

Chapitre 6

Analyse numérique du calcul des coefficients d'amplification

Introduction

Pour calculer les coefficients d'amplification, on a deux problèmes numériques distincts :

- 1. calculer l'opérateur de propagation libre à partir des équations d'équilibre ;*
- 2. diagonaliser cet opérateur.*

Pour calculer diagonaliser l'opérateur de propagation libre, on a cherché à se ramener à un problème réel. On a utilisé pour cela la propriété de conservation de la forme symplectique par l'opérateur de propagation.

Puis on a envisagé trois méthodes :

- 1. une méthode par itération successive et déflation de l'opérateur à diagonaliser.*
- 2. une méthode tirée de [Geradin & Rixen92] qui permet de se ramener à la codiagonalisation de deux opérateurs symétriques à partir du problème de la recherche de la partie imaginaire des coefficients d'amplification. Par contre, on n'a pas pu montrer qu'ils étaient positifs, et on n'a pas programmé cette méthode.*
- 3. une méthode qui étend la méthode de Lanczos. A partir du problème de la recherche de la partie réelle des coefficients d'amplification, on développe un algorithme de Lanczos symplectique en s'inspirant des résultats de [Zhong & Williams95] sur un problème identique.*

Cet algorithme est utilisé avec l'opérateur de propagation libre déduit de notre modèle simplifié de pneumatique.

Notations

A, K, J, D	Matrice bloc de dimension $2n \times 2n$ constituée de blocs 2×2
$a_{i,j}$ $j_{i,j}$	Matrice de dimension 2×2 , bloc i, j de la matrice A Matrice de dimension 2×2 , bloc i, j de la matrice J
x, y, q_j, q'_j	Vecteur de dimension $2n$
$\bar{q}_j = (q_j, q'_j)$	Matrice de dimension $2n \times 2$
R, P, Q	Matrice de dimension $p \times p$
z	Vecteur de dimension p
$u, s, b_j, 1$	Matrices 2×2
a_j, c_j, x	Nombres réels

6.1 Procédure de diagonalisation

6.1.1 Méthode par itération et déflation

La méthode d'itération permet de trouver la plus grande valeur propre (en module) et le plus grand vecteur propre d'une matrice réelle diagonalisable à valeurs propres réelles. Pour notre problème, les valeurs propres de l'opérateur de propagation sont des nombres complexes de module 1. Mais on peut rechercher soit la partie réelle des valeurs propres, soit la partie imaginaire, en utilisant les formules développées dans le chapitre 3.

$$\mathbb{L}.V^n = e^{i\varphi_n} V^n \Rightarrow \begin{cases} (\mathbb{J}.\mathbb{L} + \mathbb{L}^T.\mathbb{J}).V^n = 2 \cos(\varphi_n)\mathbb{J}.V^n \\ (\mathbb{J}.\mathbb{L} - \mathbb{L}^T.\mathbb{J}).V^n = 2i \sin(\varphi_n)\mathbb{J}.V^n \end{cases}$$

Comme on a vu que les coefficients d'amplification qui conduisent à une amplification des vibrations sont proches de 1, on choisit d'utiliser la formule donnant la partie réelle des valeurs propres, avec translation spectrale pour calculer la partie réelle de la valeur propre la plus proche de 1.

• Recherche des espaces propres par itération

On a vu que les espaces propres sont de dimension 2. L'algorithme consiste à calculer les itérés successifs par l'opérateur $(2\mathbb{J} - \mathbb{J}.\mathbb{L} - \mathbb{L}^T.\mathbb{J})^{-1}.\mathbb{J}$ d'un couple de vecteurs z_0, z'_0 orthogonaux. A chaque étape, on réorthogonalise les deux vecteurs, et on les renorme par un procédé de Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= (2\mathbb{J} - \mathbb{J}.\mathbb{L} - \mathbb{L}^T.\mathbb{J})^{-1}.\mathbb{J}.z_n \\ \mathbf{q}' &= (2\mathbb{J} - \mathbb{J}.\mathbb{L} - \mathbb{L}^T.\mathbb{J})^{-1}.\mathbb{J}.z'_n \\ \mathbf{b} &= \begin{pmatrix} \mathbf{q}^T \\ \mathbf{q}'^T \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{q}, \mathbf{q}') \\ \mathbf{b} &= \mathbf{s}^{-T}.\mathbf{s}^{-1} \\ z_{n+1} &= s_{1,1}\mathbf{q} + s_{1,2}\mathbf{q}' \\ z'_{n+1} &= s_{2,1}\mathbf{q} + s_{2,2}\mathbf{q}' \end{aligned}$$

Lorsque les composantes de z_{n+1} et z'_{n+1} ne varient presque plus, on a :

$$(2\mathbb{J} - \mathbb{J}.\mathbb{L} - \mathbb{L}^T.\mathbb{J})^{-1}.\mathbb{J}.z_n = \frac{1}{2 - 2 \cos \varphi_0} z_n$$

où φ_0 est l'argument de la valeur propre de \mathbb{L} la plus proche de 1.

On trouve aussi que :

$$(2\mathbb{J} - \mathbb{J}.\mathbb{L} - \mathbb{L}^T.\mathbb{J})^{-1}.\mathbb{J}.z'_{n+1} = \frac{1}{2 - 2 \cos \varphi'_0} z'_{n+1}$$

avec φ'_0 très proche de φ_0 .

On pose $U_0 = z_{n+1}$ et $U'_0 = z'_{n+1}$

• Déflation de l'opérateur

Pour continuer la procédure de diagonalisation, on utilise la propriété 3.6 qu'on a montrée au chapitre 3 ; si U_q est un vecteur propre associé à une autre valeur propre, alors :

$$\begin{aligned} U_q^T \cdot \mathbb{J} \cdot U_0 &= 0 \\ U_q^T \cdot \mathbb{J} \cdot U'_0 &= 0 \end{aligned}$$

Par contre, on a montré que $U'_0{}^T \cdot \mathbb{J} \cdot U_0 \neq 0$. On peut poser cette quantité égale à 1.

On décompose $x = y + \alpha U_0 + \beta U'_0$.

Regardons l'opérateur $(\mathbb{J} \cdot \mathbb{L} + \mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J} - 2 \cos \varphi_0 \mathbb{J} \cdot U'_0 \cdot U_0^T \cdot \mathbb{J} + 2 \cos \varphi_0 \mathbb{J} \cdot U_0 \cdot U'_0{}^T \cdot \mathbb{J})$:

$$\begin{aligned} &(\mathbb{J} \cdot \mathbb{L} + \mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J} - 2 \cos \varphi_0 \mathbb{J} \cdot U'_0 \cdot U_0^T \cdot \mathbb{J} + 2 \cos \varphi_0 \mathbb{J} \cdot U_0 \cdot U'_0{}^T \cdot \mathbb{J}) \cdot y \\ &= \mathbb{J} \cdot \mathbb{L} \cdot y + \mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J} \cdot y - 2 \cos \varphi_0 \mathbb{J} \cdot U'_0 \cdot U_0^T \cdot \mathbb{J} \cdot y + 2 \cos \varphi_0 \mathbb{J} \cdot U_0 \cdot U'_0{}^T \cdot \mathbb{J} \cdot y \\ &= \mathbb{J} \cdot \mathbb{L} \cdot y + \mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J} \cdot y \end{aligned}$$

La dernière égalité s'explique car y est une combinaison linéaire de vecteurs propres autres que U_0 et U'_0 . Pour le vecteur y cet opérateur est égal à l'opérateur initial.

$$\begin{aligned} &(\mathbb{J} \cdot \mathbb{L} + \mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J} - 2 \cos \varphi_0 \mathbb{J} \cdot U'_0 \cdot U_0^T \cdot \mathbb{J} + 2 \cos \varphi_0 \mathbb{J} \cdot U_0 \cdot U'_0{}^T \cdot \mathbb{J}) \cdot (\alpha U_0 + \beta U'_0) \\ &= 2 \cos \varphi_0 \mathbb{J} \cdot (\alpha U_0 + \beta U'_0) - 2 \cos \varphi_0 \mathbb{J} \cdot (\alpha U_0 + \beta U'_0) = 0 \end{aligned}$$

Sur l'espace propre associé à φ_0 , cet opérateur est nul.

On peut donc continuer la même procédure d'itération avec cet opérateur. Les deux vecteurs propres qu'on va trouver sont associés à la seconde valeur de $\cos \varphi_n$ la plus proche de 1.

• Premiers résultats

L'algorithme de diagonalisation par itération a été programmé. Il a été testé avec des matrices antisymétriques quelconques. Il ne converge pas vite si les valeurs propres sont trop rapprochées. Les approximations successives sur les vecteurs propres font qu'on ne peut pas calculer un grand nombre de coefficients d'amplification.

Pour l'instant, les vecteurs propres calculés sont des combinaisons linéaires de la partie réelle et de la partie imaginaire des vecteurs propres de l'opérateur de propagation, associés à des valeurs propres conjuguées. D'après la propriété 9, on calcule les vecteurs propres de l'opérateur de propagation à partir de ce sous espace en diagonalisant une matrice 2×2 .

Cependant, s'il faut calculer un grand nombre de vecteurs propres de l'opérateur de propagation, cet algorithme n'est pas efficace. C'est pour cela qu'on va rechercher une méthode de diagonalisation différente.

6.1.2 Recherche de la partie imaginaire des valeurs propres

On peut aussi utiliser le problème intermédiaire de la recherche de la partie imaginaire des coefficients d'amplification :

$$\underbrace{(\mathbb{J}.\mathbb{L} - \mathbb{L}^T.\mathbb{J})}_{\mathbb{G}_i}.W^n = 2i \sin(\varphi_n)\mathbb{J}.W^n$$

Comme la matrice $\mathbb{J}.\mathbb{L} - \mathbb{L}^T.\mathbb{J}$ est symétrique, et que la matrice \mathbb{J} est antisymétrique, on peut se ramener à la codiagonalisation de deux opérateurs symétriques. En reprenant les calculs développés dans [Geradin & Rixen92], on a en posant $W^n = x^n + iy^n$:

$$\mathbb{G}_i.(x^n + iy^n) = 2i \sin \varphi_n \mathbb{J}.(x^n + iy^n) \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2 \sin(\varphi_n)} \mathbb{G}_i .x^n = \mathbb{J}.y^n & \text{égalité des parties réelles} \\ y^n = 2 \sin(\varphi_n) \mathbb{G}_i^{-1} .\mathbb{J}.x^n & \text{égalité des parties imaginaires} \end{cases}$$

En remplaçant la seconde équation dans la première, on trouve :

$$\mathbb{J}.\mathbb{G}_i^{-1}.\mathbb{J}x^n = -\frac{1}{4 \sin^2(\varphi_n)} \mathbb{G}_i.x^n$$

Les deux matrices $\mathbb{J}.\mathbb{G}_i^{-1}.\mathbb{J}$ et \mathbb{G}_i sont symétriques. Par contre, on ne sait pas si elles sont positives. Pour cette raison, on n'a pas utilisé cette méthode.

6.1.3 Variation de la méthode de Lanczos

On utilise la relation vérifiée par la partie réelle des vecteurs propres :

$$\underbrace{(\mathbb{J}.\mathbb{L} + \mathbb{L}^T.\mathbb{J})}_{\mathbb{G}_r}.x^n = \left(\lambda_n + \frac{1}{\lambda_n}\right)\mathbb{J}x^n$$

La matrice $i\mathbb{G}_r$ est hermitienne, et la matrice $i\mathbb{J}$ l'est aussi, on donc affaire à la codiagonalisation de deux opérateurs hermitiens. En revanche, on ne sait pas si elles sont positives. Pour cette raison, on n'a pas utilisé la méthode classique de Lanczos.

On propose une méthode qui s'en approche beaucoup.

• Factorisation de Choleski symplectique

On rappelle ici un résultat utilisé dans [Zhong & Williams95].

On pose $u = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On remarque que \mathbf{u} est unitaire : $\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{u} = \mathbf{1}$.

\mathbb{J} est une matrice de dimension paire $2n \times 2n$, antisymétrique. Toute matrice vérifiant ces propriétés et qui est inversible peut être décomposée sous la forme :

$$\mathbb{J} = \mathbb{A} \mathbb{D} \mathbb{A}^T$$

où \mathbb{D} est une matrice bloc-diagonale (D_i est un réel) :

$$\mathbb{D} = \begin{pmatrix} D_{i-1} \mathbf{u} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & D_i \mathbf{u} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & D_{i+1} \mathbf{u} \end{pmatrix}$$

et où \mathbb{A} est une matrice réelle, bloc-sous-diagonale, dont les blocs sur la diagonale sont l'identité :

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_{i,i-1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{a}_{i+1,i-1} & \mathbf{a}_{i+1,i} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

La décomposition est donnée par la formule de récurrence sur i :

$$\begin{aligned} \forall j < i \quad \mathbf{a}_{i,j} &= \frac{1}{D_j} \left(\sum_{k=1}^{j-1} \mathbf{a}_{i,k} \cdot D_k \mathbf{u} \cdot [\mathbf{a}_{j,k}]^T - \mathbf{j}_{i,j} \right) \cdot \mathbf{u} \\ D_i \mathbf{u} &= \mathbf{j}_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} D_k \mathbf{a}_{i,k} \cdot \mathbf{u} \cdot [\mathbf{a}_{i,k}]^T = \mathbf{j}_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} \det(\mathbf{a}_{i,k}) D_k \mathbf{u} \\ \mathbf{a}_{i,i} &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

• Réduction à la forme normale avec translation spectrale

On fait d'abord une translation spectrale. On va s'intéresser aux valeurs propres de \mathbb{L} proches de 1 et aux vecteurs propres associés. On écrit donc le problème de la recherche de la partie réelle des valeurs propres sous la forme :

$$((2 + \epsilon)\mathbb{J} - \mathbb{J} \cdot \mathbb{L} - \mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J}) \cdot \mathbf{x}^n = \left((2 + \epsilon) - \lambda_n - \frac{1}{\lambda_n} \right) \mathbb{A} \mathbb{D} \mathbb{A}^T \cdot \mathbf{x}^n$$

On utilise la factorisation précédente. On pose $\mathbf{y}^n = \mathbb{A}^T \mathbf{x}^n$. On peut donc redéfinir le problème aux valeurs propres avec translation spectrale sous la forme suivante :

$$[\mathbb{A}^{-1} \cdot ((2 + \epsilon)\mathbb{J} - \mathbb{J} \cdot \mathbb{L} - \mathbb{L}^T \cdot \mathbb{J}) \cdot \mathbb{A}^{-T}] \cdot \mathbf{y}^n = \left((2 + \epsilon) - \lambda_n - \frac{1}{\lambda_n} \right) \mathbb{D} \cdot \mathbf{y}^n$$

Pour deux vecteurs propres \mathbf{x}^n et \mathbf{x}^m associés à deux valeurs propres distinctes, on a montré dans le chapitre 3 la propriété 3.6 :

$$\mathbf{x}^{mT} \cdot \mathbb{J} \cdot \mathbf{x}^n = 0$$

Avec la décomposition introduite, on trouve maintenant que cette propriété se traduit par la relation :

$$\mathbf{y}^{mT} \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbf{y}^n = \mathbf{x}^{mT} \cdot \mathbb{A} \mathbb{D} \mathbb{A}^T \cdot \mathbf{x}^n = 0$$

De même, pour deux vecteurs propres \mathbf{x}^n et \mathbf{x}'^n associés à la même valeur propre, on a montré la propriété 3.6 :

$$\mathbf{x}^{nT} \cdot \mathbb{J} \cdot \mathbf{x}'^n = 1$$

Cette propriété se traduit par la relation suivante:

$$\mathbf{y}^{nT} \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbf{y}'^n = 1$$

Dans la suite, on préfère se ramener par une inversion de $[\mathbf{A}^{-1} \cdot ((2 + \epsilon)\mathbb{J} - \mathbb{J} \cdot \mathbf{L} - \mathbf{L}^T \cdot \mathbb{J}) \cdot \mathbf{A}^{-T}]$ au problème classique suivant :

$$\underbrace{\mathbf{A}^T \cdot ((2 + \epsilon)\mathbb{J} - \mathbb{J} \cdot \mathbf{L} - \mathbf{L}^T \cdot \mathbb{J})^{-1} \cdot \mathbf{A}}_{\mathbb{K}} \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbf{y}^n = \frac{1}{(2 + \epsilon) - \lambda_n - \frac{1}{\lambda_n}} \mathbf{y}^n$$

La matrice \mathbb{K} est antisymétrique réelle. Pour la calculer, il faut inverser la matrice antisymétrique $2\mathbb{J} - \mathbb{J} \cdot \mathbf{L} - \mathbf{L}^T \cdot \mathbb{J}$. Pour ce faire, on peut utiliser la décomposition de Choleski symplectique.

• **Algorithme de Lanczos symplectique**

L'idée consiste à construire un sous-espace contenant les premiers vecteurs propres de $\mathbb{K} \cdot \mathbb{D}$, associés aux plus grandes valeurs propres. Par conséquent, on fait d'une part ressortir les vecteurs propres associés aux plus grandes valeurs propres par itérations successives. D'autre part, il faut faire en sorte que le sous espace qu'on construit soit "presque" stable par $\mathbb{K} \cdot \mathbb{D}$: le dernier vecteur est calculé de façon à ce qu'il soit orthogonal au sens de \mathbb{D} aux autres vecteurs construits. Si la procédure converge, les vecteurs propres de $\mathbb{K} \cdot \mathbb{D}$ associés aux grandes valeurs propres sont dans le sous-espace construit, et par conséquent le dernier vecteur ne contiendra plus de composantes dans ces directions.

◇ *itération numéro 1 :*

On part d'un couple de vecteurs libres, $\tilde{\mathbf{q}}_0 = (\mathbf{q}_0, \mathbf{q}'_0)$. Ce couple de vecteurs de départ devant être libre, on peut les choisir tels que :

$$\tilde{\mathbf{q}}_0^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{u}$$

On construit la séquence de Lanczos symplectique par itération de $\mathbb{K} \cdot \mathbb{D}$ sur chacun des deux vecteurs initiaux. On obtient dans chaque cas une composante qui appartient à l'espace des vecteurs de Lanczos déjà construits, et la direction du nouveau vecteur de Lanczos.

Les directions des deux nouveaux vecteurs de Lanczos sont choisies pour obtenir la propriété $\tilde{\mathbf{q}}_1^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0 = 0$.

La norme des nouveaux vecteurs de Lanczos est choisie pour avoir $\tilde{\mathbf{q}}_1^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{u}$. A cause de l'antisymétrie de \mathbb{D} , cela représente une seule équation.

On peut poser la formule suivante, où a_0 est un réel, c_1 est un réel positif, et s_1 est une matrice 2×2 à déterminer entre :

$$s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad s_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$c_1 \hat{q}_1 \cdot s_1 = \underbrace{\mathbb{K}\mathbb{D} \cdot \tilde{q}_0}_{(\mathbb{K}\mathbb{D} \cdot q_0, \mathbb{K}\mathbb{D} \cdot q'_0)} - a_0 \tilde{q}_0 \quad (6.1)$$

Le réel a_0 est choisi tel que $\hat{q}_1^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{q}_0 = 0$. En multipliant cette formule à gauche par s_1^T et par c_1 , on trouve que cette condition est équivalente à $(c_1 \hat{q}_1 \cdot s_1)^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{q}_0 = 0$. En remplaçant le premier terme du membre de gauche par sa valeur donnée par la formule 6.1, on trouve une équation qui ne porte que sur a_0 :

$$\hat{q}_0^T \cdot \mathbb{D}^T \cdot \mathbb{K}^T \cdot \mathbb{D} \tilde{q}_0 - a_0 \hat{q}_0^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{q}_0 = 0$$

On rappelle que \mathbb{D} , \mathbb{K} sont antisymétriques, donc $\mathbb{D}^T \cdot \mathbb{K}^T \cdot \mathbb{D} = -\mathbb{D}^T \cdot \mathbb{K}\mathbb{D}$ est aussi antisymétrique. Un tel nombre a_0 existe car il traduit l'égalité de deux matrices 2×2 antisymétriques, qui ne dépendent que d'un réel.

Avec ce choix de a_0 , on définit le nombre x_1 par la formule suivante, qui traduit la proportionnalité de deux matrices antisymétriques de dimension 2×2 :

$$(c_1 \hat{q}_1 \cdot s_1)^T \cdot \mathbb{D} \cdot (c_1 \hat{q}_1 \cdot s_1) = (\mathbb{K}\mathbb{D} \cdot \tilde{q}_0 - a_0 \tilde{q}_0)^T \cdot \mathbb{D} \cdot (\mathbb{K}\mathbb{D} \cdot \tilde{q}_0 - a_0 \tilde{q}_0) = x_1 \mathbf{u}$$

On choisit la matrice s_1 pour que le réel x_1 soit positif. Cette opération est toujours possible car l'équation ci-dessus peut s'écrire aussi $c_1^2 \hat{q}_1^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{q}_1 = x_1 s_1 \cdot \mathbf{u} \cdot s_1$ et que les deux possibilités sur s_1 correspondent à $s_1 \cdot \mathbf{u} \cdot s_1 = \pm \mathbf{u}$.

Enfin, le nombre c_1 est pris égal à $\sqrt{x_1}$. On obtient alors la propriété voulue :

$$\hat{q}_1^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{q}_1 = \mathbf{u}$$

◊ *itération numéro 2 :*

On construit les deux nouveaux vecteurs de Lanczos par itération de $\mathbb{K}\mathbb{D}$ sur chacun des vecteurs du couple \tilde{q}_1 . On obtient dans chaque cas une composante qui appartient à l'espace des vecteurs de Lanczos déjà construits, et la direction du nouveau vecteur de Lanczos.

Les directions des deux nouveaux vecteurs de Lanczos sont choisies pour obtenir les propriétés $\hat{q}_2^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{q}_0 = 0$ et $\tilde{q}_2^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{q}_1 = 0$.

La norme des nouveaux vecteurs de Lanczos est choisie pour avoir $\tilde{q}_2^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{q}_2 = \mathbf{u}$. A cause de l'antisymétrie de \mathbb{D} , cela représente une seule équation.

Avec a_1 réel, c_2 réel positif, \mathbf{b}_0 une matrice 2×2 , et \mathbf{s}_2 une matrice 2×2 à déterminer entre :

$$\mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{s}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

on pose :

$$c_2 \tilde{\mathbf{q}}_2 \cdot \mathbf{s}_2 = \underbrace{\mathbf{K.D.}\tilde{\mathbf{q}}_1}_{(\mathbf{K.D.}\mathbf{q}_1, \mathbf{K.D.}\mathbf{q}'_1)} - a_1 \tilde{\mathbf{q}}_1 - \tilde{\mathbf{q}}_0 \cdot \mathbf{b}_0$$

La matrice \mathbf{b}_0 est choisie telle que $\tilde{\mathbf{q}}_2^T \cdot \mathbf{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$. En multipliant à gauche par \mathbf{s}_2^T et par c_2 , on obtient : $(c_2 \tilde{\mathbf{q}}_2 \cdot \mathbf{s}_2)^T \cdot \mathbf{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$. En remplaçant $c_2 \tilde{\mathbf{q}}_2 \cdot \mathbf{s}_2$ par son expression dans l'équation ci-dessus, on trouve l'équation :

$$\tilde{\mathbf{q}}_1^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0 - a_1 \tilde{\mathbf{q}}_1^T \cdot \mathbf{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0 - \mathbf{b}_0^T \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0^T \cdot \mathbf{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$$

En utilisant que $\tilde{\mathbf{q}}_0^T \cdot \mathbf{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{u}$ et $\tilde{\mathbf{q}}_1^T \cdot \mathbf{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$, on trouve que $\mathbf{b}_0^T \cdot \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{q}}_1^T \cdot \mathbf{D} \cdot (\mathbf{K.D.}\tilde{\mathbf{q}}_0)$. En utilisant l'expression de $\mathbf{K.D.}\tilde{\mathbf{q}}_0$ donnée par la formule 6.1, puis les relations d'orthogonalité sur $\tilde{\mathbf{q}}_1$ et $\tilde{\mathbf{q}}_0$, on trouve que $\mathbf{b}_0 = c_1 \mathbf{u}^{-1} \cdot \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{u}$:

$$\mathbf{b}_0^T \cdot \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{q}}_1^T \cdot \mathbf{D} \cdot (\mathbf{K.D.}\tilde{\mathbf{q}}_0) = \tilde{\mathbf{q}}_1^T \cdot \mathbf{D} \cdot (c_1 \tilde{\mathbf{q}}_1 \cdot \mathbf{s}_1 + a_0 \tilde{\mathbf{q}}_0) = c_1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}_1$$

On remarque que $\mathbf{u}^{-1} \cdot \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{u}$ est une matrice diagonale :

$$\mathbf{u}^{-1} \cdot \mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{u} = \begin{cases} 1 & \text{si } s_1 = 1 \\ -s_1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le réel a_1 est choisi tel que $\tilde{\mathbf{q}}_2^T \cdot \mathbf{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{0}$. En multipliant à gauche cette condition par \mathbf{s}_2^T et par c_2 , on trouve une condition équivalente : $(c_2 \tilde{\mathbf{q}}_2 \cdot \mathbf{s}_2)^T \cdot \mathbf{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{0}$. En remplaçant $c_2 \tilde{\mathbf{q}}_2 \cdot \mathbf{s}_2$ par son expression, on trouve une équation qui ne fait intervenir que a_1 :

$$\tilde{\mathbf{q}}_1^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{K} \cdot \mathbf{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_1 - a_1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$$

Il est toujours possible de trouver un tel nombre a_1 car il traduit l'égalité de deux matrices antisymétriques réelles.

Enfin, le nombre c_2 et la matrice \mathbf{s}_2 sont choisis pour avoir :

$$\tilde{\mathbf{q}}_2^T \cdot \mathbf{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_2 = \mathbf{u}$$

◇ *itération numéro $p + 1$:*

Plus généralement, connaissant $\tilde{\mathbf{q}}_p$ et $\tilde{\mathbf{q}}_{p-1}$ tels que :

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{q}}_p^T \cdot \mathbf{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{p-1} = \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{q}}_p^T \cdot \mathbf{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_p = \mathbf{u} \\ \tilde{\mathbf{q}}_{p-1}^T \cdot \mathbf{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{p-1} = \mathbf{u} \end{cases}$$

on pose :

$$c_{p+1} \tilde{\mathbf{q}}_{p+1} \cdot \mathbf{s}_{p+1} = \mathbb{K} \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_p - a_p \tilde{\mathbf{q}}_p - \tilde{\mathbf{q}}_{p-1} \cdot \mathbf{b}_{p-1}$$

Dans cette formule, a_p est un réel, c_{p+1} est un réel positif, et \mathbf{s}_{p+1} est une matrice 2×2 à déterminer entre :

$$\mathbf{s}_{p+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{s}_{p+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

De plus \mathbf{b}_{p-1} est une matrice 2×2 , diagonale.

Pour vérifier les hypothèses de récurrence, on impose les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}_{p+1} \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{p-1} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow (c_{p+1} \tilde{\mathbf{q}}_{p+1} \cdot \mathbf{s}_{p+1})^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{p-1} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow (\mathbb{K} \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_p - a_p \tilde{\mathbf{q}}_p - \tilde{\mathbf{q}}_{p-1} \cdot \mathbf{b}_{p-1})^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{p-1} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow \mathbf{b}_{p-1}^T \cdot \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{q}}_p^T \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbb{K} \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{p-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{q}}_{p+1} \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_p &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow (c_{p+1} \tilde{\mathbf{q}}_{p+1} \cdot \mathbf{s}_{p+1})^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_p &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow (\mathbb{K} \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_p - a_p \tilde{\mathbf{q}}_p - \tilde{\mathbf{q}}_{p-1} \cdot \mathbf{b}_{p-1})^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_p &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow a_p \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{q}}_p^T \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbb{K} \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_p \end{aligned}$$

$$\tilde{\mathbf{q}}_{p+1}^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{p+1} = \mathbf{u} \Rightarrow c_{p+1} = \sqrt{x_{p+1}}$$

On a la relation de récurrence au rang p qui sert à calculer $\mathbf{b}_{p-1} = c_p \mathbf{u}^{-1} \cdot \mathbf{s}_p \cdot \mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{p-1}^T \cdot \mathbf{u} &= \tilde{\mathbf{q}}_p^T \cdot \mathbb{D} \cdot (\mathbb{K} \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{p-1}) \\ &= \tilde{\mathbf{q}}_p^T \cdot \mathbb{D} \cdot (c_p \tilde{\mathbf{q}}_p \cdot \mathbf{s}_p + a_{p-1} \tilde{\mathbf{q}}_{p-1} + \tilde{\mathbf{q}}_{p-2} \cdot \mathbf{b}_{p-2}) = c_p \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}_p \end{aligned}$$

On a aussi la relation de récurrence au rang $p-j$, $1 \leq j \leq p-1$, qui prouve que $\tilde{\mathbf{q}}_{p+1}$ ainsi construit est orthogonal pour \mathbb{D} à $\tilde{\mathbf{q}}_{p-1-j}$:

$$\begin{aligned} (c_{p+1} \tilde{\mathbf{q}}_{p+1} \cdot \mathbf{s}_{p+1})^T \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{p-1-j} &= \tilde{\mathbf{q}}_p^T \cdot \mathbb{D} \cdot (\mathbb{K} \cdot \mathbb{D} \cdot \tilde{\mathbf{q}}_{p-1-j}) \\ &= \tilde{\mathbf{q}}_p^T \cdot \mathbb{D} \cdot (c_{p-j} \tilde{\mathbf{q}}_{p-j} \cdot \mathbf{s}_{p-j} + a_{p-1-j} \tilde{\mathbf{q}}_{p-1-j} + \tilde{\mathbf{q}}_{p-2-j} \cdot \mathbf{b}_{p-2-j}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a bien comme résultat l'orthogonalité du dernier vecteur avec tous les vecteurs précédents. Cependant, les erreurs numériques font perdre cette orthogonalité. On pourra éliminer une composante sur un vecteur de Lanczos de couple de rang $p-1-j$ en utilisant la formule suivante. Si $\tilde{\mathbf{q}}_{p+1}$ les composantes suivantes inconnues sur les vecteurs de Lanczos déjà calculés :

$$\tilde{\mathbf{q}}_{p+1} = \alpha (\mathbf{q}'_{p-1-j}, 0) - \beta (\mathbf{q}_{p-1-j}, 0) + \gamma (0, \mathbf{q}'_{p-1-j}) - \delta (0, \mathbf{q}_{p-1-j}) + \dots$$

alors connaissant le couple de vecteur $\tilde{\mathbf{q}}_{p-1-j}$, et en supposant que tous les vecteurs de Lanczos précédemment calculés sont orthogonaux pour \mathbb{D} , alors les valeurs de α , β , γ et δ sont calculables par la formule :

$$\tilde{\mathbf{q}}_{p+1}^T \cdot \mathbb{D} \tilde{\mathbf{q}}_{p-1-j} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

Cette formule permet de restaurer l'orthogonalité.

• Le problème aux valeurs propres dans l'espace réduit

Les formules de récurrence s'écrivent sous la forme matricielle suivante :

$$\mathbb{K.D.} (\tilde{q}_0 \dots \tilde{q}_p) = (\tilde{q}_0 \dots \tilde{q}_p) \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \mathbf{1} & b_0 & & & 0 \\ c_1 s_1 & a_1 \mathbf{1} & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & a_{p-1} \mathbf{1} & b_{p-1} \\ & & & c_p s_p & a_p \mathbf{1} \end{pmatrix}}_{\mathcal{T}} + (\tilde{0} \dots \tilde{0} \ c_{p+1} \tilde{q}_{p+1} \cdot s_{p+1})$$

Avec les formules suivantes :

$$b_{p-1} = c_p u^{-1} \cdot s_p \cdot u = \begin{cases} c_p \mathbf{1} & \text{si } s_p = \mathbf{1} \\ -c_p s_p & \text{sinon} \end{cases}$$

L'intérêt d'avoir travaillé en orthogonalisant pour \mathbb{D} les vecteurs de Lanczos se retrouve dans la forme de la matrice \mathcal{T} . Cette matrice est bloc-tridiagonale, et grâce à la relation permettant de calculer les matrices b_j , les blocs 2×2 sont diagonaux. La relation de récurrence peut se ramener à deux problèmes découplés. On note \mathcal{P} la partie de la matrice du membre de droite qui s'applique à $(q_0 \dots q_p)$ et \mathcal{P}' la partie de la matrice du membre de droite qui s'applique à $(q'_0 \dots q'_p)$. Ces deux matrices sont tridiagonales de dimension $p \times p$. On a les deux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{K.D.} (q_0 \dots q_p) &= (q_0 \dots q_p) \cdot \mathcal{P} + \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & c_{p+1} s_{p+1,1} & q_{p+1} \end{pmatrix} \\ \mathbb{K.D.} (q'_0 \dots q'_p) &= (q'_0 \dots q'_p) \cdot \mathcal{P}' + \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & c_{p+1} s_{p+1,2} & q'_{p+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ces deux matrices représentent l'expression du problème aux valeurs propres sur chacun des espaces réduits : supposons qu'on connaisse par exemple un vecteur z de dimension p tel que :

$$\mathcal{P}.z = \nu z$$

On note z_i les composantes de z . On construit la combinaison linéaire suivante des vecteurs de Lanczos :

$$y = \sum_{i=1}^p z_i q_i$$

Ce vecteur vérifie la relation suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{K.D.} y &= \mathbb{K.D.} (q_0 \dots q_p) \cdot z \\ &= (q_0 \dots q_p) \cdot \mathcal{P} \cdot z + \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & c_{p+1} s_{p+1,1} & q_{p+1} \end{pmatrix} \cdot z \\ &= \nu (q_0 \dots q_p) \cdot z + c_{p+1} s_{p+1,1} z_p q_{p+1} \\ &= \nu y + c_{p+1} s_{p+1,1} z_p q_{p+1} \end{aligned}$$

On a convergence vers un vecteur propre initial si le reste est proche de 0 :

$$|c_{p+1}z_p| \|\mathbf{q}_{p+1}\| < \epsilon \quad (6.2)$$

L'autre intérêt d'avoir séparé la recherche des vecteurs de Lanczos en deux suites qui vérifient l'orthogonalité pour \mathbb{D} tient au fait qu'aucune des deux suites ne contient deux vecteurs propres du problème initial qui sont associés à la même valeur propre. En effet, soient deux combinaisons linéaires quelconques de vecteurs d'une des suites :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^{(1)} &= \sum_{i=1}^p z_i^{(1)} \mathbf{q}_i \\ \mathbf{y}^{(2)} &= \sum_{i=1}^p z_i^{(2)} \mathbf{q}_i \end{aligned}$$

Alors comme $\mathbf{q}_i^T \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbf{q}_j = 0$, on en déduit que :

$$\mathbf{y}^{(1)T} \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbf{y}^{(2)} = 0$$

Or on a vu que deux vecteurs propres associés à la même valeur propre sont tels que :

$$\mathbf{y}^m{}^T \cdot \mathbb{D} \cdot \mathbf{y}'^n = 1$$

On se ramène donc au problème de la diagonalisation de deux matrices réelles, tridiagonales, de dimension réduite p et n'ayant pas a priori de valeurs propres multiples. C'est un problème bien conditionné pour un algorithme QR.

Cette méthode a été programmée. Dans le cas de matrice de petite taille (jusqu'à 8×8), elle permet de calculer la totalité des valeurs propres. On trouve deux séries de valeurs propres réelles, dont les valeurs sont dans le bon intervalle pour être interprétables en terme de $\cos \varphi_n$. Toujours dans le cas de matrice de petite taille, on a comparé les résultats de cet algorithme avec ceux fournis par le logiciel de calcul formel *Mathematica*. On trouve des résultats identiques à 6 chiffres significatifs.

On a aussi vérifié que les vecteurs obtenus par recombinaison $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^p z_i \mathbf{q}_i$ vérifiaient $\mathbb{K} \mathbb{D} \cdot \mathbf{y} = \nu \mathbf{y}$.

On remarque que dans le cas de matrices de grande taille, cette méthode converge beaucoup plus vite que la méthode de la puissance. L'algorithme de Lanczos calcule les mêmes valeurs propres que l'algorithme puissance.

6.2 Intégration numérique des équations d'équilibre

• Le problème étudié et la méthode de résolution

Pour déterminer un opérateur de propagation libre \mathbb{L} , on a programmé le modèle d'intégration numérique des équations du modèle simplifié par l'algorithme Hilber-Hughes-Taylor (HHT). Les équations algébriques à résoudre sont présentées dans l'annexe B.

La méthode d'intégration des équations d'équilibre par l'algorithme HHT est coûteuse en temps de calcul. Elle pourrait être avantageusement remplacée par la méthode proposée dans [Sinha & Butcher97]. Cette méthode semi-analytique utilise la décomposition de l'opérateur différentiel qui dépend du temps et qui définit l'évolution du système en une série de polynômes de Chebyshev en temps en facteurs d'opérateur différentiel indépendant du temps. La solution se calcule de manière itérative.

On choisit d'étudier un pneumatique à rainures transversales.

◊ Les caractéristiques géométriques sont :

- . un rayon de bande de roulement R_b de 0,3 m
- . une largeur de bande de roulement e de 0,2 m
- . 50 rainures dans la bande de roulement d'une largeur de 9,4 mm

◊ Les caractéristiques mécaniques des flancs sont :

- . une rigidité normale k_N de 100 kN
- . une rigidité tangentielle k_T de 33 kN

◊ Les caractéristiques mécaniques des patins de gomme sont :

- . une masse surfacique μ de 15 kg/m³
- . une rigidité de flexion D de 35 Nm

◊ Les caractéristiques mécaniques des rainures sont :

- . une masse surfacique μ de 5 kg/m³
- . une rigidité de flexion D de 30 Nm

◊ La vitesse du véhicule est constante et vaut 8,33 m/s, et on étudie l'influence de la taille de la partie du pneumatique qui n'est pas en contact avec la chaussée, on choisit 3 valeurs, 320 degré (correspondant à une zone de contact de 20 cm environ), 330 degrés (correspondant à 16 cm) et 340 degrés (correspondant à 10 cm).

◊ Les caractéristiques de maillage sont :

- . une période d'analyse d' 1/50^{ième} de période de rotation de la roue, on profite de la périodicité du motif de bande de roulement

- . un pas de temps de 1/3000 s
- . une géométrie découpée en 900 intervalles soit un intervalle inférieur à de 3 mm.

On a vu en partie bibliographique qu'il n'est pas nécessaire de prendre en compte les vibrations de petite longueur d'onde, car on a vu au chapitre 1 que les ondes de petite longueur d'onde ($k_f \geq \frac{\omega}{c}$) n'émettent pas de son. Pour calculer l'opérateur de propagation, on le restreint à une base finie de fonctions oscillantes, dont la longueur d'oscillation est limitée.

On a choisi de décomposer le déplacement initial et sa dérivée partielle par rapport au temps sur la base des fonctions orthonormées $\frac{1}{\sqrt{2\theta_0}} \sin\left(p\pi \frac{\theta + \theta_0}{2\theta_0}\right)$. Cette base ne vérifie pas toutes les conditions aux limites et on a donc négligé certaines conditions de bord.

Concrètement, l'algorithme procède comme suit :

1. on choisit un déplacement initial aux points du maillage égal à un des vecteurs de base et on prend une dérivée partielle par rapport au temps nulle, ou inversement.
2. on calcule la solution au temps $t_i + N$ par l'algorithme HHT avec un certain choix des paramètres α, β, γ .
3. on projette le déplacement et dérivée partielle par rapport au temps obtenus aux points du maillage sur la base de départ (elle est orthonormée). On construit ainsi une colonne de l'opérateur de propagation.

Cette procédure converge lorsque le pas du maillage en espace diminue.

Comme dans le cas classique, lorsque le pas de temps varie, on règle la partie des vibrations qui seront amorties par l'algorithme.

• Résultats

L'objectif maintenant est de régler les paramètres de l'algorithme HHT pour avoir un système à peu près conservatif.

On va rechercher les paramètres α, β et γ qui redonnent des valeurs propres de module 1. Comme on travaille avec un système qui a peu de degré de liberté, on va calculer avec un algorithme général toutes les valeurs propres de l'opérateur de propagation. Cet algorithme consiste à équilibrer la matrice puis utiliser un algorithme QR (voir numerical recipies par exemple). On a choisi 40 fonctions de base, on trouve donc 80 valeurs propres.

On présente un exemple pour un pneumatique sans rainure avec $\alpha = 0, \beta = 0,28$ et $\gamma = 0,55$.

Les coefficients proches de 0 s'expliquent par la projection orthogonale qui coupe une partie de la réponse. Les coefficients dont le module est plus grand que 1 peuvent s'expliquer par le fait que la famille des fonctions de base ne vérifie pas les conditions de bord et engendrent des erreurs numériques.

Les résultats pour un pneumatique avec rainures sont actuellement moins bons. On présente le cas $\alpha = 0,4$, $\beta = 0,5$ et $\gamma = 1,0$.

La recherche des paramètres dans ce cas est en cours.

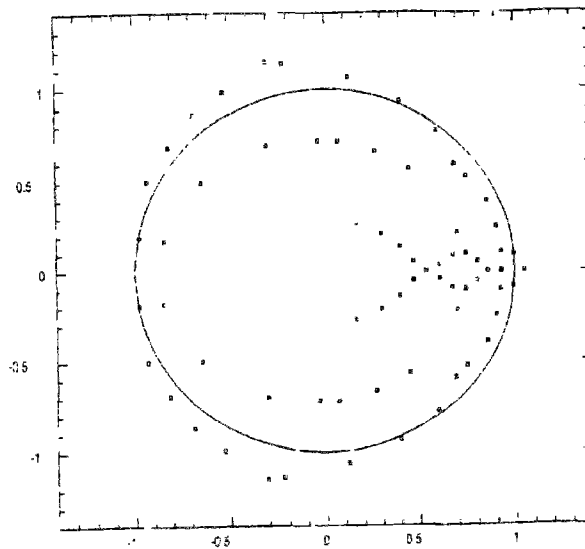


FIG. 6.1 - *Coefficients d'amplification d'un pneumatique lisse*

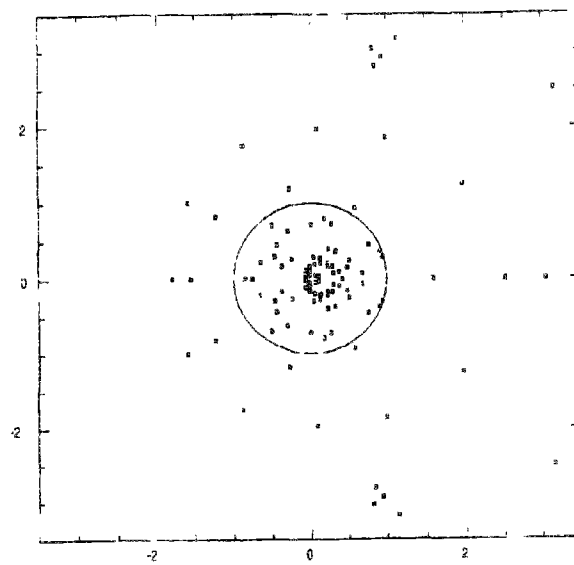


FIG. 6.2 - *Coefficients d'amplification d'un pneumatique avec rainures*

Conclusion

On a mis au point une procédure de recherche de la partie réelle des coefficients d'amplification rapide, qui permet d'extraire les valeurs propres proches de 1 d'un système à grand nombre de degré de liberté.

En entrée de ce programme, il faut fournir l'opérateur de propagation libre sans dissipation. On a programmé l'algorithme Hilber-Hughes-Taylor qui est suffisamment souple pour permettre un calcul sans instabilité numérique et sans trop de dissipation.

Les paramètres α , β , γ ont pu être ajustés dans certains cas particuliers et donnent une approximation de l'opérateur de propagation libre sans dissipation. La généralisation est en cours.

