

**ANALYSE MECANIQUE D'UNE
PIECE FISSUREE**

II. Table des Matières

<i>II.1. Motivations</i>	40
<i>II.2. Etude Bibliographique</i>	41
II.2.1. Historique	41
II.2.2. Hypothèses et cadre de l'étude	42
II.2.2.1. Endommagement et mécanique de la rupture	42
II.2.2.2. Fissures statiques, quasi-statiques, dynamiques	43
II.2.2.3. Modes de rupture	44
II.2.2.4. Mécanique linéaire, et non-linéaire de la rupture	44
II.2.3. Approche Locale	47
II.2.3.1. Facteurs d'intensité des contraintes	47
II.2.3.2. Calcul des facteurs d'intensité des contraintes	48
II.2.4. Approche Globale ou Energétique	50
II.2.4.1. Le taux de restitution d'énergie	50
II.2.4.2. Intégrales de contour	51
II.2.4.3. Crack Tip Opening Displacement (CTOD)	52
II.2.4.4. Calcul du taux de restitution d'énergie	53
II.2.5. Bilan	59
<i>II.3. Développement d'outils numériques pour la modélisation d'une fissure</i>	61
II.3.1. Maillage Concentrique	61
II.3.2. Eléments Singuliers	63
II.3.3. Bilan	68
<i>II.4. Calcul du Taux de Restitution d'Energie</i>	69
II.4.1. Implémentation de la méthode $G\theta$	69
II.4.2. Comparaison de différentes méthodes	71
II.4.2.1. La méthode analytique	71
II.4.2.2. La méthode de différenciation d'énergie	73
II.4.2.3. La méthode de la complaisance	73
II.4.2.4. Eprouvette SEC	73
II.4.2.5. Eprouvette DEC	74
II.4.2.6. Fissure centrale inclinée	75
II.4.3. Influence du maillage pour la méthode $G\theta$	77
II.4.4. Bilan	79
<i>II.5. Application à l'adhérence d'un assemblage collé</i>	80
II.5.1. Description de l'essai	80

II.5.1.1.	La méthode expérimentale	81
II.5.1.2.	La méthode analytique	82
II.5.1.3.	La méthode numérique	82
II.5.2.	Résultats	83
II.5.2.1.	Complaisance	83
II.5.2.2.	Taux de restitution d'énergie	84
II.5.3.	Bilan	86
II.6.	Conclusion	87

II.1. MOTIVATIONS

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté le code FORGE2 Multimatériaux, et plus particulièrement son mailleur et remailleur automatique. Les développements numériques ainsi introduits permettent de gérer plusieurs contours et plusieurs sous-domaines. Ces développements sont très utiles pour la modélisation de structures multimatériaux en grandes déformations.

La mécanique de la rupture constitue également un axe de recherche important, et très sollicitant d'un point de vue numérique. Plusieurs auteurs ont essayé, depuis longtemps, de caractériser avec précision les champs mécaniques en pointe de fissure et de modéliser numériquement la propagation de telles fissures. Si notre connaissance théorique en mécanique de la rupture est maintenant assez étendue, les outils numériques permettant de la modéliser peuvent encore progresser. En effet, les importantes variations dans les champs mécaniques à la pointe d'une fissure nécessitent une modélisation fine et bien contrôlée du maillage dans son voisinage.

Nous proposons ici d'apporter une contribution à la modélisation numérique de pièces fissurées en utilisant les techniques de gestion de plusieurs contours proposées dans le chapitre I. Puis, dans le chapitre suivant, nous poursuivrons notre étude par la modélisation de la propagation d'une ou de plusieurs fissures dans des pièces homogènes ou multimatériaux.

Nous commencerons donc par présenter une étude bibliographique sur la modélisation numérique en mécanique de la rupture, en insistant sur les hypothèses nécessaires à une telle étude. La deuxième partie sera consacrée aux outils numériques nécessaires à une modélisation précise d'une fissure et des singularités qu'elle engendre dans les champs mécaniques. Une fois ces outils mis en place, nous nous attacherons, dans la troisième partie, à calculer le taux de restitution d'énergie. Nous comparerons les résultats obtenus par différentes méthodes et nous effectuerons une étude de sensibilité par rapport à la finesse du maillage en pointe de fissure. Enfin, la quatrième partie sera consacrée à l'étude de la ténacité d'un assemblage collé. Nous verrons l'intérêt de la modélisation numérique par rapport à des résultats expérimentaux et analytiques pour cette étude.

II.2. ETUDE BIBLIOGRAPHIQUE

II.2.1. Historique

Grâce aux progrès réalisés dans le domaine de la mise en forme des métaux durant les trois derniers siècles, le fer et l'acier ont progressivement remplacé le bois et le ciment comme matériaux structuraux de base. Malgré leurs hautes caractéristiques, les structures réalisées à partir de ces matériaux ont connu des accidents importants dès le milieu du 19^{ème} siècle. L'origine de ces accidents était la rupture inattendue de composants critiques de ces structures.

L'un des premiers incidents enregistré sur une structure importante fut la rupture d'une chaîne du pont suspendu Montrose en Mars 1830 en Grande Bretagne. Depuis, il y a eu un nombre important d'effondrements de ponts, dont le King's Bridge à Melbourne (1962) ou encore le Point Pleasant Bridge en Virginie (1967). Les accidents ferroviaires dus à une rupture brutale des essieux, des roues ou encore des rails ont également été très nombreux. Entre 1860 et 1870, le nombre de personnes victimes d'accidents de train en Grande Bretagne s'élevait environ à 200 par an. De nombreux accidents intervinrent également sur des pipelines, des pétroliers, ou encore sur des avions. En 1950, 2 avions Comet se sont brisés à haute altitude à cause d'un problème de rupture par fatigue sur les trous des rivets près des hublots, lesquels étaient de forme carrée !

Ces risques d'accidents étaient d'autant plus grand que l'utilisation d'alliages à hautes caractéristiques mécaniques (ténacité, rigidité...), permettant la réalisation de structures de plus en plus complexes et sollicitées, a énormément augmenté. En fait, les estimations de tenue des structures, fondées sur les caractéristiques mécaniques classiques, ne tenaient pas compte de la ténacité des matériaux en conditions réelles de service, et les chercheurs étaient alors incapables d'expliquer le phénomène de rupture brusque sous des sollicitations bien inférieures à celles de la limite d'élasticité.

Si Griffith est souvent cité comme le premier chercheur à avoir introduit la mécanique de la rupture (en tant que science), ces travaux restent basés sur des études antérieures. On peut notamment citer l'article de Wieghardt, paru en 1907 et récemment traduit en anglais [Wieghardt 1995], dans lequel l'existence de la singularité du champ des contraintes en pointe de fissure dans un matériau élastique linéaire fut reconnue.

A partir de ces résultats, Griffith [Griffith 1920] s'est intéressé en 1920 au problème de la rupture, dans un milieu élastique fissuré, d'un point de vue énergétique. Il a ainsi mis en évidence une variable (appelée plus tard **taux de restitution d'énergie**) caractérisant la rupture, et dont la valeur critique est une caractéristique du matériau.

Vinrent ensuite les premiers développements théoriques d'analyse des champs de contraintes et de déformations au voisinage d'une fissure en élasticité. Ces études, menées notamment par Sneddon en 1946 [Sneddon 1946], puis Irwin [Irwin 1957] en 1957, ont permis de définir les **facteurs d'intensité de contraintes**, caractérisant l'état de sollicitation de la région dans laquelle la rupture se produit.

Entre 1960 et 1980, la mécanique de la rupture connaît un grand succès scientifique, avec notamment l'apparition de la mécanique non linéaire de la rupture qui a permis de mieux prendre en compte le

comportement plastique des matériaux. De nombreux travaux sont publiés à cette période ; on peut citer par exemple Rice [Rice 1968] et Bui [Bui 1973] qui introduisent la notion d'**intégrales indépendantes du contour** telles que l'intégrale J, dont les propriétés ont permis de caractériser la ténacité d'un matériau lorsque la plasticité n'est plus confinée à la pointe de fissure. C'est également à cette période que les premiers travaux concernant la mécanique de la rupture dans les matériaux multicouches sont réalisés (Sih(1964), Erdogan (1965) et Comninou (1977)).

Tous les développements théoriques réalisés à cette époque ont permis de déterminer la forme exacte de la singularité, et des champs asymptotiques en pointe de fissure nécessaires à l'analyse et à l'interprétation des résultats expérimentaux. De plus, ils représentent une solution précise à de nombreux problèmes de géométries simples, et peuvent donc être utilisés comme solutions approchées pour des problèmes plus complexes.

L'apparition de la méthode des éléments finis a permis d'étudier la mécanique de la rupture d'un point de vue numérique, proposant ainsi des solutions plus précises à des problèmes plus complexes. Apparurent alors une multitude de méthodes permettant de calculer les facteurs d'intensité de contraintes, le taux de restitution d'énergie, ou encore de découpler les différents modes de rupture. Parmi ces nombreuses méthodes, les plus facilement implémentables donnent bien souvent des résultats approchés, ou dépendants du maillage, alors que les autres nécessitent des techniques éléments finis avancées.

Ce chapitre bibliographique a pour but de présenter les méthodes numériques les plus utilisées pour l'analyse mécanique d'une pièce fissurée. La mécanique de la rupture couvrant un domaine extrêmement vaste, nous commencerons par spécifier de façon précise le cadre de l'étude. Puis nous introduirons les notions fondamentales liées aux approches locales et globales en mécanique linéaire de la rupture. Cela nous amènera à faire un tour d'horizon des différentes méthodes numériques utilisées pour le calcul de grandeurs caractéristiques telles que les facteurs d'intensité de contraintes, ou le taux de restitution d'énergie. Enfin, nous terminerons cette partie bibliographique par la mécanique non linéaire de la rupture, et l'élastoplasticité.

II.2.2. Hypothèses et cadre de l'étude

Le domaine couvert par la mécanique de la rupture est si vaste qu'il serait présomptueux de vouloir en présenter tous les aspects. Il apparaît donc nécessaire de bien préciser les limites de cette étude bibliographique.

II.2.2.1. Endommagement et mécanique de la rupture

Lorsqu'une pièce est soumise à des efforts d'origines variées, il existe des limites, en contraintes ou en déformations, qu'elle ne doit pas dépasser, sous peine d'endommager le matériau et de provoquer sa rupture. Suivant que l'on s'intéresse à la dégradation du matériau d'un point de vue micro-mécanique ou macro-mécanique, deux approches peuvent être utilisées :

- La **mécanique de l'endommagement** propose de décrire continûment la dégradation progressive du matériau due à l'apparition, à la croissance, puis à la coalescence de micro-fissures ou de micro-cavités présentes dans le matériau. Cette approche, initialement introduite par Kachanov, a

été reprise et développée par de nombreux auteurs tels que Chaboche, Lemaitre [Lemaitre 1988], Bui [Bui et al. 1981], Ehrlacher [Ehrlacher 1985], Gurson [Gurson 1977], Tvergaard, Needleman [Needleman et al. 1987], Rousselier [Rousselier 1987], etc... Lorsque les microfissures, les microcavités créées par croissance ou par coalescence des défauts sont de taille assez grande, cette façon d'aborder le problème n'est plus valable, et il faut alors utiliser la mécanique de la rupture.

- La **mécanique de la rupture** a pour objet l'étude du comportement mécanique d'un matériau en présence de fissures macroscopiques. Cela revient notamment à déterminer le champ des contraintes et des déformations au voisinage de la pointe d'une fissure. L'étude de ces champs mécaniques permettant ensuite de juger de la stabilité ou non d'une fissure. Il est également possible, comme nous le verrons par la suite, d'aborder la mécanique de la rupture à travers une étude énergétique du solide fissuré.

Le choix de l'approche dépend essentiellement de l'étude que l'on désire effectuer. Dans certains procédés de mise en forme des matériaux, l'endommagement est souvent critique, et il n'est donc pas nécessaire d'étudier la propagation de fissures. Par contre, dans d'autres procédés (usinage, découpage) et en génie civil, l'étude des fissures se propageant dans le matériau est nécessaire et est basée sur la mécanique de la rupture.

De plus, la capacité du code de calcul utilisé à permettre la propagation d'une fissure à travers un maillage est un paramètre important. En effet, en mécanique de l'endommagement, on ne modélise pas réellement les étapes d'amorçage et de propagation de fissures. Ces étapes se produisent naturellement lorsque l'adoucissement dû à la croissance des cavités l'emporte sur l'écrouissage du matériau. Il se produit alors une instabilité mécanique traduite notamment par la chute des contraintes dans la zone endommagée. La fissure correspond alors aux zones qui ne transmettent plus d'efforts normaux. Cette approche présente donc l'avantage de ne pas significativement modifier la topologie du maillage en introduisant une fissure mais reste approximative dans la mesure où la précision sur le chemin de propagation est directement lié à la finesse du maillage. De plus, en grandes déformations, la dégénérescence des éléments correspondant aux zones les plus endommagées peut rapidement entraîner la fin du calcul. Dans la suite du manuscrit, nous nous intéresserons spécifiquement à la **mécanique de la rupture**, en effectuant de temps en temps quelques parenthèses concernant l'endommagement.

II.2.2.2. Fissures statiques, quasi-statiques, dynamiques

Les premiers travaux réalisés en mécanique de la rupture visaient à établir, de façon précise, les champs mécaniques au voisinage d'une **fissure statique**. La difficulté d'une telle étude réside dans la prise en compte de la singularité introduite par la pointe d'une fissure. Le calcul précis de paramètres mécaniques tels que les facteurs d'intensité des contraintes, ou le taux de restitution d'énergie réside en grande partie dans la bonne prise en compte de cette singularité. L'étude des champs mécaniques entourant une pointe de fissure statique fait l'objet de cette étude bibliographique.

Ces paramètres mécaniques ainsi calculés, il est possible de prévoir la propagation ou non de la fissure. Suivant le type de matériau étudié, et le chargement appliqué, la propagation pourra être qualifiée de stable (la fissure a besoin de plus d'énergie pour reprendre sa progression) ou d'instable

(la fissure poursuit sa progression jusqu'à la ruine de la structure, sans nécessiter d'énergie supplémentaire).

On est alors amené à étudier la **propagation quasi-statique de fissures**, à l'aide de critères d'amorçage, de bifurcation, et de stabilité. Ce domaine fera l'objet de l'étude bibliographique du Chapitre III.1.

Enfin dans les problèmes de chargement rapide, ou lorsque les vitesses de propagation de fissures sont importantes, il devient nécessaire de prendre en compte les termes d'inertie dans la formulation et dans la résolution du problème. On parle alors de **propagation dynamique des fissures** [Attigui 1997] ; ce domaine ne sera pas abordé dans ce manuscrit.

II.2.2.3. Modes de rupture

La fissuration se manifeste par la séparation irréversible d'un milieu continu en deux parties, appelées lèvres de la fissure, ce qui introduit une discontinuité au sens des déplacements. Les mouvements possibles des lèvres de chaque fissure sont des combinaisons de trois modes indépendants :

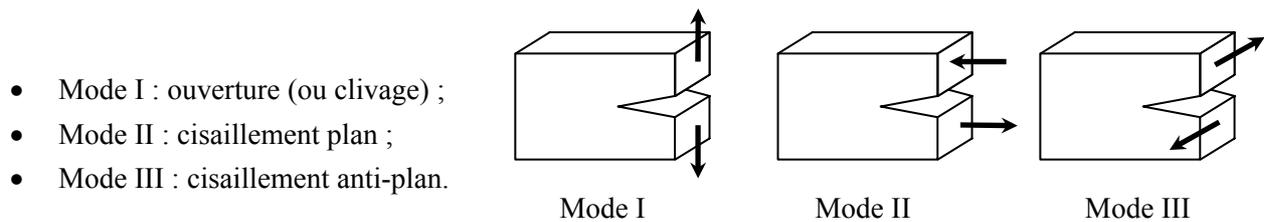


Figure II. 1. Modes de rupture

Le mode I est le plus dangereux pour l'extension d'une fissure ; cependant, une fois amorcée et pour des sollicitations mixtes ou des géométries complexes, la fissure a tendance à bifurquer, et reste donc rarement rectiligne (2D) ou plane (3D).

II.2.2.4. Mécanique linéaire, et non-linéaire de la rupture

La mécanique de la rupture se propose de décrire les étapes d'amorçage et de propagation de la fissuration. Selon le comportement du matériau durant la propagation d'une fissure, on peut être confronté à deux types de rupture :

- **Rupture fragile**, en l'absence de déformation plastique significative (mécanique linéaire de la rupture) ;
- **Rupture ductile**, en présence de déformation plastique non négligeable (mécanique non linéaire de la rupture). Dans ce cas, suivant l'étendue de la zone plastique en pointe de fissure, on différencie le cas de la plasticité confinée, de celui de la plasticité étendue.

• **Etude d'un milieu élastique fissuré**

Dans un **milieu élastique** fissuré, la région proche de la pointe de fissure peut être décomposée en trois zones [Zhang 1992] :

1. La **zone d'élaboration** : au voisinage direct de la pointe de fissure, l'étude de cette zone (considérée comme ponctuelle d'un point de vue mécanique) est très complexe dans la mesure où les contraintes tendent vers l'infini (d'un point de vue théorique) à la pointe de fissure ;
2. La **zone singulière** : dans cette zone, le champs de contrainte présente une singularité en $r^{-1/2}$;
3. La **zone des champs lointains** : extérieure aux deux précédentes, elle raccorde la zone singulière aux conditions aux limites de chargement et déplacement.

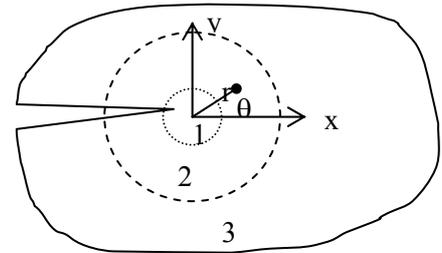


Figure II. 2 Les zones de champs mécaniques

C'est la singularité d'ordre $-1/2$ dans la zone singulière qui caractérise la solution obtenue en élasticité pure.

Cette solution n'est malheureusement pas physiquement réaliste. En fait, les contraintes en pointe de fissure sont « écrêtées » par la plasticité (Figure II.3.) [François et al. 1993]. De plus, la signification énergétique de la rupture proposée par Griffith devient plus ambiguë, dans la mesure où elle consiste à représenter la propagation de fissure comme un déchargement. Or, en plasticité, une partie de l'énergie est dissipée (phénomène irréversible) et on ne peut donc pas toujours évaluer la fraction d'énergie « disponible » pour la propagation.

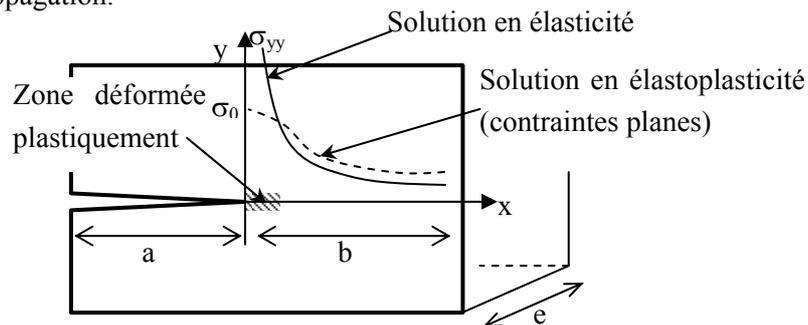


Figure II. 3. Plasticité en pointe de fissure

• **Plasticité confinée**

La concentration de contraintes en pointe de fissure créant une plastification locale, il est nécessaire que la taille de cette zone reste petite par rapport à la longueur de la fissure, et aux dimensions de la structure, de façon à ne pas trop perturber la distribution élastique des contraintes. A titre d'exemple, la norme ASTM impose aux éprouvettes utilisées pour le calcul de la ténacité la condition suivante :

$$\min(e, a, b) \geq \frac{5}{2} \left(\frac{K_{IC}}{\sigma_0} \right)^2, \text{ où } \sigma_0 \text{ est la limite élastique, et } K_{IC} \text{ la ténacité du matériau.}$$

Lorsque c'est le cas, on peut continuer à utiliser les concepts de la mécanique linéaire de la rupture. Plusieurs modèles proposent de déterminer la taille de la zone plastique en pointe de fissure : modèles d'Irwin, et de Dugdale-Barenblatt qui sont détaillés dans [François et al. 1993] et [Baouch 1998].

- **Plasticité étendue**

La plasticité étendue est le domaine pour lequel la taille de la zone plastique n'est plus négligeable devant la longueur de la fissure ou la dimension du ligament. Elle s'inscrit dans le cadre de la mécanique de la rupture à comportement non linéaire, et son étude n'est que très récente.

Si en élasticité linéaire, la singularité est d'ordre $-1/2$, elle est plus faible en plasticité, et vaut $-n/(n+1)$, où n , le coefficient d'écroutissage du matériau, est compris entre 0 et 0,2.

La zone d'élaboration définie en élasticité linéaire est remplacée par un champ de déformation qui ne dépend que de la limite d'élasticité en cisaillement et de l'orientation par rapport à l'axe de la fissure (champ de Prandtl).

A la pointe de la fissure, l'éroussement et le champ de Prandtl conduisent à des contraintes finies. Plus loin de l'extrémité de la fissure (zone de champs semi-lointains), la distribution des contraintes et des déformations peut être approchée par la solution asymptotique proposée par Hutchinson [Hutchinson 1968], Rice et Rosengren [Rice et al. 1968] (HRR).

Même si l'étude de la mécanique non linéaire de la rupture est en plein essor actuellement, la majorité des résultats obtenus d'un point de vue numérique concernent la mécanique linéaire de la rupture. Il est souvent difficile de différencier les méthodes applicables à tout type de matériau, ou uniquement aux matériaux élastiques. Sauf indications contraires, notre étude sera donc basée sur une analyse élastique du champ des contraintes, en admettant les hypothèses générales de l'élasticité linéaire classique, mais en tolérant néanmoins l'existence d'une zone de plasticité sous la condition suivante : cette zone doit à la fois être confinée et de dimension constante.

Les ruptures obtenues par fatigue, par choc thermique, ou par corrosion couvrent également un domaine de recherche important, mais elles ne seront pas abordées dans ce manuscrit.

De plus, notre étude est volontairement restreinte aux fissures planes, et supposées rectilignes par morceaux. Enfin, nous nous placerons, dans ce chapitre, dans le cas de matériaux homogènes et isotropes.

On peut alors distinguer deux approches concernant l'étude de la zone singulière :

- Une **approche locale**, caractérisée par une étude des champs de contrainte et de déformation au voisinage du front de fissure ;
- Une **approche globale** (ou énergétique), caractérisée par l'étude du comportement global de la structure fissurée sur le plan énergétique.

II.2.3. Approche Locale

Certains auteurs définissent l'approche locale comme l'approche liée aux modèles d'endommagement. Dans notre cas, cette approche consiste à déterminer les paramètres de mécanique de la rupture à l'aide des champs de contraintes et de déformations locaux en pointe de fissure. Pour définir ces champs en pointe de fissure, nous introduirons la notion de facteurs d'intensité des contraintes. Ces champs étant fortement perturbés par la singularité créée par la pointe de fissure, nous verrons qu'il est nécessaire d'utiliser des outils spécifiques afin de calculer ces facteurs d'intensité des contraintes de façon précise.

II.2.3.1. Facteurs d'intensité des contraintes

Introduits par G.R. Irwin [Irwin 1957] en 1957, les facteurs d'intensité de contraintes correspondent à des cinématiques particulières du mouvement des fissures. Dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture, les contraintes et les déformations au voisinage d'une fissure admettent un développement asymptotique dont le terme singulier s'écrit :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = K_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} f^{\alpha}_{ij}(\theta) \\ \varepsilon_{ij} = K_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} g^{\alpha}_{ij}(\theta) \end{cases} \quad \alpha = 1,2,3$$

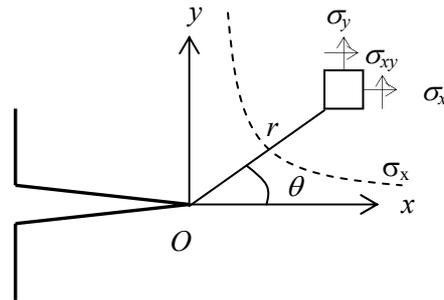


Figure II. 4 Champ des contraintes au voisinage de la fissure

K_{α} est le Facteur d'Intensité des Contraintes (FIC) en mode α , avec $\alpha=I, II$ ou III . Les fonctions f et g donnent la répartition angulaire ; leurs expressions en contraintes et déformations planes sont données en Annexe B.1. ainsi que dans plusieurs ouvrages de mécanique de la rupture [François et al. 1993], [Miannay 1995]. Lorsque l'on se trouve en mode I pur, l'état local de contraintes et de déformations peut être caractérisé à l'aide du seul paramètre K_I . Nous verrons dans la chapitre suivant que l'on définit une valeur critique de ce paramètre K_{Ic} comme critère de rupture.

Dans certains cas (préchargement à chaud [Pineau 1998], effets d'échelle ou de géométrie [Bauvineau 1996], [Hancock 1993] ...), il est nécessaire de tenir compte également des premiers termes non singuliers :

$$\sigma_{ij} = K_I \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} f^I_{ij}(\theta) + T\delta_{xi}\delta_{xj} + O(\sqrt{r})$$

La contrainte transverse T , est une contrainte parallèle au plan de fissure, et n'intervient que sur σ_{xx} . Elle a également pour effet de modifier le terme hydrostatique du tenseur des contraintes : $\sigma_m = Trace(\sigma)/3$ (donc la triaxialité des contraintes) ainsi que la plus grande contrainte principale.

Les FIC caractérisent la force de la singularité du champ des contraintes à l'extrémité de la fissure [Erdogan 1983]. Ils sont proportionnels aux discontinuités des déplacements des lèvres de la fissure, et ne dépendent que de la répartition des efforts extérieurs et de la géométrie de la fissure. Plusieurs ouvrages tels que celui de Murakami [Murakami et al. 1987] donnent l'expression de ces FIC pour des géométries et des chargements variés.

Plusieurs auteurs continuent à utiliser les FIC en plasticité confinée (et surtout en déformation plane), mais ces facteurs n'ont plus de signification en plasticité étendue puisqu'il n'y a plus de singularité des contraintes en pointe de fissure. En plasticité confinée, on définit alors des FIC équivalents, ou apparents, qui dépendent des FIC élastiques, mais également des déformations plastiques en pointe de fissure.

Dans le cas de la plasticité étendue, le champ singulier HRR [Hutchinson 1968], [Rice et al. 1968] représente le premier terme de la solution complète qui pourrait se présenter sous la forme d'un développement en série. Tout comme le rajout de la contrainte transverse T en élasticité linéaire, on montre qu'en plasticité étendue il est parfois nécessaire de prolonger le développement en série et de prendre en compte le premier terme non singulier Q . Q est appelé facteur d'amplitude du champ du second ordre, ou paramètre de triaxialité du confinement. Sa prise en compte prend une importance croissante avec l'extension de la plasticité, et devient indispensable pour la prédiction de rupture dans certains cas de préchargement à chaud [Rousselier 1998]. Pour plus de détails le lecteur pourra se référer à [Bauvineau 1996] et [O'Dowd et al. 1994]. Dans notre étude, nous n'aborderons pas le cas de la plasticité étendue, et nous nous consacrerons donc plutôt à la détermination des facteurs d'intensité des contraintes.

II.2.3.2. Calcul des facteurs d'intensité des contraintes

Les facteurs d'intensité des contraintes s'exprimant en fonction du champ des contraintes au voisinage de la fissure, et ce champ de contraintes étant parfaitement accessible numériquement, ce calcul ne devrait pas poser de problèmes à priori. Pourtant, nous allons voir qu'une bonne précision sur ces facteurs est difficile à obtenir.

- **Eléments singuliers**

L'utilisation standard de la méthode des éléments finis ne permettant pas de rendre compte des singularités des champs de contrainte au voisinage de la pointe de la fissure, il a été nécessaire d'effectuer quelques modifications.

Plusieurs idées ont été proposées : du raffinement de la zone singulière à l'introduction brutale de la singularité dans les fonctions de forme, la plupart de ses techniques ont peu à peu été abandonnées.

Ce sont Henshell et Shaw [Henshell et al. 1975] d'une part, et Barsoum [Barsoum 1976] d'autre part, qui finirent par trouver une solution préservant à la fois les fonctions de forme et les fonctions d'interpolation.

Le fait de déplacer les nœuds milieux des côtés correspondant à la pointe de la fissure (arêtes 1-2 et 1-4) au quart de la longueur (Figure II.5.a) permet de forcer la singularité, tout en représentant correctement un champ constant de déformation, et un déplacement d'ensemble (Cf Annexe B.2.). Toutefois, si la singularité existe le long des côtés en contact avec la pointe de la fissure, elle disparaît sur les autres rayons émanant du nœud 1. Hibbitt [Hibbitt 1977] a de plus montré en 1977 que l'énergie de déformation (et donc la raideur) n'était plus bornée lorsque l'on tendait vers la pointe de fissure. Il a alors fallu introduire le triangle à 8 nœuds avec nœuds au quart (Figure II.5.b), la pointe de fissure se trouvant aux trois nœuds confondus 1-8-4. Cet élément garantit alors la singularité pour toutes les arêtes émanant du nœud 1, ainsi qu'une énergie de déformation bornée lorsqu'on tend vers la pointe de fissure.

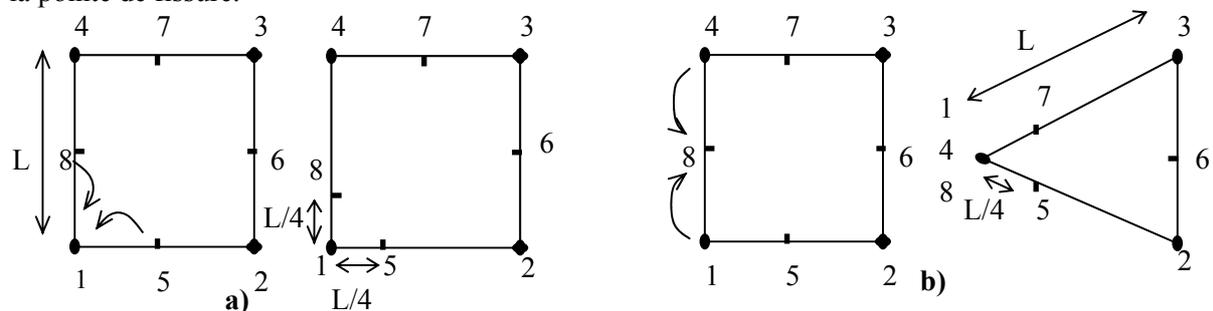


Figure II. 5. a) Elément quadrangle singulier – b) Elément triangulaire singulier

Tong et Pian [Tong et al. 1973] ont également proposé un super-élément mixte à 9 ou 17 nœuds, avec présence d'une fissure centrée et qui permet de prendre en compte la singularité ; malheureusement, sa mise en œuvre délicate constitue un sérieux handicap.

- **Principe de superposition**

Cette méthode, la plus couramment utilisée, consiste à ramener le problème traité à une suite de problèmes déjà résolus et dont les solutions se trouvent dans certains Handbooks [Murakami et al. 1987]. Le principe utilisé est celui de la superposition des solutions, qui résulte de l'élasticité linéaire.

- **Méthode des fonctions de poids**

On recherche la valeur de K_I produite par une force unité, placée à une distance x de l'extrémité de la fissure. Pour une distribution $F(x)$, on peut alors écrire :
$$K_I = \int_{fissure} F(x)K(x)dx$$

La fonction $K(x)$ s'appelle fonction de poids. Elle est bien établie pour certains cas particuliers, et répertoriée dans certains Handbooks.

L'avantage d'une telle méthode est qu'elle ne nécessite qu'un seul calcul de structure. Malheureusement, on reste limité aux géométries qui existent dans les tables.

• **Calcul par extrapolation**

Cette méthode, également utilisée en élastoplasticité, consiste à effectuer une extrapolation du champ des contraintes ou des déplacements lorsque r tend vers 0.

Par exemple, en déformations planes, le déplacement est une fonction linéaire de \sqrt{r} , et pour $\theta=\pi$, K_I et K_{II} peuvent s'exprimer en fonction du déplacement :

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{Iu}(r) = \frac{E}{1-\nu^2} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{u_y}{\sqrt{r}} \\ K_{IIu}(r) = \frac{E}{1-\nu^2} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{u_x}{\sqrt{r}} \end{array} \right. \text{ puis, par passage à la limite : } \left\{ \begin{array}{l} K_I = \lim_{r \rightarrow 0} K_{Iu}(r) \\ K_{II} = \lim_{r \rightarrow 0} K_{IIu}(r) \end{array} \right.$$

La même extrapolation peut être faite en exprimant K_I en fonction du champ des contraintes. La solution obtenue sera cependant moins précise dans la mesure où les contraintes sont calculées aux points d'intégration et non aux nœuds.

Ces méthodes ont l'avantage de ne pas nécessiter de code spécialisé en mécanique de la rupture et de pouvoir séparer les modes I et II. Elles peuvent indifféremment être appliquées aux éléments classiques ou aux éléments spéciaux. Cependant, elles nécessitent un maillage fin lorsque l'on n'utilise pas d'éléments spéciaux, et il est préférable d'effectuer une étude de sensibilité par rapport à la finesse du maillage. Il existe également une incertitude sur l'intervalle à considérer pour l'extrapolation dans la mesure où il faut éliminer les points les plus proches de la pointe de la fissure pour effectuer un lissage.

II.2.4. Approche Globale ou Energétique

La propagation de fissure est un phénomène dissipateur d'énergie. Dans la théorie de Griffith, l'énergie consommée est la différence entre l'état énergétique du système avant et après fissuration. Cette énergie peut s'assimiler à une énergie de surface, et Griffith a postulé que c'était une caractéristique intrinsèque du matériau.

II.2.4.1. Le taux de restitution d'énergie

Noté G , le taux de restitution d'énergie représente l'**énergie nécessaire pour faire progresser la fissure d'une longueur unité**. Elle correspond à la décroissance de l'énergie potentielle totale W_p pour passer d'une configuration initiale avec une longueur de fissure a , à une autre où la fissure s'est

$$\text{propagée d'une longueur } da : \left\{ \begin{array}{l} G = -\frac{\partial W_p}{\partial A} \\ W_p = W_e + W_{ext} \end{array} \right. \text{ avec } \left\{ \begin{array}{l} W_e = \int_{\Omega} \sigma : \varepsilon \\ W_{ext} = \int_{\Omega} f \cdot u \end{array} \right.$$

où W_e représente l'énergie de déformation élastique, W_{ext} l'énergie potentielle des forces extérieures f , et ∂A l'incrément de surface correspondant à l'extension de la fissure.

En utilisant le champ des contraintes dans la zone singulière et la loi de comportement élastique linéaire, il est possible de relier le taux de restitution d'énergie aux facteurs d'intensités de contraintes

$$\text{par : } G = \frac{(K_I^2 + K_{II}^2)}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad \text{où } \begin{cases} E' = E & \text{en contraintes planes} \\ E' = \frac{E}{1-\nu^2} & \text{en déformations planes} \\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} & \text{est le module de cisaillement} \end{cases}$$

où E est le module d'Young et ν le coefficient de poisson.

Remarque : Il est également possible de relier G à la complaisance C de la structure par $G = \frac{P^2}{2} \frac{\partial C}{\partial A}$.

Sur la courbe Force/Déplacement ci-contre, OA correspond à une fissure de longueur a , et OB à une fissure de longueur $a + \delta a$. G représente l'aire située dans le triangle OAB pour un essai effectué à charge imposée ou dans le triangle OAC pour un pilotage en déplacement imposé.

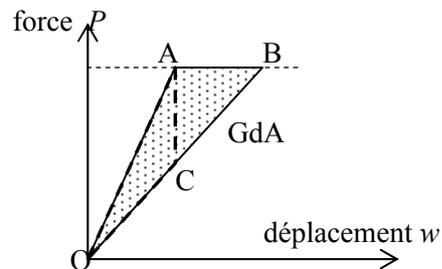


Figure II. 6. Relation entre G et la complaisance de la structure

II.2.4.2. Intégrales de contour

La singularité du champ des contraintes au voisinage de la pointe d'une fissure peut également être étudiée grâce à certaines intégrales de contour déduite de la loi de conservation de l'énergie [Eshelby 1968]. Ces intégrales ont la particularité d'être équivalentes au taux de restitution d'énergie, et d'être indépendantes du contour d'intégration choisi. Parmi les plus connues, on peut citer l'intégrale J de Rice [Rice 1968], l'intégrale duale I de Bui [Bui 1973], l'intégrale hybride s'appuyant sur le super-élément de Tong et Pian [Zhang 1992] ou encore les intégrales T et A proposées par Bui et Proix [Bui et al. 1985] et mises en œuvre et étudiées par Zhang [Zhang 1992].

Pour l'**intégrale de Rice**, on considère un milieu bidimensionnel fissuré, dont la fissure sera supposée rectiligne. Le contour C est un contour ouvert, orienté dont les extrémités se trouvent sur les faces supérieure et inférieure de la fissure.

$$J = \int_C \left(W_e(\varepsilon)n_1 - \sigma_{ij}n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) ds$$

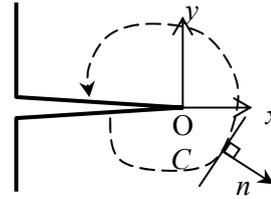


Figure II. 7. Contour d'intégration

où W_e est la densité d'énergie de déformation élastique telle que $\sigma_{ij} = \partial W_e / \partial \varepsilon_{ij}$, u est le vecteur déplacement en un point M du contour C avec la normale n tournée vers l'extérieur et σ représente le champ de contraintes.

☛ L'intégrale J est indépendante du contour (à condition qu'il n'y ait pas de forces de surface sur les lèvres de la fissure, que l'on soit en conditions isothermes, et en quasi-statique);

☛ L'intégrale J représente le taux de décroissance de l'énergie potentielle : $J = -\frac{\partial W_p}{\partial A} = G$

☛ L'intégrale J permet, dans certaines conditions¹, de décrire le champ des contraintes et des déformations à la pointe de la fissure à travers les champs HRR.

Dans les cas où la plasticité est importante, on effectue une analogie avec un matériau élastique non linéaire. Cette hypothèse est valable à condition qu'il n'y ait pas de brusques variations dans la direction du chargement appliqué, et donc, **pas de déchargement**. En effet, le déchargement en élasticité non linéaire s'effectue suivant la même courbe qu'à la montée, ce qui n'est pas le cas en élastoplasticité. Dans ce cadre, l'intégrale J est étendue au cas des matériaux élastiques non linéaires, et permet ainsi d'intégrer le champ des contraintes et des déplacements à la pointe de la fissure. Ayant ainsi fait l'analogie entre l'élastoplasticité et l'élasticité non linéaire, l'intégrale J peut être obtenue, comme précédemment, par la méthode de la complaisance :

$$J = -\int_0^w \left(\frac{\partial P}{\partial a} \right)_w dw = \int_0^P \left(\frac{\partial w}{\partial a} \right)_P dP$$

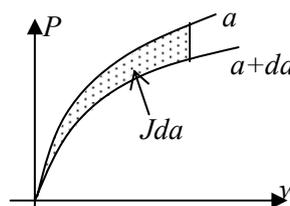


Figure II. 8. Détermination de J par la méthode de la complaisance

II.2.4.3. Crack Tip Opening Displacement (CTOD)

En élastoplasticité, la pointe de la fissure s'émousse et certains auteurs [Wells 1963] ont proposé d'utiliser l'ouverture de fissure comme paramètre de mécanique de la rupture. Le CTOD, ou

¹ La principale étant l'analogie entre le comportement élastoplastique, et le comportement élastique non linéaire dans les cas sans déchargement.

écartement de fissure δ , a ainsi été défini à partir des déplacements de la pointe de fissure, mesurés à l'intersection de la frontière de la zone plastique avec les lèvres de la fissure (Figure II.9.a). Il existe de nombreuses façons de calculer cet écartement δ [Pluvinage 1989]. Par exemple, Tracey a proposé de définir cet écartement à l'intersection de deux droites passant à 45° de l'axe et des lèvres de la fissure (Figure II.9.b).

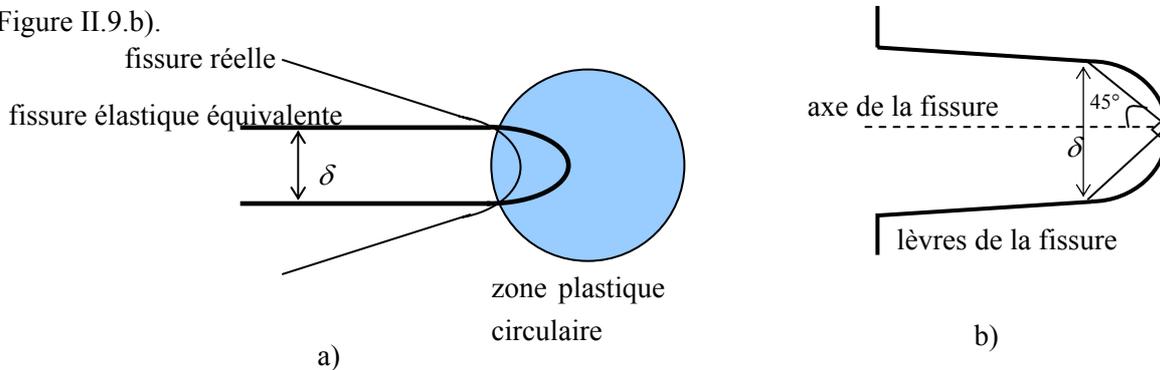


Figure II. 9. Ecartement de fissure δ (CTOD)

Il est ensuite possible de relier le CTOD au taux de restitution d'énergie, ou encore à l'intégrale J en

utilisant la solution asymptotique HRR [Shih 1981] :
$$\delta = d_n (\sigma_0, n) \frac{J}{\sigma_0}$$

où d_n est un coefficient de proportionnalité sans dimension, et qui dépend fortement du coefficient d'écrouissage n , et peu de la limite d'élasticité σ_0 .

II.2.4.4. Calcul du taux de restitution d'énergie

Ces méthodes sont particulièrement bien adaptées aux calculs éléments finis car on se place relativement loin de la pointe de fissure, de façon à ne pas faire intervenir les singularités. Par contre, elles présentent souvent le désavantage de ne pas permettre le découplage des différents modes. Ces méthodes étant très nombreuses, nous nous restreindrons à celles qui sont les plus utilisées.

- **Calcul par avancée réelle de fissure**

En travaillant à force imposée, on peut calculer G en calculant l'évolution de l'énergie élastique lors d'un petit incrément de longueur de la fissure. G s'obtient alors par lissage de la quantité : $\Delta W_{el} / \Delta a$.

Dans la pratique, la méthode consiste donc à effectuer deux ou trois calculs élastiques successifs à partir d'un maillage identique, mais sur lequel on relâche un ou plusieurs nœuds en fond de fissure entre les différents calculs. On peut travailler avec des éléments quadratiques courant, mais il ne faut surtout pas positionner la pointe de fissure sur un nœud milieu. Il est préférable de réaliser au moins deux déterminations (3 calculs) puis d'évaluer G par extrapolation quand $r \rightarrow 0$.

Cette méthode, basée sur un raisonnement physique, a l'avantage de bien s'adapter aux codes, tout en n'utilisant pas d'éléments spéciaux. Elle nécessite cependant un maillage fin en pointe de fissure et est très coûteuse en temps de calcul, puisqu'elle requiert au moins deux calculs pour une longueur de fissure donnée.

• **Méthode de l'intégrale J**

Cette méthode permet de calculer l'intégrale de Rice à partir des résultats du code éléments finis. Reprenons la définition de l'intégrale J :

$$J = \int_C \left(W_e(\varepsilon)n_1 - \sigma_{ij}n_j \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) ds$$

Cette intégrale représente l'énergie disponible en fond de fissure. Elle peut cependant être calculée assez loin de cette zone. D'ailleurs, son indépendance par rapport au contour d'intégration permet de prendre ce dernier assez grand, afin d'éviter la zone de singularité.

En pratique, le contour d'intégration C est défini par un ensemble de nœuds du maillage. Le code de calcul nous permet d'obtenir les valeurs des contraintes et du gradient des déplacements dans chaque élément aux points d'intégration, puis par lissage à ses sommets. Pour un contour donné C , on peut donc calculer la valeur de J basée sur les éléments intérieurs au contour (J_{int}), celle basée sur les éléments extérieurs (J_{ext}), et enfin celle obtenue par moyenne arithmétique en chaque nœud du contour (J_m). Afin de justifier le choix du contour, il est nécessaire que ces trois quantités soient très voisines.

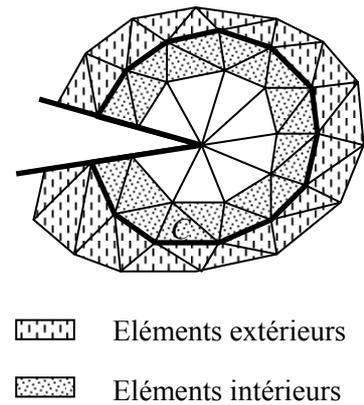


Figure II. 10. Contour d'intégration

Contrairement à la théorie, la précision des résultats numériques obtenus par cette méthode est très dépendante du choix du contour. Elle est d'autant meilleure que le contour est éloigné de la pointe de fissure. Pour les maillages constitués d'éléments quadrilatères, disposés "circulairement" autour de la pointe de la fissure, il peut être intéressant de choisir comme contour d'intégration, le contour passant directement aux points d'intégration de l'élément. Cela permet en effet d'avoir la valeur exacte de la contrainte ou de la déformation qui sont des valeurs calculées aux points d'intégration. Pour des éléments triangulaires, cette technique est peu utilisée, car elle fournit alors des contours très irréguliers. Petit [Petit 1990] montre que la précision est améliorée par l'utilisation d'éléments singuliers avec nœuds au quart.

• **Calcul par avancée virtuelle de fissure**

Cette technique, introduite par Hellen [Hellen 1975] et Parks [Parks 1974] au milieu des années 1970, permet de calculer la variation d'énergie potentielle totale en introduisant une extension virtuelle de fissure δa . Le processus d'extension de la fissure est obtenu en déplaçant les points nodaux du réseau, plutôt qu'en ôtant les composantes de traction nodale à la pointe de la fissure et en procédant à une seconde analyse comme cela est fait dans la méthode d'extension réelle.

Si l'on note $[K]$ la matrice de rigidité du système, $\{u\}$ le vecteur déplacement, et $\{f\}$ le vecteur chargement aux nœuds du maillage, le système à résoudre s'écrit : $[K]\{u\}=\{f\}$.

On réalise une petite perturbation δa de la pointe de fissure (de l'ordre de 10^{-2} à 10^{-3} fois la dimension de la première maille en pointe). Cette extension implique une variation $\{\delta u\}$ du champ des déplacements, induisant ainsi une variation d'énergie potentielle dW_p . Le taux de restitution d'énergie s'obtient alors par :

$$G = -\frac{dW_p}{da} = -\frac{1}{2} \{u\}^t \left[\frac{\delta K}{\delta a} \right] \{u\} + \{u\}^t \left\{ \frac{\delta f}{\delta a} \right\}$$

La zone affectée par la transformation joue un rôle important, aussi bien au point de vue de la précision que du temps de calcul, pour la détermination de G . Pour y remédier, on introduit un contour Γ_0 à l'intérieur duquel les éléments sont translatés avec l'avancée de la fissure, et un contour Γ_1 à l'extérieur duquel la structure n'est pas perturbée. Dans ce cas, la perturbation de la matrice de raideur est due exclusivement aux éléments situés entre ces deux contours.

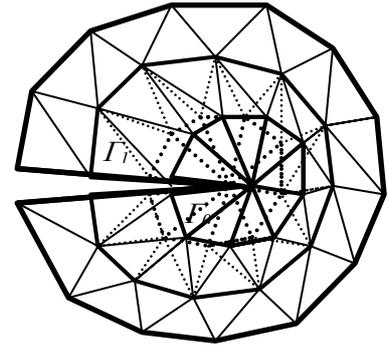


Figure II. 11. Extension virtuelle

Outre la méthode classique de différences finies (peu précise), le calcul de $[\delta K]$ peut être effectué suivant une méthode d'intégration directe proposée par Lin et Abel [Lin et al. 1988]. Cette méthode consiste à calculer les dérivées de la matrice de rigidité par rapport à la longueur de fissure, en effectuant des variations virtuelles de géométrie et des développements en série des grandeurs intervenant dans la formulation du problème.

De Lorenzi [De Lorenzi 1985] a étendu la méthode de Parks à la plasticité, et a transformé l'intégrale de contour en une intégrale de surface, donnant ainsi plus de précision et d'indépendance vis-à-vis du maillage. Il montre alors que le taux de restitution d'énergie peut s'écrire :

$$G = J = \frac{1}{\delta a} \iint_A \left(\sigma_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x_1} - W \delta_{i1} \right) \frac{\partial \Delta x_1}{\partial x_i} dA$$

A étant la surface comprise entre les contours Γ_0 et Γ_1 , et Δx_1 représentant l'extension virtuelle.

Les applications numériques [Zhang 1992], [Lin et al. 1988], [Burlet 1998] ont montré la grande précision de cette méthode. De plus, les résultats obtenus sont entièrement indépendants des contours choisis lorsque la méthode d'intégration directe est utilisée pour calculer la perturbation de la matrice de raideur.

- **Méthode $G\theta$**

En remplaçant Δx_1 par une fonction vectorielle θ de composantes nulles à l'intérieur du contour Γ_0 , de norme unité à l'extérieur du contour Γ_1 , et de composantes variant continûment entre ces valeurs sur la

couronne comprise entre Γ_0 , Γ_1 et les lèvres de la fissure, on retrouve le principe de la méthode $G\theta$. Cette méthode introduite par Destuynder et Djaoua au début des années 1980 [Destuynder et al. 1981], [Destuynder et al. 1983], [Gilles et al. 1993] consiste à calculer le taux de restitution d'énergie G par dérivation (par la méthode lagrangienne²) de l'énergie potentielle d'une structure fissurée par rapport à un domaine. Elle revient à effectuer une intégration non pas sur un contour, mais sur une couronne C_{cour} entourant la pointe de fissure. Cette couronne dont les frontières coïncident avec les côtés des éléments doit être prise assez loin du fond de fissure pour bénéficier d'une bonne approximation de la solution. De plus, l'intégration numérique est effectuée aux points de Gauss des éléments appartenant à la couronne, ce qui lui donne plus de précision.

Nous présentons ici les grandes lignes de la méthode. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer aux articles [Destuynder et al. 1981], [Destuynder et al. 1983].

- La variation d'énergie potentielle totale W_p

Considérons un solide fissuré occupant l'ouvert Ω :

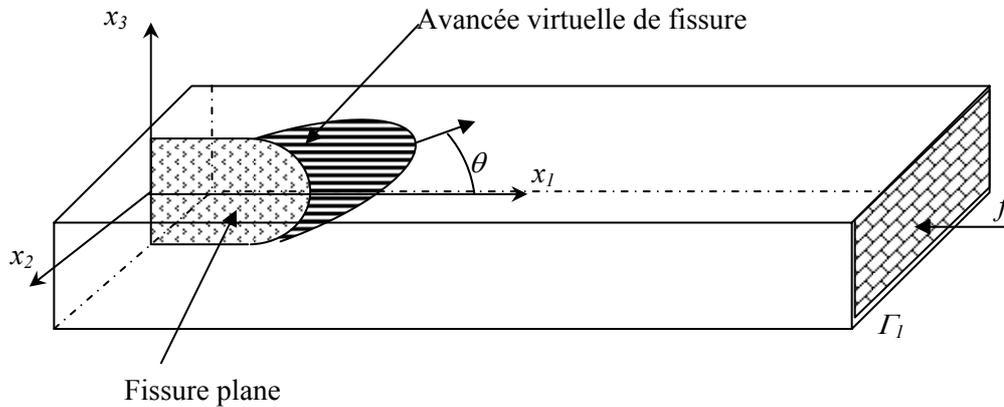


Figure II. 12. Solide fissuré occupant l'ouvert Ω

Pour déterminer la variation d'énergie potentielle totale, on définit une application F^ε représentant une perturbation géométrique infinitésimale ε , au voisinage du fond de fissure :

$$F^\varepsilon : \mathfrak{R}^3 \rightarrow \mathfrak{R}^3$$

$$\forall M \in \Omega, F^\varepsilon(M) = M^\varepsilon = M + \varepsilon\theta(M)$$

où le champ θ permet de représenter la position de chaque point du corps perturbé en fonction de sa position initiale, avant la perturbation infinitésimale ε .

Si la perturbation ε est suffisamment petite, Destuynder a montré [Destuynder et al. 1983] que les champs de contraintes σ et de déplacements u correspondant à la configuration perturbée pouvaient se décomposer de la façon suivante :

² La dérivation d'une fonctionnelle définie sur un ouvert variable par la méthode lagrangienne consiste à travailler sur une configuration de référence occupée par le solide à un instant donné.

$$\sigma^\varepsilon = \sigma + \varepsilon \sigma^1$$

$$u^\varepsilon = u + \varepsilon u^1$$

où σ^1 et u^1 représentent les premières variations correspondant aux champs des contraintes et des déplacements lors de la perturbation infinitésimale ε de Ω .

La variation d'énergie potentielle totale par rapport à l'allongement de la fissure peut alors être obtenue par passage à la limite lorsque ε tend vers 0 :

$$\frac{dW_p}{da} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{W_p^\varepsilon - W_p}{\varepsilon}$$

- **Propriétés du champ θ**

Le champ de déplacement θ , introduit pour représenter la cinématique virtuelle du mouvement, doit vérifier les propriétés suivantes :

- θ est parallèle au plan de la fissure (automatique en 2D) ;
- θ est normal au front de la fissure ;
- le support de θ est limité à un voisinage de la fissure ;
- θ est constant dans une zone entourant la pointe de fissure.

En pratique, on définit deux contours $C1$ et $C2$ entourant la pointe de fissure. Ces deux contours divisent la pièce en trois parties (Figure II.13.) :

- dans C_{int} , le champ θ est constant de norme unitaire (1,0) ;
- dans C_{ext} le champ θ est nul (0,0) ;
- dans la couronne C_{cour} le champ θ varie continûment de (1,0) à (0,0).

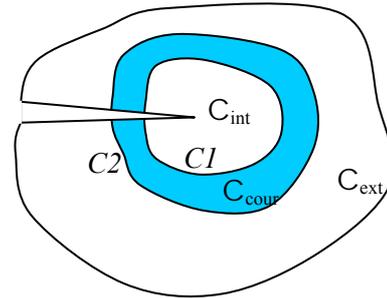


Figure II. 13. Couronnes d'intégration pour la méthode G θ

- **Expression du taux de restitution d'énergie**

L'énergie potentielle totale du système est définie par : $W_p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} Tr(\sigma \nabla u) d\Omega - \int_{\Omega} f \cdot u d\Omega$

où f représente les forces extérieures appliquées à Ω (F_1 sur la Figure II.12.).

Le principe des travaux virtuels, à l'équilibre, nous donne la relation suivante pour tout champ de déplacements virtuels cinématiquement admissibles u^* : $\int_{\Omega} Tr(\sigma \nabla u^*) d\Omega = \int_{\Omega} f \cdot u^* d\Omega$

Donc en prenant u comme champ de déplacement virtuel, on obtient l'expression de l'énergie

potentielle totale à l'équilibre : $W_p = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} Tr(\sigma \nabla u) d\Omega$

La perturbation étant infinitésimale, les opérations de dérivation et d'intégration sur le corps perturbé peuvent s'exprimer à l'aide d'un développement limité au premier ordre en fonction des mêmes opérations sur le corps non perturbé. Destuynder montre alors que sous les hypothèses suivantes :

- pas d'efforts appliqués au voisinage de la fissure ;
- pas de déformations d'origine thermique ;

et en se servant des expressions de σ^e et u^e définies précédemment, le taux de restitution d'énergie peut s'exprimer en élasticité pure :

$$G = \int_{\Omega} Tr(\sigma \nabla U \nabla \theta) d\Omega - \int_{\Omega} w_e \cdot div(\theta) d\Omega$$

où $w_e = \frac{1}{2} Tr(\sigma \nabla U)$

Cette expression peut être généralisée en élasticité non linéaire (ou élastoplasticité en conditions de chargement monotone) en remplaçant l'énergie élastique w_e par une énergie totale w_{tot} , somme de l'énergie élastique w_e et de l'énergie plastique w_p . De même, il est possible d'ajouter plusieurs termes supplémentaires pour prendre en compte des forces extérieures près de la fissure, le cas d'un chargement thermique, ou encore le cas d'une fissure au voisinage d'une interface bimatériaux. Ces termes complémentaires ne seront pas développés dans ce mémoire.

• **Méthode de découplage des modes**

Lorsque la fissuration se présente en mode mixte, les méthodes énergétiques sont, pour la plupart, incapables de séparer les deux modes de rupture, car l'expression de G ou J est une forme quadratique des facteurs d'intensité de contraintes.

La méthode de découplage consiste alors à séparer les paramètres énergétiques en deux termes, chaque terme étant relié au facteur d'intensité de contraintes correspondant :

$$\begin{cases} J = J_I + J_{II} \\ G = G_I + G_{II} \end{cases} \quad \text{avec donc :} \quad \begin{cases} J_I = G_I = \frac{K_I^2}{E'} \\ J_{II} = G_{II} = \frac{K_{II}^2}{E'} \end{cases}$$

Le calcul de ces termes est alors effectué en décomposant le champ de déplacement en une partie symétrique, et une partie anti-symétrique par rapport à l'axe de la fissure ; chacune de ces parties correspondant respectivement au mode I et II. Pour ce calcul, il faut donc considérer deux points M et M' symétriques par rapport à l'axe de la fissure, ce qui nous permettra par combinaison linéaire des déplacements de ces deux points, d'obtenir les contributions aux modes I et II.

Sur le plan numérique, cette méthode est relativement difficile à mettre en œuvre, car les points M et M' doivent appartenir à un contour, et ils doivent donc être des nœuds du maillage. Pour pouvoir

appliquer cette méthode, il est donc nécessaire d'avoir un maillage et un contour symétrique par rapport à l'axe de la fissure dans la zone de calcul.

D'autres méthodes telles que celles utilisant les intégrales T et A [Bui 1985] permettent également de découpler les différents modes tout en s'affranchissant du problème de maillage symétrique, mais elles sont plutôt utilisées dans le domaine de la thermoélasticité.

- **Comparaison des différentes méthodes**

Plusieurs études comparatives de ces différentes méthodes ont été effectuées [Elouard 1993], [Zhang 1992], [Petit 1990]. Les deux méthodes les plus précises, à finesse de maillage donnée, semblent être la méthode de l'extension virtuelle de la fissure associée à la méthode d'intégration directe, et la méthode $G\theta$. La finesse du maillage intervient très peu sur la précision des résultats obtenus par ces deux méthodes, mais elle conditionne significativement le temps de calcul.

Pour un même maillage, la méthode locale par extrapolation des déplacements est moins précise que les deux méthodes précédentes, mais elle est plus rapide ; elle permet le découplage en modes I et II, et elle ne nécessite pas de code spécialisé.

II.2.5. Bilan

Il est possible de résumer les zones de prédominance des différents paramètres de calcul utilisés en mécanique de la rupture à l'aide du graphe suivant :

Le solide fissuré est subdivisé en plusieurs zones de dominance, et on peut alors être confronté à plusieurs situations [Marchal 1997] :

- En **élasticité linéaire**, les zones I et II n'existent pas, et on peut déterminer la rupture uniquement à l'aide de K (et la contrainte T). Le paramètre G peut également être utilisé, et s'avère très précis lorsqu'il est calculé par des méthodes d'intégrales surfaciques. De plus, la fissure reste aiguë.
- En **plasticité confinée**, la fissure subit un léger émoussement, la zone I apparaît, mais reste de petite taille ($\approx 2CTOD$). Il apparaît une zone de plasticité (zone II) dominée par le paramètre J (et le terme Q). La zone III reste valide. On peut continuer à utiliser K à l'aide des facteurs d'intensité des contraintes équivalents, et des méthodes élastiques équivalentes [Baouch 1998] (Irwin, Dugdale-Barenblatt) ;
- En **plasticité étendue**, la fissure s'émousse encore. La zone de dominance de K (et de $K-T$) disparaît, et les zones I et II s'agrandissent. Les méthodes élastiques équivalentes ne sont plus valables, et la méthode élastoplastique incrémentale est nécessaire pour le calcul des paramètres G ou J . Lorsque la plasticité s'étend encore, la rupture ne peut plus être caractérisée à l'aide d'un seul paramètre, et on rentre dans la zone de dominance de $J-Q$.

Enfin, il peut arriver que la zone de grande déformation recouvre toutes les autres. Il n'est alors plus possible d'utiliser les différents paramètres J , K , Q ou T pour caractériser la rupture.

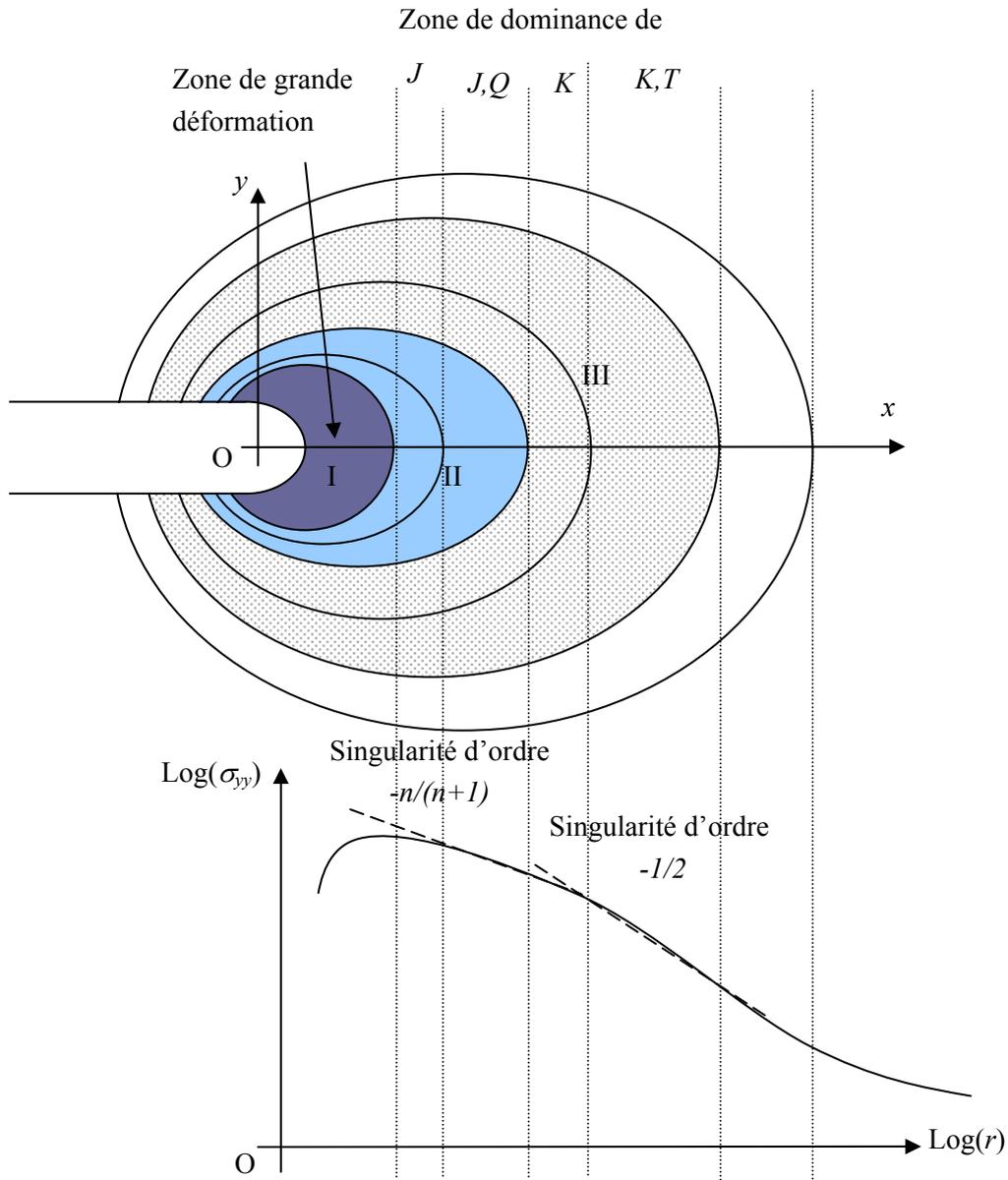


Figure II. 14. Zones de dominance des différents paramètres

Dans la suite de l'étude, nous n'aborderons pas le cas de la plasticité étendue, et nous nous intéresserons donc au calcul des paramètres gouvernant la rupture : G et K .

II.3. DEVELOPPEMENT D'OUTILS NUMERIQUES POUR LA MODELISATION D'UNE FISSURE

Comme nous l'avons vu lors de l'étude bibliographique précédente, l'analyse numérique des champs mécaniques d'une pièce fissurée est fortement liée à la qualité du maillage de cette pièce, et plus particulièrement du voisinage de la pointe de fissure. Dans cette seconde partie du chapitre II, nous présentons les outils que nous avons développés pour obtenir un maillage de qualité en pointe de fissure. Puis nous étudions l'influence des nœuds milieux des éléments en tête de fissure, sur la précision du calcul du champ des contraintes.

II.3.1. Maillage Concentrique

Afin d'utiliser certaines techniques de calcul propres à la mécanique de la rupture, la gestion du maillage à la pointe d'une fissure est primordiale.

Ainsi, pour pouvoir utiliser les éléments singuliers proposés par Barsoum [Barsoum 1976], il est important d'avoir un maillage triangulaire concentrique autour de la pointe de la fissure. De même, pour pouvoir implémenter la méthode $G\theta$, il est nécessaire de créer une couronne d'éléments qui servira de surface d'intégration pour le calcul du taux de restitution d'énergie.

La technique de maillage présentée au chapitre I est tout à fait adaptée à ce genre de manipulations. Pour la création de ces contours circulaires, l'utilisateur définit les rayons relatifs au contour concentrique C_{con} , au contour interne de la couronne C_{int} , et au contour externe de la couronne C_{ext} . Ces trois contours sont des contours ouverts (puisque'ils s'appuient sur les lèvres de la fissure), et non orientés (puisque la matière se situe à l'intérieur et à l'extérieur des contours). Puis, le mailleur détermine automatiquement les points d'intersection des différents contours, et il génère un maillage triangulaire s'appuyant sur les contours ainsi définis. La finesse du maillage étant alors déterminée par les paramètres de maillage définis par l'utilisateur ainsi que par la taille des contours en pointe de fissure :

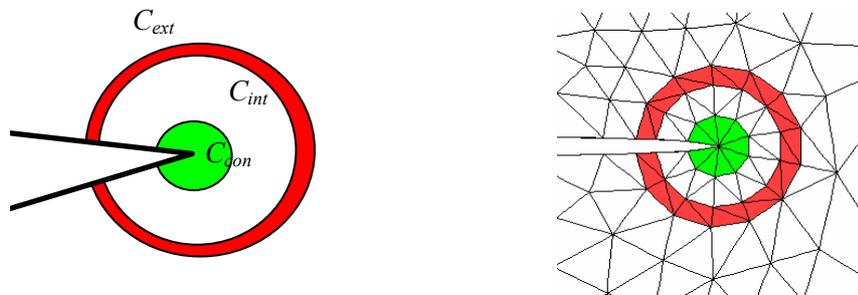


Figure II. 15. Contours circulaires pour le maillage en tête de fissure

Cette technique nous permet de maîtriser parfaitement la structure du maillage en pointe de fissure, que ce soit pour le calcul de paramètres mécaniques, ou pour la propagation d'une fissure, comme nous le verrons dans le chapitre III.

Afin de valider notre simulation, et d'observer l'influence de la structure du maillage en pointe de fissure, nous allons étudier les champs mécaniques au voisinage immédiat de la fissure pour un matériau purement élastique. Puis nous comparerons la forme de la zone plastique en pointe de fissure à celle proposée dans la littérature pour un matériau élastoplastique.

- **Champs mécaniques au voisinage de la fissure dans un matériau élastique :**

Nous étudions ici un solide élastique, fissuré, et soumis à un essai de traction suivant l'axe Oy (Figure II.16.). Nous représentons sur le graphe de la figure II.16. la contrainte normale σ_{yy} dans l'axe de la fissure Ox , et pour deux finesses de maillage différentes : un maillage classique, sans raffinement particulier, et sans maillage concentrique en pointe de fissure ; et un maillage raffiné et concentrique à la pointe.

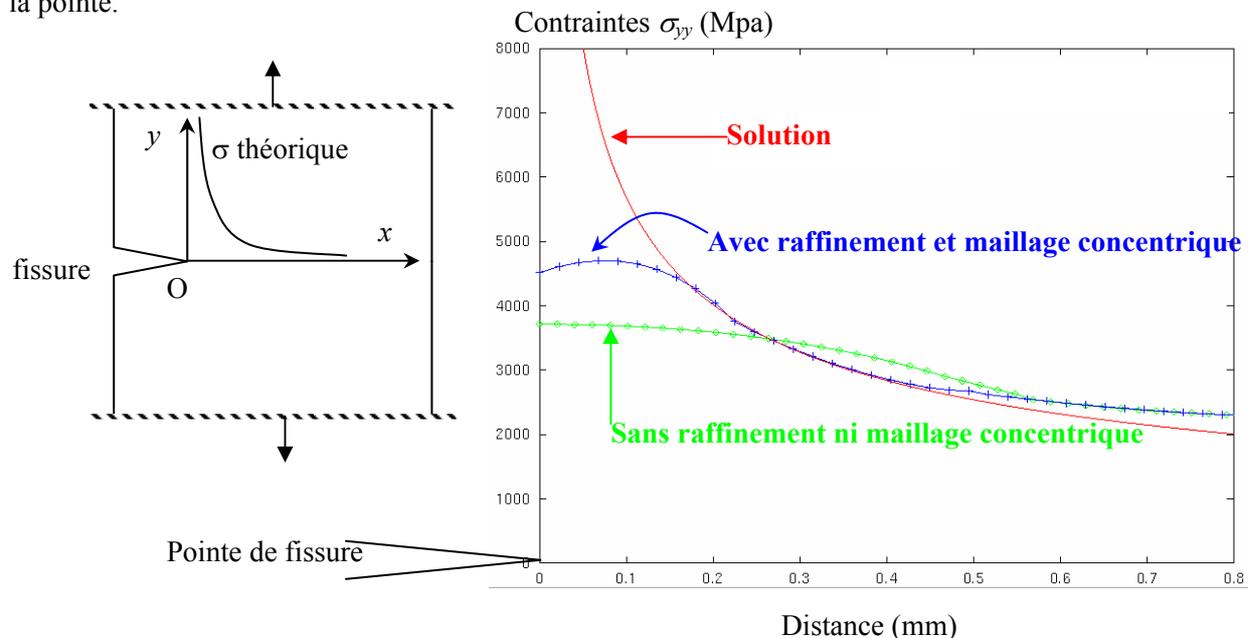


Figure II. 16. Contrainte normale en pointe de fissure pour un essai de traction simple

On retrouve bien les résultats théoriques, avec une contrainte en $\frac{K}{\sqrt{2\pi r}}$ au voisinage proche de la pointe de fissure : $0,2 \leq r \leq 0,6$. Cependant, pour $r < 0,2$, les contraintes provenant de la simulation « décrochent ». Cela vient du fait que les éléments finis P2P0 (éléments triangulaires quadratiques en vitesse, et à pression constante par élément) utilisés ne peuvent engendrer de contrainte infinie. Pour cela, il sera nécessaire d'introduire les éléments de Barsoum. On remarque également l'importance du raffinement et de la concentricité du maillage en pointe de fissure sur la précision. La mauvaise précision pour un maillage quelconque sera d'autant plus importante lorsque nous étudierons les fissures quasi-statiques. En effet, nous verrons que certains critères de bifurcation déterminent la direction de propagation de la fissure à partir du champ de contraintes locales en pointe de fissure.

• **Forme de la zone plastique :**

Pour un matériau élastoplastique, il est possible de représenter la forme de la zone plastique en pointe de fissure. En effet, en **déformations planes**, les modèles théoriques de la zone plastique à fond de fissure prévoient une forme ressemblante à des ailes de papillon :

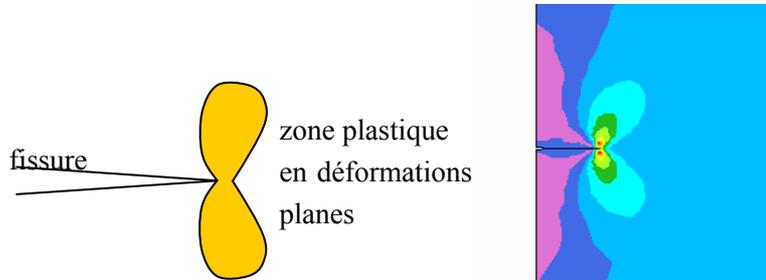


Figure II. 17. Forme de la zone plastique en pointe de fissure et en déformation plane

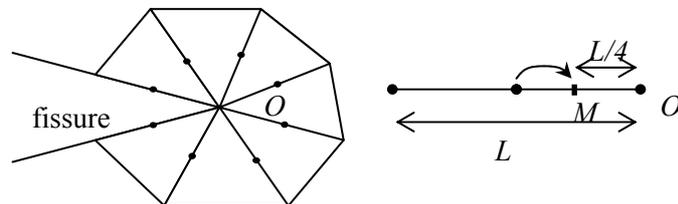
Lors de la simulation, nous retrouvons bien cette même forme en visualisant les déformations équivalentes.

II.3.2. Eléments Singuliers

Dans l'exemple précédent, nous avons vu que nous n'arrivions pas à modéliser la singularité des contraintes au voisinage immédiat de la pointe de fissure, et ceci même pour un maillage concentrique très raffiné. Pour pouvoir représenter cette singularité, nous déplaçons les nœuds milieux des éléments en pointe de fissure au quart de la longueur de l'arête [Henshell et al. 1975]. Nous allons également étudier les solutions obtenues en plaçant les nœuds milieux des éléments en pointe de fissure à différentes distances de la pointe de fissure.

Nous étudions 5 cas différents, où les nœuds milieux ont été déplacés :

- Au trois-quart de la longueur de l'arête en partant de la pointe de fissure ($3L/4$) ;
- Au milieu de l'arête ($L/2$) ;
- Au tiers de l'arête ($L/3$) ;
- Au quart de l'arête ($L/4$) ;
- Au cinquième de l'arête ($L/5$).



• Nœuds milieux

Figure II. 18. Déplacement des nœuds milieux

Pour étudier les champs mécaniques dans chaque configuration, nous reprenons l'essai de traction simple présenté en figure II.16. et nous étudions l'influence du positionnement du nœud milieu sur le

profil de contraintes au voisinage immédiat de la pointe de fissure pour un matériau purement élastique.

• Contraintes σ_{yy} (MPa) en pointe de fissure en fonction du déplacement du nœud milieu

Ci-dessous, nous observons les contraintes σ_{yy} , visualisées aux points d'intégration, à la pointe de la fissure, et en fonction du positionnement du nœud milieu.

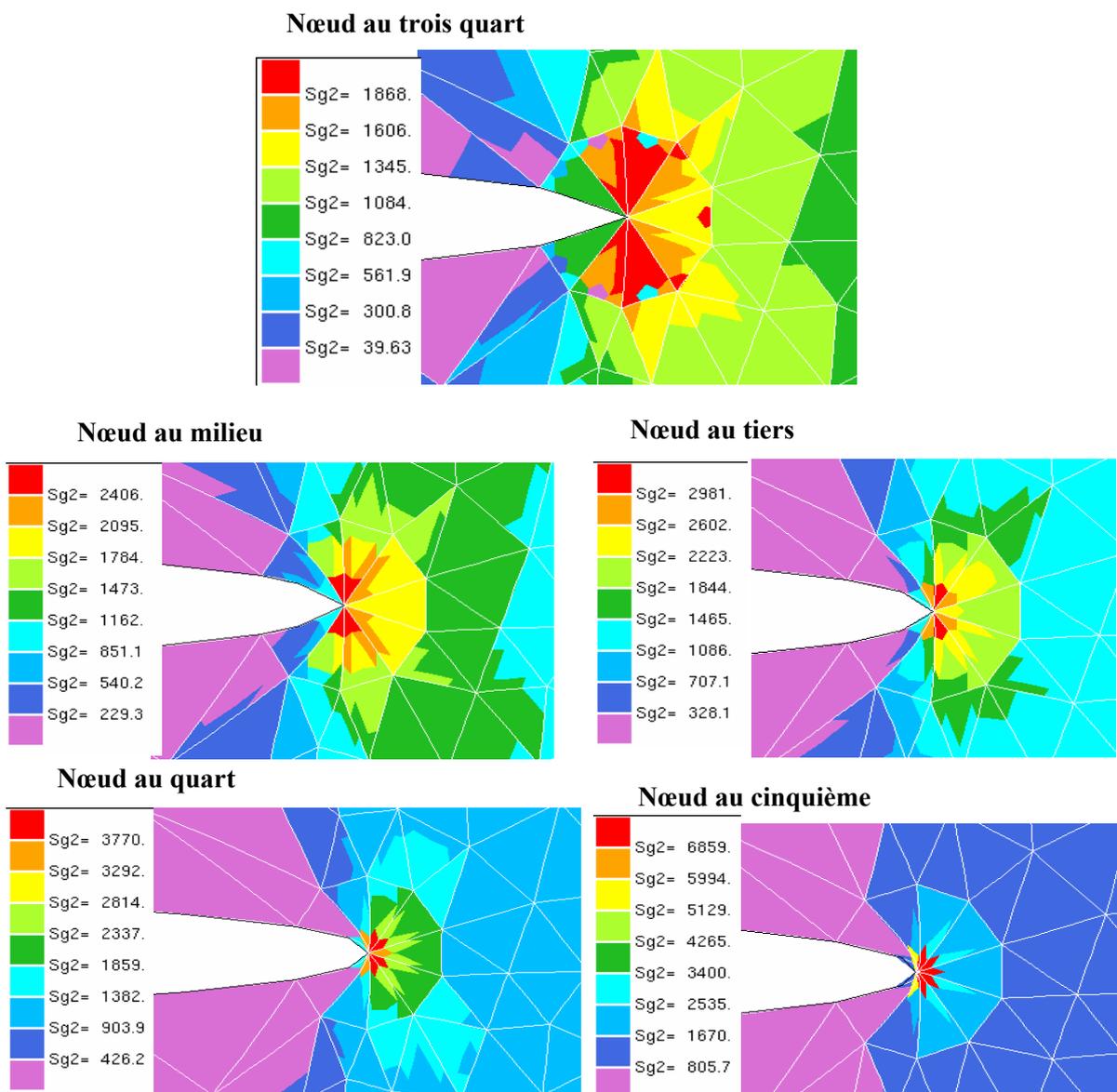


Figure II. 19. σ_{yy} aux points d'intégration et pour différents éléments en pointe de fissure

On se rend bien compte de l'influence de la position des nœuds milieux sur les résultats obtenus. La forme des arêtes représentant les lèvres de la pointe de fissure est modifiée, et cela se remarque bien sur la courbure de l'arête aboutissant à la pointe de fissure. Au niveau du champ de contraintes σ_{yy} , le fait de rapprocher le nœud milieu de la pointe provoque une concentration de contraintes beaucoup plus importante à la pointe même de la fissure. Les contraintes sont donc plus élevées à la pointe de

fissure : dans le cas classique (nœuds aux milieux des arêtes) la contrainte maximale est de l'ordre de 2400 MPa, alors qu'elle est quasiment de 7000 MPa pour l'exemple avec les nœuds au cinquième de la longueur. On remarque également que ces contraintes ne dépassent pas les 2000 MPa lorsque les nœuds milieu sont déplacés aux trois-quarts de l'arête. Pour représenter cette concentration de contraintes, nous avons représenté dans le graphe ci-dessus les contraintes σ_{yy} sur le contour de la pièce au voisinage de la fissure :

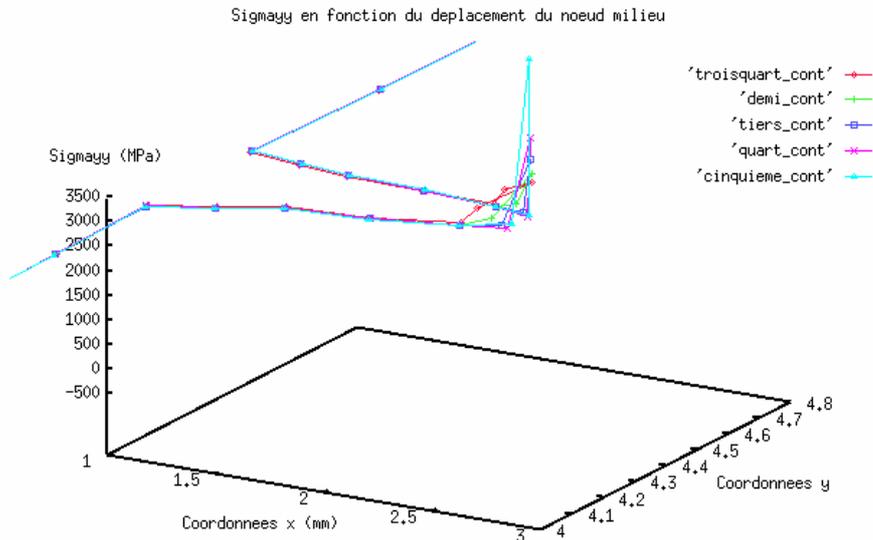


Figure II. 20. Graphe 3D des contraintes en pointe de fissure

Afin de comparer nos résultats aux résultats théoriques provenant de l'élasticité linéaire, nous avons tracé les contraintes σ_{yy} sur la droite représentant l'axe de la fissure, et ceci pour les 5 positionnements des nœuds milieu. Nous avons tracé en parallèle la courbe théorique de la forme :

$$f(x) = \frac{Cte}{\sqrt{2\pi x}}$$

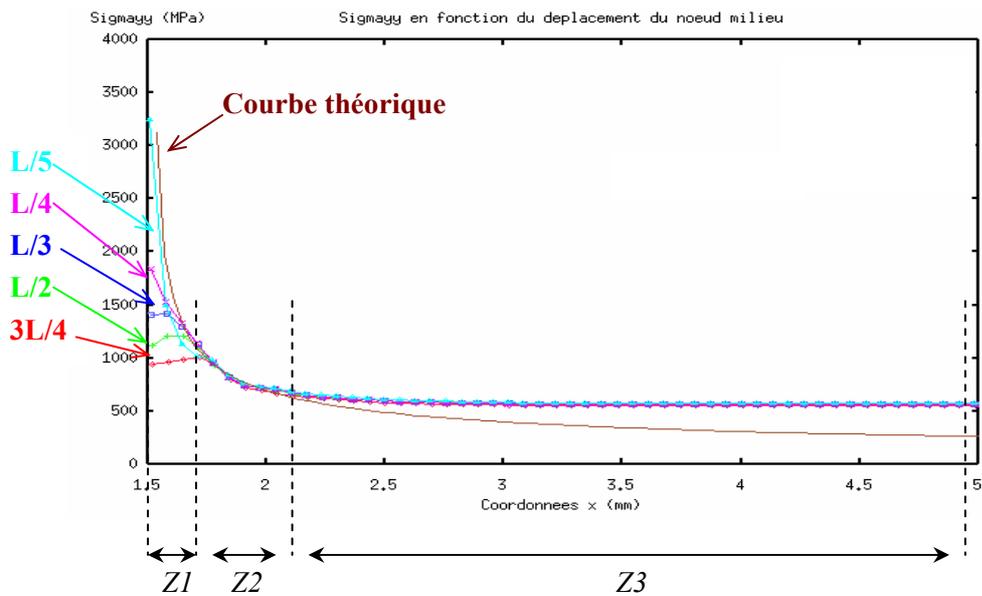


Figure II. 21. Contrainte σ_{yy} en fonction du positionnement du nœud milieu

Sur la figure II.21., nous pouvons délimiter trois régions :

- **Z3** est la **zone de champs lointains** : cette zone n'est quasiment pas influencée par la fissure et le champ de contraintes y est sensiblement constant. La solution théorique n'y est d'ailleurs plus tout à fait précise.
- **Z2** est la **zone singulière** : c'est à partir de cette zone que les contraintes présentent une singularité en $1/\sqrt{r}$. La comparaison entre la courbe théorique (en marron) et les courbes numériques est excellente.
- **Z1** est la **zone d'élaboration** : C'est principalement dans cette zone que le déplacement des nœuds milieux intervient. On remarque bien pour les nœuds déplacés aux trois-quarts, au milieu et au tiers que les contraintes redescendent légèrement en arrivant à la pointe de fissure. Ce phénomène n'est pas observé pour les nœuds au quart et au cinquième. On peut en effet montrer formellement (Annexe B.2.) que le fait de déplacer les nœuds milieux au quart de l'arête fait apparaître un terme en $1/\sqrt{r}$ dans les champs mécaniques. C'est ce qui permet d'obtenir des contraintes si élevées à la pointe de fissure. Les nœuds déplacés au cinquième donnent les plus grandes valeurs de contraintes, mais ces éléments sont fortement dégénérés et la courbe présente un saut à la frontière entre les zones **Z1** et **Z2**. Les nœuds déplacés au quart ne tendent pas vers l'infini en pointe de fissure pour ce maillage assez grossier, mais donnent des résultats bien meilleurs que ceux obtenus avec des éléments classiques.

Par la suite, nous avons continué à étudier les champs mécaniques à la pointe de la fissure pour les nœuds déplacés au quart. Nous avons voulu évaluer l'influence de la finesse du maillage sur les résultats obtenus et les comparer à ceux obtenus avec un maillage classique. Pour cela, nous avons effectué le même calcul que précédemment avec 3 finesses de maillage différentes :

- **M1** : 909 nœuds et rayon du disque en pointe = 0.4mm
- **M2** : 1044 nœuds et rayon du disque en pointe = 0.25mm
- **M3** : 1716 nœuds et rayon du disque en pointe = 0.05mm

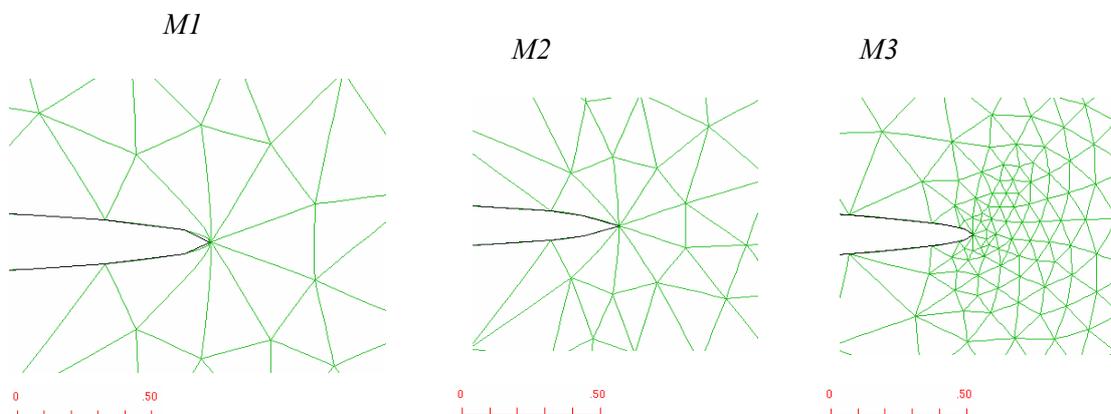


Figure II. 22. Différentes finesses de maillage en pointe de fissure

Nous représentons ci-dessous les contraintes σ_{yy} sur l'axe de la fissure pour ces 3 types de maillage. fdemi2, demi2 et gdemi2 correspondent respectivement aux maillages M1, M2 et M3 avec des éléments classiques, tandis que les courbes gquart2, quart2 et fquart2 correspondent aux essais pour lesquels les nœuds milieux ont été déplacés au quart de l'arête. Enfin en bleu, nous avons représenté la courbe théorique.

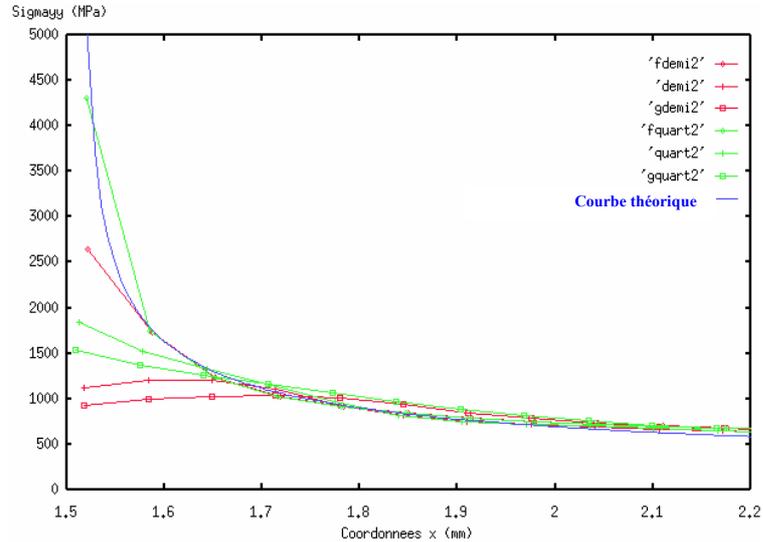


Figure II. 23. Comparaison d'éléments classiques et d'éléments singuliers en fonction de la finesse du maillage

Pour une finesse de maillage donnée, les nœuds au quart améliorent considérablement la solution. Pour des éléments classiques, il est nécessaire d'avoir un grand raffinement en pointe de fissure afin d'éviter la décroissance des contraintes lorsque l'on arrive en pointe de fissure.

Les nœuds au quart ne présentent pas cette chute de contraintes, même pour un maillage très grossier. Pour le maillage fin, les nœuds au quart donnent une solution très comparable à la courbe théorique. En augmentant encore légèrement la finesse du maillage en pointe de fissure, et en augmentant le nombre de mesures sur l'axe de la fissure, on obtient la comparaison excellente suivante :

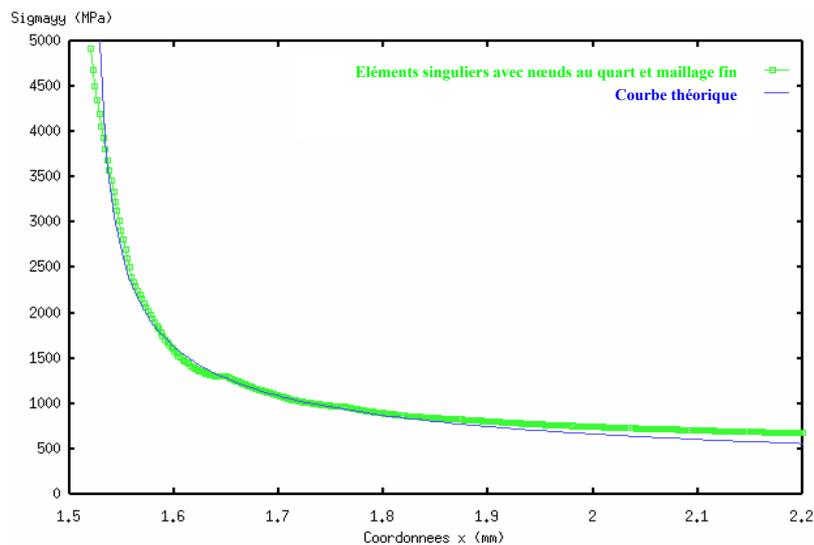


Figure II. 24. Comparaison de la courbe théorique aux résultats obtenus avec nœuds au quart et maillage fin

II.3.3. Bilan

Ainsi, les éléments singuliers avec nœuds au quart proposés par Barsoum permettent de représenter correctement la singularité en pointe de fissure pour un matériau élastique. Certains auteurs affirment que ces éléments peuvent également s'avérer intéressants pour des matériaux élastoplastiques.

Cependant, un maillage concentrique assez raffiné en pointe de fissure donne des résultats tout à fait acceptables. De plus, les directions de propagation de fissures (que nous étudierons dans le prochaine chapitre) sont correctes avec des éléments classiques pour un maillage convenablement structuré et raffiné en tête de fissure. La technique numérique que nous utilisons pour mailler, automatiquement et avec la finesse nécessaire, la fissure nous permet de parfaitement contrôler la structure du maillage en pointe de fissure. Il ne nous semble donc pas indispensable d'utiliser ces éléments singuliers.

II.4. CALCUL DU TAUX DE RESTITUTION D'ENERGIE

Comme nous l'avons vu précédemment, les principales grandeurs en mécanique de la rupture sont les facteurs d'intensité des contraintes et le taux de restitution d'énergie. Ces grandeurs pouvant être reliées les unes aux autres, nous proposons ici de calculer le taux de restitution d'énergie à l'aide de la méthode $G\theta$ présentée précédemment. Puis nous comparerons les résultats obtenus aux résultats analytiques sur des configurations géométriques connues. Après avoir montré la bonne précision de la méthode $G\theta$, nous étudierons l'influence du maillage sur les résultats obtenus.

Le calcul de G est souvent effectué en utilisant la densité d'énergie de déformation, qui peut être décomposée en trois parties élastique, plastique et thermique. Nous nous intéresserons pour l'instant à la partie mécanique w (élastique w_e et plastique w_p), que nous pouvons exprimer :

$$w = w_e + w_p$$

$$w_e = \int_0^{\varepsilon_e} \sigma d\varepsilon_e = \frac{1}{2} \sigma \varepsilon_e$$

$$w_p = \int_0^{\varepsilon_p} \sigma d\varepsilon_p = \int_0^{\varepsilon_{eq}} \sigma_{eq} d\varepsilon_{eq} \approx \sum_{i=1}^m \left(\frac{\sigma_{eq}^i + \sigma_{eq}^{i-1}}{2} \right) (\varepsilon_{eq}^i - \varepsilon_{eq}^{i-1})$$

où ε_e et ε_p sont les parties élastique et plastique de la déformation ; σ_{eq} est la contrainte équivalente de Von Mises, ε_{eq} la déformation plastique équivalente cumulée, et m le nombre total de pas du calcul élastoplastique.

II.4.1. Implémentation de la méthode $G\theta$

La méthode $G\theta$ présentée au II.2.4.4 a été implémentée dans le code FORGE2 Multimatériaux pour des matériaux élastiques et élastoplastiques. Nous présentons ici la technique utilisée en élasticité.

$$\text{En élasticité pure } G = \int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma \nabla U \nabla \theta) d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \text{Tr}(\sigma \nabla U) \text{div}(\theta) d\Omega$$

Remarque : le champ θ varie uniquement sur la couronne C_{cour} , donc l'intégration peut être faite uniquement sur cette couronne. Mais pour les cas axisymétriques, nous remarquons qu'un terme en θ_r intervient, et il est alors nécessaire d'intégrer à la fois sur les zones C_{int} et C_{cour} .

Il est possible de calculer G pour une propagation de fissure dans différentes directions. Même si cela ne sert pas dans ce chapitre, nous présentons cette technique qui nous servira lors du calcul de la direction de propagation dans le prochain chapitre.

Soit θ , l'angle de la propagation éventuelle de la fissure par rapport à sa direction initiale. On caractérise cette propagation par son vecteur directeur $\theta = (\cos \theta, \sin \theta)$.

Ce vecteur directeur θ introduit une perturbation qui doit être unitaire dans C_{int} , varier continûment de 1 à 0 dans C_{cour} , et qui doit être nulle dans C_{ext} .

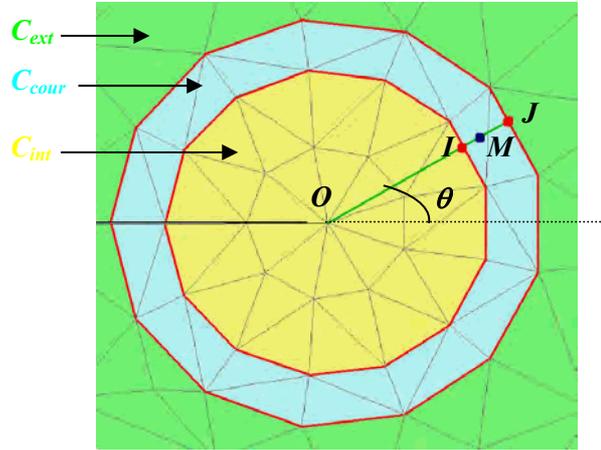


Figure II. 25. Couronnes d'intégration pour la méthode G θ

On note O la pointe de fissure, M le point d'intégration en cours de traitement, et I et J les points d'intersection de la droite OM avec respectivement le contour interne et le contour externe de la couronne C_{cour} . Nous pouvons alors définir le vecteur $\theta(\theta_1, \theta_2)$ avec :

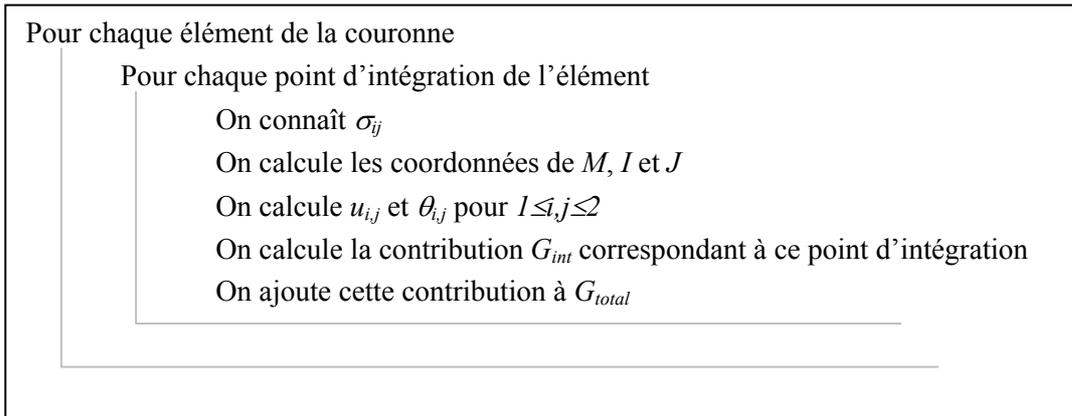
$$\begin{cases} \theta_1 = \left(1 - \frac{IM}{IJ}\right) \cos(\theta) \\ \theta_2 = \left(1 - \frac{IM}{IJ}\right) \sin(\theta) \end{cases}$$

Le calcul du taux de restitution d'énergie est alors réalisé en utilisant tous les éléments de la couronne, et en intégrant en chacun des 7 points d'intégrations de chaque élément :

$$\begin{aligned} G &= \int_{\text{couronne}} \left[\text{Tr}(\sigma \nabla U \nabla \theta) - \frac{1}{2} \text{Tr}(\sigma \nabla U) \text{div}(\theta) \right] dC \\ G &= \sum_{\text{éléments } p_{\text{-int}}} \sum \left\{ (\sigma_{11}u_{1,1} + \sigma_{12}u_{1,2})\theta_{1,1} + (\sigma_{11}u_{2,1} + \sigma_{12}u_{2,2})\theta_{1,2} \right. \\ &\quad \left. + (\sigma_{12}u_{1,1} + \sigma_{22}u_{1,2})\theta_{2,1} + (\sigma_{12}u_{2,1} + \sigma_{22}u_{2,2})\theta_{2,2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} [(\sigma_{11}u_{1,1} + \sigma_{12}u_{1,2} + \sigma_{12}u_{2,1} + \sigma_{22}u_{2,2})(\theta_{1,1} + \theta_{2,2})] \right\} w_{\text{int}} dAire_{\text{int}} \end{aligned}$$

où w_{int} et $dAire_{int}$ représentent respectivement le poids de Gauss, et la surface associés au point d'intégration int .

Tous ces champs étant directement accessibles par un calcul éléments finis, il nous est possible de calculer le taux de restitution d'énergie en n'utilisant qu'un seul maillage et qu'un seul calcul mécanique.



Ainsi, pour chaque direction virtuelle de propagation de la fissure (θ), il est possible de calculer le taux de restitution d'énergie associé. Cela nous servira essentiellement dans le prochain chapitre. Dans ce chapitre, nous calculons le taux de restitution d'énergie associé à une perturbation normale au front de fissure : $\theta=0^\circ$.

II.4.2. Comparaison de différentes méthodes

Afin de déterminer la précision et la robustesse de la méthode $G\theta$, nous allons comparer les résultats obtenus par cette méthode à des résultats analytiques connus pour certaines configurations géométriques. Nous présenterons également les résultats obtenus par deux autres méthodes couramment utilisées : la méthode de différenciation d'énergie, et la méthode de la complaisance.

II.4.2.1. La méthode analytique

Pour des éprouvettes simples, et en élasticité, il est possible de calculer les facteurs d'intensité de contraintes par des formules analytiques qui peuvent être trouvées dans plusieurs ouvrages tels que celui de Murakami [Murakami et al. 1987]. Puis, le taux de restitution d'énergie est calculé à l'aide des formules suivantes :

$$G = \frac{(K_I^2 + K_{II}^2)}{E'} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \quad \text{où} \quad \begin{cases} E' = E & \text{en contraintes planes} \\ E' = \frac{E}{1-\nu^2} & \text{en déformations planes} \\ \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} & \text{est le module de cisaillement} \end{cases}$$

Pour les applications numériques, nous utiliserons les caractéristiques mécaniques d'un acier : $E = 210000$ MPa, et $\nu = 0.3$.

Les éprouvettes auxquelles nous allons nous intéresser sont les suivantes :

- **Eprouvette SEC (Single Edge Crack) :**

Il s'agit d'une plaque semi-infinie, soumise à une contrainte homogène, et possédant une fissure latérale de longueur $2a$. Pour ce type de géométrie, le facteur d'intensité de contraintes pour le mode d'ouverture pure (mode I), vaut :

$$K_I = 1,122 \sigma \sqrt{\pi a}$$

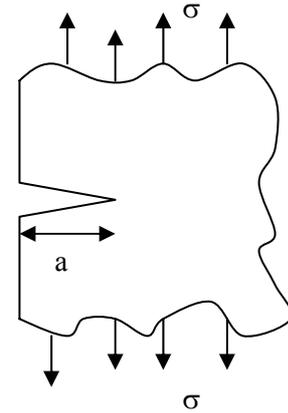


Figure II. 26. Eprouvette Single Edge Crack

- **Eprouvette DEC (Double Edge Crack) :**

Il s'agit d'une éprouvette carrée, de largeur w , comportant deux fissures latérales de longueur a , et soumise à une contrainte homogène. On a alors :

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \left[1 + 0,122 \cos^2 \left(\frac{\pi a}{w} \right) \right] \left[\frac{w}{\pi a} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi a}{w} \right) \right]^{1/2}$$

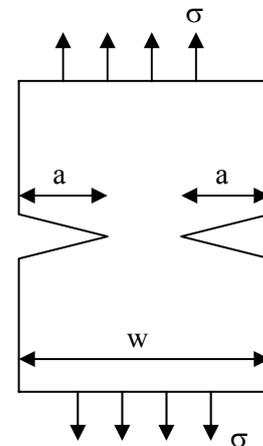


Figure II. 27. Eprouvette Double Edge Crack

- **Fissure centrale inclinée**

On considère une plaque infinie, soumise à une contrainte uniaxiale homogène, et possédant une fissure interne de longueur $2a$. Cette fissure peut être inclinée ou non, et on compare les résultats obtenus pour des inclinaisons de 0° , 30° et 45° .

On a alors :

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \cos^2 \beta$$

$$K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a} \cos \beta \sin \beta$$

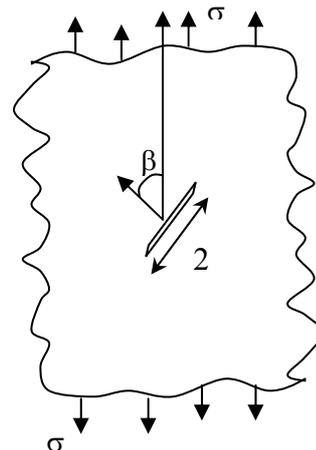


Figure II. 28. Eprouvette contenant une fissure centrale inclinée

II.4.2.2. La méthode de différenciation d'énergie

Cette méthode est basée sur la définition du taux de restitution d'énergie. Elle consiste à faire la différence de l'énergie totale dans la pièce entre un état avec une longueur de fissure a , et un état avec une longueur de fissure $a + \delta a$:

$$G = - \frac{W(a + \delta a) - W(a)}{\delta a}$$

où $W(a)$ représente l'énergie totale du système pour une longueur de fissure a .

Pour cette méthode, il est nécessaire d'effectuer deux maillages distincts : le premier avec une longueur de fissure a et le second avec une longueur de fissure $a + \delta a$. Puis, un calcul mécanique doit être effectué pour chacun des deux maillages.

II.4.2.3. La méthode de la complaisance

Comme nous l'avons vu dans la partie bibliographique, il est possible de relier G à la complaisance C

de la structure :
$$G = \frac{P^2}{2} \frac{\partial C}{\partial A}$$

Sur la figure II.6., le taux de restitution d'énergie est évalué en calculant l'aire située dans le triangle OAC, puisque nous travaillons en déplacement imposé.

Comme pour la méthode précédente, la méthode de la complaisance nécessite deux maillages distincts et deux calculs mécaniques.

II.4.2.4. Epreuve SEC

Pour l'éprouvette Single Edge Crack, nous utilisons le maillage suivant :

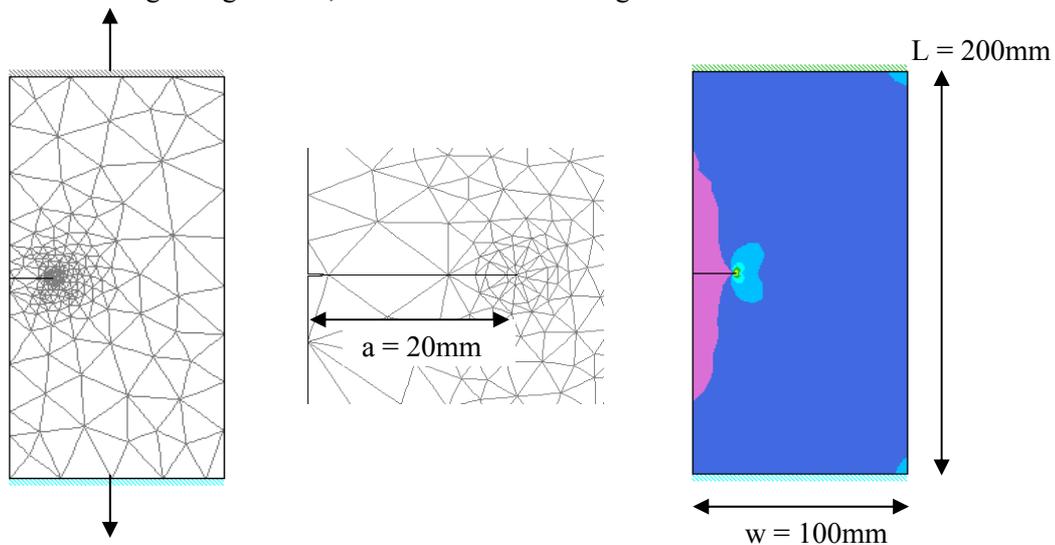


Figure II. 29. Maillage pour l'éprouvette Single Edge Crack

Les résultats obtenus pour les quatre méthodes présentées ci-dessus sont comparés sur le graphe suivant, où le taux de restitution d'énergie G est évalué en fonction du déplacement des mors :

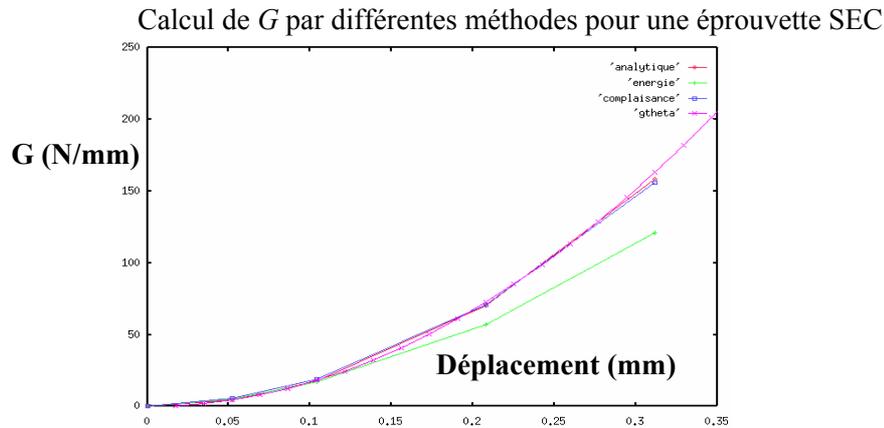


Figure II. 30. G en fonction du déplacement des mors pour une éprouvette SEC

La méthode analytique est censée être la référence dans ce genre de cas, et nous comparons donc les autres résultats par rapport à elle. Si la méthode énergétique semble légèrement moins précise, on remarque que la méthode $G\theta$ et la méthode de la complaisance donnent d'excellents résultats.

Cependant, la méthode de la complaisance (tout comme la méthode énergétique) présente deux inconvénients :

- un temps de calcul long, car l'évaluation de G nécessite deux maillages et deux résolutions mécaniques ;
- une sensibilité par rapport à la longueur de l'extension de fissure δa . En effet, la méthode énergétique étant basée sur une différenciation infinitésimale de l'énergie, elle sera d'autant plus précise que l'extension de fissure sera petite.

Enfin, la méthode $G\theta$ donne d'excellents résultats, tout en ne nécessitant qu'un seul maillage, et un seul calcul mécanique.

II.4.2.5. Eprouvette DEC

Pour l'éprouvette Double Edge Crack, nous ne modélisons que la partie symétrique de la pièce :

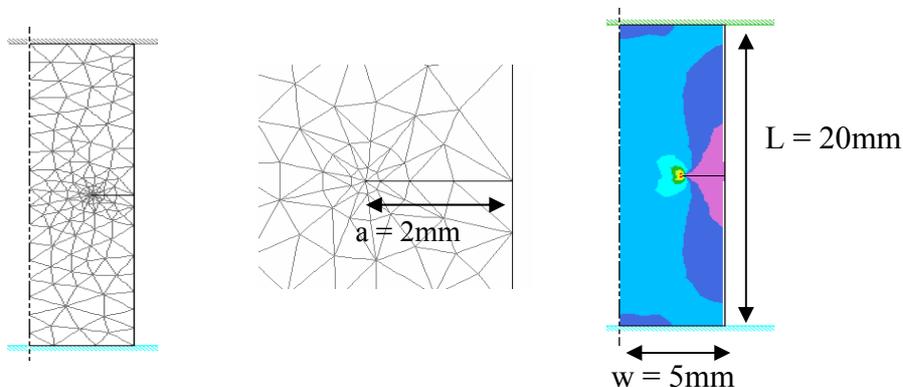


Figure II. 31. Maillage pour l'éprouvette Double Edge Crack

Comme nous pouvons le voir sur la figure suivante, les résultats obtenus pour les 4 méthodes sont très comparables.

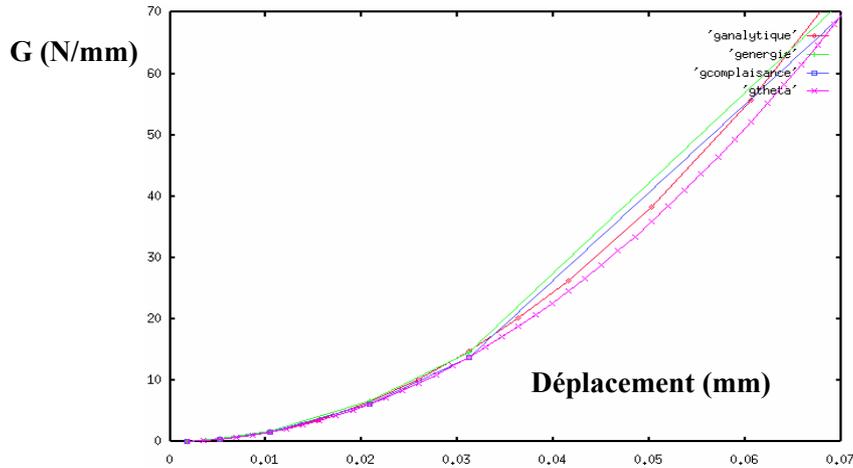


Figure II. 32. G en fonction du déplacement des mors pour une éprouvette DEC

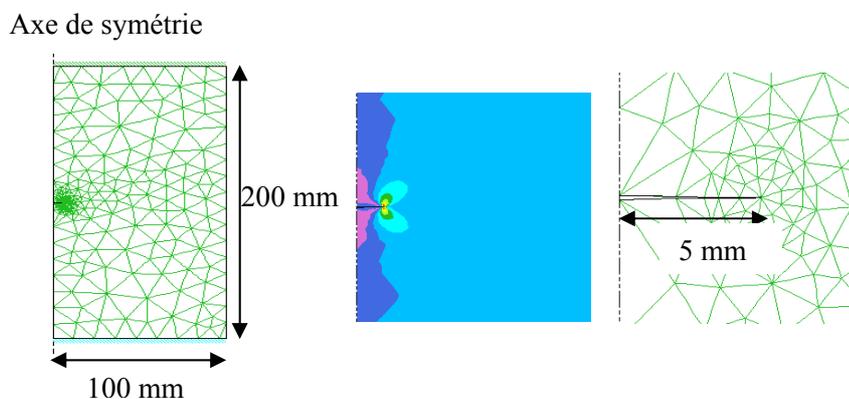
La méthode $G\theta$ semble être légèrement plus précise, mais offre surtout l'avantage d'être beaucoup plus rapide.

II.4.2.6. Fissure centrale inclinée

Ce dernier exemple de comparaison concerne une fissure au centre d'une pièce, et inclinée d'un angle β par rapport à l'axe horizontal. Pour 3 angles d'inclinaison différents, nous comparons le taux de restitution d'énergie obtenu par la formule analytique et par la méthode $G\theta$.

Puis, pour un incrément de déformation donné, nous traçons la courbe représentant le taux de restitution d'énergie en fonction de la direction virtuelle de perturbation infinitésimale définie par l'angle θ .

- Fissure à 0° :



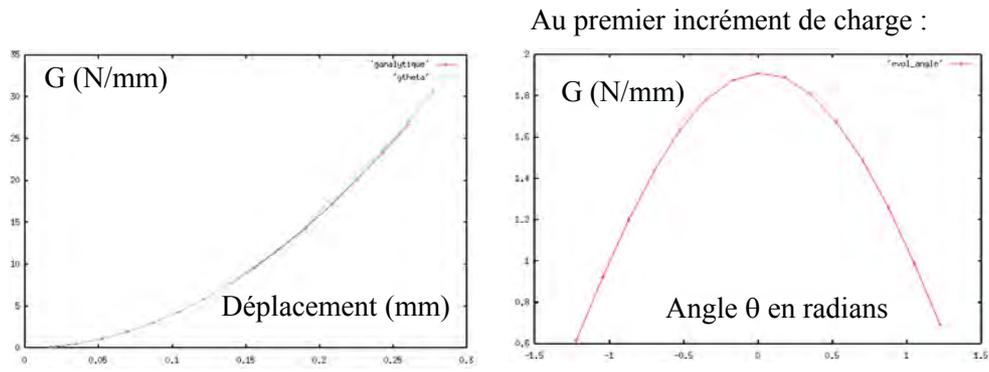


Figure II. 33. G pour une fissure horizontale

- Fissure à 30° :

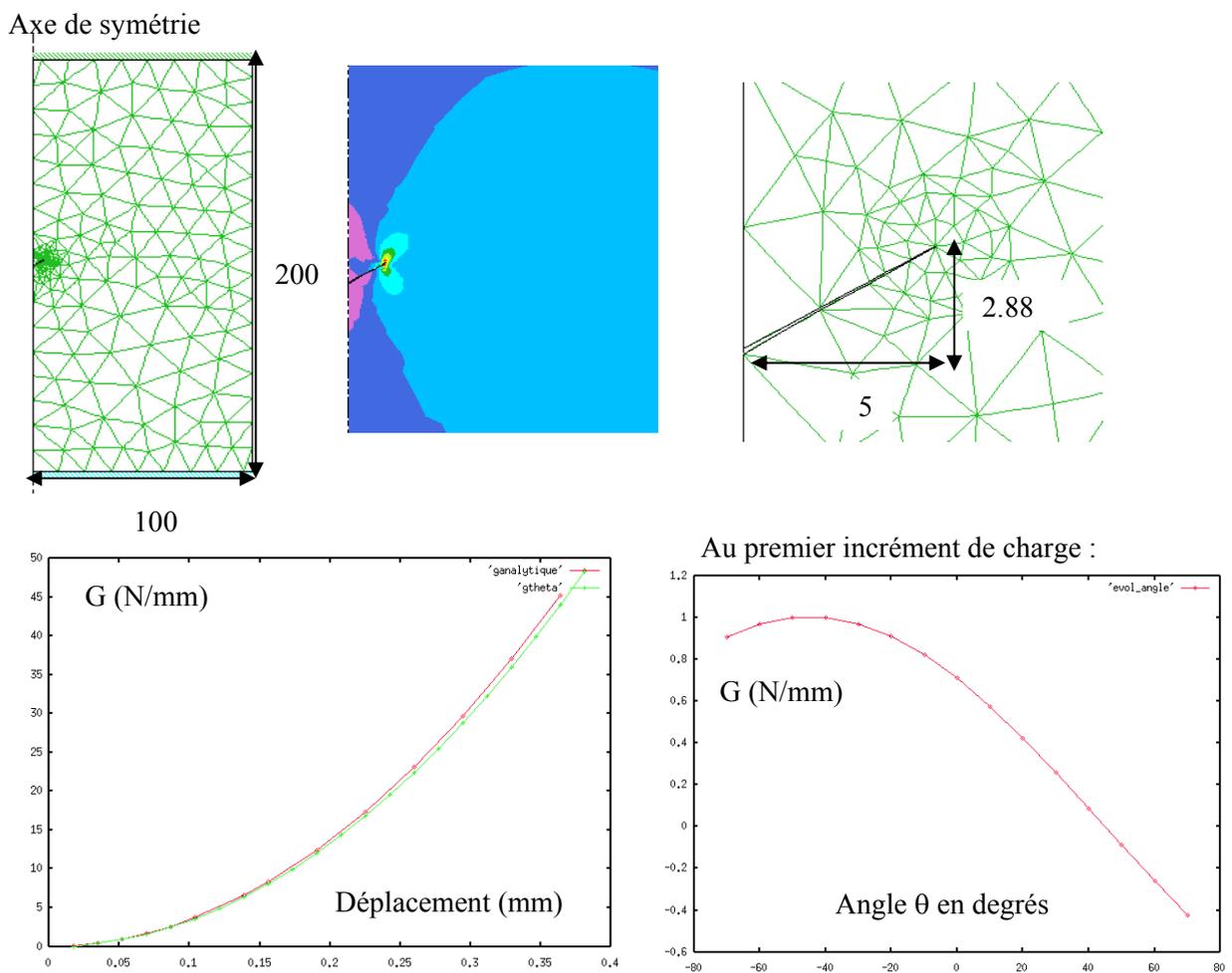


Figure II. 34. G pour une fissure inclinée à 30°

- Fissure inclinée à 45° :

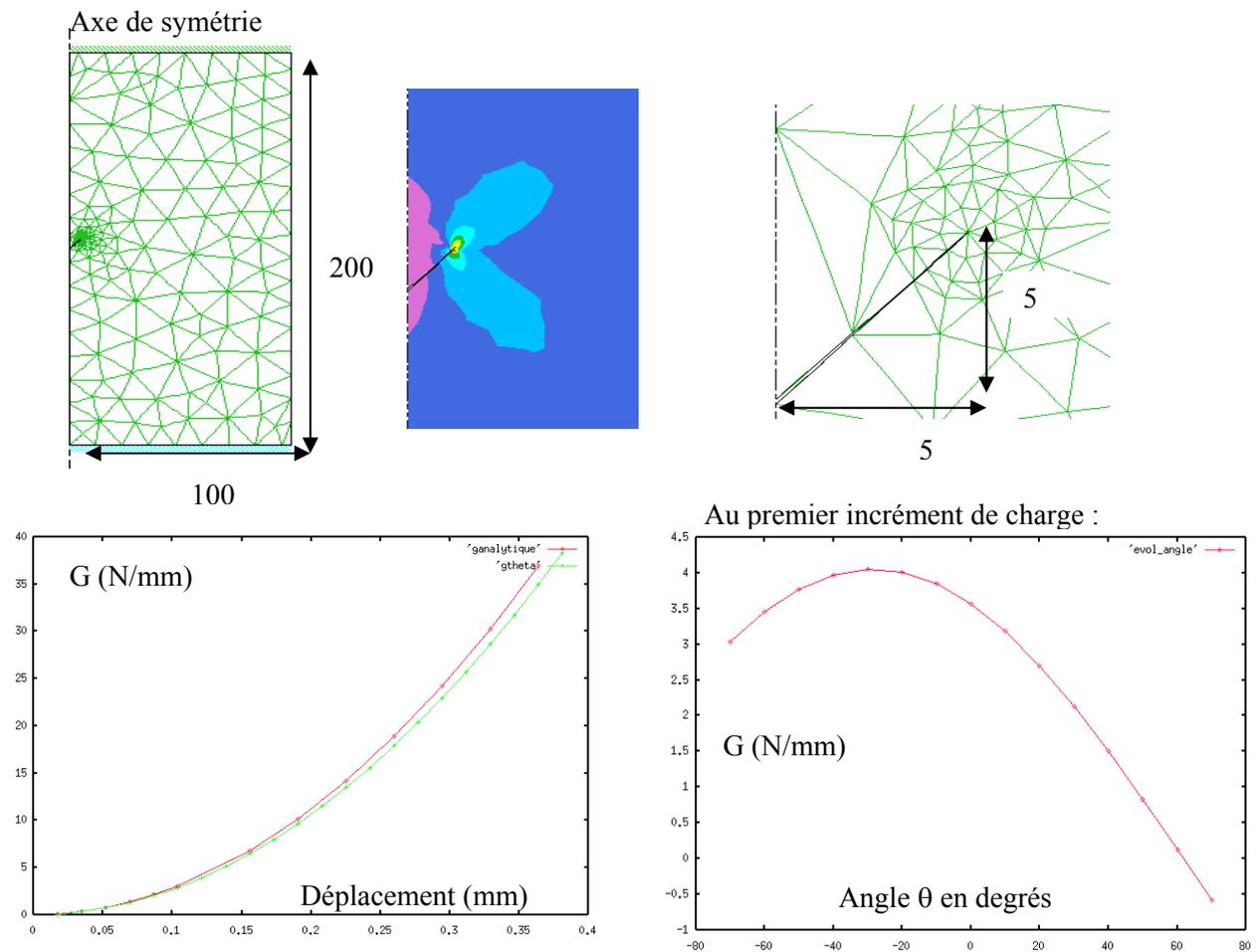


Figure II. 35. G pour une fissure inclinée à 45°

Quel que soit l'angle d'inclinaison de la fissure, les résultats obtenus par la méthode $G\theta$ sont excellents. Mais elle permet également de calculer le taux de restitution d'énergie associé à une direction particulière de perturbation. La courbe $G(\theta)$ correspondante est très régulière, et nous verrons dans le chapitre suivant qu'elle nous permet de déterminer la direction de propagation d'une fissure avec précision.

II.4.3. Influence du maillage pour la méthode $G\theta$

La méthode $G\theta$ semble donner de très bons résultats. La principale difficulté pour utiliser cette méthode est de pouvoir générer une couronne d'éléments en pointe de fissure. On est alors amené à se poser des questions quant à la sensibilité de la méthode par rapport à cette couronne entourant la pointe de fissure, et plus généralement par rapport au maillage. Pour cela, nous avons représenté ci-dessous les résultats obtenus par la méthode $G\theta$, sur une éprouvette DEC et pour trois maillages différents :

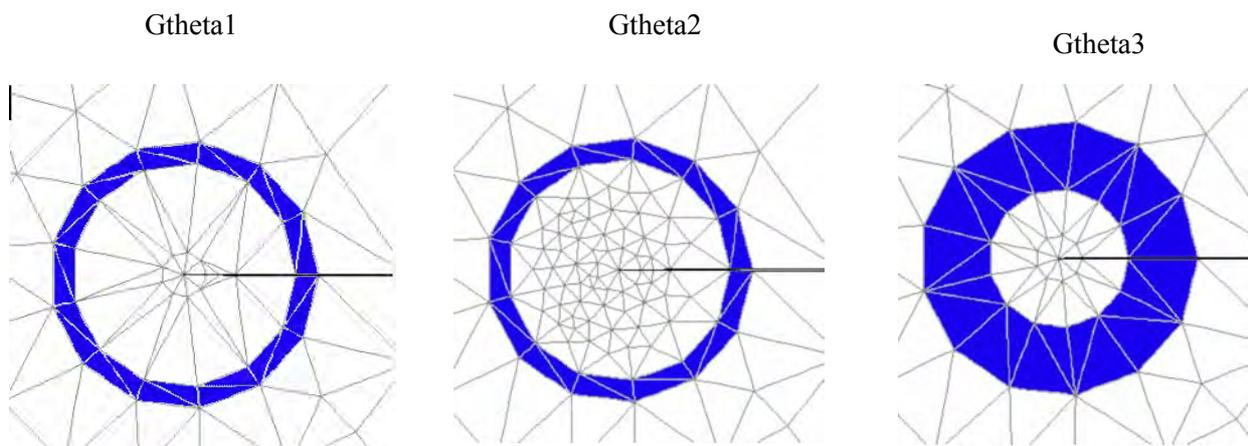


Figure II. 36. 3 maillages différents pour la couronne en tête de fissure

Comme nous pouvons le voir sur le graphe suivant, les résultats obtenus sont tout à fait identiques quel que soit le maillage en pointe de fissure. Pour un déplacement d'outils de 0,02mm, on obtient par exemple des erreurs relatives de l'ordre de 0,12%.

On peut en conclure que la couronne d'intégration n'a pas d'influence sur les résultats obtenus pour un matériau purement élastique.

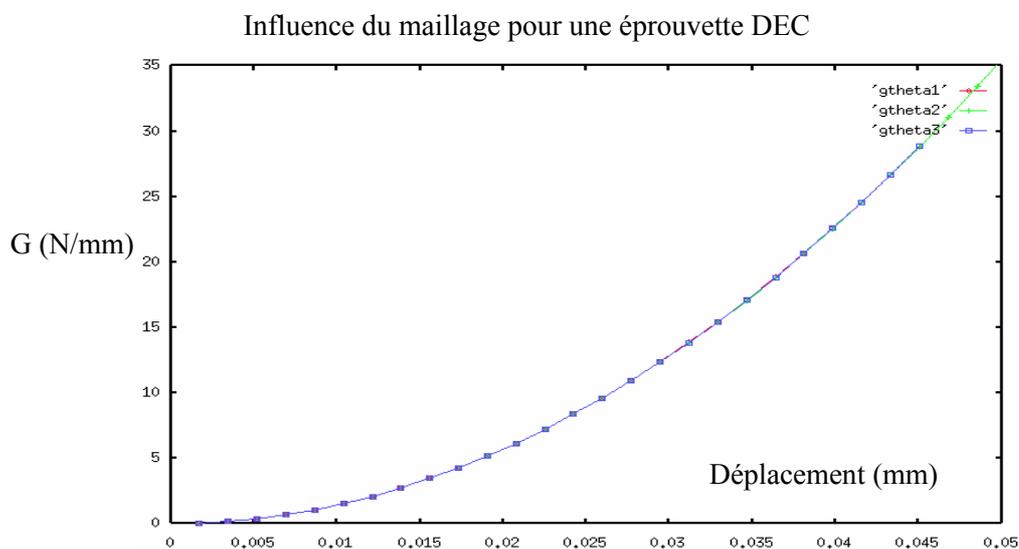


Figure II. 37. Influence du maillage sur le calcul de G

Cependant, il sera intéressant de recommencer ce test de sensibilité en élastoplasticité. En effet, la géométrie et la disposition relative de la couronne par rapport à la zone plastique pourra peut-être avoir son influence.

II.4.4. Bilan

Nous avons calculé le taux de restitution d'énergie pour trois géométries d'éprouvettes différentes, et par 4 méthodes de calcul différentes. En élasticité, la solution analytique est la solution de référence. Cette méthode permet d'accéder rapidement aux facteurs d'intensité de contraintes (et donc au taux de restitution d'énergie) à partir de la contrainte appliquée à l'éprouvette. Mais les solutions analytiques n'existent que pour un nombre limité de géométrie d'éprouvettes et de chargement. C'est pourquoi il est nécessaire de développer des méthodes, utilisant les grandeurs calculées lors d'un calcul éléments finis, permettant de calculer le taux de restitution d'énergie. Trois méthodes ont été proposées. Les méthodes de l'énergie et de la complaisance donnent de bons résultats, mais nécessitent deux maillages et deux calculs mécaniques. La méthode $G\theta$ donne des résultats très précis, tout en ne nécessitant qu'un seul maillage et qu'un seul calcul mécanique. Nous avons également montré que les résultats obtenus étaient indépendants du maillage. De plus, il est possible de rajouter plusieurs termes dans l'expression de calcul de G , afin de traiter des cas plus compliqués : matériau élastoplastique, forces extérieures près de la fissure, propriétés du matériau variables avec la température, cas d'une interface bimétallique...

II.5. APPLICATION A L'ADHERENCE D'UN ASSEMBLAGE COLLE

L'obtention de la meilleure adhésion d'un polymère spécifique à un métal est d'une très grande importance dans de nombreuses applications industrielles. Afin de mesurer et de comparer les niveaux d'adhésion atteints, il est bien souvent nécessaire d'effectuer des essais mécaniques permettant de mesurer des paramètres spécifiques tels que le taux de restitution d'énergie. Nous reprenons ici l'éprouvette de clivage (ou DCB : Double Cantilever Beam) Adhésif/Polymère/Acier présentée dans le premier chapitre (Figure I.25.), et nous nous intéressons à la ténacité de cet assemblage. Ce paramètre est généralement évalué à l'aide de calculs analytiques basés sur les hypothèses simplificatrices de la théorie des poutres. Afin de vérifier ces hypothèses, nous effectuons une simulation numérique de l'essai de clivage en prenant en compte les trois matériaux, et sans faire d'hypothèses simplificatrices [Bay et al. 1999].

II.5.1. Description de l'essai

Parmi les nombreuses approches proposées pour déterminer la ténacité d'un assemblage, et particulièrement le taux de restitution d'énergie, la méthode de la complaisance (rapport de l'ouverture w sur la charge P , $C=w/P$) est basée sur l'équation : $G = \frac{P^2}{2b} \frac{dC}{dc}$, où b est la largeur de l'éprouvette, et C est considérée comme fonction de la longueur de pré-fissure c . Cependant, une telle méthode dépend fortement de la bonne précision sur la détermination de la longueur de pré-fissure c . Or cette détermination, qui nécessite l'utilisation d'un microscope optique mobile, s'avère difficile et peu précise.

Afin de s'affranchir de cette difficulté, Arnott et Kindermann [Arnott et al. 1995] ont proposé un essai à vitesse constante sur une éprouvette DCB pré-fissurée sur une longueur c_0 (Figure II.38.a). L'avantage de leur méthode provient du fait qu'ils déterminent le taux de restitution d'énergie en fonction du déplacement du point de chargement w , plutôt que de la longueur de fissure c . Lors d'un tel essai, deux étapes peuvent être distinguées (Figure II.38.b) :

- Lors de la première étape, la force croît linéairement avec l'ouverture w (partie 1 sur la figure II.38.b). Ce qui signifie que le taux de restitution d'énergie de l'éprouvette avec une pré-fissure de longueur c_0 est trop faible pour amorcer la propagation (on se situe en dessous de la courbe de résistance). On peut alors relier la force appliquée à l'ouverture à l'aide de la raideur de l'éprouvette $S=S(c_0)$ ou de sa complaisance $C=C(c_0)$: $P = S.w = \frac{w}{C}$.

Dans ce cas, l'énergie élastique W_e stockée dans l'éprouvette pour une longueur de pré-fissure c

est donnée par : $W_e = \frac{1}{2} Pw = \frac{w^2}{2} S(c)$.

- Dans la seconde étape, la force appliquée décroît rapidement tandis que l'ouverture et la longueur de fissure augmentent conjointement. Le taux de restitution d'énergie peut alors être calculé à chaque instant par la relation :

$$G = -\frac{1}{b} \frac{\delta W_e(c, w)}{\delta c} = -\frac{w^2}{2b} S'(c) = \frac{P^2}{2b} C'(c)$$

où S' (respectivement C') est la dérivée de la raideur (respectivement la complaisance) par rapport à la longueur de fissure c .

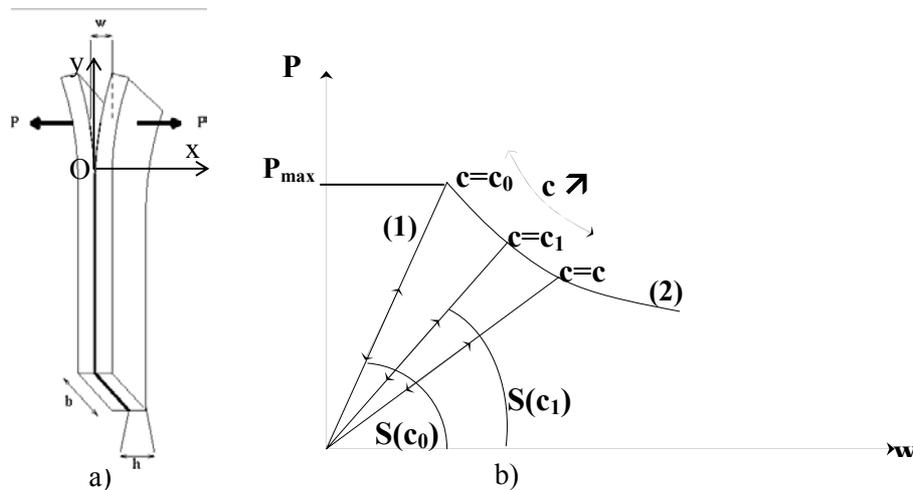


Figure II. 38. (a) Eprouvette DCB – (b) courbe force-déplacement d'un chargement à vitesse constante

Ainsi, la valeur du taux de restitution d'énergie critique G_c , caractérisant l'amorçage pour une pré-fissure de longueur c_0 , peut être déterminée à partir de la complaisance $C(c_0)$ par trois méthodes.

II.5.1.1. La méthode expérimentale

Cet essai de clivage a été réalisé sur plusieurs éprouvettes, et avec des longueurs de pré-fissures différentes [Scotto-Sheriff 1998]. Pour chaque essai une courbe Force/Déplacement, semblable à celle proposée sur la figure II.38.b, a été enregistrée. La première partie de cette courbe (pente élastique) nous permet de déterminer la complaisance $C(c_0)$, ainsi que la force maximale à rupture $P_{max}(c_0)$. Le taux de restitution critique $G_c(c_0)$ est alors calculé par la relation :

$$G_c(c_0) = \frac{P_{max}^2(c_0)}{2b} \frac{dC(c_0)}{dc}$$

II.5.1.2. La méthode analytique

Comme pour la plupart des méthodes analytiques, il nous faut faire certaines hypothèses pour obtenir une solution analytique. Nous considérons ici une éprouvette constituée de polymère et d'acier d'épaisseurs respectives h_p et h_s . Nous supposons que le déplacement du point de chargement w est négligeable devant l'épaisseur de l'adhérent, qui est lui même négligeable devant la longueur de fissure c : $w \ll h_p + h_s \ll c$. Nous supposons de plus que les déformations sont purement élastiques, à l'exception de la pointe de fissure où l'on admet une plasticité confinée. En s'appuyant sur la théorie des poutres minces, et en faisant l'hypothèse des petites déformations et des petits déplacements, on peut alors exprimer la complaisance de la structure en fonction de la longueur de fissure c , du module

d'Young de l'adhérent E et du moment d'inertie I de la poutre : $C(c_0) = \frac{2c_0^3}{3EI}$.

Comme les rapports des modules d'Young et des épaisseurs du polymère sur l'acier sont plus petits que 1, on montre que le comportement mécanique de l'adhérent est, au 1^{er} ordre, celui de l'acier [Scotto-Sheriff 1998]. Le moment d'inertie est obtenu grâce aux hypothèses initiales, et il peut

s'exprimer : $I \approx \frac{bh_s^3}{12}$, où h_s est la hauteur de l'acier.

Après simplifications, on accède au taux de restitution d'énergie critique par la relation :

$$G_c(c_0) = \frac{(c_0 P_{\max}(c_0))^2}{bE_s I}$$

La principale limite d'un tel modèle est qu'il ne prend pas en compte les déformations du matériau après la pointe de fissure ($y < 0$ sur la figure II.38.a). Les résultats obtenus sont alors très peu précis pour de petites longueurs de pré-fissures. En s'appuyant sur le modèle de Kanninen, Maugis [Maugis 1999] utilise le modèle de fondation élastique de Wrinkler pour décrire la distribution de la contrainte normale le long de l'axe de symétrie. On peut alors se ramener à des résultats plus précis sur la complaisance calculée pour de petites pré-fissures en l'exprimant comme une fonction polynomiale de degré 3 de la longueur de fissure réduite $c^* = c/h$. Nous ne rentrons pas dans les détails de cette approche, qui est exposée dans [Bay et al. 1999] et [Scotto-Sheriff 1998].

II.5.1.3. La méthode numérique

La méthode numérique consiste à calculer le taux de restitution d'énergie en se basant sur sa définition : l'énergie nécessaire pour faire progresser la fissure d'une longueur unité. Nous avons donc réalisé plusieurs simulations numériques correspondant à plusieurs longueurs de pré-fissures (Figure II.39.). La simulation tient compte des rhéologies exactes des différents matériaux et ne présente donc pas d'hypothèses simplificatrices telles que celles introduites pour l'approche analytique.

Connaissant la force à rupture (déterminée de façon expérimentale) pour une éprouvette de longueur de pré-fissure c_0 , on détermine l'énergie $W(c_0)$ stockée dans l'éprouvette pour cette force. On effectue le même calcul pour une pré-fissure de longueur $c_0 + dc$, et on détermine finalement le taux de restitution d'énergie par la relation :

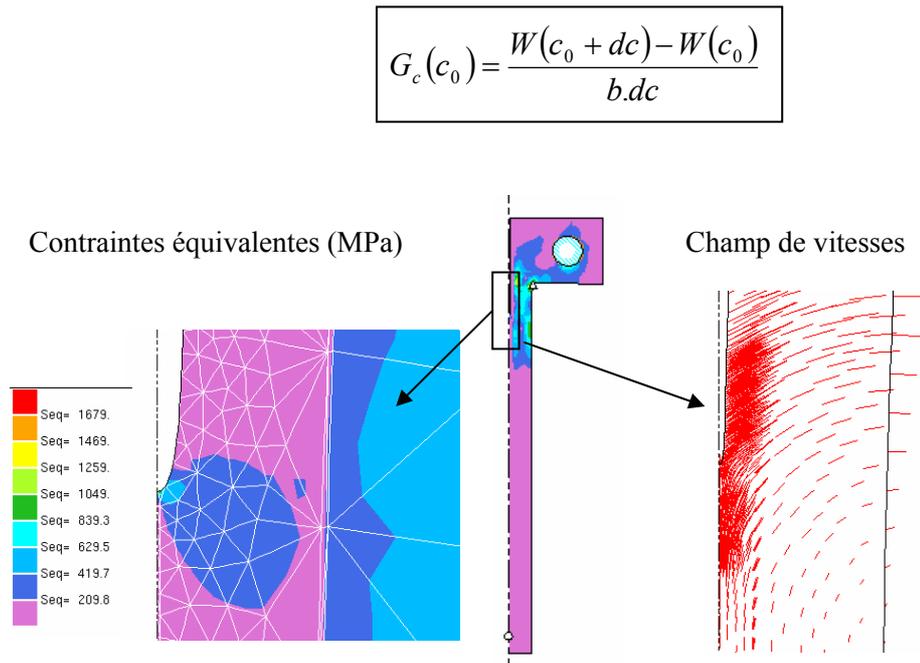


Figure II. 39. Contraintes équivalentes et champ de vitesses en pointe de fissure

II.5.2. Résultats

Nous allons comparer dans cette partie les résultats obtenus par les différentes méthodes. Nous montrerons d'abord les écarts importants qui apparaissent sur le calcul de la complaisance, avant de nous intéresser au taux de restitution d'énergie.

II.5.2.1. Complaisance

Les courbes expérimentales obtenues par Scotto-Sheriff [Scotto-Sheriff 1998] mettent bien en évidence les deux étapes intervenant dans l'essai de clivage. La première étape nous permet de mesurer la complaisance de l'assemblage à 10% près. Cette complaisance est comparée dans le tableau II.1. à celle obtenue de façon analytique pour différentes longueurs de pré-fissures dites nominales :

Longueurs nominales de pré-fissures c (mm)	5	10	15	27,5
Complaisances expérimentales C_{exp} ($10^3 m \cdot MN^{-1}$)	53	77	111	450
Complaisances analytiques C_{ana} ($10^3 m \cdot MN^{-1}$)	2,5	20	67	410

Tableau II. 1. Complaisances expérimentales et analytiques

On remarque que les complaisances expérimentales sont bien supérieures aux complaisances analytiques, surtout pour de petites longueurs de pré-fissures. Cela signifie que les longueurs de pré-fissures tendraient à être supérieures aux longueurs nominales. Cependant, la méthode de préparation des échantillons entraînerait plutôt une diminution de cette longueur.

De manière à analyser ce phénomène, plusieurs simulations numériques ont été effectuées, et les complaisances obtenues ont été comparées aux complaisances analytiques (tableau II.2).

Longueurs nominales de pré-fissures c (mm)	0	2	4	5	6	8	10	15	20	25	27,5
Complaisances numériques C_{num} ($10^3 m.MN^{-1}$)	34	45	57	65	76	118	159	357	714	1293	1667
Complaisances analytiques C_{ana} ($10^3 m.MN^{-1}$)	0	0,1	1,3	2,5	3,4	10	20	67	159	311	410

Tableau II. 2. Complaisances numériques et analytiques

Les complaisances numériques sont elles aussi bien supérieures aux complaisances analytiques. Le rapport de complaisance diminue avec la longueur de pré-fissure, mais il reste cependant très important. Ainsi, les hypothèses utilisées dans le cadre de l'approche analytique sont trop sévères pour ce type d'étude.

La complaisance numérique est supérieure à celle obtenue de façon expérimentale. Cela signifie que la longueur de pré-fissure réelle est plus petite que la longueur nominale, c'est-à-dire celle que l'on avait voulu réaliser expérimentalement. Cette différence augmente avec des longueurs de fissures élevées. Cela s'explique par un phénomène de cicatrisation qui permet le recollement d'une partie de la fissure durant la dernière partie de l'élaboration de l'éprouvette [Scotto-Sheriff 1998].

II.5.2.2. Taux de restitution d'énergie

Le but étant d'évaluer la ténacité d'un tel assemblage, nous avons déterminé le taux de restitution d'énergie critique pour différentes longueurs de pré-fissures. Il est obtenu de façon expérimentale en traçant la courbe de l'ouverture w en fonction de l'inverse de la force au carré P^{-2} . Cette courbe, linéaire par morceaux [Scotto-Sheriff 1998], nous permet de remonter au taux de restitution d'énergie critique G_c^{exp} , en calculant la pente. Les résultats obtenus pour des longueurs de pré-fissures comprises entre 5 et 15mm sont les suivants :

$$65 \leq G^{exp} (J.m^{-2}) \leq 102$$

Le calcul numérique de G est obtenu en traçant la courbe de l'énergie stockée dans l'éprouvette en fonction de l'effort appliqué pour différentes longueurs de pré-fissures (Figure II.40.). Pour chacune de ces courbes, on note l'énergie W correspondant à la force à la rupture P_{max} obtenue de façon expérimentale. La figure II.40. montre la détermination de cette énergie pour des pré-fissures de 5, 10 et 15mm.

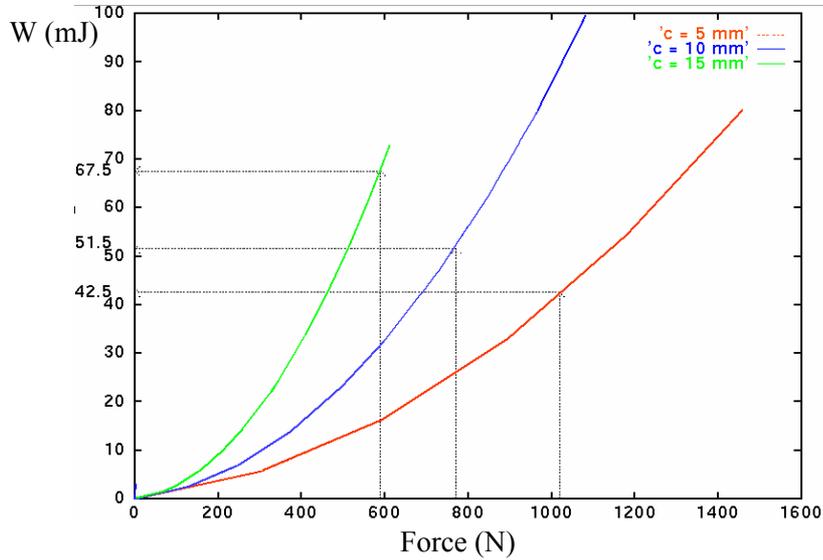


Figure II. 40. Courbe énergie/force pour différentes longueurs de pré-fissures

Les énergies ainsi déterminées sont stockées dans le tableau II.3..

c (mm)	P_{max} (N)	W (mJ)
5	1000~1030	41,1~43,8
10	750~800	47,8~55,2
15	580~600	65~70

Tableau II. 3. Force à la rupture et énergie totale du système pour différentes longueurs de pré-fissures

Un simple calcul de différenciation nous permet alors de déterminer la valeur du taux de restitution numérique :

$$G^{num} \approx -\left(\frac{W_e(c + \delta c) - W_e(c)}{b\delta c}\right) \text{ et donc } 60 \leq G^{num} (\text{J.m}^{-2}) \leq 106$$

II.5.3. Bilan

Le but de cette application était de calculer la ténacité d'un assemblage collé. Pour cela, nous avons comparé les résultats obtenus par trois méthodes : expérimentale, analytique et numérique.

L'étude sur la complaisance est très intéressante car elle montre l'importance de l'approche numérique dans ce type d'applications. En effet, la modélisation numérique ne fait intervenir aucune hypothèse simplificatrice. Elle permet d'invalider les hypothèses (trop sévères) de base de l'approche analytique (surtout pour de petites longueurs de pré-fissures). Mais elle a également permis de mettre en évidence les erreurs de longueurs de pré-fissures réalisées expérimentalement. Les valeurs nominales étaient supérieures aux valeurs de pré-fissures réelles à cause du recollement d'une partie de la pré-fissure.

Enfin les résultats obtenus pour le calcul expérimental et numérique du taux de restitution d'énergie sont tout à fait comparable. Rappelons cependant que la méthode numérique de différenciation de l'énergie utilisée n'est peut-être pas la plus précise. Il serait intéressant d'appliquer la méthode $G\theta$ à cette application. Malheureusement, les difficultés numériques (couronne d'intégration coupant les interfaces entre plusieurs matériaux ainsi que l'axe de symétrie) ne nous ont pas encore permis de réaliser un tel calcul.

II.6. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons présenté les outils numériques nécessaires à une modélisation précise d'une fissure dans un maillage. Nous avons montré les singularités que pouvait engendrer une telle fissure. La bonne maîtrise de la structure du maillage est indispensable si l'on veut obtenir un calcul précis des champs mécaniques. Pour cela, nous avons montré l'intérêt des éléments concentriques et des éléments singuliers à la pointe de la fissure.

L'étude énergétique d'une pièce fissurée s'effectue à l'aide du taux de restitution d'énergie. Il existe de nombreuses façons de calculer ce paramètre. Parmi ces méthodes, la méthode $G\theta$ est à la fois rapide, précise, et facilement généralisable. Cependant, son utilisation nécessite la présence d'une couronne d'éléments entourant la pointe de fissure. Encore une fois, la technique de maillage que nous avons mis en place permet de générer facilement cette structure particulière en pointe de fissure. A l'aide de cette couronne d'éléments, nous avons montré la bonne précision de la méthode, ainsi que son indépendance vis-à-vis du maillage.

Enfin, nous avons choisi d'étudier la ténacité d'un assemblage collé adhésif/polymère/acier à travers sa réponse énergétique à une sollicitation mécanique. Le calcul numérique du taux de restitution d'énergie a été comparé avec succès au résultat expérimental. Mais la simulation a surtout permis de mettre en évidence les limitations de l'approche analytique pour ce type d'essai, ainsi que les erreurs qui peuvent être commises lors de l'approche expérimentale.

Après avoir ainsi appliqué la technique de maillage multi-domaines à l'étude d'une fissure statique, il nous a semblé intéressant de poursuivre par la propagation quasi-statique d'une fissure dans un maillage.