

Analyse multifractale

3.1 Introduction

L'analyse multifractale d'un champ consiste à déterminer les paramètres multifractals qui caractérisent ce champ, c'est-à-dire ceux des fonctions $K(q)$ et $c(\gamma)$. Il existe des techniques simples, faciles à mettre en œuvre qui permettent déterminer la fonction de échelle des moments, $K(q)$. Nous expliciterons la détermination de cette fonction sachant que la fonction codimension $c(\gamma)$ pourra être déterminée par une transformation de Legendre appropriée.

Des méthodes dites indirectes et directes permettent déterminer les paramètres dans le cadre des multifractals universels. Les premières méthodes sont présentées sommairement dans les Sections 3.2 et 3.3.

La méthode de distribution de probabilité permet de calculer la fonction codimension et les paramètres α et C_1 s'en déduisent par des calculs numériques (pour plus de détails voir Schertzer et Lovejoy, 1994). La méthode du Moment Trace ou TM (*Trace Moment*), permet déterminer directement la fonction d'échelle des moments. Les paramètres α et C_1 sont estimés à partir de cette fonction par des calculs numériques. La fonction codimension $c(\gamma)$ peut être déduite de la fonction $K(q)$ par une transformation de Legendre appropriée.

Il est possible déterminer directement les paramètres multifractals α et C_1 sans passer préalablement par la détermination des fonctions qu'ils définissent. Ceci est rendu possible par une méthode directe qui est la technique du Moment Double Trace ou DTM, (*Double Trace Moment*).

3.2 Méthode de distribution de probabilité

Cette méthode (Schertzer et Lovejoy, 1989b; Lovejoy et Schertzer, 1990; Lavallée et al., 1991) appelée PDMS (de l'anglais *Probability Distribution Multiple Scaling*) est une technique développée pour estimer directement la fonction exposante $c(\gamma)$ (Eq. 2.12), qui

décrit l'invariance d'échelle multiple des distributions de probabilité des processus. Dans cette technique les histogrammes sont examinés sur une plage d'échelle plutôt qu'aux uniques échelles. La méthode PDMS évite l'utilisation de la transformation de Legendre et la supposition implicite de convergence de tous les moments statistiques. La méthode est basée sur l'équation:

$$\Pr(\epsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma) = F \lambda^{-c(\gamma)} \quad (3.1)$$

ou F est un prefacteur qui dépend faiblement de la singularité γ et varie lentement avec λ . La méthode suppose que les distributions de probabilité dans l'équation (3.1) sont d'un unique échantillon ou de plusieurs échantillons indépendants observés dans un espace de dimension D (Lovejoy et Schertzer, 1990).

Pour le calcul pratique des distributions de probabilité de l'équation (3.1), à chaque résolution λ , et pour la singularité γ , on pave l'espace de $N_\lambda = \lambda^D$ boîtes de volume λ^{-D} . Si $N_\lambda(\gamma)$ est le nombre de boîtes ayant une intensité ϵ_λ qui vérifie l'inégalité:

$$\frac{\log(\epsilon_\lambda)}{\log(\lambda)} \geq \gamma \quad (3.2)$$

alors, l'équation (3.1) peut être écrit:

$$\Pr(\epsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma) \approx \frac{N_\lambda(\gamma)}{N_\lambda} = F \lambda^{-c(\gamma)} \quad (3.3)$$

La procédure est répétée pour différentes valeurs de la singularité γ , et par valeurs décroissantes de résolution λ (obtenues par dégradation du signal). La fonction codimension $c(\gamma)$ est obtenue en représentant dans un diagramme bi-logarithmique, les quantités $N_\lambda(\gamma)/N_\lambda$ en fonction de λ . L'avantage de cette méthode est que prise en compte la variation lente du prefacteur F , où $\log(F)$ est simplement l'interception en $\log(\lambda) = 0$.

3.3 Méthode du Moment Trace

La méthode du Moment Trace ou TM (*Trace Moment*) (Schertzer et Lovejoy, 1987a) permet déterminer la fonction exposante d'échelle des moments $K(q)$ dans l'équation (2.13), et donc, de la fonction duale de codimension $c(\gamma)$. L'intérêt est de rechercher sur l'invariance d'échelle des moments d'ordre q de un champ conservatif de densité ε_λ à différentes échelles de résolution λ . Comme nous avons vu dans la Section 2.4 Le comportement multifractal à la petite échelle ($\lambda \rightarrow \infty$) mène à $\langle \varepsilon_\lambda^q \rangle \approx \lambda^{K(q)} \rightarrow \infty$ pour les moments statistiques $q > 1$, parce que $K(q) > 0$ pour $q > 1$. Pour traiter ce type de comportement, l'invariance des moments est étudiée en utilisant les flux des densités de champs à la place des densités mêmes. Le flux d'un champ est l'intégral sur la densité du champ. La notion de flux signifie ici le flux à travers une échelle. (Schertzer et Lovejoy, 1989b)

Soit un processus de cascade observé par un ensemble arbitraire A , de dimension D , défini dans un espace X , à la résolution λ . Le flux total d'un champ de densité ε_λ sur l'ensemble A est:

$$\prod_\lambda(A) = \int_A \varepsilon_\lambda d^D x \quad (3.4)$$

On définit les moments d'ordre q de ces flux:

$$\left\langle \left(\prod_\lambda(A) \right)^q \right\rangle = \left\langle \left(\int_A \varepsilon_\lambda d^D x \right)^q \right\rangle \quad (3.5)$$

Cette formule ne peut pas être utilisée pour q non entier parce que les moments fractionnaires ne sont pas définis. La complexité de cette expression suggère l'introduction des moments traces du flux sur l'ensemble A :

$$Tr_A[\varepsilon_\lambda^q] = \left\langle \int_A (\varepsilon_\lambda)^q d^{qD} x \right\rangle \approx \lambda^{K(q)-D(q-1)} \quad (3.6)$$

Pour la mise en oeuvre de cette méthode, il suffit d'additionner les valeurs de ε_λ sur les pixels de résolution λ , de prendre la puissance q de la quantité obtenue, puis de calculer leur somme, normalisée par $\lambda^{D(q-1)}$, sur tous les pixels de l'ensemble A . La représentation en diagramme logarithmique de la quantité obtenue en fonction de λ permet de déterminer la fonction $K(q)$. En effet, si la dépendance est linéaire, on arrive à la conclusion que le champ caractéristique ε_λ possède la propriété d'invariance d'échelle et que la pente de la courbe obtenue fournit la valeur de $K(q)$. Pour passer d'une échelle de résolution λ à une autre, on procède par une dégradation du champ qui sera détaillée dans la méthode DTM.

3.4 Méthode du Double Moment Trace

La méthode du Moment Double Trace ou DTM (*Double Trace Moment*) (Lavallée, 1991; Lavallée et al., 1993) est une généralisation de la méthode du Moment Trace. Elle a été développée spécifiquement pour estimer directement les paramètres multifractals universels α et C_1 , sans passer par les fonctions qu'ils définissent. La méthode assume que les multifractals appartiennent à la classe universelle, contrairement aux méthodes décrites ci-dessus où aucune supposition n'est faite au sujet du type de multifractal qui est analysé. De même à la méthode TM, la méthode DTM permet également la détermination des fonctions exposantes $K(q)$, dans l'équation (2.13).

Comparé à la méthode TM, la technique de DTM présente un deuxième (double) moment dans l'analyse des données. Ce deuxième moment η est choisi dans un intervalle de \mathbb{R}^+ . L'idée de cette méthode est généraliser l'application des méthodes statistiques à d'autres versions (normalisées) du processus multifractal. Ceci vise à augmenter le range dynamique du processus qui peut être analysé. La procédure agit sur l'intensité ε_λ associée avec la résolution la plus fine (connue) λ du processus. A partir du champ de densité ε_λ , on introduit le champ normalisé des puissances η de ε_λ :

$$\varepsilon_\lambda^{(\eta)} = \frac{\varepsilon_\lambda^\eta}{\langle \varepsilon_\lambda^\eta \rangle} \quad (3.7)$$

Si on considère les sous ensembles $A_{\lambda,i}$, $i=1,\dots,\lambda^D$ formant une partition du domaine A de dimension D , à la résolution λ :

$$A_\lambda = \bigcup_{i=1}^{\lambda^D} A_{\lambda,i} \quad \text{et} \quad A_{\lambda,i} \cap A_{\lambda,j} = \Phi \quad (3.8)$$

En se référant à l'expression du Moment Trace telle que fournie par l'équation (3.6), on peut écrire pour le champ normalisé $\varepsilon_\lambda^{(\eta)}$:

$$Tr_A [\varepsilon_\lambda^{(\eta)q}] = \lambda^{K(q,\eta)-D(q-1)} \quad (3.9)$$

où $K(q,\eta)$ est la fonction de structure du champ normalisé $\varepsilon_\lambda^{(\eta)}$. Il faut remarquer que $K(q,1)=K(q)$, puisque le champ normalisé pour $\eta=1$ correspond au moment initial d'ordre q .

Dans la pratique, la méthode du DTM est l'étude des comportements de divers moments normalisés d'ordre q des puissances η du processus multifractal ε_λ pour des valeurs décroissantes de la résolution (Figure 3-1). En prenant les moments d'ordre q du champ normalisé $\varepsilon_\lambda^{(\eta)}$:

$$\langle \varepsilon_\lambda^{(\eta)q} \rangle \approx \lambda^{K(q,\eta)} = \left\langle \frac{\varepsilon_\lambda^{\eta q}}{\langle \varepsilon_\lambda^\eta \rangle^q} \right\rangle = \frac{\lambda^{K(q\eta)}}{\lambda^{qK(\eta)}} = \lambda^{K(q\eta)-qK(\eta)} \quad (3.10)$$

Après identification, on obtient une relation d'une importance capitale:

$$K(q,\eta) = K(q\eta) - qK(\eta) \quad (3.11)$$

En considérant le modèle multifractal universel pour lequel la fonction de structure est fournie par l'expression (2.20), l'équation (3.11) peut s'écrire:

$$K(q,\eta) = \eta^\alpha K(q) \quad (3.12)$$

La représentation $\log(K(q,\eta))$ pour différentes valeurs de $\log(\eta)$ et un moment statistique q fixé, correspond à une courbe où la valeur du paramètre α est la pente de la partie linéaire de cette courbe (figure 3-2). La valeur du paramètre C_1 est estimée des équations (3.12) et (2.20).

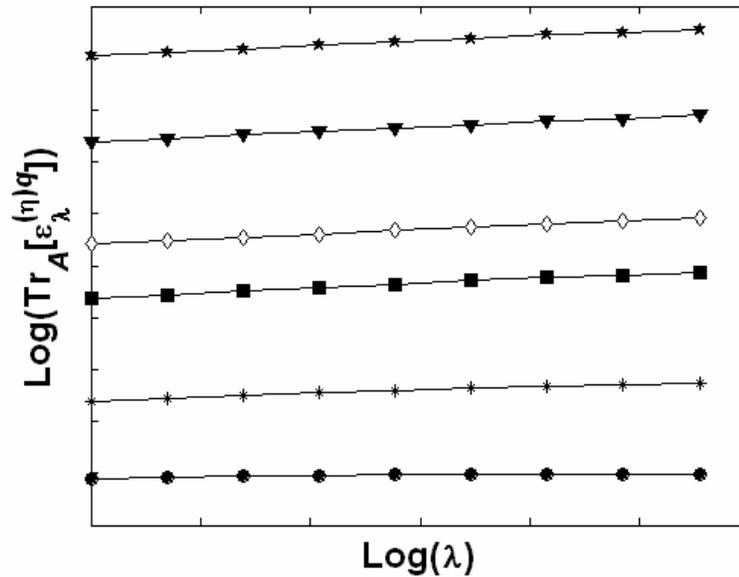


Figure 3-1. Méthode DTM: comportement des divers moments statistiques normalisés d'ordre q des puissances η du processus multifractal ϵ_i .

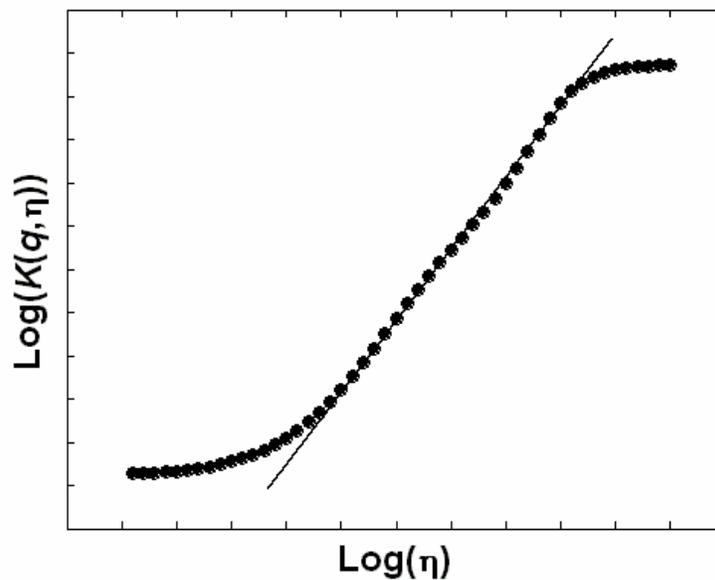


Figure 3-2. Détermination du paramètre α par la méthode DTM. La pente de la partie linéaire du $\text{Log}(K(q,\eta))$ par rapport à $\text{Log}(\eta)$ donne une estimation du paramètre multifractal α . La tendance horizontale des extrémités de la courbe correspond à de petites ou de grandes valeurs de l'échantillon.

3.5 Spectre d'énergie

Une évaluation préliminaire de l'invariance d'échelle peut être faite par une analyse spectrale standard (Mandelbrot, 1983; Schertzer et Lovejoy, 1985b; Schertzer et Lovejoy, 1987a; Ladoy et al., 1991; Lovejoy et Schertzer, 1995a). En effet, l'invariance d'échelle d'un champ implique que son spectre d'énergie suit une loi de puissance sur une plage étendue des nombres d'onde k :

$$E(k) = k^{-\beta} \quad (3.13)$$

où β est l'exposant spectral.

En plus, dans la caractérisation de un processus multifractal, le paramètre H (cf. Sect. 2.4.3) donne le degré de non conservation du processus. L'estimation du paramètre H utilise l'exposant du spectre d'énergie du processus. Si le spectre d'énergie des intensités du champ est de la forme comme exprimée dans l'équation (3.13), on attend que la valeur absolue de l'exposant spectral β sera en rapport avec le paramètre H et l'exposant des moments (Pecknold et al., 1993; Schertzer et Lovejoy, 1993; De Lima, 1998):

$$\begin{aligned} \beta &= 1 - K(2) && (\text{conservatif}) \\ \beta &= 1 - K(2) + 2H && (\text{non conservatif}) \end{aligned} \quad (3.14)$$

L'exposant spectral est lié à une valeur simple de la fonction $K(q)$, correspondant au moment 2 puis que le spectre est un statistique de deuxième ordre. Le spectre d'énergie est obtenu à partir de la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation, qui est un moment de second ordre. Le paramètre H peut être obtenu avec l'équation (3.14) en utilisant une estimation empirique ou théorique du $K(2)$. La valeur théorique de $K(2)$ peut être obtenue avec l'équation (2.20), après détermination des paramètres α et C_1 , en rapportant l'expression:

$$H = \frac{\beta - 1 + K(2)}{2} = \frac{\beta - 1}{2} + \frac{C_1(2^\alpha - 2)}{2(\alpha - 1)} \quad (3.15)$$

Pour un processus conservatif, le spectre est toujours moins raide que un bruit $1/f$, qui est caractérisé par un spectre du type $E(k) = k^{-1}$.

3.6 Analyse Multifractale des Données Radar

Dans les paragraphes précédents on a présenté des procédures correspondantes à la caractérisation multifractale des champs de pluie. Dans cet paragraphe on présente la mise en œuvre et application de ces techniques à l'événement orageux du 8-9 septembre 2002 à Nîmes, France, en utilisant des données radar pour déterminer les paramètres multifractals qui caractérisent la cascade.

3.6.1 Cas d'application: historiques et données

Cévennes est une région méditerranéenne de la France entre les collines méridionales des Alpes et du Massif Central (des montagnes plus anciennes et plus érodées que des Alpes) et qui couvre les secteurs administratifs de Gard, Vaucluse et Herault et dont la ville principale est Nîmes. Elle est connue pour avoir des orages extrêmes, souvent appelés *épisodes cévenoles* capables de déclencher de crues éclairées dévastatrices. Par exemple, le 3 octobre 1988 en quelques heures le centre ville de Nîmes a été sévèrement touché. Parmi diverses études consacrées à ces cas, il vaut la peine de mentionner l'étude multifractal de la série chronologique de Nîmes sur 44 ans par Ladoy et al. (1993) qui ont montré que la queue de probabilité de taux de pluie est grosse, une caractéristique et le fait déconcertant qui sans l'événement tragique du 13 octobre l'année 1988 aurait été une année sèche. En effet, un taux de pluie de 400 millimètres fait partie de 8 heures, tandis que la moyenne annuelle est de l'ordre de 750 mm.

Pour l'étude de cas, on a choisi la série des orages violents qui a lieu en Cévennes du 8 au 9 septembre 2002. Des valeurs exceptionnelles de taux de pluies journalières ont été rapportées à Anduze (nord de la zone de Gard) avec plus de 680 millimètres. D'autres stations pluviométriques ont enregistré des taux journaliers de pluie entre 500 et 670 millimètres. De taux de pluie journalière plus grande que 300 mm a été enregistrée dans le département de Vaucluse. L'historique synoptique météorologique de cet événement a été classiquement analysé comme correspondant à un système convectif produit par la rencontre des vents chauds et humides méditerranéens avec des vents froids d'une dépression profonde d'altitude qui s'est développée lentement à partir de l'Irlande vers l'ouest de la France (Figure 3-3).

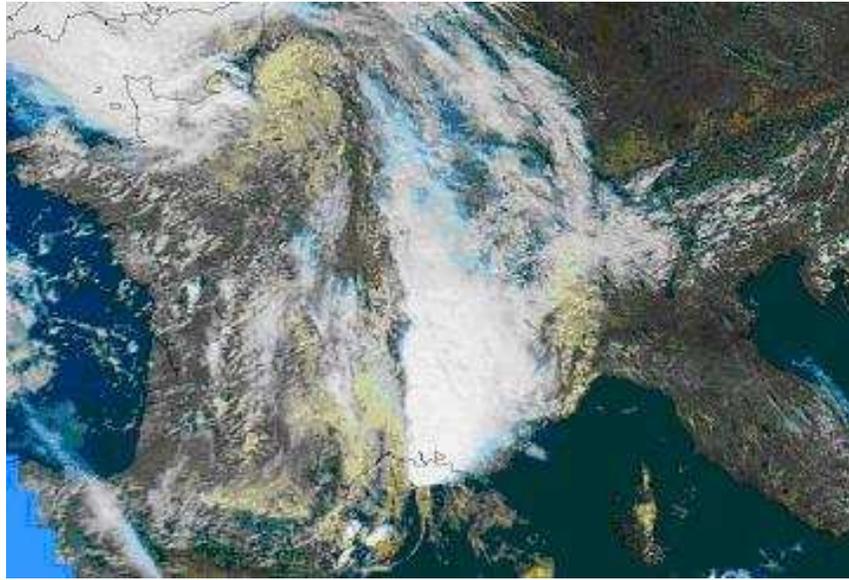


Figure 3-3. Image NOAA16 du 9 septembre 2002 à 12h 20 UTC qui montre la perturbation orageuse qui produit des crues éclairées dans le sud-est de la France (source: Météo-France)

A des échelles légèrement plus petites, le rôle de la topographie des collines de Cévennes et des collines d'Alpes a été reconnu, en particulier en facilitant la montée vers le haut d'air méditerranéen chaud et de développement des cellules orageuses, aussi bien que par empêcher le déplacement des nuages. Beaucoup d'information à des échelles plus petites peut être impliquée à partir de données radar et nous avons en effet employé les archives de données radar de Météo-France. D'abord, elles correspondent à la série du radar PPI (*Plan Position Indicator*) toutes les 5 minutes.

Malheureusement, l'interpolation classique non linéaire des données 3D originales dans des coordonnées polaires avec la résolution irrégulière de l'espace à une altitude planaire constante de 256 km x 256 km, avec résolution régulière 1 km x 1 km peut créer de fausses coupures de graduation, que nous ne le discuterons pas dans cette travail. On concentre toute notre attention sur le radar météorologique de Nîmes, situé à la latitude 44°.81 nord et à la longitude 3°.90 est, a une altitude de 150.5 mètres. Le radar fonctionne dans la bande S (fréquence de 2.90 gigahertz) avec une puissance de transmission de 650 kilowatts. La période de essai commence à 11h30 du 8 septembre et elle finit à 8h45 le lendemain, c'est-à-dire avec une durée de 255 x 5 minutes = 21h 15m (Figure 3-4).

La réflectivité de pluie du radar (Z) est conventionnellement transformée en taux de pluie (R en mm/h) avec l'aide de la relation (Marshall et Palmer, 1948):

$$Z = aR^b \quad (3.16)$$

avec les valeurs classiques des paramètres $a=200$ et $b=1.6$. En considérant que dernièrement il y a eu une discussion sur les fluctuations de ces paramètres et les limitations fondamentales de cette relation (par exemple Duncan et al., 1992), on l'emploiera dans ce travail plutôt par des objectifs d'illustration. Toutefois, toute l'analyse multifractale peut directement être effectué sur la réflectivité, au lieu de l'estimation de taux de pluie correspondante.

La télédétection radar des précipitations intenses en régions méditerranéennes comme celle-ci que nous considérons, présente des difficultés importantes en raison de l'intensité des phénomènes et de la présence d'un relief marqué ainsi que de la forte anthropisation de ces régions. Dans la mesure de la réflectivité radar on assume que la distribution granulométrique des gouttes est homogène, absence d'effets d'atténuation, de masque et d'autres phénomènes parasites liés aux interférences (du relief, de propagation de la signal, etc.). Une difficulté supplémentaire dans l'estimation quantitative des pluies para radar est liée à l'hétérogénéité verticale des précipitations. Certains progrès ont été obtenus ces dernières années sur la qualité de mesures de pluie par radar (Tabary et al., 2007). En particulier, la procédure de traitements régionalisés et adaptatifs (Delrieu, 2006, Tabary, 2007) présente un potentiel d'amélioration non négligeable dans le cadre de la fusion des données radar de l'ensemble du réseau de radars.

Malgré ces améliorations, les données radar fourni par Météo-France correspondent à des intervalles de réflectivité radar ou de taux de pluie. Ainsi, les pixels avec valeur 0 ont une réflectivité radar inférieure à un seuil de 10 dBZ ou un taux de pluie inférieur à 0.2 mm/h. De cette façon, des valeurs faibles de précipitation (< 0.2 mm/h) sont considérées nulles, ce qui évoque le problème de longue date sur les taux zéro de la pluie (Larnder, 1995, Marsan et al., 1996), et qui souvent a été résolu d'une façon ad hoc. On retrouvera ce problème dans le chapitre 4.

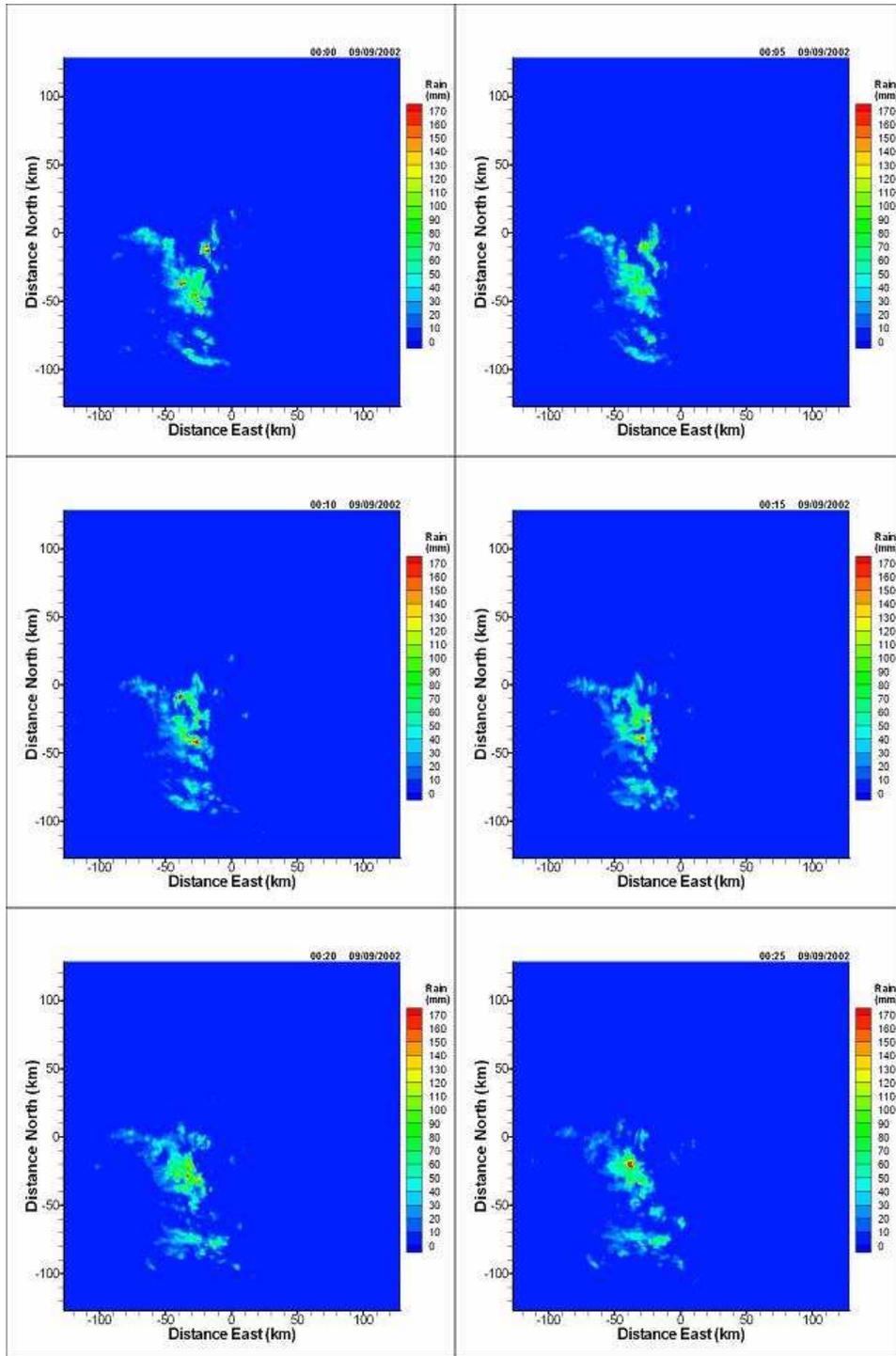


Figure 3-4. Six images successives de taux de pluie du radar météorologique de Nîmes, France. Les images ont une résolution spatiale de 1 km x 1 km et sont séparées par des intervalles de 5 minutes. A droite de chaque image on trouve l'échelle de taux de pluie en mm.

3.6.2 Détermination des Paramètres Multifractals

Comme on a expliqué dans le chapitre 2, le but de l'analyse multifractale est de quantifier la concentration de plus en plus haute d'un champ multifractal, par exemple le taux de pluie $R_\lambda(\bar{x}, t)$, à de plus en plus haute résolution λ ($\lambda = L/\ell$), on rappelle que L est l'échelle plus grand du phénomène en espace-temps et ℓ est l'échelle d'observation).

Dans le cadre du formalisme de la codimension multifractale, dont le développement a été partiellement inspiré par l'intermittence du champ de pluie, ceci est fondamentalement réalisé avec l'estimation de la fonction codimension, d'une façon généralement indirecte. Comme on déjà vu dans la section 3.1, la probabilité que un certain événement dépasse un seuil fixé est donnée par l'équation (3.3), ce qui signifie que dans un diagramme log-log en base λ la probabilité en fonction du seuil est indépendante de la résolution, tandis que chacun d'eux est dépendant de la résolution. Cette propriété a été souvent employée empiriquement en hydrologie (Bendjoudi et al., 1997, Bendjoudi et Hubert, 1998)

3.6.2.1 Analyse spectrale

Le spectre d'énergie, calculé avec l'aide de une transformée de Fourier rapide (FFT) est un moyenne très convenable pour faire une première estimation du range d'échelle où le processus est invariant d'échelle et le degré de conservation. En effet, comme on déjà vu dans la sect. 3.5 le spectre d'énergie est exprimé par l'équation (3.13).

On a réalisé l'analyse spectrale (2D d'espace) de la série chronologique des 256 images radar (certaines d'elles sont montrées dans la figure 3-4). La figure 3-5 montre le spectre individuel de quelques images radar, tandis que la figure 3-6 montre le spectre d'énergie moyenne de la série complète.

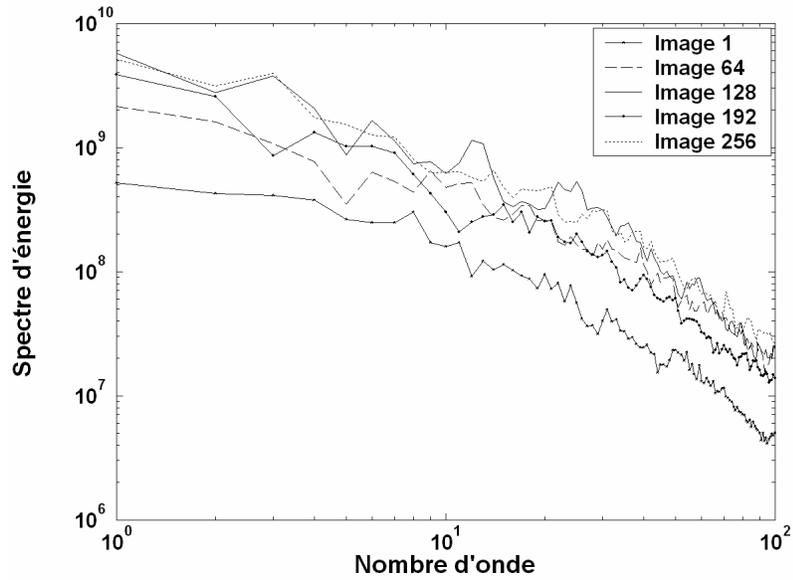


Figure 3-5. Spectre d'énergie (en unités arbitraires) pour quelques images du radar météorologique de Nîmes correspondant à l'événement du 8 au 9 septembre 2002

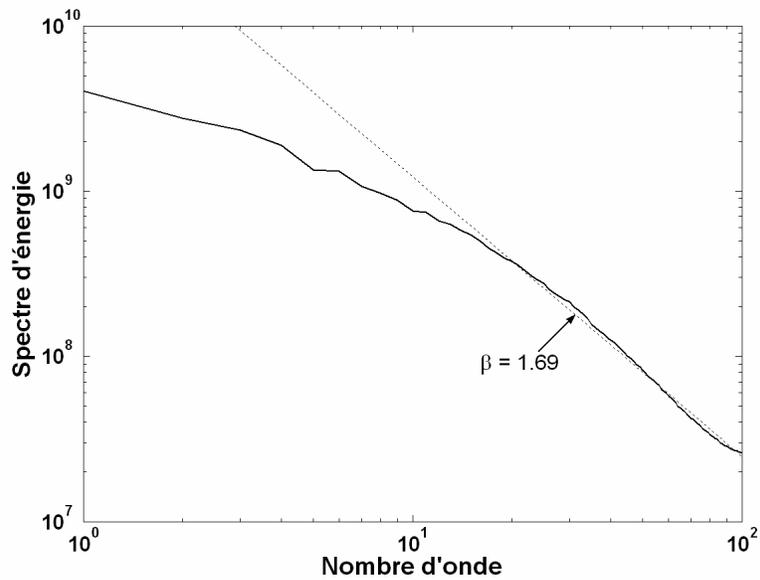


Figure 3-6. Spectre d'énergie (en unités arbitraires) spatial moyen des 256 images radar. On peut déduire la valeur de la pente spectrale $\beta \approx -1.69$ à partir d'une régression linéale pour $k > 15$. Cette valeur de β est très proche de la valeur théorique $-5/3$ de Kolmogorov-Obukhov.

Une loi de puissance est trouvée pour des nombres d'onde plus grand que 15. La pente spectrale est $\beta \approx 1.69$, donc la série d'image radar est non conservative avec paramètre $H \approx 1/3$. On définit donc un flux conservateur F du champ de pluie R en effectuant une intégration partielle de l'ordre $1/3$ sur le dernier. Il vaut la peine de noter que l'exposant β correspond à la valeur théorique (Kolmogorov-Obukhov) du cas scalaire passif, tandis que le champ de pluie n'est pas tellement passif dû à l'influence du dégagement latent de la chaleur sur la dynamique.

3.6.2.2 Détermination de α et C_1

Comme on a présenté dans la Sect. 3.4 la méthode du DTM est une méthode directe pour estimer les deux autres exposants universels α et C_1 . Le premier pas correspond à obtenir des approches de la $\eta^{\text{ème}}$ puissance normalisé du champ, d'abord en soulevant le champ original à la résolution la plus élevée Λ à la puissance η . Puis, en l'agrégeant, c'est-à-dire par moyenne spatiale, aux échelles de plus en plus petites $\lambda < \Lambda$ pour obtenir $R_\lambda^{(\eta)}$. Le deuxième pas (illustré dans la figure 3-7) correspond au calcul du Trace Moment de ces $\eta^{\text{ème}}$ puissances normalisées, c'est-à-dire estimer leurs moyennes statistiques en combinant la moyenne spatiale et la moyenne de l'échantillon. Dans la figure 3-7 Log(DTM) est le $\text{Log}(\text{Tr}_\lambda [R_\lambda^{(\eta)q}])$.

Le graphique de la fonction d'échelle des moments $K(q, \eta)$ versus η dans un diagramme log-log (figure 3-8) permet d'estimer le paramètre α en prenant la pente de la partie linéaire de la courbe obtenue. En outre, l'intersection de $K(q, \eta)$ avec l'axe $\eta=1$ donne une estimation du paramètre C_1 . Dans le présente analyse on a obtenu à la résolution λ et pour le range d'échelles 1 à 256 les valeurs $\alpha = 0.84 \pm 0.02$ et $C_1 = 0.44 \pm 0.02$ pour le moment statistique $q = 1.5$.

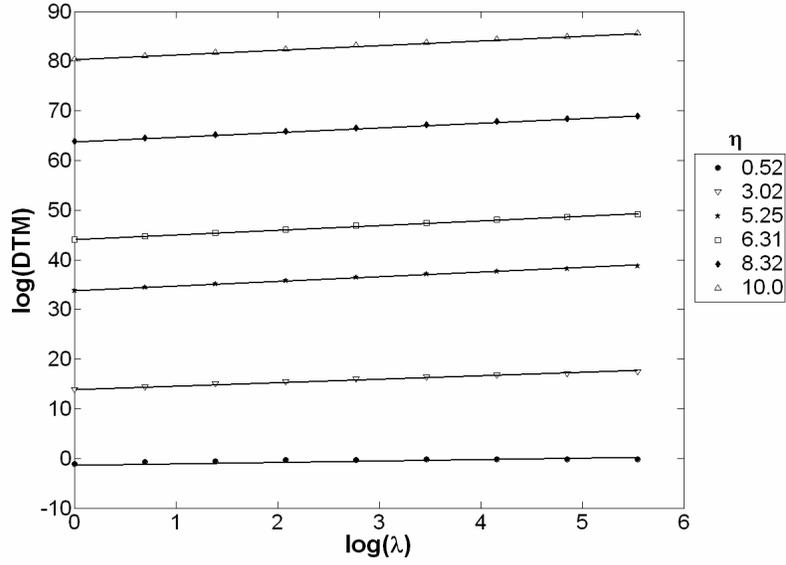


Figure 3-7. Le $\log(\text{DTM})$ versus $\log(\lambda)$ pour quelques valeurs de η (d'en bas en haut $\eta=0.52, 3.02, 5.25, 6.31, 8.30$ et 10.0) en utilisant $q = 1.5$ pour les 256 images consécutives du radar.

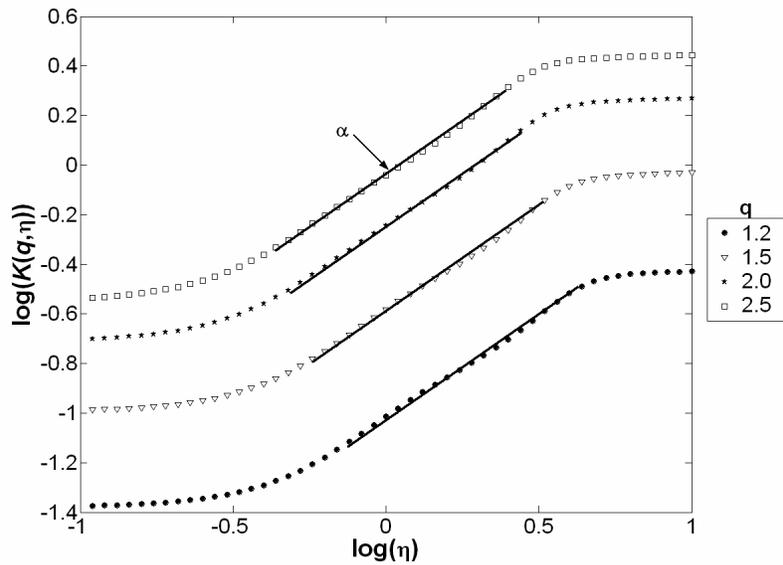


Figure 3-8. Le $\log(K(q, \eta))$ versus $\log(\eta)$ du DTM estimé pour quelques moments statistiques ($q = 1.2, 1.5, 2.0,$ et 2.5). La pente des droites donne la valeur du paramètre $\alpha = 0.84$. La valeur de C_1 a été estimée $C_1 = 0.44$ pour $q=1.5$.

3.6.2.3 Divergence des moments et estimations biaisées

Comme montré par la figure 3-9 la fonction d'échelle des moments exhibe une asymptote linéaire pour les moments d'ordre plus grand que 3, ce qui est une évidence empirique d'une transition de phase multifractale. La fonction d'échelle de moments théoriques (ligne pleine) obtenue avec $\alpha=0.84$ et $C_1=0.44$ par l'équation (2.20) est très proche à la courbe expérimentale jusqu'au moment d'ordre 3. Cette valeur est cohérente avec la valeur q_D obtenue par l'analyse de la distribution de probabilité présentée dans la section suivante.

Il y a également disparité entre les fonctions empiriques et théoriques $K(q)$ pendant des moments plus petits qu'une valeur critique $q_{\min} \approx 0.7$ (figure 3-10). Ce moment critique est associé avec un comportement linéaire spécial de la fonction d'échelle des moments pour $q < q_{\min}$. Ce change qualitatif du comportement statistique est un autre exemple d'une transition de phase multifractale.

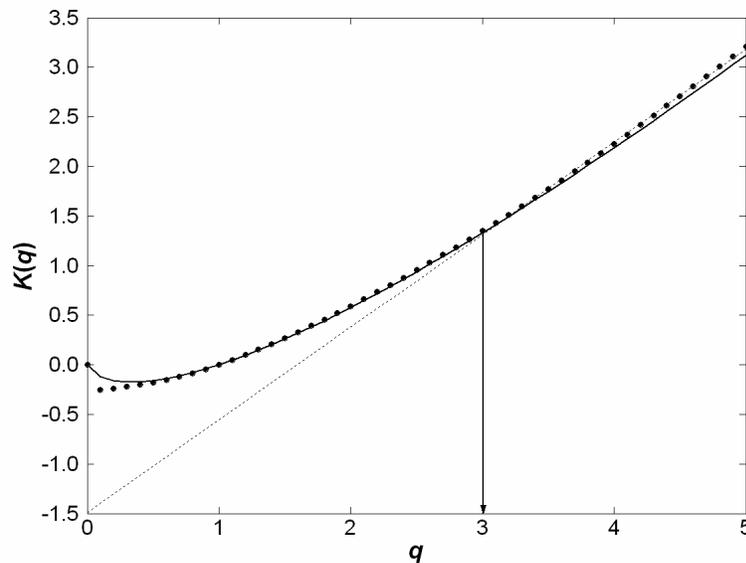


Figure 3-9. Fonction d'échelle des moments empirique $K(q)$ pour le domaine spatial (ligne pointillée). La courbe continue est la fonction d'échelle des moments théorique avec paramètres $\alpha = 0.84$ et $C_1 = 0.44$. La droite pointillée fine correspond à l'asymptote linéaire pour des moments q plus grand que q_D .

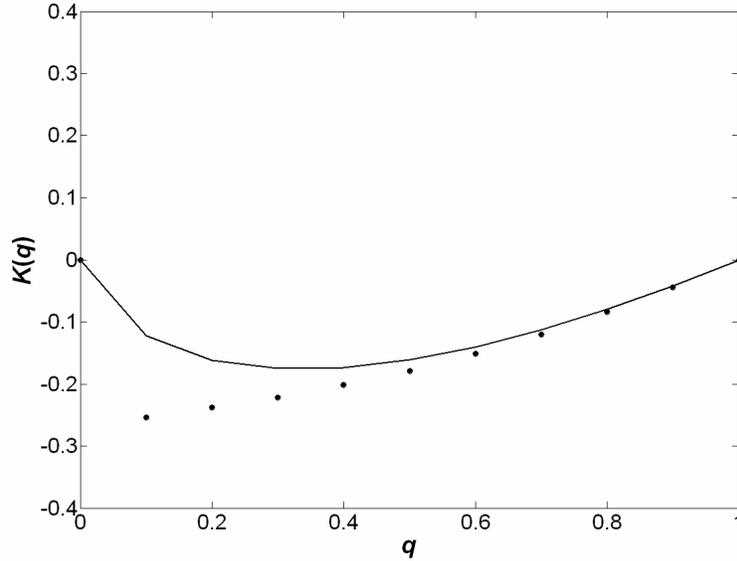


Figure 3-10. Détail de la figure 3-9 en montrant les fonctions d'échelle de moments empirique et théorique pour les ordres de moments $q < 1$.

D'autre part, le paramètre H détermine le degré de non conservation d'un processus multifractal. Pour son évaluation on emploie l'exposant d'échelle du spectre d'énergie du processus. Si le spectre d'énergie des intensités R_λ du processus est de la forme comme décrite par l'équation (3.13) et la valeur absolue de l'exposant spectral β est relié au paramètre H comme exprimé par l'équation (3.14), donc le paramètre H peut être obtenu en utilisant l'estimation théorique de $K(2)$ après détermination des paramètres C_1 et α en appliquant l'équation (3.15). Pour la valeur de $\beta \approx 1.69$ obtenu dans la section 3.6.3.1, la valeur du paramètre $H \approx 0.63$.

3.6.2.4 Invariance d'échelle des distributions de probabilité

La figure 3-11 présente dans un diagramme log-log la probabilité de l'intensité de pluie R de dépasser un seuil fixé r . Un comportement asymptotique en loi de puissance a été ajusté par une régression linéaire (en log-log). La pente de cette asymptote est une estimation de l'ordre critique de divergence des moments $q_D = 3.0$: les moments théoriques (cet à dire avec un échantillon infini) sont infinis pour tous les ordres $q \geq q_D$. Cette estimation peut être comparée avec celles obtenues par des analyses similaires. Duncan et al. (1992) ont trouvé la

même valeur $q_D = 3.0$, alors que Schertzer et Lovejoy (1987a) ont obtenu un $q_D = 1.7$, pour d'autres données radar (basées sur la réflectivité radar). Par contre une valeur similaire a été obtenue par Ladoy et al. (1993) dans une analyse multifractale des données pluviométriques de pluie à Nîmes.

3.6.2.5 Analyse espace-temps

L'analyse espace-temps est fait entre une direction d'espace et celle du temps. L'objectif est la détermination de l'exposant d'anisotropie H_t entre l'espace et le temps, qui a une utilité importante pour le développement de cascades spatio-temporelles.

Quand on constitue une paire entre une direction de l'espace donnée et celle du temps, on établit des coupes sur l'autre direction de l'espace. Les données qui seront prises en compte dans l'analyse des couples (x, t) sont ceux contenues dans les $y = i, y = i + 1$ (figure 3-12). Les fonctions d'échelle des moments sont calculées en suivant chacune des deux axes pour calculer $K_x(q)$. Tous les valeurs correspondantes au temps contenues dans l'élément de volume délimité par y , sont accumulées dans chaque pixel de x (Biaou, 2004).

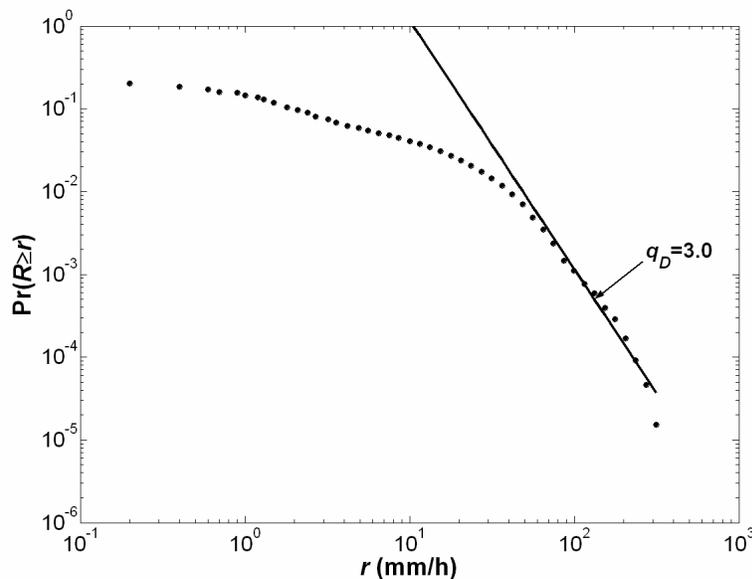


Figure 3-11. Probabilité $\Pr(R \geq r)$ de dépasser un seuil d'intensité fixé r pour les 256 images radar. La ligne droite de pente (en valeur absolue) égale à 3.0, correspond à une chute algébrique de la distribution de probabilité pour les intensités extrêmes. Cette pente est l'ordre de moment critique pour la divergence de moments statistiques.

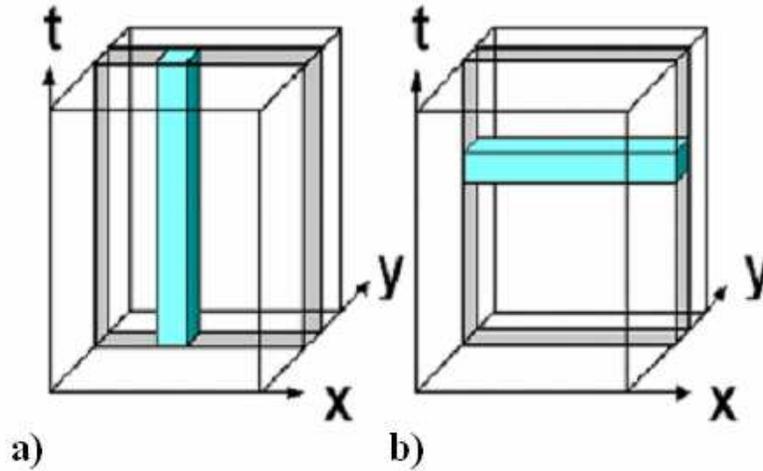


Figure 3-12. Analyse espace-temps : a) somme (projection) tout au long de l'axe du temps, analyse de l'invariance d'échelle spatiale et détermination de la fonction d'échelle des moments $K_x(q)$; b) somme (projection) tout au long de l'axe de espace x , analyse de l'invariance d'échelle temporelle et détermination de la fonction d'échelle des moments $K_t(q)$.

Le même principe est appliqué pour l'axe du temps, en déterminant $K_t(q)$. L'exposant d'anisotropie peut être calculé par (Marsan, 1998):

$$K_x(q) = \frac{K_t(q)}{1 - H_t} \quad (4.2)$$

L'anisotropie espace-temps a été estimée du graphique $K_x(q)$ contre $K_t(q)$ (figure 3-13). La pente $S = 1/(1 - H_t) = 1.53$ donne une valeur du paramètre d'anisotropie $H_t \approx 0.35$. Au travers d'une analyse similaire entre l'autre direction de l'espace y et le temps on détermine $K_y(q)$:

$$K_y(q) = \frac{K_t(q)}{1 - H_t} \quad (4.3)$$

Du graphique $K_y(q)$ contre $K_t(q)$ (figure 3-14) le paramètre d'anisotropie a été estimé $H_t \approx 0.30$. En supposant une isotropie parfaite entre les deux axes de l'espace, on peut déduire que l'exposant d'anisotropie d'espace-temps est une moyenne entre les deux précédents, donc $H_t \approx 0.33$.

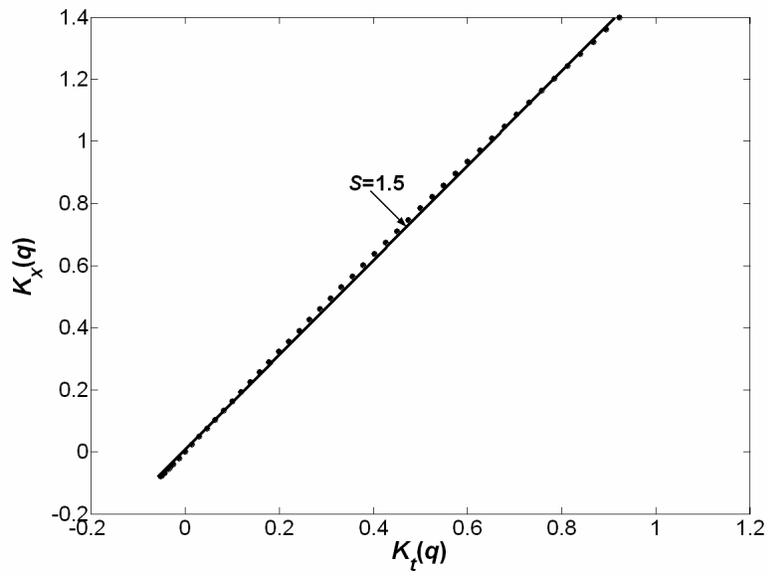


Figure 3-13. Anisotropie $K_x(q)$ versus $K_t(q)$ pour les directions x (espace) et t (temps). L'inverse de la pente S de cette relation conduite à $H_t \approx 0.35$

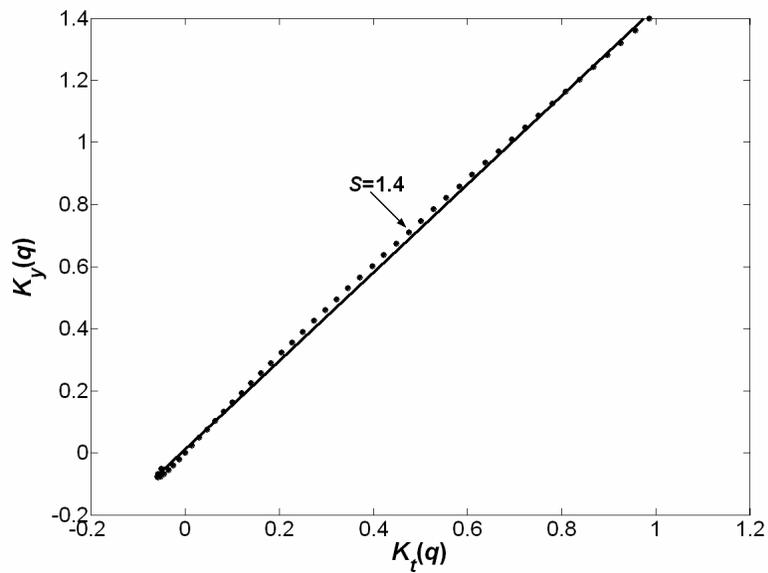


Figure 3-14. Anisotropie $K_y(q)$ versus $K_t(q)$ pour les directions x (espace) et t (temps). L'inverse de la pente S de cette relation conduite à $H_t \approx 0.30$

3.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons fait un rappel de la notion d'analyse multifractale et de quelques méthodes d'analyse de données, en particulier la méthode du Double Moment Trace (DTM) qui a été développée spécifiquement pour estimer de façon directe les paramètres multifractals universels α et C_1 . Nous avons fait rappel aussi à la méthode du spectre d'énergie pour la détermination du paramètre de Hurst, qui mesure le degré de non conservation d'un processus.

Nous avons aussi présenté l'application de cette méthodologie d'analyse multifractale à des données radar réels correspondantes à l'événement « cévenole » du 8-9 septembre 2002 à Nîmes, sud de la France.

Pour cette application en trois dimensions nous avons développé nos propres programmes d'analyse multifractale basés dans certains cas sur des anciens algorithmes unidimensionnels. Les résultats obtenus à l'aide de la méthode DTM ont été testés avec le programme FractHydro développé par Biau (2004).

De l'analyse multifractal de ces données, nous avons estimé les paramètres $H = 0.33$, $\alpha = 0.84$ et $C_1 = 0.44$. De l'analyse de distribution de probabilité nous avons trouvé une valeur de l'ordre critique des moments statistiques $q_D = 3.0$. De l'analyse espace-temps nous avons trouvé une valeur de l'exposant d'anisotropie $H_t = 0.33$.

La détermination de ces paramètres multifractals est fondamentale pour que les simulations et/ou prévisions de champs de pluie maintiennent les caractéristiques multifractales d'origine.