

CHAPITRE VI

APPLICATION AU FLAMBEMENT TRANSVERSE

DE PANNEAUX ALVEOLAIRES

VI.1 INTRODUCTION

Dans ce chapitre, nous développons un outil de dimensionnement des structures alvéolaires vis à vis du flambement. Nous nous intéresserons uniquement à la direction transverse, qui est la direction sensible du composite alvéolaire pour les phénomènes de flambement. Nous présenterons des modèles théoriques de flambement transverse de panneaux en composite alvéolaire à partir du modèle de plaque alvéolaire équivalent du chapitre IV et s'appuyant sur la théorie de la stabilité.

La géométrie particulière du composite alvéolaire nous a conduit à supposer l'existence de différents modes de flambement dans la direction transverse de la structure.

Un premier mode de flambement peut s'apparenter à celui des structures homogènes classiques. Pour un élancement suffisamment grand de la structure, les composites alvéolaires peuvent être le siège de phénomènes de flambement qui provoquent une rotation de l'ensemble de la structure. Ce mode de flambement affecte a priori uniquement la macrostructure de l'alvéolaire. Nous l'avons baptisé flambement global (figure 6.1).

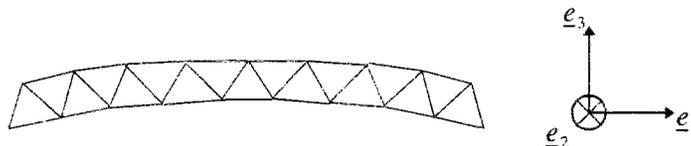


Figure 6.1 Exemple de flambement global

En outre, la structure alvéolaire est constituée de parois qui travaillent essentiellement en traction-compression. Ceci laisse supposer qu'un second mode de flambement est également susceptible de se produire à l'échelle des cellules triangulaires (échelle mésoscopique). Les parois peuvent être affectées par du flambement de même type que pour une structure homogène. Ce mode de flambement a été baptisé flambement local (figure 6.2).

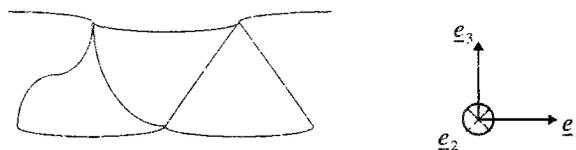


Figure 6.2 Exemple de flambement local

L'existence de ces deux modes de flambement du composite alvéolaire suppose que l'apparition de l'un ou l'autre de ces modes dépend de conditions géométriques particulières de la structure. Le mode de flambement local apparaît pour des poutres de longueurs a priori plus petites que pour le mode global.

Nous avons supposé que les deux modes d'instabilité existaient indépendamment l'un de l'autre et qu'il était possible de définir une longueur caractéristique L_0 pour lequel on passe d'un mode de flambement à l'autre. Ainsi pour $L < L_0$ le flambement serait local et pour $L \geq L_0$, le flambement serait global.

Nous analyserons les deux modes de flambement et donnerons les conditions d'existence de chaque mode pour différentes conditions aux limites. Nous nous servirons dans notre travail de l'étude du flambement d'une poutre droite homogène résolu classiquement comme un problème de stabilité élastique.

Dans une première partie, nous étudierons le flambement global des poutres alvéolaires. Nous traiterons l'exemple élémentaire de la stabilité d'une poutre alvéolaire équivalente en appuis simples aux extrémités (ou rotulée). Nous donnerons les résultats pour d'autres conditions aux limites.

Dans une deuxième partie, nous analyserons le flambement local des poutres alvéolaires. Nous étudierons le flambement de chaque barre qui constitue l'âme triangulaire de l'alvéolaire.

Puis dans une troisième partie nous déterminerons l'expression de la longueur caractéristique L_0 .

Dans la quatrième et dernière partie, nous validerons à l'aide du code de calcul SAMCEF et des premiers résultats d'essais réalisés à l'Institut de Recherches de la Construction Navale (IRCN), la théorie de flambement transverse alvéolaire pour un panneau alvéolaire en carbone/époxyde. Nous examinerons un tronçon de ce plancher sur appuis simples, ainsi que d'autres conditions de liaison.

VI.2 ETUDE DU FLAMBEMENT GLOBAL

Avant de développer les équations du flambement global des poutres alvéolaires, faisons quelques rappels généraux concernant l'analyse de flambement de structures (*Brush et Almroth 1975*), (*Inglebert 1989b*), (*Timoshenko et Gere 1961*).

Le flambement de structures mécaniques est un problème de mécanique non linéaire puisque le comportement des structures affectées par le flambement cesse d'être linéaire. Cependant la difficulté de résolution d'un problème non linéaire et le dimensionnement fréquent des structures vis à vis du flambement, a conduit les mécaniciens à rechercher des solutions linéaires approchées. Le flambement est alors résolu comme un problème de stabilité élastique moyennant une perte de précision pour les solutions.

Pour décrire les phénomènes de flambement, considérons un système élastique au voisinage d'un état naturel. Cet état d'équilibre dénué de contraintes est stable. Faisons croître progressivement le chargement P appliqué au système. Le système étant élastique, la position d'équilibre stable évolue de façon continue. Le flambement apparaît lorsque la charge P

dépasse une valeur critique de chargement pour laquelle d'une part, la position d'équilibre du système cesse d'être stable, et d'autre part, il existe d'autres positions d'équilibre.

Ainsi la charge critique est celle où pour la première fois, il y a perte d'unicité de la solution, en chargement croissant à partir du chargement nul.

Le but des études de flambement (ou de stabilité élastique) sera donc de rechercher la charge critique de flambement (ou d'instabilité) d'un système mécanique, à partir duquel il existe plusieurs positions d'équilibre non stables.

Les instabilités élastiques sont des non-linéarités du comportement purement géométriques. Elles sont prises en compte en introduisant dans les expressions l'influence des rotations de la structure sur le comportement.

Les déformations appartiennent ainsi à une classe de déformations intermédiaire se situant entre les déformations linéaires et les déformations non linéaires. Ainsi dans la direction transverse du composite alvéolaire (direction \underline{e}_1),

$$(6.1) \quad \varepsilon_{11} = \frac{du_1}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2$$

où $\frac{du_1}{dx}$ est la composante de déplacement dans la direction \underline{e}_1 ,
 $\frac{dw}{dx}$ la composante verticale du déplacement.

Pour résoudre ce problème, on peut utiliser les deux approches classiques de mécanique qui consistent à écrire les équations d'équilibre soit à partir de la méthode des puissances virtuelles, soit à partir de l'écriture de l'équilibre des efforts sur un domaine élémentaire déformé. La seconde approche est la plus utilisée dans la littérature (*Timoshenko et Gere 1961*), (*Brush et Almroth 1975*).

C'est cette méthode de résolution que nous utiliserons dans notre travail pour analyser les différents modes de flambement et déterminer les charges critiques.

Explicitons la charge critique de flambement global d'une poutre droite homogène biarticulée, soumise à des efforts de compression axiale (figure 6.3). Nous supposons que nous sommes dans le cas où $L > L_0$, c'est à dire que la charge critique d'instabilité globale est inférieure à la charge critique d'instabilité locale.



Figure 6.3 Poutre alvéolaire biarticulée en compression

Le modèle de plaque alvéolaire équivalente permet de voir la structure alvéolaire comme un milieu homogène unidimensionnel dans la direction \underline{e}_1 . Nous sommes donc amenés à traiter le problème classique d'une poutre droite et homogène biarticulée (figure 6.4).

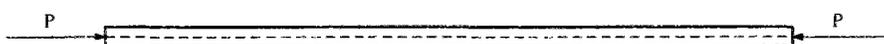


Figure 6.4 Poutre homogène biarticulée

On suppose que la poutre est soumise à un effort extérieur P identique à chaque extrémité, constant en grandeur et en direction, et qu'il est appliqué sur l'axe médian de la poutre.

Les efforts et moments intérieurs sont classiquement les efforts normal N et tranchant Q , et le moment fléchissant M .

Ecrivons l'équilibre des efforts intérieurs pour un élément de poutre dans l'état déformé (figure 6.5). Nous prenons ainsi en compte l'influence des rotations sur la structure qui peuvent induire du flambement.

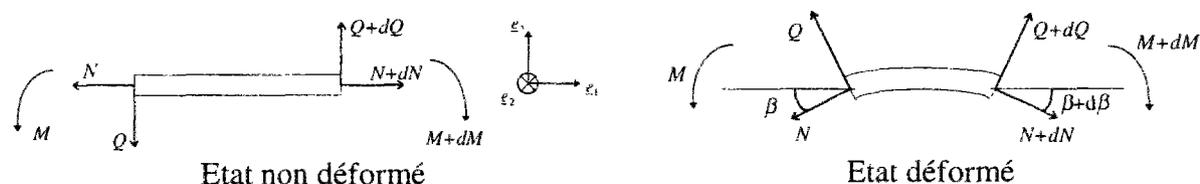


Figure 6.5 Equilibre d'un élément de poutre

On suppose que les déformations du type (6.1) restent petites. u' et w' sont donc petits et la rotation $\beta = -w'$ est considérée comme petite. On peut ainsi approcher $\sin \beta$ et $\cos \beta$ par β et 1 respectivement.

On peut donc écrire :

$$(6.2) \quad -N + (N + dN) - Q\beta + (Q + dQ)(\beta + d\beta) = 0$$

$$(6.3) \quad -Q + (Q + dQ) + N\beta - (N + dN)(\beta + d\beta) = 0$$

soit encore,

$$(6.4) \quad dN + Qd\beta + \beta dQ = 0$$

$$(6.5) \quad -Nd\beta - \beta dN + dQ = 0$$

A partir de l'équilibre des moments de l'élément de poutre (état non déformé) écrit au centre, on en déduit,

$$(6.6) \quad M - (M + dM) + Qdx = 0$$

Soit,

$$Q = \frac{dM}{dx}$$

En négligeant les termes quadratiques représentant les interactions non linéaires entre le cisaillement transverse et les rotations dans (6.4) et (6.5), on obtient les trois équations d'équilibre suivantes,

$$(6.7) \quad \frac{dN}{dx} = 0$$

$$(6.8) \quad \frac{dQ}{dx} = N \frac{d\beta}{dx}$$

$$(6.9) \quad Q = \frac{dM}{dx}$$

D'où en éliminant l'effort tranchant entre les équations (6.8) et (6.9), on obtient une nouvelle équation,

$$(6.10) \quad \frac{d^2 M}{dx^2} - N \frac{d\beta}{dx} = 0$$

Or $\beta = -w'$ et le moment fléchissant M est relié à la dérivée seconde de w via le produit de rigidité en flexion $E_x I_x$. (E_x est le module d'Young de la poutre, I_x est le moment quadratique d'une section de la poutre),

$$(6.11) \quad M = -E_x I_x \frac{d^2 w}{dx^2}$$

En introduisant la relation (6.10) dans la relation (6.11), on en déduit donc,

$$(6.12) \quad \frac{d^4 w}{dx^4} - \frac{N}{E_x I_x} \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

Aux extrémités de la poutre $N(0) = N(L) = -P$, donc il est clair que $\forall x \in [0, L] \quad N(x) = -P$. d'où, en supposant $E_x I_x$,

$$(6.13) \quad \frac{d^4 w}{dx^4} + k^2 \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

$$(6.14) \quad \text{avec } k^2 = \frac{P}{E_x I_x} \quad \text{et} \quad k \in \mathbb{R}$$

La charge critique de flambement se déduit de cette équation différentielle (6.13). Elle s'exprime par la relation suivante,

$$(6.15) \quad P = \frac{n^2 \pi^2 E_x I_x}{L^2} \quad n \in \mathbb{N}^+$$

P est la charge critique d'instabilité du $n^{\text{ème}}$ mode de flambement de la structure.

La charge critique d'instabilité utile au dimensionnement est la plus petite valeur de P non nulle. Elle correspond au premier mode de flambement, soit $n = 1$.

$$(6.16) \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 E_x I_x}{L^2}$$

On peut déterminer de la même manière la charge critique de flambement P_{cr} pour d'autres conditions aux limites. On peut montrer que les différentes charges critiques obtenues peuvent se mettre sous la forme,

$$(6.17) \quad P_{cr} = m \frac{\pi^2 E_x I_x}{L^2} \quad m \in \mathbb{R}_+^*$$

où m est un coefficient qui dépend des conditions de liaison.

Le tableau (6.1) récapitule les charges critiques pour différentes conditions aux limites.

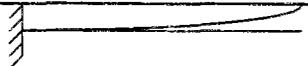
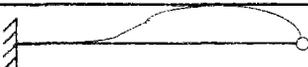
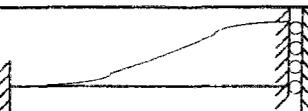
Poutre biarticulée		$P_{cr} = \frac{\pi^2 E_x I_x}{L^2}$
Poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre		$P_{cr} = \frac{1}{4} \frac{\pi^2 E_x I_x}{L^2}$
Poutre encastrée à une extrémité et rotulée à l'autre		$P_{cr} = 2,04 \frac{\pi^2 E_x I_x}{L^2}$
Poutre bi-encastrée		$P_{cr} = 4 \frac{\pi^2 E_x I_x}{L^2}$
Poutre bi-encastrée avec une liberté latérale d'un côté		$P_{cr} = \frac{\pi^2 E_x I_x}{L^2}$

Tableau 6.1 Charges critiques P_{cr} pour différentes conditions aux limites

Il reste maintenant à déterminer le produit $E_x I_x$ de la poutre alvéolaire équivalente pour connaître entièrement l'expression des charges critiques d'instabilité globale en fonction des paramètres physiques de la structure.

Supposons dans un premier temps que l'influence du cisaillement transverse soit négligeable dans le comportement de la poutre alvéolaire. La loi de comportement équivalente pour une poutre alvéolaire dans la direction transverse a pour expression, d'après la relation (5.43), compte tenu de la convention de signe du chapitre,

$$(6.18) \quad \begin{pmatrix} u_1'(x) \\ -w''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & d_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{11}(x) \\ \mathcal{M}_{11}(x) \end{pmatrix}$$

où, les coefficients a_{11} et d_{11} sont donnés par les relations (A4.3.1) et (A4.3.16) en annexe 4.3
(ici $\mathcal{N}_{11}(x) = bN(x)$ $\mathcal{M}_{11}(x) = bM(x)$)

Le moment fléchissant \mathcal{M}_{11} est dans ce cas relié à la dérivée seconde de w par la relation,

$$(6.19) \quad \mathcal{M}_{11}(x) = -\frac{1}{d_{11}} w''(x)$$

donc,

$$(6.20) \quad E_x I_x = \frac{1}{d_{11}}$$

La charge critique de flambement global pour une poutre alvéolaire a donc pour expression,

$$(6.21) \quad (P_{cr})_{glob} = \frac{\pi^2 b}{L^2 d_{11}} \quad L \geq L_0$$

Pour d'autres conditions aux limites, l'expression de la charge critique prend la forme suivante (cf. relation 6.22),

$$(6.22) \quad (P_{cr})_{glob} = m \frac{\pi^2 b}{L^2 d_{11}} \quad m \in \mathbb{R}^*$$

A présent, prenons en compte l'influence de cisaillement transverse de la poutre dans un problème de flambement global. Un terme supplémentaire intervient dans la matrice des souplesses reliant la dérivée première de w et la rotation de section φ à l'effort tranchant équivalent $Q(x)$. La loi de comportement s'écrit dans ce cas (cf. relation 5.43),

$$(6.23) \quad \begin{pmatrix} u'(x) \\ \varphi'(x) \\ -(w'(x) + \varphi(x)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{11} & 0 \\ 0 & 0 & f_{55} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{N}_{11}(x) \\ \mathcal{M}_{11}(x) \\ Q_1(x) \end{pmatrix}$$

où, les coefficients a_{11} , d_{11} et f_{55} sont donnés par les relations (A4.3.1) et (A4.3.16) et (A4.3.23) en annexe (4.3).

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{11}(x) &= bN(x) \\ \mathcal{M}_{11}(x) &= bM(x) \\ Q_1(x) &= bQ(x) \end{aligned}$$

Les équations d'équilibre (6.8) et (6.9) restent valables,

$$(6.24) \quad \frac{dQ}{dx} = P \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (6.25) \quad Q = \frac{dM}{dx}$$

En remplaçant dans les équations (6.29) et (6.30) les efforts généralisés par les déformations généralisées, via les relations de la loi de comportement, on obtient,

$$(6.26) \quad \frac{b}{f_{55}} \left(\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - P \frac{d^2 w}{dx^2} = 0$$

$$(6.27) \quad \frac{1}{d_{11}} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \frac{1}{f_{55}} \left(\varphi + \frac{dw}{dx} \right) = 0$$

La solution de ce système d'équation vérifiant les conditions aux limites (6.16) de la poutre en appuis simples peut s'écrire,

$$(6.28) \quad \varphi(x) = A_n \cos \frac{n\pi x}{L}$$

$$(6.29) \quad w(x) = B_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

En reportant dans (6.31) et (6.32), on obtient pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(6.30) \quad \frac{bL}{f_{55}n\pi} A_n + \left(\frac{b}{f_{55}} - P \right) B_n = 0$$

$$(6.31) \quad \left(\frac{1}{d_{11}} + \frac{L^2}{f_{55}n^2\pi^2} \right) A_n + \frac{L}{f_{55}n\pi} B_n = 0$$

Ce système d'équation a une solution non nulle si le déterminant de la matrice des coefficients A_n et B_n est nul. On en déduit une condition sur la charge P ,

$$(6.32) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad P = \frac{\frac{b}{f_{55}d_{11}}}{\left(\frac{1}{d_{11}} + \frac{L^2}{f_{55}n^2\pi^2} \right)}$$

La charge critique d'instabilité globale correspondant à la plus petite valeur non nulle de n dans (6.37), s'écrit,

$$(6.33) \quad (P'_{cr})_{glob} = \frac{\frac{b}{d_{11}} \frac{\pi^2}{L^2 f_{55}}}{\left(\frac{1}{d_{11}} \frac{\pi^2}{L^2} + \frac{1}{f_{55}} \right)}$$

soit encore,

$$(6.34) \quad (P'_{cr})_{glob} = (P_{cr})_{glob} \frac{1}{\left(1 + \frac{\pi^2 f_{55}}{L^2 d_{11}} \right)}$$

où $(P_{cr})_{glob} = \frac{\pi^2 b}{L^2 d_{11}}$ est la charge critique sans cisaillement transverse,

Lorsqu'on prend en compte les effets du cisaillement transverse dans le problème de flambement, la charge critique diminue dans le rapport $\frac{1}{\left(1 + \frac{\pi^2 f_{55}}{L^2 d_{11}} \right)}$.

L'évaluation du terme $f_c = \frac{\pi^2 f_{55}}{L^2 d_{11}}$ permet d'estimer l'influence du cisaillement transverse sur le comportement de la poutre en flambement global.

VI.3 ETUDE DU FLAMBEMENT LOCAL

Le flambement local affecte les peaux et les raidisseurs du panneau alvéolaire. Il apparaît si la charge critique d'instabilité locale est inférieure à la charge critique d'instabilité globale. Dans cette partie, nous explicitons la charge critique de flambement local d'une poutre biarticulée.

Pour résoudre le problème d'instabilité locale, appliquons de ce qui a été développé au chapitre IV à chacune des parois du treillis. Nous gardons les mêmes notations d'indices pour désigner les différents éléments constituant le treillis (figure 6.6).

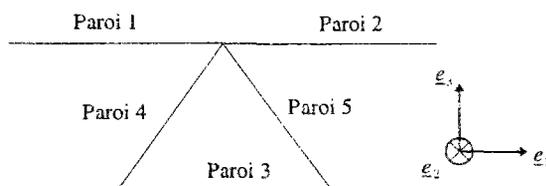


Figure 6.6: Modélisation de la mésostructure (vue en coupe)

Nous avons considéré dans le modèle de plaque équivalente que l'alvéolaire présentait au moins une symétrie globale et que les raidisseurs étaient des stratifiés symétriques et équilibrés. Le problème de flambement des barres 1, 2, et 3 est donc équivalent. Celui des barres 4 et 5 également.

Traisons d'abord le cas des barres 1, 2 et 3. Pour cela considérons la barre 1. Il s'agit du problème de flambement élémentaire que nous avons développé au chapitre précédent. Ecrivons le problème pour la barre 1 (cf. figure 6.7).

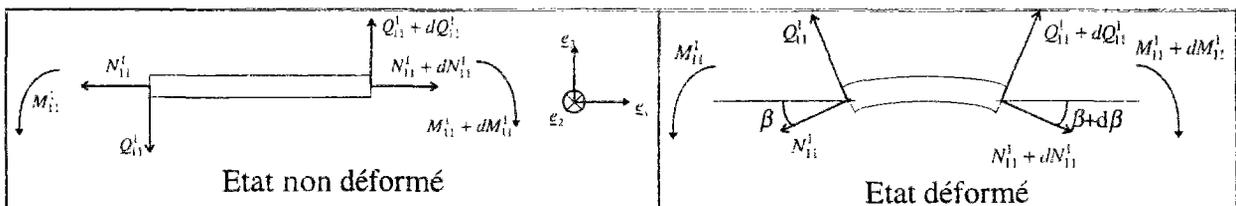


Figure 6.7: Équilibre de la barre 1

Les équations d'équilibre (6.7) et (6.10) s'écrivent ici,

$$(6.35) \quad \frac{dN_{11}^1}{dx} = 0$$

$$(6.36) \quad \frac{d^4 w_1}{dx^4} - \frac{N_{11}^1}{E_{1x} I_{1x}} \frac{d^2 w_1}{dx^2} = 0$$

Pour trouver une relation entre les efforts normaux N_{11}^1 de la structure mésoscopique et les efforts intérieurs de la poutre alvéolaire, plaçons-nous d'abord à l'échelle macroscopique de la structure et faisons le bilan des efforts intérieurs généralisés engendrés par les efforts externes de compression axiale \mathcal{N}_{11} , \mathcal{M}_{11} , Q_1 , ($\mathcal{N}_{11} = bN$, $\mathcal{M}_{11} = bM$, $Q_1 = bQ$) (figure 6.8).

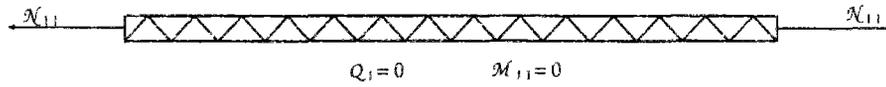


Figure 6.8: Équilibre de la macrostructure

La poutre en compression axiale ne subit pas d'instabilité globale. On peut donc négliger l'effet des rotations sur les déplacements de la macrostructure. Il n'y a donc pas lieu de prendre en compte l'influence du moment fléchissant \mathcal{M}_{11} et de l'effort tranchant Q_1 sur les déformations généralisées du panneau alvéolaire.

Plaçons nous maintenant à l'échelle mésoscopique de la structure alvéolaire. Des équations d'équilibre écrites dans le cadre de l'homogénéisation de la plaque alvéolaire, sur une cellule élémentaire représentative de la structure, ont permis de relier les efforts intérieurs $N_{11}^1, N_{11}^2, N_{11}^3, N_{11}^4$ et N_{11}^5 aux efforts globaux \mathcal{N}_{11} , \mathcal{M}_{11} , Q_1 (cf. relations A4.2.1 à A4.2.5 en annexe 4.2).

$$\begin{aligned} N_{11}^1 &= \frac{\mathcal{N}_{11}}{2} + \frac{\mathcal{M}_{11}}{h} + Q_1 \cdot \cotan \alpha & N_{11}^2 &= \frac{\mathcal{N}_{11}}{2} + \frac{\mathcal{M}_{11}}{h} - Q_1 \cdot \cotan \alpha \\ N_{11}^3 &= \frac{\mathcal{N}_{11}}{2} - \frac{\mathcal{M}_{11}}{h} & N_{11}^4 &= \frac{Q_1}{\sin \alpha} & N_{11}^5 &= -\frac{Q_1}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{M}_{11} = Q_1 = 0$, ces équations se simplifient et deviennent ici,

$$(6.37) \quad N_{11}^1(x) = N_{11}^2(x) = N_{11}^3(x) = \frac{\mathcal{N}_{11}(x)}{2}$$

$$(6.38) \quad N_{11}^4(x) = N_{11}^5(x) = 0$$

Or N_{11}^1, N_{11}^2 et N_{11}^3 sont constants (relation 6.40), et en $x = 0$ et $x = L$ $\mathcal{N}_{11}(x) = -P$.

On en déduit,

$$(6.39) \quad N_{11}^1 = N_{11}^2 = N_{11}^3 = -\frac{P}{2}$$

En remplaçant N_{11}^1 dans l'équation (6.41), on obtient donc,

$$(6.40) \quad \frac{d^4 w_1}{dx^4} + \frac{P}{2E_{1x}I_{1x}} \frac{d^2 w_1}{dx^2} = 0$$

D'où la charge critique suivante,

$$(6.41) \quad P_{cr} = \frac{2\pi^2 E_{1x} I_{1x}}{l^2}$$

avec E_{1x} le module d'Young équivalent de la peau supérieure dans la direction e_1 ,

$$I_{1x} = \frac{be_p^3}{12} \text{ où } b \text{ est la largeur de la paroi rectangulaire et } e_p \text{ l'épaisseur de la peau.}$$

Pour la barre 2 et la barre 3, l'expression de la charge critique est identique à celle de la barre 1 ($E_{1x}I_{1x} = E_{2x}I_{2x} = E_{3x}I_{3x}$).

Considérons maintenant les barres 4 et 5 qui modélisent les raidisseurs. Puisque nous avons supposé que $\mathcal{M}_{11} = Q_1 = 0$, les efforts normaux N_{11}^4 et N_{11}^5 sont donc nuls (cf. relations A4.2.4 et A4.2.5). On suppose ainsi implicitement qu'il n'y a pas de flambement dans les raidisseurs.

Le flambement local n'affecte donc que les peaux supérieure et inférieure de la poutre alvéolaire. Il se produit si les efforts de compression atteignent la valeur critique de

$$\text{flambement } (P_{cr})_{loc} = \frac{2\pi^2 E_{1x} I_{1x}}{l^2}, \quad \text{avec } I_{1x} = \frac{be_p^3}{12}.$$

Si on suppose que la géométrie des treillis est fixe, c'est à dire que la longueur des barres qui les constituent est constante, la charge critique de flambement de chaque barre est constante. Il est alors clair que la charge critique de flambement local est indépendante de la longueur de la poutre alvéolaire.

Pour d'autres conditions de liaisons, l'expression de la charge critique de flambement local est inchangée puisque la poutre alvéolaire ne subit pas de rotation d'ensemble de la structure. La charge critique ne dépend que des efforts de compression axiale N et est indépendante des conditions aux limites imposées aux extrémités.

VI.4 LONGUEUR CARACTERISTIQUE DE FLAMBEMENT

Nous venons d'établir l'expression de la charge d'instabilité locale de la poutre alvéolaire. Auparavant, nous avons déterminé les expressions des charges critiques d'instabilité globale de la poutre alvéolaire en prenant ou non en compte l'influence du cisaillement transverse. Nous nous proposons à présent de déterminer une condition nécessaire et suffisante sur L pour qu'il y ait soit flambement local soit flambement global. Nous en déduirons ainsi la longueur caractéristique L_0 .

Le flambement global apparaît si la force critique de flambement global est inférieure à la force critique de flambement local.

Si on néglige le cisaillement transverse,

$$(6.42) \quad (P_{cr})_{glob} \leq (P_{cr})_{loc}$$

On obtient donc,

$$(6.43) \quad L \geq \sqrt{\frac{6l^2}{d_{11}e_p^3E_{1x}}}$$

$L_0 = \sqrt{\frac{6l^2}{d_{11}e_p^3E_{1x}}}$ est donc la longueur caractéristique de flambement global en l'absence de cisaillement transverse.

Si l'influence du cisaillement transverse est importante,

$$(6.44) \quad (P'_{cr})_{glob} \leq (P_{cr})_{loc}$$

Soit,

$$(6.45) \quad L \geq \sqrt{\frac{1}{d_{11}} \left(\frac{6l^2}{e_p^3E_{1x}} - \pi^2 f_{55} \right)}$$

$L'_0 = \sqrt{\frac{1}{d_{11}} \left(\frac{6l^2}{e_p^3E_{1x}} - \pi^2 f_{55} \right)}$ est donc la longueur caractéristique de flambement global qui tient compte de l'influence du cisaillement transverse.

Il est préférable d'utiliser cette expression pour déterminer la longueur caractéristique de flambement si l'on ne peut pas négliger le cisaillement transverse.

VI.5 APPLICATION

L'objectif de cette dernière partie est de mettre en oeuvre l'analyse du flambement alvéolaire effectuée aux parties (VI.2), (VI.3) et (VI.4).

Au premier paragraphe, nous étudierons le premier mode de flambement de la structure, d'un point de vue théorique, à l'aide de l'analyse précédente. Au deuxième paragraphe nous comparerons les résultats de la théorie avec ceux obtenus avec le logiciel d'éléments finis SAMCEF. Au troisième paragraphe, nous étendrons la comparaison des résultats des deux modélisations théorique et numérique à d'autres conditions de liaison. Enfin au quatrième et dernier paragraphe, nous comparerons les résultats théoriques et numériques avec les premiers résultats de tests effectués à l'IRCN.

On considère une poutre alvéolaire symétrique correspondant à la géométrie et à la constitution des panneaux élaborés au CERAM avec le matériau T300/174, en appuis simples aux extrémités, d'épaisseur totale 51mm et de largeur $b=250\text{mm}$ (figure 6.9).

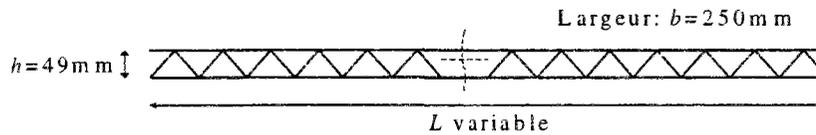


Figure 6.9: Dimensions de la poutre alvéolaire

Les alvéoles du panneau sont supposées être des tubes creux triangulaires équilatéraux de côté 56,5mm et de hauteur 49mm.

Rappelons que les peaux sont constituées de 6 plis d'épaisseur 0,175mm orientés à 0° par rapport à \underline{e}_1 , et de 2 plis $(+30^\circ, -30^\circ)$ provenant des bases des tubes triangulaires. Les raidisseurs qui forment l'âme sont composés de 4 plis de même épaisseur orientés à $(+30^\circ, -30^\circ)_s$ par rapport à \underline{b}'_1 (cf. figure 4.3).

Les caractéristiques mécaniques du préimprégné T300/174 sont données tableau (3.1),

L'étude théorique de l'instabilité de poutres alvéolaires nécessite le calcul de plusieurs caractéristiques mécaniques équivalentes.

- le calcul des constantes de souplesses (Sp_{ij}) et (Sr_{ij}) via celui des constantes de raideurs membranaires A_{ij}^1 et A_{ij}^4 ,
- Le calcul du module d'Young des peaux équivalent E_{1x} via celui des constantes de raideurs équivalentes $(Q'_{ij})_{eq}$ déterminées en posant $(Q'_{ij})_{eq} \times \sum_{k=1}^{k=n} e_k = A_{ij}^1$ (n est le nombre de couches dans les peaux, e_k l'épaisseur de la couche k). On trouve un module d'Young équivalent des peaux égale à 102GPA.

VI.5.1 Analyse théorique du flambement

L'analyse théorique du flambement transverse des panneaux alvéolaires développée aux paragraphes précédents nous permet de calculer la longueur caractéristique d'instabilité. de connaître l'influence du cisaillement transverse sur le flambement et de déterminer les différentes charges critiques d'instabilité.

Evaluons en premier la charge critique de flambement local (6.48) qui n'affecte que les peaux du panneau alvéolaire (valable pour $L < L_0$). Elle ne dépend que de la géométrie et des propriétés mécaniques des parois 1, 2 et 3 du treillis.

$$(P_{cr})_{loc} = \frac{2\pi^2 E_{1x} I_{1x}}{l^2} = \frac{2\pi^2 b e_p^3}{l^2 12}$$

soit,

$$(P_{cr})_{loc} = 36056 \text{ N}$$

Intéressons nous maintenant au flambement global pour lequel on peut déterminer les charges critiques en négligeant ou non le cisaillement transverse. Nous déterminons d'abord les

longueurs caractéristiques L_0 et L'_0 d'instabilité globale, puis nous évaluons le cisaillement transverse pour la plus petite longueur caractéristique trouvée. Enfin nous calculons les charges critiques en fonction de L .

☞ Longueur caractéristique

- Sans cisaillement,

$$L_0 = \sqrt{\frac{6l^2}{d_{11}e_p^3 E_{1x}}}$$

soit $L_0 = 3,45 \text{ m}$

- Avec cisaillement,

$$L'_0 = \sqrt{\frac{1}{d_{11}} \left(\frac{6l^2}{e_p^3 E_{1x}} - \pi^2 f_{55} \right)}$$

A.N.

$$L'_0 = 3,51 \text{ m}$$

Les longueurs caractéristiques L_0 et L'_0 sont pratiquement identiques (à 0,3% près). Il semble que l'influence du cisaillement transverse soit extrêmement faible sur le comportement de la poutre au flambement. Voyons si l'on peut le négliger.

☞ Influence du cisaillement transverse

On détermine l'influence du cisaillement transverse en calculant le facteur de cisaillement f_c pour la longueur $L = \min(L_0, L'_0)$.

$$f_c = \frac{\pi^2 f_{55}}{L^2 d_{11}}$$

soit,

$$f_c = 7,9 \cdot 10^{-3}$$

Lorsque l'on tient compte du cisaillement de la poutre alvéolaire, la charge critique $(P'_{cr})_{\text{glob}}$ diminue la charge critique $(P_{cr})_{\text{glob}}$ dans le rapport 7,8 pour mille. Elle vaut 99,2% de la valeur de la charge critique P_{cr} .

Pour une longueur $L > L_0$, la charge critique $(P'_{cr})_{\text{glob}}$ tend davantage vers la charge critique $(P_{cr})_{\text{glob}}$, puisque le facteur de cisaillement qui est inversement proportionnel au carré de la longueur L , diminue.

L'influence du cisaillement transverse est donc négligeable. Nous justifions ainsi l'utilisation dans ce qui suit, de la formule de la charge critique globale (6.21) donnant $(P_{cr})_{\text{glob}}$ plutôt que celle donnant $(P'_{cr})_{\text{glob}}$.

☞ Charge critique globale

$$(P_{cr})_{glob} = \frac{\pi^2 b}{L^2 d_{11}}$$

Cette formule est valable pour $L \geq L_0$.

VI.5.2 Comparaison avec une modélisation numérique SAMCEF

Nous présentons dans un premier temps la modélisation éléments finis utilisée avec SAMCEF, puis nous donnons les résultats obtenus avec les calculs théoriques issus des formules analytiques précédentes et les calculs numériques effectués avec le code de calcul.

Le modèle éléments finis est identique à celui utilisé dans les chapitres III et V. C'est un modèle 3D constitué d'éléments de coques minces T56 de degré 2. La structure alvéolaire modélisée est composée d'un nombre entier de cellules élémentaires.

La charge est appliquée à l'une des extrémités de la poutre, l'autre extrémité est fixée dans l'espace (figure 6.12).

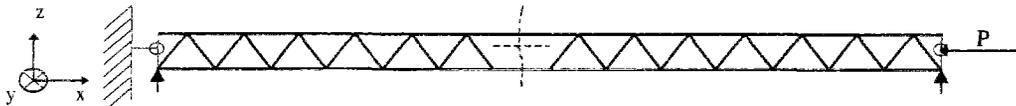


Figure 6.10 Modélisation éléments finis (coupe dans le plan xOz)

SAMCEF fournit les résultats des charges critiques sous la forme d'un facteur de charge λ par lequel les charges P doivent être multipliées pour que la structure devienne instable.

Nous avons modélisé une charge de 1000N. Les charges critiques d'instabilité numériques correspondent donc à $1000 \times \lambda$ N.

Les tableaux (6.2) (6.3) et (6.4) donnent les résultats obtenus avec le calcul théorique et numérique pour la longueur caractéristique L_0 et les charges critiques de flambement.

Longueur caractéristique de flambement:

L_0 théorique (m)	L_0 numérique (m)	Ecart (%)
3,45	3,33	3,6

Tableau 6.2 Longueurs caractéristiques de flambement.

La longueur caractéristique numérique L_0 a été déterminée en effectuant plusieurs calculs éléments finis. A chaque calcul numérique, la longueur de la poutre a été modifiée en ajoutant ou en enlevant une ou plusieurs alvéoles.

Remarquons que la longueur L_0 déterminée avec SAMCEF est un multiple de 56,5 mm, tandis que celle calculée avec l'analyse théorique est indépendante du nombre d'alvéoles de la poutre.

L'écart entre les deux valeurs théorique et numérique de L_0 est inférieur à 6%.

Charge critique d'instabilité locale:

Charge critique théorique (10^4 N)	Charge critique numérique (10^4 N)	Ecart (%)
3,60	3,95	10,3

Tableau 6.3 Charge critique d'instabilité locale.

La valeur de la charge critique calculée par SAMCEF oscille entre $3.93.10^4$ N et $3.97.10^4$ N. Elle vaut en moyenne $3.95.10^4$ N. La charge critique d'instabilité locale varie donc très peu. On peut effectivement la considérer comme une grandeur constante.

La différence entre la charge théorique et numérique est égale à 10,3%.

Charges critiques d'instabilité globale:

Nombre de cellules t_0 (de la peau inférieure)	Longueur L (m) ($L=t_0 \times 0.0565$)	Charge critique théorique (10^4 N)	Charge critique numérique (10^4 N)	Ecart (%)
70	3,95	2,75	2,75	<1
88	4,97	1,74	1,74	<1
106	5,99	1,19	1,20	<1

Tableau 6.4 Charges critiques d'instabilité globale

L'écart entre les différents résultats obtenus pour les charges critiques de flambement global est inférieur à 1%.

L'erreur commise entre le calcul théorique et la modélisation éléments finis est inférieure à 10,5% pour toutes les grandeurs calculées. Elle est même inférieure à 6% pour la longueur caractéristique L_0 et les charges critiques d'instabilités globales.

La validation des résultats du calcul théorique par ceux de la modélisation éléments finis sont donc excellents.

VI.5.3 Autres conditions aux limites

On considère dans ce paragraphe, la même poutre soumise aux conditions aux limites définies au tableau (6.1).

Nous avons vu que seules les charges critiques d'instabilité globale dépendaient des conditions aux limites de la poutre. Par contre la charge critique d'instabilité locale est indépendante des conditions de liaison de la poutre. Elle ne dépend que des caractéristiques du matériau alvéolaire. Nous l'avons calculée au paragraphe VI.2 (cf. tableau 6.3).

L'expression de la charge critique de flambement d'une poutre alvéolaire équivalente se déduit facilement de celle d'une poutre en appuis simples (cf. relation 6.22).

$$(P_{cr})_{glob} = m \frac{\pi^2 b}{L^2 d_{11}}$$

L'influence du cisaillement de la poutre étant négligeable sur son comportement, on peut calculer la longueur caractéristique L_0 de flambement global à l'aide de l'inégalité (6.42) qui ne tient pas compte du cisaillement transverse.

$$(P_{cr})_{glob} \leq (P_{cr})_{loc}$$

La longueur caractéristique L_0 de flambement peut donc s'écrire,

$$L_0 = \sqrt{m \frac{6l^2}{d_{11} e_p^3 E_{1x}}}$$

Pour les différentes conditions aux limites, on obtient les résultats suivants.

Longueurs caractéristiques L_0 :

Conditions aux limites	m	Longueur théorique L_0 (m)	Longueur numérique L_0 (m)	Écarts (%)
Poutre encastree à une extrémité et libre à l'autre	0,25	1,73	1,70	1,8
Poutre encastree à une extrémité et rotulée à l'autre	2,04	4,93	4,80	2,7
Poutre bi-encastree	4	6,91	7,06	2,1
Poutre bi-encastree avec une liberté latérale d'un côté	1	3,45	3,50	1,4

Tableau 6.5 Longueurs caractéristiques L_0 pour différentes conditions aux limites

L'écart entre les deux théories est inférieure à 3% quelque soit les conditions de liaison.

Charges critiques d'instabilité globale:

Conditions aux limites	Longueur L en m ($L > L_0$)	P_{cr} théorique (10^4 N)	P_{cr} numérique (10^4 N)	Ecart (%)
Poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre	2,03	2,60	2,61	<1
Poutre encastrée à une extrémité et rotulée à l'autre	5,20	3,23	3,25	<1
Poutre bi-encastrée	8,02	2,67	2,68	<1
Poutre bi-encastrée avec une liberté latérale d'un côté	3,95	2,75	2,75	<1

Tableau 6.6 Comparaison des charges critiques d'instabilité globale pour d'autres conditions aux limites

La différence entre les deux modélisations est inférieure à 1% quelque soit les conditions de liaison.

Les résultats obtenus pour ces conditions de liaison sont donc aussi bons que ceux d'une poutre biarticulée.

VI.5.4 Comparaison avec les premiers résultats expérimentaux

Des premiers essais de flambement ont été effectués par l'IRCN à Nantes sur 4 éprouvettes alvéolaires fabriquées au CERAM, de 1,05m de long ($t_0=18$ alvéoles) et 25cm de large et rotulées aux extrémités.

L'IRCN a appliqué des efforts de compression sur les éprouvettes avec un déport croissant de 0 à 33mm par rapport à l'axe médian pour obtenir une flexion de plus en plus déviée.

Nous ne disposons donc que d'un seul résultat d'essai correspondant à notre modélisation du flambement: celui obtenu avec le panneau *D* dont la charge a été appliquée dans l'axe (cf. rapport de mesures de l'IRCN (Paradis, Quesnel 1995)).

La longueur *L* de la poutre étant inférieure à la longueur caractéristique, nous sommes donc dans le cas d'un flambement local.

P_{cr} théorique (10^4 N)	P_{cr} numérique (10^4 N)	P_{cr} expérimentale (10^4 N)
3,60	3,95	4,7

Tableau 6.7 Comparaison des charges critiques d'instabilité

Le tableau (6.7) montre qu'il y a des écarts assez importants entre d'une part les valeurs théorique et numérique, et d'autre part la valeur expérimentale. La différence entre la charge critique d'instabilité théorique et expérimentale atteint 30%, la différence entre la charge critique d'instabilité numérique et expérimentale est voisine de 20%. Cependant les résultats restent du même ordre de grandeur.

De plus il est clair qu'un seul résultat d'essai est insuffisant pour valider l'approche théorique et numérique. Nous attendons donc avec impatience les prochains résultats d'essais qui devrait être effectués sur un plancher de 2m de long.

VI.6 CONCLUSION

Dans ce chapitre nous avons développé un modèle théorique de flambement de panneaux en composite alvéolaire dans la direction transverse. Nous nous sommes intéressés aux deux modes de flambement transverse susceptibles de se produire: un flambement dit global qui affecte la macrostructure de l'alvéolaire et un flambement dit local qui affecte la mésostructure (échelle du treillis). Pour ces deux types de flambement, nous avons déterminé les expressions analytiques des charges critiques de flambement qui correspondent à la première charge d'instabilité. Puis nous avons validé le modèle théorique d'abord numériquement avec le logiciel de calculs de structure SAMCEF et ensuite numériquement et expérimentalement avec des panneaux alvéolaires de 1m de long environ. La validation expérimentale concernait donc uniquement le cas du flambement local puisque la longueur du panneau testé était inférieure à la longueur caractéristique de flambement (déterminée analytiquement et numériquement).

La validation de l'approche théorique avec une approche numérique de type éléments finis a montré que notre modèle de flambement était satisfaisant. Par contre lorsque nous avons comparé ces deux approches théorique et numérique avec le résultat d'essai fournit par l'IRCN, nous avons constaté un écart beaucoup plus important (30% et 20% respectivement). Pour traiter le flambement local, nous avons utilisé un certain nombre d'hypothèses concernant le comportement des peaux et des raidisseurs en négligeant notamment les moments de flexion propres. Il est possible que nous ayons sous-estimé leur importance dans le comportement des parois de la structure. Cependant il nous faut attendre les prochains résultats d'essai pour mieux juger de la pertinence du modèle analytique pour ce qui concerne le flambement local.

Il serait également intéressant de valider un cas de flambement global. Il faudrait pour réaliser les essais utiliser des panneaux alvéolaires de plus grandes dimensions (au moins 3,5m), ou bien des panneaux de largeurs beaucoup plus petites, mais on risque de faire apparaître des phénomènes d'effets de bord. Ces tests de flambement sont donc plus difficiles à réaliser car il faudrait prévoir la fabrication de panneaux alvéolaires de plus grande taille au CERAM.

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

Dans ce mémoire de thèse, nous avons abordé l'étude des structures fléchissantes en matériaux composites à rigidité spécifique élevée: les structures traditionnelles en matériaux sandwichs et les structures alvéolaires mises au point au CERAM de l'ENPC. Notre objectif était de proposer des modèles mécaniques pertinents pour décrire et prédire le comportement en raideur de ces deux familles de structures en composite, et de disposer ainsi d'outils adaptés à leur dimensionnement.

Dans la première partie, nous avons présenté des théories de plaques sandwichs appartenant à la famille des modèles classiques et à la famille des modélisations multicouches. Nous avons validé dans un premier temps, toutes ces théories en flexion cylindrique, vis à vis de la solution exacte de Pagano, et dans un deuxième temps les modélisations multiparticulaires vis à vis de modélisations éléments-finis, réalisées avec le code de calcul de structures SAMCEF.

Nous avons d'abord développé une nouvelle version de la théorie sandwich classique, à partir de la théorie des plaques stratifiées de Sab dont la différence essentielle avec une théorie classique de stratifiés fondée sur les hypothèses de Reissner-Mindlin réside dans l'évaluation des coefficients de raideur (ou de souplesse) en cisaillement transverse.

Nous avons également proposé des modélisations multiparticulaires appartenant à la famille des théories multicouches. La définition de champs cinématiques par couche permet d'affiner la description du comportement des panneaux stratifiés ou sandwichs, en introduisant des grandeurs cinématiques supplémentaires. Deux modélisations multiparticulaires ont été développées,

- le modèle triparticulaire complet (cinématique à 9 champs scalaires)
- le modèle triparticulaire simplifié (liaison cinématique: cinématique à 7 champs scalaires)

Nous avons montré d'une part, que la théorie classique de Sab était mieux adaptée au dimensionnement en raideur des plaques sandwichs que la théorie classique de Reissner-Mindlin. Nous avons montré d'autre part, que les théories multiparticulaires étaient beaucoup plus précises que les théories classiques de Reissner-Mindlin et de Sab.

Le modèle de Sab améliore ainsi l'approche classique de modélisation des structures sandwichs et devrait faire l'objet du développement d'une maille élément-fini de plaque stratifiée et sandwich. Les modèles multiparticulaires se prêtent quant à eux parfaitement à la description des processus d'endommagement tel que le délaminage et pourraient être étendus à l'analyse du comportement en résistance des structures sandwichs. La maille élément-fini M4 serait alors également adaptée au dimensionnement en résistance des structures sandwichs.