

## Application à la réaction alcali-silice

# Introduction

La troisième et dernière partie de ce mémoire est consacrée à l'application des notions présentées dans la deuxième partie au cas de l'alcali-réaction. Nous avons fait le choix d'utiliser la microporomécanique pour prendre en compte les détails microstructuraux de notre béton attaqué, et d'utiliser un critère de rupture énergétique pour faire évoluer la microstructure. Cela nous a conduit dans la partie précédente à présenter et tester des estimateurs de micromécanique, qui nous ont permis d'avoir des formes approchées mais explicites pour l'énergie d'un matériau poreux, et pour les coefficients poroélastiques homogénéisés. Dans cette partie, nous allons donc faire le point sur les choix de modélisation pour l'alcali-réaction en ce qui concerne la représentation des mécanismes réactionnels, puis adapter les expressions des propriétés poroélastiques et de l'énergie en fonction de ces hypothèses.

Nous récapitulons dans le chapitre 8 les choix de modélisation de l'alcali-réaction sur lesquels est fondé notre modèle. Nous nous intéressons aux granulats à réactivité rapide, et représentons l'attaque par la dissolution graduelle d'une proportion du granulat correspondant à la silice réactive, à partir de sa surface. La montée en pression des produits de réaction dont le volume est supérieur au volume de granulat dissout entraîne la décohésion du granulat, puis la fissuration de la pâte de ciment environnante. On décrit cette fissuration et la classification de type de sites réactifs qui en résulte, selon leur état d'endommagement.

Cette description du mécanisme d'endommagement est utilisée dans le chapitre 9 dans lequel on écrit très précisément les expressions des propriétés poroélastiques homogénéisées de notre béton attaqué, en fonction de son état d'endommagement. On décrit le béton attaqué comme un milieu composite comprenant des phases élastiques, des phases poroélastiques, et des gros pores correspondant aux cavités des granulats ayant subi la décohésion. Il s'agit donc d'adapter les expressions obtenues au chapitre 6 à la microstructure correspondant au mécanisme d'endommagement présenté au chapitre 8. On présente ensuite l'adaptation concrète du schéma dilué, puis du schéma *IDD* à notre problème, en utilisant, comme au chapitre 7, une méthode de superposition pour représenter le motif complexe de cavité fissurée obtenu lorsque la pâte de ciment se fissure, que nous avons comparé à des simulations *2d* au chapitre 4. On détaille enfin précisément notre critère d'interpénétration des surfaces fissurées.

On poursuit ensuite au chapitre 10 l'adaptation des résultats théoriques obtenus dans la deuxième partie en écrivant les expressions concrètes des énergies élastiques, d'abord dans un problème auxiliaire où l'on considère que les pressions dans les pores sont nos paramètres de chargement, puis en introduisant les degrés d'attaque des différents sites réactifs comme paramètres de chargement en calculant les pressions en fonction des degrés de réaction, à microstructure et déformation macroscopique données. On définit ensuite les modules d'élasticité non drainée, qui sont en fait les modules sollicités lorsqu'on a une masse de fluide donnée qui est emprisonnée dans la porosité et qu'on charge le matériau extérieurement, ainsi que la précontrainte chimique, contrainte macroscopique induite par la pression des produits de réaction, à déformation macroscopique nulle. Ces deux définitions nous permettent d'expliquer pour tous les cas de chargement qui nous intéressent comment on parvient à calculer l'ensemble des contraintes, déformations et

pressions.

On applique enfin dans le chapitre 11 ces expressions à la construction d'un algorithme qui permet de déterminer, en fonction du chargement que l'on souhaite imposer à l'éprouvette, en terme de contraintes ou déformations imposées, et en terme d'attaque chimique, l'évolution de la microstructure, et ainsi celle des propriétés mécaniques et des gonflements macroscopiques. Le modèle est appliqué à un certain nombre de cas simples pour conforter nos choix de discrétisation de la granulométrie et concernant la symétrie de la solution, et pour améliorer notre compréhension du modèle. L'essai triaxial de Multon est enfin utilisé pour tester la capacité du modèle à reproduire les reports de gonflement lorsque les contraintes appliquées à l'éprouvette évoluent. On identifie enfin les paramètres du modèle, toujours en utilisant les résultats expérimentaux de Multon, puis on discute de la capacité du modèle à reproduire les gonflements et les contraintes mesurées sous divers chargements.

# Chapitre 8

## Idées retenues pour le modèle

### Sommaire

---

<b>8.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>204</b>
<b>8.2</b>	<b>Description du béton avant la fissuration</b>	<b>204</b>
8.2.1	Propriétés géométriques	204
8.2.2	Description de l'attaque du grain	204
8.2.3	Description de l'auréole de transition	205
<b>8.3</b>	<b>Description de la fissuration</b>	<b>206</b>
<b>8.4</b>	<b>Définition des familles de grains</b>	<b>206</b>
<b>8.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>207</b>

---

## 8.1 Introduction

On décrit dans ce court chapitre les hypothèses sur lesquelles se fonde le modèle pour l'anisotropie du gonflement lors de la réaction alcali-silice, pour les granulats à réactivité rapide, que nous allons présenter dans cette troisième partie de notre mémoire. La description de l'attaque reste très schématique, comme dans le modèle que nous avons présenté en illustration du critère de rupture au § 5.3. La description de la mécanique est en revanche nettement raffinée par rapport à ce modèle. Elle utilise l'ensemble des résultats que nous avons donné dans la partie 2, et ressemble ainsi beaucoup du point de vue mécanique à l'exemple que nous avons utilisé dans le chapitre 7.

Nous décrivons tout d'abord les différentes composantes du béton lors de l'attaque mais avant la fissuration pour chaque grain du béton. Nous détaillons ensuite le déroulement de la fissuration, puis nous définissons les familles de grains comme des ensembles de grains aux évolutions semblables.

## 8.2 Description du béton avant la fissuration

Nous nous plaçons à une échelle mésoscopique pour notre description du béton. À cette échelle, nous le considérons comme un matériau à deux phases : une phase de granulats (au sens large : des grains de sable aux cailloux), une phase de matrice de pâte de ciment. Ces phases ne sont pas homogènes, mais des zones seront définies dans ces phases en fonction de propriétés à l'échelle microscopique. Détaillons les propriétés de ces phases.

### 8.2.1 Propriétés géométriques

Les granulats sont en nombre  $N_a$  dans le volume de béton que l'on appelle  $\Omega$  (l'indice  $a$  correspond à granulat). Chaque grain  $i$  a les propriétés suivantes :

- forme sphérique ;
- centré en  $\underline{C}^i$  ;
- rayon  $R^i$  ;
- il comporte une partie saine et une partie attaquée ;
- il est entouré d'une auréole de transition.

### 8.2.2 Description de l'attaque du grain

Le degré d'attaque est décrit par le paramètre sans dimension et dépendant du temps  $\alpha^i(t)$ . Ce paramètre, qu'on appelle le degré d'attaque, représente la proportion du rayon du granulat qui a subi l'attaque, que l'on suppose se produire à partir de la surface extérieure du granulat. Comme on l'a mentionné lors de notre application en gonflement libre du critère énergétique de rupture au § 5.3.1, où l'attaque était décrite exactement de la même façon, ce type d'attaque progressive à partir de la surface est choisi en cohérence avec la volonté d'étudier l'alcali-réaction spécifique aux granulats à réactivité rapide, au sens expliqué au § 1.4 de notre bibliographie sur l'alcali-réaction. La portion du granulat comprise entre les rayons  $(1 - \alpha^i(t))R^i$  et  $R^i$  est appelée la *zone attaquée*, tandis que la sphère intérieure est appelée *zone saine* du granulat, au temps  $t$ . La *zone saine* possède les propriétés mécaniques initiales du granulat. Elle est caractérisée par un tenseur des modules d'élasticité que l'on appelle  $\mathbb{C}_a$ . La *zone attaquée* est partiellement dissoute à cause de l'attaque des ions provenant de la pâte de ciment. Au niveau microscopique, elle a une porosité  $\rho^i$ , qui est une caractéristique du granulat considéré. Au niveau mésoscopique auquel on travaille, cette zone est donc un milieu poreux caractérisé par un tenseur des modules d'élasticité  $\mathbb{C}_e^{p,i}$ , un coefficient de Biot  $b_e^{p,i}$  et un module de Biot  $M_e^{p,i}$ , qui sont définis selon les habitudes de

poromécanique telles que présentées par Coussy [6], hormis en ce qui concerne le coefficient de Biot pour lequel on a pris l'inverse de la définition usuelle. L'indice  $e$  rappelle que ces modules seront obtenus par homogénéisation à une échelle inférieure. La loi de comportement dans cette zone, pour le grain  $i$ , s'écrit donc :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C}_e^{p,i} : \underline{\underline{\varepsilon}} - b_e^{p,i} p \underline{\underline{1}} \\ (\tilde{\varphi}^i - \rho^i) = b_e^{p,i} \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + M_e^{p,i} p \end{cases} \quad (8.1)$$

Où  $\tilde{\varphi}^i$  est la porosité locale dans la zone attaquée en configuration déformée. On suppose que l'attaque ne modifie pas l'isotropie des propriétés mécaniques du granulat, ce qui fait du coefficient de Biot un scalaire qu'on appelle  $b_p^i$ . Dans notre modèle la porosité  $\rho^i$  peut différer selon les granulats considérés, ce qui nous sert par exemple à représenter la présence de granulats non réactifs, mais elle est constante dans le temps. L'attaque progresse donc par augmentation du degré de réaction  $\alpha^i(t)$  uniquement.

### 8.2.3 Description de l'auréole de transition

L'auréole de transition (ou interface transition zone, *ITZ*), doit être prise en compte dans notre problème d'alcali-réaction pour deux raisons. Tout d'abord, lorsqu'on essaie d'estimer les propriétés mécaniques de bétons, les résultats dépendent de la prise en compte de cette zone. Nielsen et Monteiro [21] ont montré que si l'on adopte une approche micromécanique, comme c'est notre cas dans ce mémoire, on surestime les propriétés mécanique du béton en considérant le béton comme un matériau à deux phases : matrice et granulat. Le même type de modèle de micromécanique prenant cette fois en compte une troisième phase, l'auréole de transition, comme une fine couche entourant les granulats, permet de reproduire nettement mieux les propriétés du béton en fonction des propriétés des constituants. Son existence est par ailleurs attestée expérimentalement, par exemple par les observations de Farran, [8], à propos de la modification de la distribution des grains de ciment proche de la surface des granulats lors des phases d'hydratation, qui entraînent une porosité et une composition différentes dans cette zone. On trouve des discussions concernant les propriétés de cette zone en fonction de la fraction volumique de granulat, par exemple chez Hashin [13] qui utilise le schéma auto-cohérent généralisé de Christensen et Lo [23, 4], mais également sur l'influence de la taille de grain [14], ou sur la possibilité de modéliser l'auréole de transition comme une zone aux propriétés homogènes, par exemple chez Nadeau, et Hervé et Caré [14, 2, 20].

La seconde raison pour laquelle on a besoin de prendre l'auréole de transition en compte est le rôle de zone tampon qu'elle joue pour les gels gonflants. Elle sert en quelque sorte de réservoir d'expansion pour les produits de réaction qui parviennent à la surface des granulats. Or, dans notre modèle, on considèrera que les produits de réactions sont libres de sortir des granulats. L'augmentation de pression est donc initialement limitée par la présence de l'auréole de transition. Pour éviter la lourdeur d'une description trop détaillée de cette zone, on la décrit simplement au niveau microscopique par une porosité  $\rho_{itz}$  et une épaisseur  $l_c$  qui ne dépendent ni de la taille de granulat, ni de la fraction volumique. À l'échelle mésoscopique à laquelle se situe notre modélisation, cette porosité se traduit par un comportement de milieu poreux, que l'on décrit comme celui de la *zone attaquée*, par un tenseur des modules d'élasticité  $\mathbb{C}_e^{t,i}$ , un coefficient de Biot scalaire  $b_e^{t,i}$ , et un module de Biot  $M_e^{t,i}$  indépendants du temps. La loi de comportement de l'*ITZ* s'écrit alors :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \mathbb{C}_e^{t,i} : \underline{\underline{\varepsilon}} - b_e^{t,i} p \underline{\underline{1}} \\ (\tilde{\varphi}_{itz}^i - \rho_{itz}^i) = b_e^{t,i} \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{\varepsilon}} + M_e^{t,i} p \end{cases} \quad (8.2)$$

Où  $\tilde{\varphi}_{itz}$  est la porosité en configuration déformée de l'auréole de transition.

### 8.3 Description de la fissuration

Le béton décrit au paragraphe précédent en fonction du degré d'attaque auquel il est soumis, va se dégrader à cause de la pression développée par les produits de réaction dans les pores de la *zone attaquée* et de l'*ITZ*. Nous décrivons ici les changements de morphologie que l'on considère. Pour chaque granulat, on introduit quatre paramètres d'endommagement qui vont servir à représenter l'état de décohéation et de fissuration du granulat :

- un paramètre de décohéation  $d^i(t)$  qui vaut 0 si la décohéation n'a pas eu lieu, et 1 si elle a eu lieu. La décohéation est la rupture intégrale de l'interface entre le granulat et la pâte de ciment, au niveau de l'auréole de transition qui constitue une faiblesse mécanique. Au début de l'attaque, pour tous les granulats,  $d^i(t) = 0$ .
- trois tailles de fissures  $x_1^i(t)$ ,  $x_2^i(t)$ ,  $x_3^i(t)$ , décrivant la taille des fissures en forme de disque de normales  $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$  qui apparaissent autour du grain. La fissure est de rayon interne celui du grain  $R^i$ , et de rayon externe  $x_1^i(t)$ ,  $x_2^i(t)$ ,  $x_3^i(t)$  selon sa direction. Ces tailles de fissures augmentent avec le temps. Les fissures choisies représentent la fissuration de la pâte de ciment sous pression des gels, exactement de la même façon que dans notre exemple de la fin de la partie 2, chapitre 7.

On peut maintenant, en se basant sur cette description du béton attaqué et fissuré, décrire ce qu'on appelle une famille de sites réactifs.

### 8.4 Définition des familles de grains

Une famille de grains est composée des diverses composantes attachées aux granulats de même taille que l'on a choisi de grouper ensemble. On appelle leur nombre  $N_s$ . La position précise des grains  $\underline{C}^k$  n'importe plus, on les considère comme un tout. Les grains qui la composent sont de taille  $R^i$ . La fraction volumique des grains qui la composent est appelée  $f^i$ , ce qui implique que la famille comprend un nombre  $N_i = f_i / (\frac{4\pi}{3}(R^i)^3)$  de grains. Les grains faisant partie de la même famille suivent des évolutions identiques à la fois en terme d'attaque et de fissuration. Dans chaque famille, on trouve un certain nombre de type de pores, qu'on rappelle ici :

- les pores de la *zone attaquée* du granulat, représentant une fraction volumique  $\rho^i$  du volume compris entre les rayons  $(1 - \alpha)R^i$  et  $R^i$  du granulat. La fraction volumique totale de porosité dans la *zone attaquée* est donc de  $\rho^i \frac{4\pi}{3}(R^i)^3 [1 - (1 - \alpha)^3]$ . L'équation de comportement de cette zone est décrite par l'équation 8.1.
- les pores de l'auréole de transition qui occupent un volume  $\rho^{itz} 4\pi l_c (R^i)^2$  autour d'un granulat de taille  $R^i$ , puisque l'épaisseur  $l_c$  de l'auréole de transition est faible devant la taille de grain, même pour les petits grains. La loi de comportement de cette zone est donnée par l'équation 8.2.
- si la décohéation s'est produite, le gel peut également occuper l'espace laissé libre par la déformation du grain et de la pâte de ciment sous pression de gel. De même, si la fissuration s'est produite, le gel peut envahir les fissures et ainsi contribuer à leur avancée en poussant directement sur leurs lèvres.

Une hypothèse essentielle de notre modèle est l'égalité de la pression dans une famille donnée, dans ces différents types de porosité. On définit donc une unique pression par famille qu'on appelle  $p^i$  dans la famille  $i$ . Cette hypothèse suppose que le gel est libre de se déplacer entre ces zones. C'est encore une fois une hypothèse liée au fait qu'on considère des granulats à réactivité rapide, pour lesquels le gel ne reste en général pas coincé dans les granulats sous formes de poches qui exercent une pression importante à l'intérieur même du granulat et fait de la rupture du granulat un événement essentiel du déroulement de l'endommagement. Pour ce qui est du déplacement du gel dans les fissures, nous supposons qu'il se fait rapidement par rapport aux échelles de temps

de création du gel. Nous supposons de plus que l'énergie dissipée par la viscosité du gel dans son déplacement est négligeable devant l'énergie de fissuration elle-même.

### 8.5 Conclusion

On a résumé dans cette partie l'ensemble des idées sur lesquelles sont fondés les calculs de propriétés mécaniques et d'énergie qui forment les deux chapitres suivants de ce mémoire, et qui ont permis de construire l'algorithme de fissuration qui sera détaillé et utilisé dans le dernier chapitre. Nos choix de modélisation sont clairement orientés vers les granulats à réactivité rapide, pour lesquels on considère que l'attaque se fait de manière relativement homogène dans le volume du granulat, en progressant à partir de la surface. On suppose que le gel occupe la porosité nouvellement créée dans le granulat ainsi que la porosité de l'auréole de transition, et que sa montée en pression est à l'origine de la décohésion du granulat et de fissuration dans la pâte de ciment.



## Chapitre 9

# Propriétés homogénéisées d'un béton atteint de la réaction alcali-silice

### Sommaire

---

<b>9.1</b>	<b>Introduction</b>	<b>210</b>
<b>9.2</b>	<b>Application à notre problème de RAG</b>	<b>210</b>
9.2.1	Présentation du problème de départ	210
9.2.2	Présentation du problème auxiliaire	211
9.2.3	Écriture des propriétés homogénéisées	212
9.2.4	Réécriture des propriétés homogénéisées en utilisant les fractions volumiques	215
<b>9.3</b>	<b>Calcul concret des propriétés homogénéisées</b>	<b>216</b>
9.3.1	Approche diluée	216
9.3.2	Un modèle micromécanique plus élaboré : estimateur <i>IDD</i>	223
<b>9.4</b>	<b>Critères d'interpénétration des surfaces fissurées</b>	<b>224</b>
9.4.1	Lèvres d'une fissure	225
9.4.2	Grain et cavité	225
<b>9.5</b>	<b>Conclusion</b>	<b>227</b>

---

## 9.1 Introduction

Ce chapitre nous permet de donner l'écriture concrète des propriétés homogénéisées de notre béton attaqué, en fonction de l'état de la microstructure. Nous avons, dans le chapitre 6 de la partie 2, proposé une écriture des énergies élastiques et potentielles pour deux types de milieux. Tout d'abord, pour un milieu élastique troué, dont les pores sont sous pression. Ensuite, pour un milieu hétérogène dont les phases sont elles-mêmes des milieux poreux. Ces écritures de l'énergie nous ont également permis d'écrire de manière théorique les propriétés homogénéisées en fonction de divers tenseurs de localisation, obtenus en chargeant notre milieu et en calculant des moyennes de déformations. Nous souhaitons maintenant utiliser ces expressions des propriétés poromécaniques homogénéisées sur les diverses microstructures, décrites au chapitre 8 de cette partie, qui peuvent représenter l'état de notre béton à divers degrés d'attaque.

On présente tout d'abord l'adaptation des coefficients poroélastiques au problème d'alcali-réaction que l'on souhaite traiter. Dans un deuxième temps, on calcule les différents tenseurs de localisation dont on a besoin. Enfin, on réfléchit au problème de l'interpénétration des surfaces de fissure.

## 9.2 Application à notre problème de RAG

On reprend dans cette partie les conclusions du chapitre 6, dans lequel nous avons calculé l'énergie du milieu poreux, et donné les expressions de ses propriétés homogénéisées en fonction de divers tenseurs de localisation. Nous allons donc introduire les problèmes mécaniques nécessaires à l'écriture de ces propriétés, en remarquant que nos familles de grains, telles que définies au § 8.4, doivent être décrites de manière assez différente selon que la décohéSION a eu lieu ou non. La raison est que tant qu'il n'y a pas eu décohéSION, le squelette solide (par opposition aux phases poreuses) comprend la pâte de ciment (y compris celle qui constitue l'*ITZ*) et le granulat. Une fois que la décohéSION a eu lieu, le granulat est détaché de la pâte de ciment. Nous avons fait le choix de ne plus le considérer comme faisant partie du squelette, car l'étude de la cavité fissurée est ainsi identique à ce que nous avons fait dans le chapitre 7. On va donc séparer l'ensemble des familles en fonction de leur état de fissuration. On appelle *Type I* l'état de ces familles avant décohéSION, et *Type II* leur état après la décohéSION. Nous allons détailler les propriétés de ces sites.

### 9.2.1 Présentation du problème de départ

Notre problème de départ est schématisé sur la Fig. 9.1. Cette description du problème se place dans la lignée du § 6.2 dans lequel on a travaillé sur un solide élastique troué. Il s'agit de déterminer les modules poroélastiques homogénéisés d'un matériau à matrice occupant le domaine  $\Omega^c$ , de tenseur des modules d'élasticité  $\mathbb{C}^c$ , la pâte de ciment. Ce matériau comporte  $N^I$  sites de *Type I*, comme représenté à gauche sur la Fig. 9.1. Chaque site  $\alpha \in 1 : N^I$  est constitué de trois domaines :

- au centre, un domaine sphérique représentant la *zone saine*. Il occupe un domaine  $\Omega_\alpha^a$  et est de tenseur des modules d'élasticité  $\mathbb{C}^a$
- autour du granulat sain, correspondant à la *zone attaquée*, le domaine  $\Omega_\alpha^p$  est également rempli de granulat sain, mais la calotte sphérique est partagée avec un domaine poreux  $\Omega_\alpha^{pv}$  qui représente les pores créés dans le granulat par l'attaque chimique. La partie solide est de tenseur des modules d'élasticité  $\mathbb{C}^a$
- si l'on va un peu plus vers l'extérieur, on rencontre une seconde calotte partiellement poreuse, l'*ITZ*. Un matériau de tenseur des modules d'élasticité  $\mathbb{C}^c$  occupe le domaine

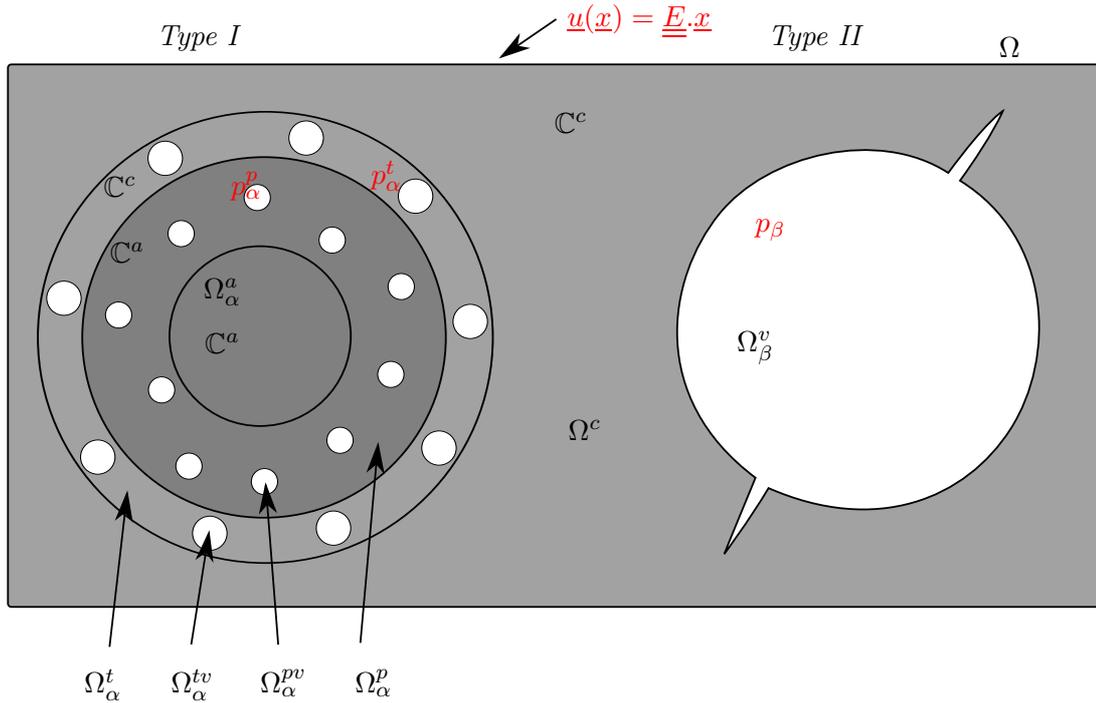


FIGURE 9.1 – Béton atteint de RAG : problème de départ, présentation sous forme de solide élastique troué.

$\Omega_\alpha^t$ , tandis que le domaine  $\Omega_\alpha^{tv}$  est constitué de vides. Cette calotte représente l'auréole de transition, qu'on trouve dans les bétons ordinaires autour de chaque granulat.

Le matériau comporte également  $N^{II}$  sites de *Type II*, qui sont simplement des cavités dont on ne précise pas la forme pour le moment. Ils occupent les domaines  $\Omega_\beta^v$ , pour  $\beta \in 1 : N^{II}$ .

Même si on a posé les bases dans la première section (section 6.2) pour homogénéiser ce genre de matériau, c'est une tâche difficile puisqu'on pressent que l'évaluation des tenseurs de localisation va être compliquée. Il faudrait réaliser des microstructures et effectuer des simulations par éléments finis. Nous préférons procéder en deux étapes, en homogénéisant d'abord séparément certaines zones, en l'occurrence la *zone attaquée* des granulats, et l'*ITZ*, en utilisant la méthode présentée au § 6.3.

### 9.2.2 Présentation du problème auxiliaire

On souhaite plutôt s'appuyer sur une transformation du problème comme on a fait au § 6.3, où les zones contenant du solide élastique et des trous sont remplacées par un milieu poreux équivalent. Comme on a déjà expliqué la façon dont les propriétés mécaniques de ces zones dans le problème auxiliaire sont calculées en fonction des propriétés de départ, on fait cette transformation, ce qui nous amène à considérer le problème auxiliaire schématisé sur la Fig. 9.2. On a remplacé les zones contenant des pores à l'échelle microscopique par des milieux poreux équivalents. Remarquons que ce n'est qu'une transformation partielle puisqu'on a voulu conserver les pores de *Type II*, occupant les domaines  $\Omega_\beta^v$ , identiques à ceux du problème de départ. Ces pores sont de grande taille, et ne correspondent pas à l'idée de ce qu'on fait ici, c'est-à-dire une homogénéisation en deux temps.

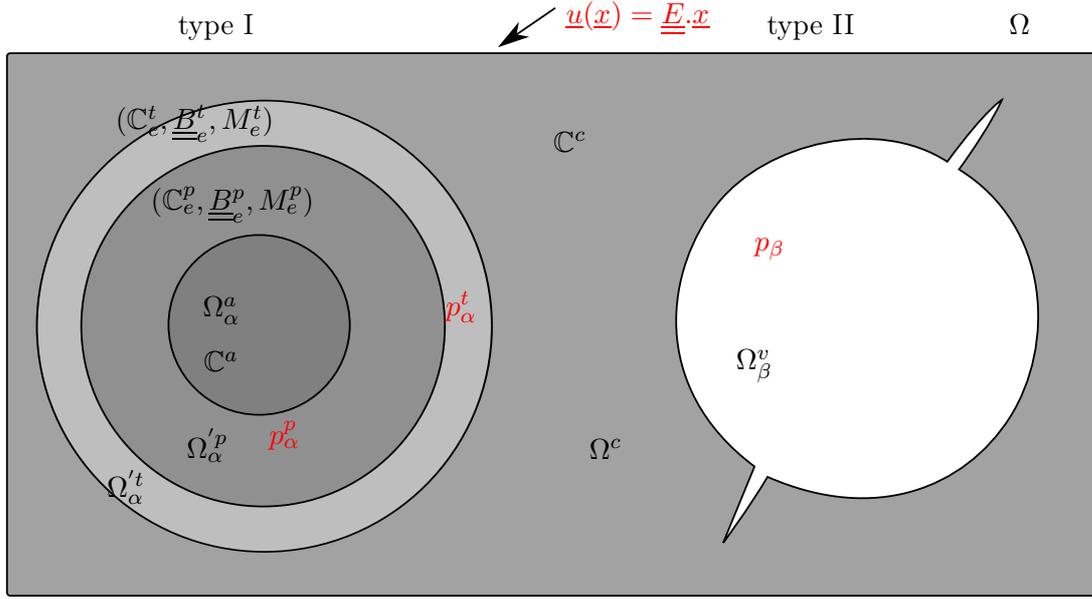


FIGURE 9.2 – Béton atteint de RAG : problème auxiliaire, présentation mixte solide troué/solide poreux hétérogène.

### 9.2.3 Écriture des propriétés homogénéisées

Il nous reste donc à adapter les expressions des propriétés homogénéisées que nous avons obtenues au chapitre 6, c'est-à-dire les équations 6.33 à nos familles de *Type II*, et les équations 6.68 à nos familles de *Type I*. Rappelons tout d'abord ces expressions. Dans la description du solide élastique troué :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}^{hom} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{x}) : \mathbb{A}(\underline{x}) dV \\ \underline{B}^k = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega^k} \underline{\mathbb{1}} : \mathbb{A}(\underline{x}) dV = \frac{\Omega^k}{\Omega} \underline{\mathbb{1}} - \frac{1}{\Omega'} \int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\mathbb{A}}^k(\underline{x}) dV \\ M^{k\lambda} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega^k} \underline{\mathbb{1}} : \underline{\mathbb{A}}^\lambda(\underline{x}) dV = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega^\lambda} \underline{\mathbb{1}} : \underline{\mathbb{A}}^k(\underline{x}) dV \end{array} \right. \quad (9.1)$$

Tandis que dans la description milieu poreux hétérogène :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C}'^{hom} = \frac{1}{\Omega'} \sum_{i=1}^{Nz} \int_{\Omega^i} \mathbb{C}_e^i : \mathbb{A}'(\underline{x}) dV \\ \underline{B}'^i = \frac{1}{\Omega'} \underline{B}'_e^i : \int_{\Omega^i} \mathbb{A}'(\underline{x}) dV = \frac{\Omega^i}{\Omega'} \underline{B}'_e^i - \frac{1}{\Omega'} \sum_{k=1}^{Nz} \mathbb{C}_e^k : \int_{\Omega^k} \underline{\mathbb{A}}'^i(\underline{x}) dV \\ M'^{ki} = \frac{1}{\Omega'} \underline{B}'_e^i : \int_{\Omega^i} \underline{\mathbb{A}}'^k(\underline{x}) dV + \delta_{ki} \frac{\Omega^i}{\Omega'} M_e^i = \frac{1}{\Omega'} \underline{B}'_e^k : \int_{\Omega^k} \underline{\mathbb{A}}'^i(\underline{x}) dV + \delta_{ki} \frac{\Omega^i}{\Omega'} M_e^i \end{array} \right. \quad (9.2)$$

Où, en cohérence avec les notations adoptées au chapitre 6, les quantités relatives à l'homogénéisation du milieu poreux hétérogène sont marqués d'un prime (''). Détaillons concrètement

chacune des propriétés que l'on recherche.

### 9.2.3.1 Tenseur des modules d'élasticité homogénéisé

Il s'agit ici de spécifier les zones sur lesquelles les intégrales sont calculées :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{C}^{hom} &= \frac{1}{\Omega'} \sum_{i=1}^{N^z} \int_{\Omega'^i} \mathbb{C}_e^i : \mathbb{A}'(\underline{x}) dV \\
 &= \frac{1}{\Omega'} \mathbb{C}^c : \int_{\Omega'^c} \mathbb{A}'(\underline{x}) dV \\
 &+ \frac{1}{\Omega'} \sum_{\alpha=1}^{N^I} \left[ \mathbb{C}^a : \int_{\Omega'_\alpha} \mathbb{A}'(\underline{x}) dV + \mathbb{C}^p : \int_{\Omega'_\alpha^p} \mathbb{A}'(\underline{x}) dV + \mathbb{C}^t : \int_{\Omega'_\alpha^t} \mathbb{A}'(\underline{x}) dV \right]
 \end{aligned} \tag{9.3}$$

On peut arranger cette expression en calculant la moyenne de la déformation sur l'ensemble :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Omega'} \int_{\Omega} \mathbb{A}'(\underline{x}) dV = \mathbb{I} &= \frac{1}{\Omega'} \int_{\Omega'^c} \mathbb{A}'(\underline{x}) dV + \frac{1}{\Omega'} \sum_{\alpha=1}^{N^I} \left[ \int_{\Omega'_\alpha} \mathbb{A}'(\underline{x}) dV + \int_{\Omega'_\alpha^p} \mathbb{A}'(\underline{x}) dV + \int_{\Omega'_\alpha^t} \mathbb{A}'(\underline{x}) dV \right] \\
 &+ \frac{1}{\Omega'} \sum_{\beta=1}^{N^{II}} \int_{\Omega'_\beta^v} \mathbb{A}'(\underline{x}) dV
 \end{aligned} \tag{9.4}$$

On combine ensuite ces deux expressions pour obtenir :

$$\begin{aligned}
 \mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^c + \sum_{\alpha=1}^{N^I} \left[ (\mathbb{C}^a - \mathbb{C}^c) : \frac{1}{\Omega'} \int_{\Omega'_\alpha} \mathbb{A}'(\underline{x}) dV + (\mathbb{C}^p - \mathbb{C}^c) : \frac{1}{\Omega'} \int_{\Omega'_\alpha^p} \mathbb{A}'(\underline{x}) dV \right. \\
 \left. + (\mathbb{C}^t - \mathbb{C}^c) : \frac{1}{\Omega'} \int_{\Omega'_\alpha^t} \mathbb{A}'(\underline{x}) dV \right] - \sum_{\beta=1}^{N^{II}} \mathbb{C}^c : \frac{1}{\Omega'} \int_{\Omega'_\beta^v} \mathbb{A}'(\underline{x}) dV
 \end{aligned} \tag{9.5}$$

### 9.2.3.2 Coefficient de Biot

**Type I** Pour le coefficient de Biot on a toujours deux expressions possibles, le passage de l'une à l'autre se faisant par théorème de réciprocité de Betti. On ne donne ici que celle qui est la plus opérationnelle, à partir des formules provenant du problème auxiliaire (équation 9.2).

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{B}}'_\alpha{}^p &= \frac{1}{\Omega'} \underline{\underline{B}}'_e{}^p : \int_{\Omega'_\alpha^p} \mathbb{A}'(\underline{x}) dV \\
 \underline{\underline{B}}'_\alpha{}^t &= \frac{1}{\Omega'} \underline{\underline{B}}'_e{}^t : \int_{\Omega'_\alpha^t} \mathbb{A}'(\underline{x}) dV
 \end{aligned} \tag{9.6}$$

**Type II** Ici on procède à partir des formules du problème initial (équation 9.1)

$$\underline{\underline{B}}'_\beta{}^v = \frac{1}{\Omega'} \underline{\underline{1}} : \int_{\Omega'_\beta^v} \mathbb{A}'(\underline{x}) dV \tag{9.7}$$

### 9.2.3.3 Module de Biot

Nous traitons d'abord les modules de type  $M^{kk}$ , c'est-à-dire ceux qui renseignent sur la déformation d'une zone (ou pore) lorsqu'une pression est appliquée dans cette même zone (ou pore).

**Type I** Modules établis à partir du problème auxiliaire (équation 9.2).

$$\begin{aligned} M' \left( \begin{smallmatrix} p \\ \alpha \end{smallmatrix} \right) \left( \begin{smallmatrix} p \\ \alpha \end{smallmatrix} \right) &= \frac{1}{\Omega' \underline{\underline{B}}_e^p} : \int_{\Omega'_\alpha^p} \underline{\underline{A}}'^p(\underline{\underline{x}}) dV + \frac{\Omega'_\alpha^p}{\Omega'} M_e^p \\ M' \left( \begin{smallmatrix} t \\ \alpha \end{smallmatrix} \right) \left( \begin{smallmatrix} t \\ \alpha \end{smallmatrix} \right) &= \frac{1}{\Omega' \underline{\underline{B}}_e^t} : \int_{\Omega'_\alpha^t} \underline{\underline{A}}'^t(\underline{\underline{x}}) dV + \frac{\Omega'_\alpha^t}{\Omega'} M_e^t \end{aligned} \quad (9.8)$$

**Type II** Modules établis à partir du problème initial (équation 9.1).

$$M \left( \begin{smallmatrix} v \\ \beta \end{smallmatrix} \right) \left( \begin{smallmatrix} v \\ \beta \end{smallmatrix} \right) = \frac{1}{\Omega'} \int_{\Omega'_\beta^v} \underline{\underline{1}} : \underline{\underline{A}}'^v(\underline{\underline{x}}) dV \quad (9.9)$$

**Modules croisés** Il y a trois modules de Biot croisés. Le premier s'exprime directement depuis (équation 9.2) :

$$M' \left( \begin{smallmatrix} p \\ \alpha \end{smallmatrix} \right) \left( \begin{smallmatrix} t \\ \alpha \end{smallmatrix} \right) = \frac{1}{\Omega' \underline{\underline{B}}_e^p} : \int_{\Omega'_\alpha^p} \underline{\underline{A}}'^t(\underline{\underline{x}}) dV = \frac{1}{\Omega' \underline{\underline{B}}_e^t} : \int_{\Omega'_\alpha^t} \underline{\underline{A}}'^p(\underline{\underline{x}}) dV \quad (9.10)$$

Les deux derniers sont un mélange entre les deux problèmes puisqu'il s'agit de déterminer l'influence d'un pore sur une zone de milieu poreux et réciproquement. Comme ces modules vont être négligés on donne le résultat sans démonstration :

$$\begin{aligned} M' \left( \begin{smallmatrix} p \\ \alpha \end{smallmatrix} \right) \left( \begin{smallmatrix} v \\ \beta \end{smallmatrix} \right) &= \frac{1}{\Omega' \underline{\underline{B}}_e^p} : \int_{\Omega'_\alpha^p} \underline{\underline{A}}'^v(\underline{\underline{x}}) dV = \frac{1}{\Omega' \underline{\underline{1}}} : \int_{\Omega'_\beta^v} \underline{\underline{A}}'^p dV \\ M' \left( \begin{smallmatrix} t \\ \alpha \end{smallmatrix} \right) \left( \begin{smallmatrix} v \\ \beta \end{smallmatrix} \right) &= \frac{1}{\Omega' \underline{\underline{B}}_e^t} : \int_{\Omega'_\alpha^t} \underline{\underline{A}}'^v(\underline{\underline{x}}) dV = \frac{1}{\Omega' \underline{\underline{1}}} : \int_{\Omega'_\beta^v} \underline{\underline{A}}'^t(\underline{\underline{x}}) dV \end{aligned} \quad (9.11)$$

### Réécriture du module de Biot en fonction du tenseur de localisation en déformation

On souhaite faire une dernière transformation pour rendre le module de Biot relatif aux pores de type II. Rappelons tout d'abord notre résultat obtenu dans la première partie par théorème de réciprocité de Betti (équation 6.20) :

$$\int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{\underline{x}}) : \underline{\underline{A}}^j(\underline{\underline{x}}) dV - \Omega^j \underline{\underline{1}} = - \int_{\Omega^j} \underline{\underline{1}} : \mathbb{A}(\underline{\underline{x}}) dV \quad (9.12)$$

On souhaite utiliser ceci pour ne pas avoir à calculer  $\langle \underline{\underline{A}}'^v \rangle_{\Omega'_\beta^v}$ , puisque les schémas d'homogénéisation traditionnels ne prennent pas en compte de concept de localisation en pression. On peut néanmoins simplifier l'expression par deux hypothèses :

- Le tenseur de localisation  $\underline{\underline{A}}'_\beta{}^v$  ne prend des valeurs significatives que dans la pâte de ciment qui entoure le domaine  $\Omega_\beta^v$ , non dans les autres parties du solide comme les autres granulats, de sorte que dans ce calcul de moyenne du tenseur de localisation on peut faire comme si tous les matériaux étaient de la pâte de ciment. Ceci s'écrit :

$$\int_{\Omega^s} \mathbb{C}(\underline{x}) : \underline{\underline{A}}'_\beta{}^v(\underline{x}) dV = \mathbb{C}^c : \int_{\Omega^s} \underline{\underline{A}}'_\beta{}^v(\underline{x}) dV \quad (9.13)$$

- Le tenseur de localisation  $\underline{\underline{A}}'_\beta{}^v$  prend des valeurs négligeables dans les pores autres que  $\Omega_\beta^v$ . Cela permet d'écrire, puisque la déformation totale associée au chargement pression dans un pore est nulle :

$$\int_{\Omega^s} \underline{\underline{A}}'_\beta{}^v(\underline{x}) dV + \int_{\Omega_\beta^v} \underline{\underline{A}}'_\beta{}^v(\underline{x}) dV = 0 \quad (9.14)$$

Si l'on rassemble ces hypothèses et le résultat obtenu par le théorème de réciprocité de Betti on obtient, en passant aux moyennes :

$$\langle \underline{\underline{A}}'_\beta{}^v \rangle_{\Omega_\beta^v} = (\mathbb{C}^c)^{-1} \left[ \underline{\underline{1}} : \langle \mathbb{A}' \rangle_{\Omega_\beta^v} - \underline{\underline{1}} \right] \quad (9.15)$$

Soit pour le module de Biot :

$$M \binom{v}{\beta} \binom{v}{\beta} = f_\beta^v \underline{\underline{1}} : (\mathbb{C}^c)^{-1} \left[ \underline{\underline{1}} : \langle \mathbb{A}' \rangle_{\Omega_\beta^v} - \underline{\underline{1}} \right] = \underline{\underline{1}} : (\mathbb{C}^c)^{-1} \left[ \underline{\underline{B}}'_\beta{}^v - f_\beta^v \underline{\underline{1}} \right] \quad (9.16)$$

### 9.2.4 Réécriture des propriétés homogénéisées en utilisant les fractions volumiques

Pour terminer, nous réécrivons les expressions trouvées à la fin de la section précédente en fonction des fractions volumiques de chaque zone. On introduit quatre fractions volumiques :  $f_\alpha^a = \Omega_\alpha^a / \Omega$ ,  $f_\alpha^p = \Omega_\alpha^p / \Omega$ ,  $f_\alpha^t = \Omega_\alpha^t / \Omega$ ,  $f_\beta^v = \Omega_\beta^v / \Omega$ . Pour ce qui est du tenseur des modules d'élasticité, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^{hom} = \mathbb{C}^c + \sum_{\alpha=1}^{N^I} \left[ f_\alpha^a (\mathbb{C}^a - \mathbb{C}^c) : \langle \mathbb{A}' \rangle_{\Omega_\alpha^a} dV + f_\alpha^p (\mathbb{C}^p - \mathbb{C}^c) : \langle \mathbb{A}' \rangle_{\Omega_\alpha^p} dV \right. \\ \left. + (\mathbb{C}^t - \mathbb{C}^c) : f_\alpha^t \langle \mathbb{A}' \rangle_{\Omega_\alpha^t} dV \right] - \sum_{\beta=1}^{N^{II}} f_\beta^v \mathbb{C}^c : \langle \mathbb{A}' \rangle_{\Omega_\beta^v} dV \end{aligned} \quad (9.17)$$

Les coefficients de Biot sont réexprimés de la même façon :

$$\begin{cases} \underline{\underline{B}}'_\alpha{}^p = f_\alpha^p \underline{\underline{B}}'_e{}^p : \langle \mathbb{A}' \rangle_{\Omega_\alpha^p} dV \\ \underline{\underline{B}}'_\alpha{}^t = f_\alpha^t \underline{\underline{B}}'_e{}^t : \langle \mathbb{A}' \rangle_{\Omega_\alpha^t} dV \\ \underline{\underline{B}}'_\beta{}^v = f_\beta^v \underline{\underline{1}} : \langle \mathbb{A}' \rangle_{\Omega_\beta^v} dV \end{cases} \quad (9.18)$$

Enfin on réécrit les modules de Biot, sauf les termes croisés entre les sites de type I et type II, puisqu'ils sont destinés à être négligés :

$$\begin{cases} M' \binom{p}{\alpha} \binom{p}{\alpha} = f_\alpha^p \left[ \underline{\underline{B}}'_e{}^p : \langle \underline{\underline{A}}' \rangle_{\Omega_\alpha^p} + M_e^p \right] \\ M' \binom{t}{\alpha} \binom{t}{\alpha} = f_\alpha^t \left[ \underline{\underline{B}}'_e{}^t : \langle \underline{\underline{A}}' \rangle_{\Omega_\alpha^t} + M_e^t \right] \\ M' \binom{p}{\alpha} \binom{t}{\alpha} = f_\alpha^p \underline{\underline{B}}'_e{}^p : \langle \underline{\underline{A}}' \rangle_{\Omega_\alpha^p} = f_\alpha^t \underline{\underline{B}}'_e{}^t : \langle \underline{\underline{A}}' \rangle_{\Omega_\alpha^t} \\ M \binom{v}{\beta} \binom{v}{\beta} = f_\beta^v \underline{\underline{1}} : \langle \underline{\underline{A}}' \rangle_{\Omega_\beta^v} = \underline{\underline{1}} : (\mathbb{C}^c)^{-1} \left[ \underline{\underline{B}}'_\beta{}^v - f_\beta^v \underline{\underline{1}} \right] \end{cases} \quad (9.19)$$

On dispose donc d'expressions explicites des propriétés homogénéisées du béton attaqué en fonction de tenseurs de localisation qu'il nous faut exprimer pour pouvoir continuer.

### 9.3 Calcul concret des propriétés homogénéisées par deux schémas

Dans la section précédente nous avons conclu en donnant les expressions des propriétés poroélastiques homogénéisées d'un béton sous attaque. Il faut maintenant spécifier les tenseurs de localisation, ce que nous avons décidé de faire en utilisant des schémas d'homogénéisation classiques. Nous utilisons pour cela le schéma dilué, présenté dans notre chapitre de bibliographie sur l'homogénéisation, au § 3.6.2. Tous les autres schémas utilisent à un moment ou à un autre le tenseur de localisation dilué. Une fois ce tenseur établi pour les différentes configurations qui nous intéressent, nous l'utilisons pour écrire le tenseur de localisation obtenu par le schéma *IDD*, présenté au § 3.6.8.

#### 9.3.1 Approche diluée

Pour démarrer on fait une approximation très grossière, qui consiste à supposer que les hétérogénéités occupent une fraction volumique très faible et sont donc assez éloignées les unes des autres dans le béton pour qu'il n'y ait pas d'interaction mécanique entre les sites. Cela veut dire qu'on peut très bien représenter les champs de contrainte et de déformation autour et dans un site par les champs extraits d'un problème auxiliaire où le site est seul dans un matériau matrice d'extension infinie. Nous allons grâce à cette approximation donner de premières expressions de nos tenseurs de localisation moyennés sur les différentes zones. Dans ce contexte les différents sites sont traités à part.

##### 9.3.1.1 Sites de *Type I*

Ces sites, qui représentent des granulats attaqués mais où aucune fissuration ne s'est produite, sont constitués, comme on l'a expliqué au chapitre 8, des éléments suivants :

- un cœur de granulat sain qui occupe la sphère de rayon  $(1 - \alpha)R$ , de matériau élastique linéaire isotrope caractérisé par  $\mathbb{C}^a$  ;
- une calotte sphérique de granulat attaqué qui occupe l'espace entre les sphères de rayon  $(1 - \alpha)R$  et  $R$ , de matériau poroélastique isotrope caractérisé par les paramètres  $(\mathbb{C}_e^p, \underline{\underline{B}}_e^p, M_e^p)$  ;
- une auréole de transition qui occupe l'espace entre les deux sphères de rayon  $R$  et  $R + l_c$ , de matériau poroélastique isotrope caractérisé par les paramètres  $(\mathbb{C}_e^t, \underline{\underline{B}}_e^t, M_e^t)$ .
- un milieu élastique infini de matériau élastique isotrope caractérisé par  $\mathbb{C}^c$ .

On dispose alors pour calculer les tenseurs de localisation de la solution de Love [15], utilisée par Christensen et Lo pour l'établissement de leur schéma autocohérent généralisé [4], qui donne le champ de déplacement dans les calottes sphériques successives lors d'un chargement en cisaillement. Cette solution permet de traiter la partie déviatorique du problème.

**Partie déviatorique : solution de Love** Nous cherchons d'abord les tenseurs de localisation en déformation. On impose donc une déformation de cisaillement par l'intermédiaire du déplacement imposé :

$$\underline{\underline{u}}_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \underline{\underline{x}} \quad (9.20)$$

à notre milieu infini. D'après Love, la solution coordonnées sphériques peut être écrite :

$$\begin{cases} u_r = U_r(r) \sin^2 \theta \cos 2\phi \\ u_\theta = U_\theta(r) \sin \theta \cos \theta \cos 2\phi \\ u_\phi = -U_\theta(r) \sin \theta \sin 2\phi \end{cases} \quad (9.21)$$

Où dans nos quatre couches les fonctions  $U_r$  et  $U_\theta$  s'écrivent :

– dans la zone de granulat sain ( $r \leq R(1 - \alpha)$ ) :

$$\begin{cases} U_r(r) = A_1 r - 6 \frac{\nu_a}{1 - 2\nu_a} A_2 r^3 \\ U_\theta(r) = A_1 r - \frac{7 - 4\nu_a}{1 - 2\nu_a} A_2 r^3 \end{cases} \quad (9.22)$$

– dans la zone de granulat attaqué ( $R(1 - \alpha) \leq r \leq R$ ) :

$$\begin{cases} U_r(r) = B_1 r - 6 \frac{\nu_p}{1 - 2\nu_p} B_2 r^3 + 3B_3 \frac{1}{r^4} + \frac{5 - 4\nu_p}{1 - 2\nu_p} B_4 \frac{1}{r^2} \\ U_\theta(r) = B_1 r - \frac{7 - 4\nu_p}{1 - 2\nu_p} B_2 r^3 - 2B_3 \frac{1}{r^4} + 2B_4 \frac{1}{r^2} \end{cases} \quad (9.23)$$

– dans l'auréole de transition ( $R \leq r \leq R + l_c$ ) :

$$\begin{cases} U_r(r) = C_1 r - 6 \frac{\nu_p}{1 - 2\nu_p} C_2 r^3 + 3C_3 \frac{1}{r^4} + \frac{5 - 4\nu_p}{1 - 2\nu_p} C_4 \frac{1}{r^2} \\ U_\theta(r) = C_1 r - \frac{7 - 4\nu_p}{1 - 2\nu_p} C_2 r^3 - 2C_3 \frac{1}{r^4} + 2C_4 \frac{1}{r^2} \end{cases} \quad (9.24)$$

– dans la pâte de ciment infinie ( $r \geq R$ ) :

$$\begin{cases} U_r(r) = r + 3D_3 \frac{1}{r^4} + (5 - 4\nu_c)/(1 - 2\nu_c) D_4 \frac{1}{r^2} \\ U_\theta(r) = r - 2D_3 \frac{1}{r^4} + 2D_4 \frac{1}{r^2} \end{cases} \quad (9.25)$$

Une propriété de cette solution est que la moyenne de la déformation sur chaque phase, comme la déformation imposée, est également déviatorique. Cela ne provient pas d'ailleurs de la forme précise que prennent  $U_r$  et  $U_\theta$ , mais de l'écriture de la solution 9.21. Calculons la moyenne de la déformation  $\langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle$  pour chaque zone. Elle s'exprime à l'aide de termes du type :

$$\int_S u_i n_j dS \quad (9.26)$$

Où  $S$  est l'interface entre deux zones,  $n_i$  une composante de la normale à l'interface. Remarquons une propriété intéressante de ces intégrales pour le chargement 9.20. On a en coordonnées sphériques l'expression 9.21 du déplacement, tandis que la normale s'écrit simplement  $\underline{n} = \underline{e}_r$ . On souhaite écrire la moyenne de la déformation dans la base cartésienne. En utilisant le passage entre ces deux bases :

$$\begin{cases} \underline{e}_r = \sin \theta \cos \phi \underline{e}_x + \sin \theta \sin \phi \underline{e}_y + \cos \theta \underline{e}_z \\ \underline{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \underline{e}_x + \cos \theta \sin \phi \underline{e}_y - \sin \theta \underline{e}_z \\ \underline{e}_\phi = -\sin \phi \underline{e}_x + \cos \phi \underline{e}_y \end{cases} \quad (9.27)$$

On peut ainsi écrire les composantes du déplacement et de la normale dans la base cartésienne :

$$\begin{cases} u_x = U_r(r) \sin^2 \theta \sin \theta \cos 2\phi \cos \phi + U_\theta(r) \sin \theta \cos^2 \theta \cos 2\phi \cos \phi + U_\theta(r) \sin \theta \sin \phi \sin 2\phi \\ u_y = U_r(r) \sin^2 \theta \sin \theta \cos 2\phi \sin \phi + U_\theta(r) \sin \theta \cos^2 \theta \cos 2\phi \sin \phi - U_\theta(r) \sin \theta \cos \phi \sin 2\phi \\ u_z = U_r(r) \sin^2 \theta \cos \theta \cos 2\phi - U_\theta(r) \sin^2 \theta \cos \theta \cos 2\phi \end{cases} \quad (9.28)$$

$$\begin{cases} n_x = \sin \theta \cos \phi \\ n_y = \sin \theta \sin \phi \\ n_z = \cos \theta \end{cases} \quad (9.29)$$

Et ainsi calculer toutes les composantes du tenseur  $\int \underline{u} \otimes \underline{n} dS$ . Écrivons ces composantes pour une sphère  $S$  de rayon  $R$  :

$$\begin{cases} \int_S u_x n_x dS = R^2 \left[ \frac{8\pi}{15} U_r(R) + \frac{4\pi}{5} U_\theta(R) \right] \\ \int_S u_y n_y dS = -R^2 \left[ \frac{8\pi}{15} U_r(R) + \frac{4\pi}{5} U_\theta(R) \right] \end{cases} \quad (9.30)$$

Tandis que toutes les autres composantes sont nulles. Cela veut dire que la déformation moyenne sur chaque phase est elle aussi déviatorique, comme la déformation imposée, et qu'elle est proportionnelle à cette déformation imposée.

Il reste néanmoins à calculer l'ensemble des constantes qui se trouvent dans les équations 9.22, 9.23, 9.24, 9.25, dans le même esprit que ce qui est fait dans l'article de Christensen, par application des conditions de continuité en déplacement et en vecteur contrainte aux interfaces. Une fois l'ensemble des conditions rassemblées en un système linéaire, on trouve les 12 coefficients par inversion de la matrice de ce système.

**Partie sphérique** L'application à cette même géométrie d'un chargement sphérique est plus facile à traiter. On impose à l'infini un déplacement :

$$\underline{u}^s = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{x} \quad (9.31)$$

Le champ de déplacement solution est radial, et a dans chaque zone la forme :

$$u^s(r) = \frac{C}{3} + \frac{D}{r^2} \quad (9.32)$$

Nous avons cette fois 6 inconnues à déterminer ce qui se fait de la même façon par inversion de la matrice du système obtenu par l'application de la continuité des déplacements et du vecteur contrainte. Cette forme de déplacement rend également facile à calculer la moyenne de la déformation. On a pour une sphère  $S$  de rayon  $R$  :

$$\int_S u_x^s n_x dS = \int_S u_y^s n_y dS = \int_S u_z^s n_z dS = \frac{4\pi}{3} R^2 u_r^s(R) \quad (9.33)$$

Si bien que la moyenne de la déformation sur toute les zones est également sphérique. Ceci nous prouve que le tenseur de localisation que nous cherchons est isotrope.