en terme de contrainte de Piola-Kirchhoff 2, on obtient:

$$\text{I.9} \quad \underline{\underline{\Pi}}(t) = \underline{\underline{T}}''_0(\underline{\underline{\mathbb{C}}}(t)) + \int_{-\infty}^t \underline{\underline{T}}''_1(\underline{\underline{\mathbb{C}}}(t); \underline{\underline{\mathbb{C}}}(t)) dt$$

Lorsque l'on applique le modèle de Coleman et Noll aux matériaux isotropes, il est plus pratique de prendre la configuration de référence comme étant *non déformée* [Noll, 1958], [Truesdell & Noll, 1965]. La contrainte est alors déterminée par l'histoire de la déformation et par la déformation actuelle seulement, à condition que l'on choisisse comme mesure de déformation actuelle le tenseur  $\underline{\underline{\mathbb{B}}}$  (ou  $\underline{\underline{\mathbb{V}}}$ ). Dans ce cas, les résultats issus de [Noll, 1958], [Truesdell & Noll, 1965] montrent que les équations constitutives (I.8) et (I.9) se réduisent respectivement à:

$$\text{I.10} \quad \underline{\underline{\alpha}}(t) = \underline{\underline{T}}'_0(\underline{\underline{\mathbb{B}}}(t)) + \int_0^\infty \underline{\underline{T}}'_1(\underline{\underline{\mathbb{C}}}(t-s); \underline{\underline{\mathbb{B}}}(t)) \, ds$$

$$\text{I.11} \quad \underline{\underline{\Pi}}(t) = \underline{\underline{T}}''_0(\underline{\underline{\mathbb{B}}}(t)) + \int_0^\infty \underline{\underline{T}}''_1(\underline{\underline{\mathbb{C}}}(\tau); \underline{\underline{\mathbb{B}}}(t)) \, d\tau$$

où les fonctions tensorielles  $\underline{\underline{T}}'_0$  et  $\underline{\underline{T}}''_0$  et les fonctionnelles  $\underline{\underline{T}}'_1$  et  $\underline{\underline{T}}''_1$  sont isotropes.

On remarque que la relation (I.11) s'apparente à la relation (I.5) déterminée par Green et Rivlin. Dans le paragraphe suivant, on montre que l'on peut passer de l'une à l'autre moyennant certaines considérations.

#### ◇ Liens entre les modèles de Green & Rivlin et de Coleman & Noll

On présente ici les arguments de Coleman et Noll [Coleman & Noll, 1961a], [Pipkin, 1964] qui ont permis d'établir des liens entre les deux formulations.

Dans la théorie de Green et Rivlin, la déformation stabilisée  $\underline{\underline{\Delta}}_0$  peut être choisie de telle sorte que  $\underline{\underline{\Delta}}(\tau) - \underline{\underline{\Delta}}_0$  soit petite dans un intervalle de temps  $T$  suffisamment long précédent l'instant  $t$  où la contrainte est mesurée. Dans ce cas, la relation (I.5) est toujours applicable, que le matériau soit dans l'état stabilisé ou pas. En particulier, pour toute valeur de  $t$ , on peut choisir  $\underline{\underline{\Delta}}_0$  comme étant la valeur de  $\underline{\underline{\Delta}}(\tau)$  à l'instant  $t$ , c'est à dire  $\underline{\underline{\Delta}}_0 = \underline{\underline{\Delta}}(t)$ . Par conséquent,  $\underline{\underline{D}}(\tau) = \underline{\underline{\Delta}}(\tau) - \underline{\underline{\Delta}}_0$  est la différence entre l'histoire de déformation actuelle  $\underline{\underline{\Delta}}(\tau)$  et l'histoire fictive d'une déformation stabilisée dans laquelle la déformation a toujours la valeur  $\underline{\underline{\Delta}}(t)$ . Avec ce choix de  $\underline{\underline{\Delta}}_0$ ,  $\underline{\underline{D}}(\tau)$  dépend paramétriquement de  $t$  (à travers le choix  $\underline{\underline{\Delta}}_0 = \underline{\underline{\Delta}}(t)$ ). On peut alors l'écrire  $\underline{\underline{D}}(\tau; t)$ , avec, par définition,  $\underline{\underline{D}}(t; t) = 0$ .  $\underline{\underline{D}}(\tau; t)$  peut être petit dans un long intervalle (en  $\tau$ ) précédant  $t$ . C'est en particulier le cas lorsque la déformation varie suffisamment lentement. Si on choisit  $x_i^0(X_p)$  comme étant les coordonnées des particules  $X_p$  à l'instant  $t$ , de sorte que  $x_i^0 = x_i(t)$ , alors les gradients  $\frac{\partial x_i^0}{\partial X_p}$  dépendent paramétriquement de  $t$ , mais ne sont pas des fonctions de  $\tau$ . Avec ce choix de  $x_i^0$ , la déformation relative  $\underline{\underline{\Delta}}^0(\tau)$  de la relation (I.3) doit être notée  $\underline{\underline{\Delta}}^0(\tau; t)$  et est égale au tenseur de Green-Lagrange  $\underline{\underline{\Delta}}(\tau; t)$  et le tenseur des dilatations gauche relatif  $\underline{\underline{\mathbb{B}}}^0$  de la relation (I.3) doit être noté  $\underline{\underline{\mathbb{B}}}(t)$ , tenseur des dilatations gauche (non relatif).

Dans ce cas, le gradient de transformation  $\underline{\underline{\mathbb{F}}}^0$  de la loi de comportement (I.4) vaut:  $\underline{\underline{\mathbb{F}}}^0 = \frac{\partial x_i(t)}{\partial x_p^0} = \delta_{ip}$ . Cette loi de comportement devient alors:

$$\text{I.12} \quad \underline{\underline{\sigma}}(t) = \left\{ \underline{\underline{T}}_0(\underline{\underline{\mathbb{B}}}) + \underline{\underline{T}}_1 \left[ \begin{array}{c} t \\ \underline{\underline{\Delta}}(\tau; t) \\ \tau = -\infty \end{array} ; \underline{\underline{\mathbb{B}}} \right] \right\}$$

Cette relation peut être réécrite en fonction du tenseur de Cauchy-Green droit, ce qui donne:

$$\text{I.13} \quad \underline{\underline{\sigma}}(t) = \left\{ \underline{\underline{T}}_0(\underline{\underline{\mathbb{B}}}) + \underline{\underline{T}}_1 \left[ \begin{array}{c} t \\ \underline{\underline{\mathbb{C}}}(\tau; t) \\ \tau = -\infty \end{array} ; \underline{\underline{\mathbb{B}}} \right] \right\}$$

Cette relation peut être comparée à la relation (I.10) correspondant à la loi de comportement en viscoélasticité linéaire finie d'un matériau isotrope établie par Coleman et Noll.

Le modèle de Green-Rivlin est plus adapté aux problèmes des petites vibrations. En revanche, celui de Coleman et Noll est plus approprié pour les problèmes où la déformation varie lentement tout en étant grande ce qui en fait un modèle plus avantageux pour les grandes déformations qui sont l'objet de ce travail.

Une application des théories de Green et Rivlin et de Coleman et Noll est le modèle de Bernstein, Kearsley et Zapas (communément appelé BKZ) qui pose le problème de l'identification (expérimentale) des fonctionnelles. Dans lesdites théories, l'histoire de contrainte est une fonctionnelle de l'histoire du gradient de transformation. L'inconvénient d'une telle écriture est que, à partir des résultats d'une histoire du gradient de transformation, on ne peut pas prédire les résultats d'une autre histoire du gradient de transformation. Ainsi, le premier point faible des deux théories est d'avoir admis (et donc contourné) la question de savoir dans quel sens une histoire de déformation peut en approcher une autre. D'autre part, les modèles de Green & Rivlin et de Coleman & Noll génèrent un nombre élevé de caractéristiques matérielles à identifier. L'expérimentateur ne peut pas effectuer un nombre indéfini ou infini (même dénombrable) d'essais. Par conséquent, il faudrait limiter le nombre de paramètres du matériau à un nombre fini et petit en ajoutant à la théorie des hypothèses empiriques raisonnables. C'est en partant des modèles de Green et Rivlin et de Coleman et Noll et en se basant sur des hypothèses justifiées par l'expérience, que Bernstein, Kearsley et Zapas ont construit leur modèle que nous présentons au paragraphe suivant.

## 1.2 Le modèle de Bernstein, Kearsley et Zapas (BKZ)

Souvent, les matériaux viscoélastiques sont modélisés par l'adjonction de termes visqueux à la théorie des solides élastiques (modèle classique de Voigt) ou par l'adjonction de termes élastiques à la théorie des fluides (modèle de Maxwell). Mais cette vision n'est plus valable pour de fortes non linéarités.

Bernstein, Kearsley et Zapas [Bernstein *et al.*, 1963] ont développé une théorie (le modèle BKZ) pour les matériaux incompressibles, sous deux formes: la première, valable pour les solides et la seconde, pour les fluides. La première est valable pour les élastomères aux temps courts et à de faibles températures alors que la seconde est applicable aux temps longs et à des températures élevées.

### 1.2.1 Solide incompressible

La première forme du modèle BKZ est basée sur deux hypothèses:

- La théorie de Green et Rivlin permet d'écrire la fonctionnelle  $\mathcal{F}(\underline{\underline{\Delta}}(\tau), t)$  reliant la contrainte de Cauchy (ou de Piola-Kirchhoff) à la déformation (relation (I.2)) sous forme polynomiale de degré un ce qui, pour un matériau isotrope, donne:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\underline{\underline{\Delta}}(\tau), t) &= M \underline{\underline{1}} + \chi \operatorname{tr} \underline{\underline{\Delta}}(t) \underline{\underline{1}} + 2\mu \underline{\underline{\Delta}}(t) \\ \text{I.14} \quad &- \int_{-\infty}^t a(t-\tau) \operatorname{tr} \underline{\underline{\Delta}}(\tau) \underline{\underline{1}} \, d\tau - 2 \int_{-\infty}^t b(t-\tau) \underline{\underline{\Delta}}(\tau) \, d\tau \end{aligned}$$

où:

$$\begin{cases} M, \chi \text{ et } \mu \text{ sont des constantes du matériau} \\ a \text{ et } b \text{ sont des fonctions du temps et du matériau} \end{cases}$$

- On suppose qu'à l'équilibre, le comportement est défini par une densité d'énergie de déformation [Signorini, 1955]:

$$\text{I.15} \quad W = M I_1^\Delta + \frac{1}{2} A I_1^{\Delta^2} + B I_2^\Delta$$

avec:

$$\begin{cases} I_1^\Delta = \operatorname{tr} \underline{\underline{\Delta}}, I_2^\Delta = \operatorname{tr} \underline{\underline{\Delta}}^2, A = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t), B = \lim_{t \rightarrow \infty} B(t) \\ A(t) = \chi - \int_0^t a(\tau) \, d\tau, B(t) = \mu - \int_0^t b(\tau) \, d\tau \end{cases}$$

Ceci nous conduit donc à écrire la contrainte de Cauchy, pour un essai de traction/relaxation uniaxiale d'élongation  $\lambda$  sous la forme:

$$\text{I.16} \quad \frac{\sigma(t)}{\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}} = (\lambda^2 - 1) \left[ \frac{1}{2} A(t) + B(t) \right] + \frac{1}{\lambda} [A(t) + B(t)] + M - A(t)$$

qui vérifie la condition d'équilibre sans force de volume:

$$\text{I.17} \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0$$

Le comportement est donc identifié par deux intégrales simples  $A(t)$  et  $B(t)$  et une constante  $M$ .

### 1.2.2 Fluides incompressibles

La seconde forme du modèle BKZ pour les fluides incompressibles, est inspirée des travaux de Coleman et Noll [Coleman & Noll, 1961a] en utilisant un potentiel élastique. On utilise le concept de fonction d'énergie de déformation associée à la théorie des déformations élastiques finies et on l'incorpore dans la théorie des fluides de Coleman et Noll [Coleman & Noll, 1961a] en considérant toutes les configurations passées comme configurations préférentielles. Bernstein *et al.* définissent un gradient de transformation à l'instant  $t$  par rapport à la configuration à l'instant  $\tau$  par:

$$\mathbb{F}_{ij}(t, \tau) = \left[ \frac{\partial x_i(t)}{x_j(\tau)} \right]$$

qui s'apparente au gradient relatif  $\underline{\underline{\mathbb{F}}}(\tau)$  introduit par Coleman & Noll (relation (I.6)).

Quant au tenseur de déformation associé, il s'écrit:

$$\Delta_{ij}(t, \tau) = \frac{1}{2} [\mathbb{C}_{ij}(t, \tau) - \delta_{ij}]$$

De même,  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}(t, \tau)$  s'apparente au tenseur  $\underline{\underline{\mathbb{C}}}_i(\tau)$  introduit par Coleman & Noll (relation (I.6)).

En supposant l'existence d'une fonction d'énergie  $\Psi$  qui, en vertu du principe d'indifférence matérielle [Noll, 1958], ne dépend que des deux premiers invariants de  $\underline{\underline{\Delta}}$ , on a:

$$\Psi = \Psi [I_1^\Delta(t, \tau), I_2^\Delta(t, \tau), t - \tau]$$

qui, à l'ordre 2, s'écrit:

$$\Psi = m(t - \tau) I_1^\Delta + \frac{a(t - \tau)}{2} I_1^{\Delta^2} + b(t - \tau) I_2^\Delta$$

où  $a(t - \tau)$ ,  $b(t - \tau)$  et  $m(t - \tau)$  sont des fonctions du matériau.

On obtient alors une contrainte pour un essai de traction/relaxation uniaxiale d'élongation  $\lambda$  de la forme [Bernstein *et al.*, 1963]:

$$\text{I.18} \quad \frac{\sigma(t)}{\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}} = (\lambda^2 - 1) \left[ \frac{1}{2} A(t) + B(t) \right] + \frac{1}{\lambda} [A(t) + B(t)] + M(t) - A(t)$$

avec:

$$A(t) = \int_t^\infty a(\tau) d\tau, \quad B(t) = \int_t^\infty b(\tau) d\tau, \quad M(t) = \int_t^\infty m(\tau) d\tau$$

On remarque que les relations (I.16) et (I.18) ont une apparence identique. Toutefois, il convient de remarquer que:

- A, B et M n'ont pas la même signification dans les deux cas
- pour les fluides, M dépend du temps
- pour les fluides:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} B(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} M(t) = 0$$

### 1.2.3 Identification expérimentale

Les relations (I.16) et (I.18), qui s'appliquent à des essais de traction/relaxation, peuvent s'écrire:

$$\text{I.19} \quad \sigma_R(t) = \frac{\sigma(t)}{\lambda^2 - \frac{1}{\lambda}} = (\lambda^2 - 1)\alpha(t) + \frac{1}{\lambda}\beta(t) + \gamma(t)$$

$$= \left[ (\lambda^2 - 1)R(t) + \frac{1}{\lambda} \right] \beta(t) + \gamma(t)$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \alpha(t) = \frac{1}{2}A(t) + B(t), & \beta(t) = A(t) + B(t) \\ \gamma(t) = M(t) - A(t), & R(t) = \frac{\alpha(t)}{\beta(t)} \end{cases}$$

En faisant varier  $\lambda$ , on peut représenter l'évolution de  $\sigma_R(t)$  en fonction de  $\frac{1}{\lambda}$ . Chacune de ces courbes admet un minimum, observé également expérimentalement, donné par:

$$\text{I.20} \quad \frac{1}{\lambda} = \left[ \frac{2\alpha(t)}{\beta(t)} \right]^{\frac{1}{3}}$$

Une fois ce minimum déterminé, on peut calculer  $R(t)$ .

D'autre part, en traçant l'évolution de  $\sigma_R(t)$  en fonction de  $(\lambda^2 - 1)R(t) + \frac{1}{\lambda}$ , l'équation (I.19) montre que l'on obtient une droite de pente  $\beta(t)$  coupant l'axe des ordonnées en  $\gamma(t)$ .

Ainsi, les coefficients  $\alpha(t)$ ,  $\beta(t)$  et  $\gamma(t)$  sont identifiés et, par conséquent,  $A(t)$ ,  $B(t)$  et  $M(t)$  également. Selon la dépendance de  $M$  par rapport au temps, on pourra dire si le comportement est de type fluide ou solide.

### 1.2.4 Limitations

Malgré une bonne concordance entre théorie et expérience, les auteurs émettent cependant des réserves dans la mesure où un seul type d'expériences ne peut pas être une preuve formelle de la justesse du modèle. Par exemple, dans le cas de l'hyperélasticité, ce type d'expériences s'avère insuffisant et ne conduit pas à une bonne identification du matériau.

On peut ajouter à ces réserves d'autres limites du modèle telles que la non linéarité qui n'est que géométrique et la restriction au cas incompressible.

Une des limites de ces théories issues de la viscoélasticité linéaire finie est que les fonctionnelles donnant la contrainte d'un matériau simple sont linéaires. C'est pourquoi Coleman et Noll [Coleman & Noll, 1961a] ont introduit la viscoélasticité d'ordre supérieur qui fait l'objet du paragraphe suivant.

## 1.3 Viscoélasticité d'ordre supérieur

### 1.3.1 Viscoélasticité d'ordre 2

Dans cette partie et afin de remédier à l'inconvénient précédent, la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  de la relation (I.1) est approchée par une fonctionnelle polynomiale d'ordre 2. Ceci nous conduit à écrire la relation (I.9) sous la forme [Coleman & Noll, 1961a]:

$$\underline{\underline{\Pi}}(t) = \underline{\underline{T}}_0''(\underline{\underline{\mathbb{C}}}(t)) + \int_{-\infty}^t \underline{\underline{T}}_1''(\underline{\underline{\mathbb{C}}}(\tau); \underline{\underline{\mathbb{C}}}(t)) d\tau$$

**I.21**

$$+ \mathcal{D} \left[ \begin{array}{c} t \\ \underline{\underline{\mathbb{C}}}(\tau) \\ s = -\infty \end{array} ; \underline{\underline{\mathbb{C}}}(t) \right] + \mathcal{R}' \left[ \begin{array}{c} t \\ \underline{\underline{\mathbb{C}}}(\tau) \\ \tau = -\infty \end{array} ; \underline{\underline{\mathbb{C}}}(t) \right]$$

$$\text{avec } \lim_{\|\underline{\underline{\mathbb{C}}}(\tau)\| \rightarrow 0} \|\underline{\underline{\mathbb{C}}}(\tau)\|^{-2} \mathcal{R}' \left[ \begin{array}{c} t \\ \underline{\underline{\mathbb{C}}}(\tau) \\ \tau = -\infty \end{array} ; \underline{\underline{\mathbb{C}}}(t) \right] = 0$$

La fonctionnelle quadratique  $\mathcal{D}$  peut être exprimée en termes d'opérateurs symétriques bornés dans l'espace de Hilbert. Une étude thermodynamique simple montre que si l'on considère deux essais de cisaillement à élongation opposée, la fonctionnelle  $\mathcal{D}$  est identiquement nulle et on se retrouve dans le cas de la viscoélasticité d'ordre 1. D'où l'intérêt de faire un développement d'ordre supérieur ( $n > 2$ ) avec un résidu d'ordre  $o(\|\underline{\underline{C}}(\tau)\|^n)$  ce que Lockett [Lockett, 1965] s'est intéressé à faire et qui fait l'objet du paragraphe suivant.

### 1.3.2 Viscoélasticité d'ordre 3

#### ◇ Loi de comportement

Lockett [Lockett, 1965] a étendu les travaux de Noll [Noll, 1958] et de Green et Rivlin [Green & Rivlin, 1957] en développant des équations constitutives, pour des matériaux simples isotropes [Noll, 1958] jusqu'à l'ordre 3. Un tel développement nécessite douze fonctions caractéristiques (de relaxation ou de fluage selon le cas). En utilisant une généralisation du théorème de Cayley-Hamilton, le tenseur  $\underline{\underline{Q}}$ , qui est soit une contrainte (de Cauchy ou de Piola-Kirchhoff) soit une déformation (Green-Lagrange), s'écrit, pour un matériau initialement isotrope:

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{Q}}(t) = & \int_0^t \left\{ \underline{\underline{1}}\psi_1 T_1 + \psi_2 \underline{\underline{M}}_1 \right\} d\tau_1 \\
 & + \int_0^t \int_0^t \left\{ \underline{\underline{1}}\psi_3 T_1 T_2 + \underline{\underline{1}}\psi_4 T_{12} + \psi_5 T_1 \underline{\underline{M}}_2 + \psi_6 \underline{\underline{M}}_1 \cdot \underline{\underline{M}}_2 \right\} d\tau_1 d\tau_2 \\
 \text{I.22} \quad & + \int_0^t \int_0^t \int_0^t \left\{ \underline{\underline{1}}\psi_7 T_{123} + \underline{\underline{1}}\psi_8 \underline{\underline{M}}_1 T_{23} + \psi_9 T_1 T_2 \underline{\underline{M}}_3 + \psi_{10} T_{12} \underline{\underline{M}}_3 \right. \\
 & \left. + \psi_{11} T_1 \underline{\underline{M}}_2 \cdot \underline{\underline{M}}_3 + \psi_{12} \underline{\underline{M}}_1 \cdot \underline{\underline{M}}_2 \cdot \underline{\underline{M}}_3 \right\} d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots
 \end{aligned}$$

Dans cette relation, on a:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 T_\alpha = tr \underline{\underline{P}}(\tau_\alpha), T_{\alpha\beta} = tr \left[ \underline{\underline{P}}(\tau_\alpha) \cdot \underline{\underline{P}}(\tau_\beta) \right], T_{\alpha\beta\gamma} = tr \left[ \underline{\underline{P}}(\tau_\alpha) \cdot \underline{\underline{P}}(\tau_\beta) \cdot \underline{\underline{P}}(\tau_\gamma) \right] \\
 \underline{\underline{M}}_\alpha = \underline{\underline{P}}(\tau_\alpha), \underline{\underline{P}} \text{ est le dual de } \underline{\underline{Q}} \\
 \psi_1, \psi_2 = f_1(t - \tau_1), \psi_3 \dots \psi_6 = f_2(t - \tau_1, t - \tau_2) \\
 \psi_7 \dots \psi_{12} = f_3(t - \tau_1, t - \tau_2, t - \tau_3) \\
 \psi_1 \dots \psi_{12} \text{ sont des fonctions de relaxation ou de fluage}
 \end{array} \right.$$

### ◇ Interprétation des tenseurs $\underline{\underline{P}}$ et $\underline{\underline{Q}}$ et identification expérimentale

Lorsque l'on effectue des essais de fluage,  $\underline{\underline{Q}}$  s'apparente à une déformation (Green-Lagrange) et  $\underline{\underline{P}}$  à une contrainte (Cauchy ou son déviateur dans le cas incompressible).

L'identification se fait à l'aide d'essais simples si  $\underline{\underline{\mathbf{R}}} = \underline{\underline{\mathbf{1}}}$ . En revanche, les essais deviennent difficiles à mettre en oeuvre si  $\underline{\underline{\mathbf{R}}} \neq \underline{\underline{\mathbf{1}}}$ .

### ◇ Limitations

L'inconvénient majeur d'une telle approche réside dans l'identification des paramètres. En effet, si de simples expériences de fluage ou de relaxation suffisent à identifier le comportement, leur nombre reste cependant très élevé.

Une autre alternative de l'approche fonctionnelle est de construire les lois constitutives à partir d'un principe de Boltzmann modifié. C'est la voie suivie par Leaderman et Schapery et que nous présentons maintenant.

## 1.4 Extension du principe de superposition de Boltzmann

### 1.4.1 Le modèle de Leaderman

Leaderman [Leaderman, 1962] a voulu étendre la non linéarité au cas des petites déformations [Ward, 1985] et a basé son interprétation sur le principe de superposition de Boltzmann.

Leaderman [Leaderman, 1962],[Ward, 1985] a développé sa théorie unidimensionnelle à partir d'un certain nombre de constatations expérimentales:

- Il a constaté que la fonction de fluage était différente selon le niveau de contrainte (figure 1.1a),
- ensuite, il a remarqué que les fonctions de fluage et de relaxation coïncidaient pour un même niveau de contrainte (figures 1.1a et 1.1b),
- enfin, il a constaté que chacune des fonctions de fluage et de relaxation étaient égales aux temps très courts, quel que soit le niveau de contrainte (figures 1.1a et 1.1b).

Il a émis deux explications à ces constatations:

- Il y a une déformation élastique instantanée proportionnelle à la contrainte
- Le fluage et la relaxation sont des fonctions uniques de la contrainte.

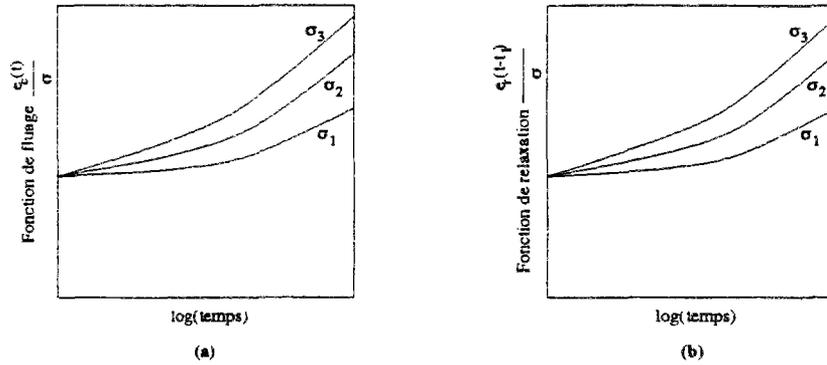


FIG. 1.1 - Comparaison entre fonctions de fluage et de relaxation pour différents niveaux de contrainte [Ward, 1985]

Ceci l'a conduit à proposer un principe de superposition modifié (uniaxial):

$$I.23 \quad \varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} + \int_{-\infty}^t \frac{df(\sigma)}{d\tau} (t - \tau) d\tau$$

où  $f(\sigma)$  est une fonction empirique de la contrainte uniaxiale  $\sigma$ .

Toutefois, ce principe est limité dans ces applications car il ne décrit pas les comportements pour des chargements plus complexes que le fluage et la relaxation. De plus, il fait l'hypothèse de décomposition multiplicative des noyaux qui n'est pas toujours applicable aux matériaux réels.

### 1.4.2 Le temps réduit de Schapery

Schapery [Schapery, 1969] a essayé d'utiliser le principe de Boltzmann généralisé par Leaderman [Leaderman, 1962], [Ward, 1985] afin de tenir compte de la non linéarité issue de la dépendance en température.

#### ◇ Temps réduit en contrainte

Schapery [Schapery, 1969], [Ward, 1985] généralise la loi de comportement unidimensionnelle (I.23) sous la forme:

$$I.24 \quad \underline{\underline{\varepsilon}}(t) = g_0 \underline{\underline{J}}_{\underline{\underline{0}}} : \underline{\underline{\sigma}}(t) + g_1 \int_{-\infty}^t \underline{\underline{\Delta J}}(\psi - \psi') : \frac{dg_2[\underline{\underline{\sigma}}(\tau)]}{d\tau} d\tau$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} g_0, g_1 \text{ et } g_2 \text{ sont des propriétés du matériau qui dépendent de la contrainte} \\ \underline{\underline{J}}_{\underline{\underline{0}}} \text{ est le module de fluage instantané} \\ \underline{\underline{\Delta J}}_{\underline{\underline{0}}} = \underline{\underline{J}}_{\underline{\underline{0}}} - \underline{\underline{J}}_{\underline{\underline{0}}}, \underline{\underline{J}}_{\underline{\underline{0}}} \text{ étant le tenseur de fluage classique} \\ \text{et } \psi \text{ le temps réduit défini par :} \end{array} \right.$$

$$\psi \equiv \psi(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a_\sigma [\underline{\underline{\sigma}}(t')]} \quad , \quad a_\sigma > 0 \quad \text{et} \quad \psi' = \psi(\tau)$$

avec  $\lim_{\underline{\underline{\sigma}} \rightarrow \underline{\underline{\mathbf{0}}}} (g_0 \ g_1 \ g_2 \ a_\sigma) = (1 \ 1 \ 1 \ 1)$  pour s'assurer de la compatibilité avec la formulation linéaire aux petites déformations<sup>1</sup>.

#### ◇ Temps réduit en déformation

Schapery propose une formulation duale de la précédente:

$$\text{I.25} \quad \underline{\underline{\sigma}}(t) = h_\infty \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\underline{\underline{\infty}}} : \underline{\underline{\varepsilon}}(t) + h_1 \int_{-\infty}^t \underline{\underline{\Delta \mathbb{R}}}(\rho - \rho') : \frac{dh_2 [\underline{\underline{\varepsilon}}(\tau)]}{d\tau} d\tau$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} h_\infty, h_1 \text{ et } h_2 \text{ sont des propriétés du matériau qui dépendent de la déformation} \\ \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\underline{\underline{\infty}}} \text{ est le module de relaxation à l'équilibre} \\ \underline{\underline{\Delta \mathbb{R}}}_{\underline{\underline{\infty}}} = \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\underline{\underline{\infty}}} - \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\underline{\underline{\infty}}} \text{ , } \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\underline{\underline{\infty}}} \text{ étant le tenseur de relaxation classique} \\ \rho \text{ le temps réduit défini par :} \end{array} \right.$$

$$\rho \equiv \rho(t) = \int_0^t \frac{dt'}{a_\varepsilon [\underline{\underline{\varepsilon}}(t')]} \quad , \quad a_\varepsilon > 0 \quad \text{et} \quad \rho' = \rho(\tau)$$

avec, comme précédemment  $\lim_{\underline{\underline{\varepsilon}} \rightarrow \underline{\underline{\mathbf{0}}}} (h_\infty \ h_1 \ h_2 \ a_\varepsilon) = (1 \ 1 \ 1 \ 1)$

#### ◇ Identification expérimentale

Le comportement précédemment défini est entièrement identifié par quatre fonctions de la contrainte ou de la déformation ( $g_0, g_1, g_2$  et  $a_\sigma$  ou  $h_\infty, h_1, h_2$  et  $a_\varepsilon$ ) et le temps réduit. En guise d'identification expérimentale, considérons un essai de fluage simple et un essai de relaxation simple. La fonction de fluage non linéaire  $\underline{\underline{\mathbb{J}}}_{\underline{\underline{n}}}$  et la fonction de relaxation non linéaire  $\underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\underline{\underline{n}}}$  s'expriment par:

$$\text{I.26} \quad \underline{\underline{\mathbb{J}}}_{\underline{\underline{n}}}(t) = g_0 \underline{\underline{\mathbb{J}}}_{\underline{\underline{0}}} + g_1 g_2 \underline{\underline{\Delta \mathbb{J}}}_{\underline{\underline{\infty}}} \left( \frac{t}{a_\sigma} \right)$$

$$\underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\underline{\underline{n}}}(t) = h_\infty \underline{\underline{\mathbb{R}}}_{\underline{\underline{\infty}}} + h_1 h_2 \underline{\underline{\Delta \mathbb{R}}}_{\underline{\underline{\infty}}} \left( \frac{t}{a_\varepsilon} \right)$$

---

1.  $\underline{\underline{\mathbf{0}}}$  est le tenseur nul d'ordre 2

Schapery [Schapery, 1969], [Ward, 1985] propose la méthode graphique suivante pour déterminer les fonctions caractéristiques du comportement. Des relations (I.26), on déduit:

$$\text{I.27} \quad \begin{aligned} \log \left( \underset{\equiv n}{\mathbb{J}}(t) - g_0 \underset{\equiv 0}{\mathbb{J}} \right) &= \log(g_1 g_2) + \log \left[ \underset{\equiv}{\Delta \mathbb{J}} \left( \frac{t}{a_\sigma} \right) \right] \\ \log \left( \underset{\equiv n}{\mathbb{R}}(t) - h_\infty \underset{\equiv \infty}{\mathbb{R}} \right) &= \log(h_1 h_2) + \log \left[ \underset{\equiv}{\Delta \mathbb{R}} \left( \frac{t}{a_\varepsilon} \right) \right] \end{aligned}$$

Les courbes  $\log \left( \underset{\equiv n}{\mathbb{J}}(t) - g_0 \underset{\equiv 0}{\mathbb{J}} \right)$  (*resp.*  $\log \left( \underset{\equiv n}{\mathbb{R}}(t) - h_\infty \underset{\equiv \infty}{\mathbb{R}} \right)$ ) en fonction de  $\log(t)$ , pour différents niveaux de contrainte (*resp.* de déformation) se ramènent à une courbe maîtresse par translation le long des deux axes. Pour des essais effectués en petites déformations pour lesquels  $g_0 = g_1 = g_2 = a_\sigma = 1$  (*resp.*  $h_\infty = h_1 = h_2 = a_\varepsilon = 1$ ), les coefficients de translation sont:

$$\begin{aligned} \text{en abscisses: } &\log(a_\sigma) \quad (\text{resp. } \log(a_\varepsilon)) \\ \text{en ordonnées: } &\log(g_1 g_2) \quad (\text{resp. } \log(h_1 h_2)) \end{aligned}$$

Ceci permet de déterminer les fonctions  $g_0$ ,  $\underset{\equiv}{\mathbb{J}}$ ,  $a_\sigma$ ,  $g_1 g_2$  (*resp.*  $h_\infty$ ,  $\underset{\equiv}{\mathbb{R}}$ ,  $a_\varepsilon$ ,  $h_1 h_2$ ). Pour séparer ces deux dernières fonctions, Schapery effectue des simulations multi-échelons du type fluage-recouvrance (*resp.* relaxation-effacement) et utilise la propriété des fonctions  $g_i$  et  $a_\sigma$  (*resp.*  $h_i$  et  $a_\varepsilon$ ) pour une valeur de contrainte (*resp.* déformation) nulle pour écrire la forme de la réponse que l'on obtient:

$$\begin{aligned} \underline{\varepsilon} = \underline{\sigma}_0 g_2 : &\left[ \underset{\equiv}{\Delta \mathbb{J}} \left( \frac{t_1}{a_\sigma} + t - t_1 \right) - \underset{\equiv}{\Delta \mathbb{J}}(t - t_1) \right] \\ \left( \text{resp. } \underline{\sigma} = \underline{\varepsilon}_0 h_2 : &\left[ \underset{\equiv}{\Delta \mathbb{R}} \left( \frac{t_1}{a_\varepsilon} + t - t_1 \right) - \underset{\equiv}{\Delta \mathbb{R}}(t - t_1) \right] \right) \end{aligned}$$

où  $t_1$  représente l'instant de décharge.

On peut alors déterminer la fonction  $g_2$  (*resp.*  $h_2$ ) et par conséquent identifier tout le comportement.

#### ◇ Limitations

Dans son développement, Schapery fait implicitement l'hypothèse des petites déformations. De plus, dans le cas tridimensionnel, pour un comportement isotrope et compressible, un tel modèle fait intervenir dix fonctions caractéristiques du matériau ce qui rend l'identification expérimentale très délicate.

Une troisième voie possible est de partir de l'élasticité caoutchoutique et, par une approche fonctionnelle, d'intégrer l'effet temporel. C'est cette voie que Christensen a exploré et que nous explicitons dans le paragraphe suivant.

## 1.5 Extension de l'élasticité: le modèle de Christensen

Ce modèle est une généralisation de l'élasticité caoutchoutique. En constatant que les modèles hyperélastiques sont une bonne approximation de l'élasticité caoutchoutique, Christensen [Christensen, 1980] a étendu ces modèles à la viscoélasticité.

### 1.5.1 Hypothèses du modèle

1. Matériau incompressible
2. Matériau isotrope
3. Température constante, loin de la transition vitreuse (état caoutchoutique)
4. Pour des processus suffisamment lents, la théorie viscoélastique se réduit à la théorie cinétique de l'élasticité caoutchoutique
5. La théorie viscoélastique est appliquée aux problèmes à contrainte imposée.

### 1.5.2 Loi de comportement

On part de la relation fonctionnelle générale, écrite sous forme intégrale [Green & Rivlin, 1957], reliant la contrainte de Cauchy à la déformation dans le cas incompressible:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} = & -p \delta_{ij} + x_{i,K} x_{j,L} \left[ g_0 \delta_{KL} + \int_0^t g_1(t-\tau) \frac{\partial \Delta_{KL}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \right. \\ \text{I.28} \quad & \left. + \delta_{KL} \int_0^t g_1(t-\tau) \frac{\partial \Delta_{JJ}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \dots \right] \end{aligned}$$

$p$  est la pression hydrostatique.

Pour un matériau incompressible, Pipkin [Pipkin, 1964] a montré que la condition d'incompressibilité entraîne:

$$\text{tr} \underline{\underline{\Delta}} = \text{tr}(\underline{\underline{\Delta}}^2) - [\text{tr} \underline{\underline{\Delta}}]^2 + \dots$$

En ne retenant que les termes d'ordre inférieur ou égal à 1, (I.28) devient:

$$\text{I.29} \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + x_{i,K} x_{j,L} \left[ g_0 \delta_{KL} + \int_0^t g_1(t-\tau) \frac{\partial \Delta_{KL}(\tau)}{\partial \tau} d\tau + \dots \right]$$

Afin d'utiliser l'hypothèse 4, expliquons ce que l'on entend par processus lent [Gurtin & Herrera, 1965]. Soit une histoire de déformation donnée  $x_{i,K}(t)$  et  $\Delta_{KL}(t)$ . Une histoire retardée ou accélérée est spécifiée par  $\Delta_{KL}(\alpha t)$ , avec  $\alpha > 1$  pour un phénomène accéléré et  $\alpha < 1$  pour un phénomène retardé. Accélérer un processus revient à comprimer l'échelle du temps. Par conséquent, en changeant l'argument «temps» par l'argument réduit  $\frac{t}{\alpha}$ , on obtient, pour des histoires infiniment accélérées et retardées:

$$\text{I.30} \quad \begin{cases} \sigma_{ij} \left( \frac{t}{\alpha} \right)_{\text{accéléré}} &= -p \delta_{ij} + x_{i,K} x_{j,L} [g_0 \delta_{KL} + g_1(0) \delta_{KL}(t) + \dots]_{\alpha \rightarrow \infty} \\ \sigma_{ij} \left( \frac{t}{\alpha} \right)_{\text{retardé}} &= -p \delta_{ij} + x_{i,K} x_{j,L} [g_0 \delta_{KL} + g_1(\infty) \delta_{KL}(t) + \dots]_{\alpha \rightarrow 0} \end{cases}$$

L'hypothèse 4 stipule que pour des processus très lents, la théorie viscoélastique se ramène à la théorie cinétique de l'élasticité caoutchoutique. Or la théorie cinétique de l'élasticité caoutchoutique est incluse dans les relations (I.30) par la présence du terme  $g_0$ . Par conséquent, (I.30) conduit à  $g_1(\infty) \equiv 0$  de même que tous les termes d'ordre supérieur, soit:

$$\text{I.31} \quad g_n(\infty) \equiv 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Par conséquent les fonctions de relaxation décroissent vers 0 comme pour les fluides, sauf le premier terme  $g_0(\infty)$  qui est non nul et qui représente l'équilibre du solide.

Sachant que l'amplitude de la contrainte augmente avec la déformation  $\left( \frac{\partial |\underline{\sigma}|}{E}, \text{ où } E \text{ est l'amplitude de la déformation} \right)$  et lorsque l'histoire de déformation est accélérée  $\left( \frac{\partial g_1 \left( \frac{t-\eta}{\alpha} \right)}{\alpha} > 0 \right)$ , alors l'hypothèse 5 conduit à:

$$\frac{d\sigma}{d\alpha} = 0$$

qui signifie que la contrainte reste constante lorsque l'histoire de déformation est accélérée. La combinaison de tous ces résultats conduit à écrire que

$$\text{I.32} \quad \frac{dE}{d\alpha} < 0$$

c'est à dire que si l'amplitude de la contrainte est maintenue constante alors l'amplitude de l'histoire de déformation doit diminuer lorsque celle-ci est accélérée.

A partir de ces résultats, on peut tirer les conclusions suivantes:

- Pour les processus lents, les termes en intégrales de la relation (I.29) sont négligeables devant  $g_0$  en vertu de (I.31) et la théorie viscoélastique est sujette aux restrictions de la théorie élastique.

- Pour les processus rapides, (I.32) permet de montrer que l'amplitude de déformation doit être petite et, en conséquence, toutes les fonctionnelles d'ordre supérieur à 2 de (I.29) sont négligeables.

Donc, pour les processus lents et rapides, la loi de comportement s'écrit:

$$\text{I.33} \quad \sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + x_{i,K} x_{j,L} \left[ g_0 \delta_{KL} + \int_0^t g_1(t-\tau) \frac{\partial \Delta_{KL}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \right]$$

Cette relation, sous la condition  $g_1(\infty) \equiv 0$ , est une généralisation de la théorie cinétique de l'élasticité caoutchoutique pour modéliser le comportement viscoélastique. Il est à noter que cette théorie n'est pas simplement la théorie élastique à laquelle on a ajouté l'effet d'hérédité [Christensen, 1980].

Sous l'hypothèse des petites perturbations, la relation (I.33) devient:

$$\text{I.34} \quad \sigma_{ij} \cong -p \delta_{ij} + x_{i,K} x_{j,L} \left[ g_0 \delta_{KL} + 2 \int_0^t \mu(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon_{ij}(\tau)}{\partial \tau} d\tau \right]$$

avec  $2\mu(t) = 2g_0 + g_1(t)$

Cette relation correspond à la théorie classique des petites déformations. On remarque que la théorie non linéaire contient les mêmes constantes du matériau que la théorie des petites déformations ce qui confère à la forme non linéaire (I.33) une utilité plus importante.

Cette théorie a certaines similitudes avec le modèle BKZ [Bernstein *et al.*, 1963]. Mais la principale différence réside dans le fait que la théorie BKZ est basée sur la prise en compte de plusieurs paramètres et fonctions pour caler sur une large gamme de données alors que le présent modèle est basé sur une généralisation viscoélastique de la théorie élastique.

Ce modèle présente néanmoins certaines limites puisque ces résultats ne sont exploitables que pour des essais de fluage et que les non linéarités sont purement cinématiques. De plus, cette théorie n'est valable que pour les matériaux isotropes incompressibles.

## 1.6 Conclusion

Dans tous ces modèles, on constate les mêmes limitations. Pour un développement d'ordre 1, ces modèles ne sont validés que pour des sollicitations simples (unidirectionnel, traction/relaxation). Dans des cas plus complexes de chargement, le passage de l'approche linéaire à l'approche non linéaire nécessite en général le développement des fonctionnelles à des ordres strictement supérieurs à 2. Un tel développement fait augmenter très rapidement le nombre de paramètres à identifier mais ne permet pas le calcul des énergies. De plus, les non linéarités sont, en général, purement cinématiques.

Par conséquent, le modèle que l'on développera devra être validé pour une large gamme d'essais, y compris des essais complexes. De plus, l'ordre du développement doit être faible de façon à ne pas engendrer un nombre trop élevé de paramètres à identifier.