

Analyse de robustesse des correcteurs et Contrôle actif de modèles identifiés

Nous allons étudier dans ce chapitre la robustesse des correcteurs déterminés précédemment. Parmi les outils dont on dispose, on trouve la technique de la valeur singulière structurée (VSS) destinée pour l'analyse de stabilité de robustesse des systèmes LTI soumis à des incertitudes ayant une structure particulière. La valeur singulière structurée, introduite par Doyle, est un outil puissant en commande robuste. La détermination de ce paramètre a été étudié par plusieurs chercheurs tels que Peter M. Young, Matthew P. Newlin et John C. Doyle dans [42] [43]. Young et Newlin ont implémenté un algorithme de calcul efficace de la VSS dans Matlab®, logiciel édité par Mathworks, que nous allons utiliser ici pour notre analyse.

1. Correction du modèle du système à 3 modes

Pour tester à nouveau l'efficacité des correcteurs déterminés précédemment à partir du modèle du système à deux modes, on a choisi de calculer les fonctions de transfert H_w et H_u en gardant les trois premiers modes. On a comparé par la suite la réponse du nouveau modèle obtenu en présence des correcteurs H_∞ et LQG calculés avec l'ancien modèle du système réduit à deux modes (Figure 89).

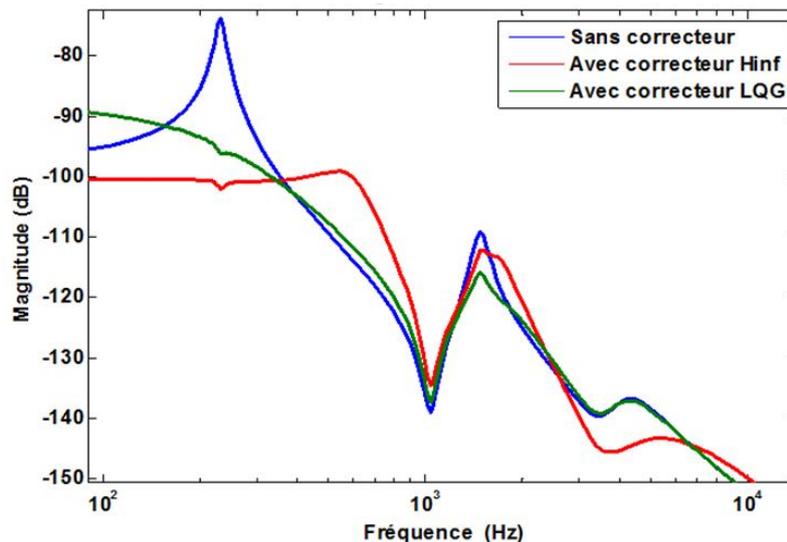


Figure 89 Réponses fréquentielles du système trois modes avec et sans correcteurs à deux modes

Les correcteurs amortissent les trois pics de résonance en dépit du fait qu'ils soient configurés pour agir seulement sur les deux premiers modes du système. En effet, ce sont les deux premiers modes qui impactent le plus la réponse du système, surtout dans les plages de fréquence d'intérêt pour notre système. La Figure 90 montre les diagrammes de Bode des deux fonctions de transfert du système H_w et H_u calculées avec 7 modes dont les deux premiers sont visiblement les plus résonnants. Les essais de contrôle avec ces correcteurs prouvent leur effet amortissant puisqu'ils atténuent bien les vibrations du système usinant bien que celui-ci ait en théorie une infinité de modes. Ensuite, pour prouver davantage la robustesse de ces correcteurs, on a testé par simulation les correcteurs LQG et H_∞ obtenus à partir de l'ancien modèle d'état (deux modes) sur le système à trois modes pour une opération de fraisage à 2800 tr/min, avec un outil à 2 dents de diamètre 16 mm, une avance de 0.05 mm/tr/dent et un engagement axial de 0.5 mm.

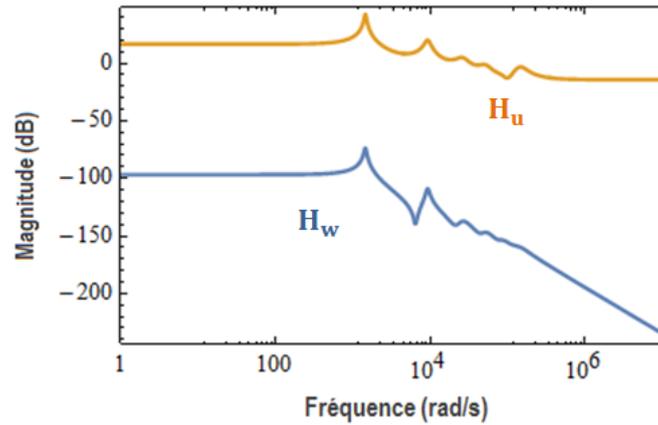


Figure 90 Diagramme de Bode des deux fonctions de transfert du système

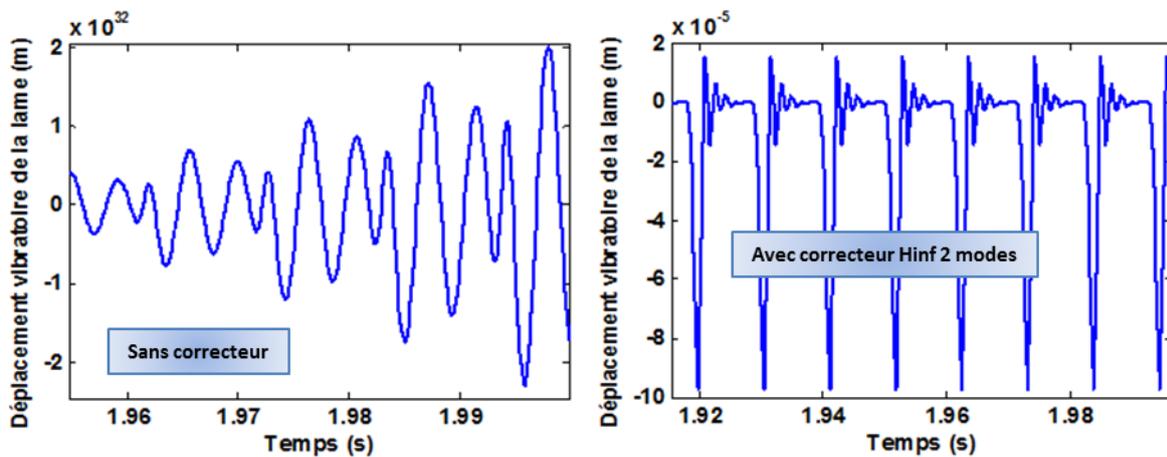


Figure 91 Contrôle actif du système à trois modes en fraisage via le correcteur H_∞ à deux modes

Les correcteurs réussissent à ramener le système usinant à un état stable avec une atténuation plus importante avec le correcteur H_∞ qu'avec le correcteur LQG d'après les réponses temporelles du système usinant (Figure 91 et Figure 92).

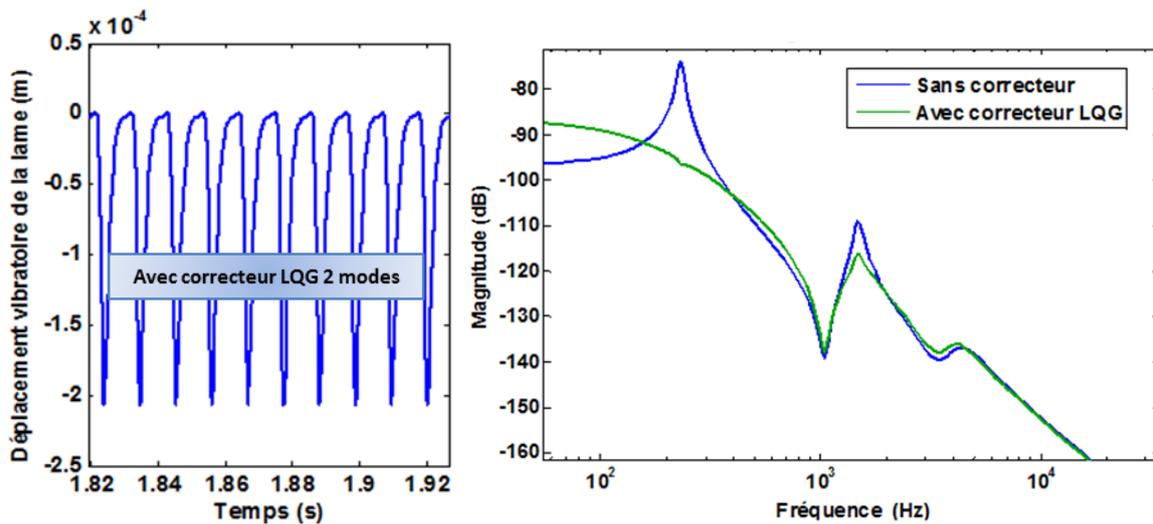


Figure 92 Contrôle actif du système à trois modes avec le correcteur LQG à deux modes et son diagramme de Bode

2. Robustesse

Les correcteurs robustes sont ceux qui garantissent un niveau de performance convenable en présence d'incertitudes bornées [44]. L'étude de robustesse des contrôleurs déterminés précédemment nécessite alors d'intégrer des incertitudes dans le modèle mathématique de notre système pour prendre en compte des inévitables erreurs de modélisation. Ces incertitudes doivent être considérées puisqu'on peut avoir de fortes variabilités dans le processus de coupe, mais aussi en raison de la présence des non linéarités du modèle de coupe ou de celui de l'actionneur qu'on ne prend pas en compte dans nos modèles. Pour compléter la liste de sources d'incertitudes, du bruit vient s'ajouter au niveau des mesures ou de la consigne mais aussi un phénomène physique qui n'est pas considéré à l'étape de modélisation du système. Il s'agit du phénomène de la torsion qui apparaît pendant l'usinage de l'éprouvette surtout aux extrémités où il est le plus intense à la fréquence de 500 Hz (Figure 93).

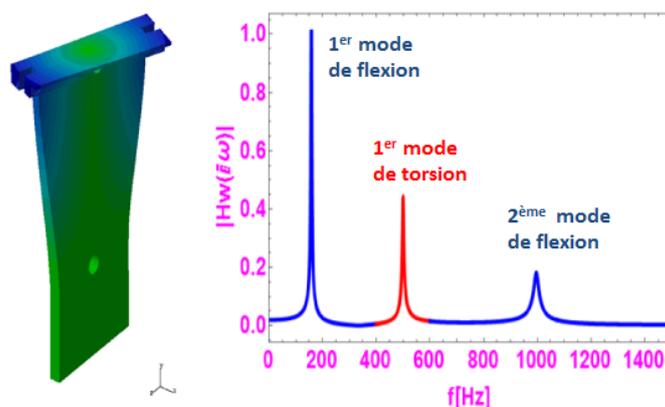


Figure 93 Mode de torsion du système

La démarche d'analyse de robustesse consiste à tester des lois de commande construites à partir du modèle nominal du système, sur des systèmes issus de ce modèle nominal, auquel on rajoute par la suite différents types d'incertitudes. Il est indispensable de disposer de correcteurs robustes qui seront capables de travailler correctement dans un environnement hostile et en présence de variations inhérentes aux processus réels.

Avant de commencer l'étude de robustesse, on rappelle la notion de Transformation Linéaire Fractionnaire (Figure 94) qui est indispensable pour cette étude. Il s'agit de la fonction de transfert d'un système comprenant deux sous-systèmes reliés par boucle de retour, obtenue par une manipulation simple des éléments des matrices de transfert de ceux-ci.

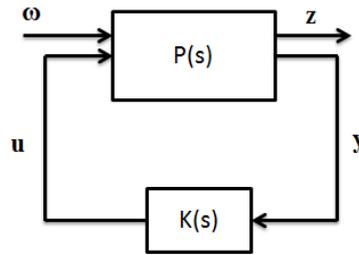


Figure 94 Transformation Linéaire Fractionnaire

On a :

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} \omega(s) \\ u(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad (1)$$

Le système est bouclé avec le signal de commande u :

$$u(s) = K(s)y(s) \quad (2)$$

On obtient après développement, la relation entre les perturbations ω et la sortie du système z à contrôler. C'est la Transformée Linéaire Fractionnaire de P et K :

$$z(s) = F_l(P, K) \omega(s) \\ F_l(P, K) = P_{11} + P_{12} K(I - P_{22}K)^{-1} P_{21} \quad (3)$$

Une représentation générale d'un système soumis à des incertitudes de modèle est donnée sur la Figure 95. Toutes les incertitudes de modèle sont rassemblées dans la matrice Δ .

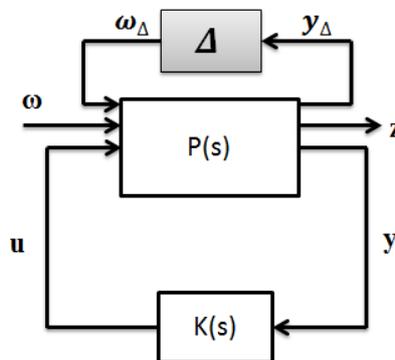


Figure 95 Système incertain

La première étape dans l'étude de robustesse consiste à construire le système $M(s)$ équivalent à l'ensemble $P(s)$ & $K(s)$ (Figure 96). $M(s)$ représente la partie connue de la modélisation du système mécanique avec correcteur alors que Δ désigne la partie incertaine et/ou inconnue de notre modèle.

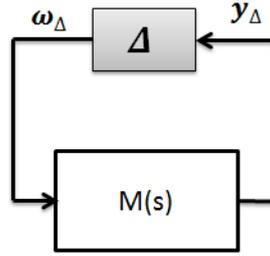


Figure 96 Modélisation du système pour l'analyse de Robustesse

Généralement, les erreurs de modélisation sont regroupées en deux grandes classes suivant la structure de la matrice Δ ; les incertitudes structurées et les incertitudes non structurées. La matrice Δ du premier type d'incertitudes possède une structure particulière puisqu'elle est diagonale alors que celle du deuxième type est un bloc complexe plein, et donc n'a pas de structure particulière. Dans le premier cas d'incertitudes mais aussi dans le cas où on ne tient pas compte d'une éventuelle structure de la matrice Δ , on utilise pour l'analyse de robustesse le *théorème du petit gain* qui dit :

Ayant M et Δ stables (tous les pôles à partie réelle négative), le système de la Figure 96 est stable pour tout Δ telle que $\|\Delta\|_\infty < \alpha$ si et seulement si $\|M\|_\infty \leq \alpha^{-1}$.

Avant de parler de l'autre type d'incertitudes, on va définir la notion de valeur singulière structurée. Soit $\underline{\Delta}$ l'ensemble des matrices complexes possédant la même structure que les incertitudes structurées Δ :

$$\underline{\Delta} = \left\{ \Delta = \text{diag} \left\{ \Delta_i, \delta_j I_{r_j} \right\} \in \mathbb{C}^{k,k}, \Delta_i \in \mathbb{C}^{k_i, k_i}, \delta_j \in \mathbb{C} \right\} \quad (4)$$

La valeur singulière structurée de M relative à l'ensemble $\underline{\Delta}$, notée VSS, est définie par :

$$\begin{aligned} \mu_{\underline{\Delta}}(M) &= \left(\inf_{\Delta \in \underline{\Delta}} \left(\overline{\sigma(\Delta)} : \det(I - \Delta M) = 0 \right) \right)^{-1} \\ \mu_{\underline{\Delta}}(M) &= 0 \text{ si } \forall \Delta \in \underline{\Delta} \det(I - \Delta M) \neq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

Dans le cas du deuxième type d'incertitudes, on utilise plutôt le principe de la μ analyse qui repose sur la notion de valeur singulière structurée. Il s'agit du *théorème du petit gain généralisé* :

Ayant M stable, le système de la Figure 96 est stable pour toute incertitude Δ structurée et normalisée telle que $\|\Delta\|_\infty < \alpha$ si et seulement si $\mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega)) \leq \alpha^{-1}, \forall \omega$.

Étant donné que la valeur singulière structurée $\mu_{\underline{\Delta}}(M(j\omega))$ n'est pas si simple à déterminer, on choisit parfois de calculer la valeur singulière maximale $\bar{\sigma}(M(j\omega))$ pour avoir une idée sur le domaine d'incertitudes qui ne détériorent pas la stabilité du système. En effet, on a la propriété suivante : $\mu(M(j\omega)) \leq \bar{\sigma}(M(j\omega))$ [29].

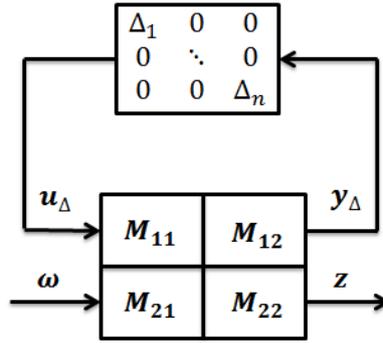


Figure 97 Modélisation du système incertain pour le calcul de sa VSS

$$\begin{bmatrix} y_{\Delta} \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}(s) & M_{12}(s) \\ M_{21}(s) & M_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\Delta} \\ \omega \end{bmatrix} \quad (6)$$

On précise qu’au moment d’utiliser les deux méthodes d’analyse de robustesse (théorème du petit gain et μ analyse), on remplace $M(s)$ par $M_{11}(s)$ quelque soit le type de structure des incertitudes qu’on traite (Figure 97).

La robustesse des correcteurs est naturellement mise à l’épreuve puisqu’il s’agit de contrôler une structure continue qui a donc une infinité de degrés de liberté. Or, le correcteur est évidemment calculé à partir du modèle d’état de cette structure qui provient de la décomposition modale du déplacement de celle-ci tronquée à un nombre fini de modes. Ceci fait donc apparaître l’instabilité des modes résiduels qui ne sont pas pris en compte. On trouve le phénomène de Spillover défini par le transfert d’énergie vers des modes élevés qui ne sont pas pris en compte dans le modèle. Il y a deux types de Spillover qui peuvent intervenir séparément ou même les deux en même temps. Le premier, appelé Spillover d’observation, apparaît lorsque les signaux observés du modèle réduit sont pollués par les modes d’ordre supérieur alors que le deuxième, Spillover de contrôle, a lieu lorsque ceux-ci sont excités par le contrôle. On obtient instabilité par spillover quand les deux types sont réunis.

Il est à noter qu’on peut appliquer le théorème du petit gain ainsi que la μ analyse (théorème du petit gain généralisé) dans les deux types d’analyse de robustesse : robustesse aux dynamiques négligées et robustesse paramétrique.

a) Robustesse aux dynamiques négligées

Cette méthode consiste à intégrer de l’incertitude dans les deux fonctions de transfert H_u et H_w qui décrivent la dynamique de notre système. On obtient alors deux nouvelles fonctions de transfert perturbées notées H_{upert} et H_{wpert} (Figure 98 a). On obtient alors un modèle incertain de notre système. On considère les fonctions de transfert H_{wpert} et H_{upert} suivantes :

$$\begin{cases} H_{wpert} = H_w (1 + \Delta_{uncw} W_{uncw}) \\ H_{upert} = H_u (1 + \Delta_{unc} W_{unc}) \end{cases} \quad (7)$$

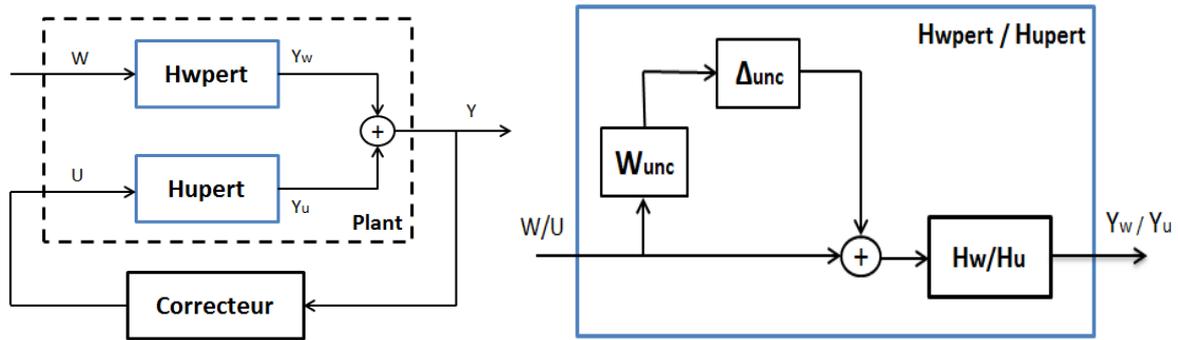


Figure 98 a) Décomposition du système incertain b) Système avec dynamiques négligées

On utilise des incertitudes Δ_{unc} , Δ_{uncw} non structurées et *multiplicatives* pour désigner des dynamiques mal connues ou négligées vérifiant la condition $\|\Delta_{unc,uncw}\|_{\infty} \leq \alpha$ (Figure 98 b). Le choix du filtre de pondération W_{unc} dépend des performances désirées à atteindre par le système contrôlé. Dans ce cas de figure (incertitudes non structurées), on peut appliquer le théorème du petit gain [44] qui stipule que notre système est stable pour toutes les incertitudes Δ_i si et seulement si $lft = \|LFT(Plant, Correcteur)\|_{\infty} \leq \frac{1}{\alpha}$. On calculera alors la *LFT* pour chaque correcteur déterminé, suivant les deux stratégies, afin de vérifier si on a bien la condition de robustesse. On pourra par la suite comparer les différents correcteurs obtenus en fonction de leur robustesse. D'un autre côté, on peut aussi utiliser le cas d'incertitudes structurées, il suffit de poser :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \Delta_{unc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Delta_{uncw} \end{pmatrix} \quad (8)$$

La matrice Δ apparaît maintenant structurée puisqu'elle est diagonale par blocs. De ce fait, on peut appliquer la μ analyse. En effet, on calcule pour chaque correcteur déterminé, suivant les deux stratégies, la VSS de la $LFT(Plant, Correcteur)$ qu'on notera μ pour pouvoir vérifier si on a bien la condition de robustesse, c'est-à-dire que $\mu < 1/\alpha$ tel que $\|\Delta\| \leq \alpha$. On verra d'ailleurs qu'on peut parfois confirmer la robustesse selon ce théorème tout en se passant du calcul de sa valeur singulière structurée VSS. On a aussi tracé la réponse temporelle du système incertain ainsi que son diagramme de Bode (H_{∞}, LQG, μ synthèse) obtenu suivant les deux stratégies pour visualiser l'effet des incertitudes sur le système en boucle ouverte et fermée.

✓ **Correcteurs de la première stratégie**

Dans le cas d'incertitudes non structurées avec le correcteur μ synthèse (Figure 99, Figure 100), on obtient $\|M_{11}(s)\|_{\infty} = 5.8086$. D'ailleurs, on retrouve cette valeur en traçant le graphe des valeurs singulières (Figure 101) de $M_{11}(j\omega)$ puisqu'on sait que $\bar{\sigma}(M_{11}(j\omega)) = \|M_{11}(j\omega)\|_{\infty}$.

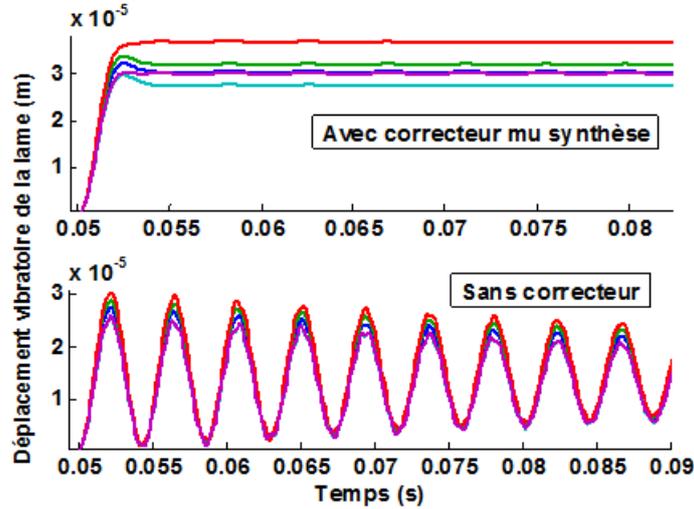


Figure 99 Réponse temporelle du système incertain avec correcteur μ synthèse

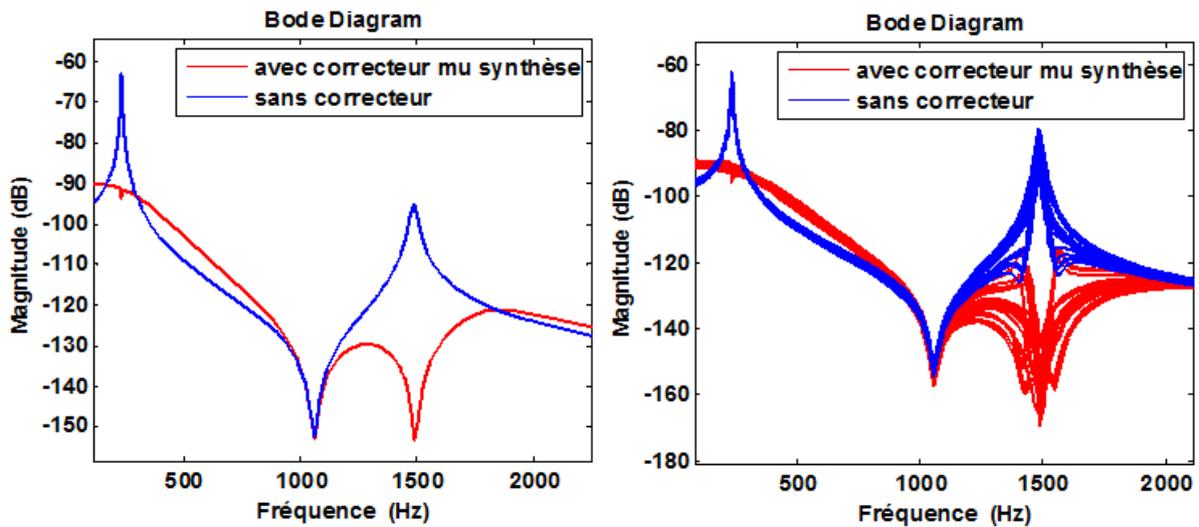


Figure 100 Diagramme de Bode du système certain et incertain avec correcteur μ synthèse

Le correcteur μ synthèse est donc robuste pour les incertitudes Δ telles que $\|\Delta\|_{\infty} < \frac{1}{5.8086}$.

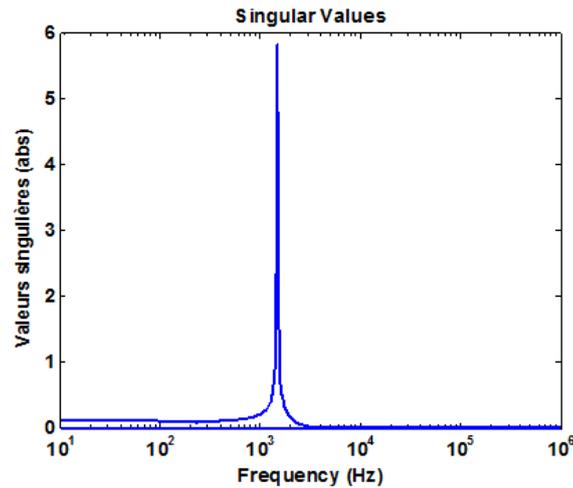


Figure 101 Valeurs singulières du système bouclé avec correcteur μ *synthèse*

Dans le cas d'incertitudes structurées avec le correcteur μ *synthèse*, on cherche plutôt à déterminer la VSS de $M_{11}(s)$. Mais on sait déjà que $\mu(M_{11}(s)) \leq \bar{\sigma}(M_{11}(j\omega))$. En faisant varier la fréquence sur [50, 2000 Hz] le calcul de μ en utilisant la fonction Matlab *mussv* nous donne :

$$\mu(M_{11}(j\omega)) \leq 5.5261$$

On déduit que la robustesse du correcteur μ *synthèse* est assurée sur l'intervalle de fréquences choisie pour un domaine d'incertitudes structurées Δ , telles que $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{5.5261}$.

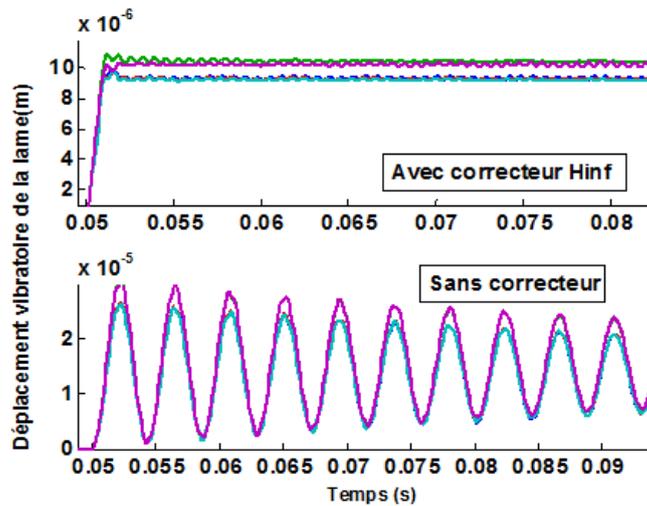


Figure 102 Réponse Temporelle du système incertain avec correcteur H_∞

Dans le cas d'incertitudes quelconques avec le correcteur H_∞ (Figure 102, Figure 103, Figure 104 a), on obtient $\|M_{11}(s)\|_\infty = 4.9475$. On retrouve cette valeur en $\bar{\sigma}(M_{11}(j\omega))$ sur le graphe des valeurs singulières (Figure 105).

Le correcteur H_∞ est robuste pour toutes les incertitudes Δ telles que $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{4.9475}$.

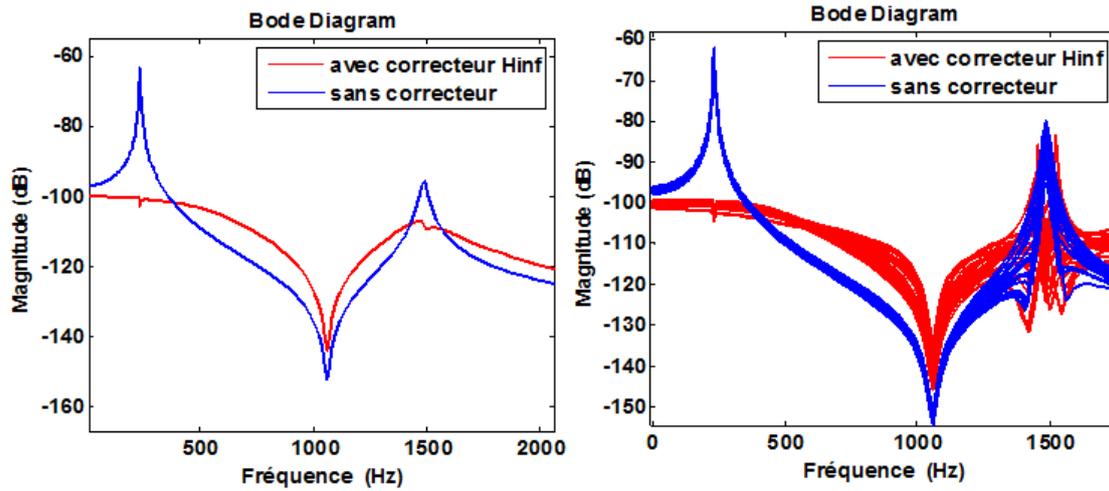


Figure 103 Diagramme de Bode du système certain et incertain avec correcteur H_∞

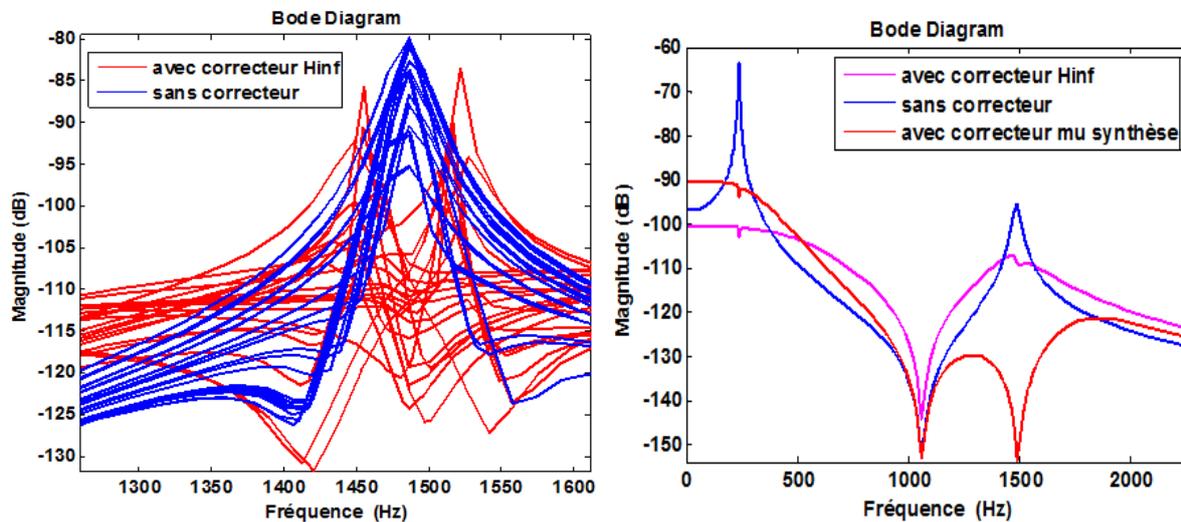


Figure 104 a) Réponse fréquentielle du système incertain avec correcteur H_∞ au niveau du 2^{ème} pic de résonance, b) Comparaison des réponses fréquentielles du système avec les correcteurs

D'après les diagrammes de Bode, on constate que le correcteur μ *synthèse* garde son allure même en présence des incertitudes. En effet, on voit bien la superposition du Bode surtout au niveau du 2^{ème} pic de résonance qui atténue toujours le système vibrant. Mais on ne peut pas en dire autant pour le correcteur H_∞ dont l'allure se dégrade lorsqu'on s'approche du 2^{ème} mode comme l'atteste la Figure 104a. On déduit alors que le correcteur μ *synthèse* est nettement plus robuste que son rival bien que celui-ci soit plus performant avec ses 36.9 dB d'atténuation sur le 1^{er} pic au lieu de 27.9 dB obtenue avec la μ *synthèse*. Certes le 2^{ème} mode est clairement plus amorti par le correcteur μ *synthèse* (25.7 dB) qu'avec le correcteur H_∞ (11.7 dB) comme le montre la Figure 104b. Mais cette atténuation du 2^{ème} pic disparaît dès qu'on filtre ces correcteurs pour pouvoir les utiliser rendant alors le correcteur H_∞ bien meilleur pour décroître les vibrations en l'absence d'incertitudes de modèle ou de perturbations externes (bruit..).

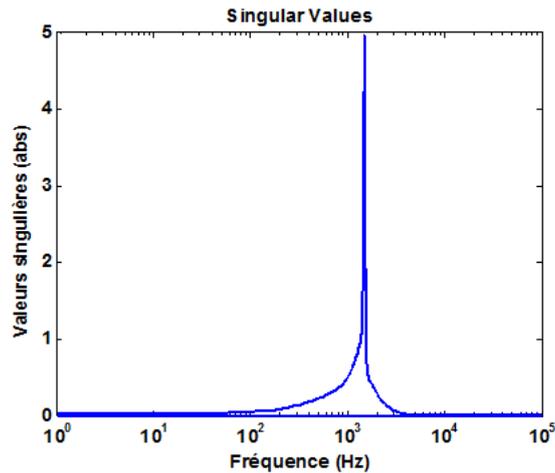


Figure 105 Valeurs singulières du système bouclé avec correcteur H_∞

Dans le cas d'incertitudes structurées avec le correcteur H_∞ , on dispose de la VSS de $M_{11}(s)$ pour l'analyse de robustesse. Connaissant $\mu(M_{11}(s)) \leq \bar{\sigma}(M_{11}(j\omega))$, on déduit que la robustesse de la stabilité est garantie pour les incertitudes structurées Δ telles que $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{4.9475}$. Même en faisant varier la fréquence sur [50, 2000 Hz], on retrouve le même résultat puisque le calcul de μ nous donne :

$$\mu(M_{11}(j\omega)) \leq 4.8023$$

Ce qui signifie que la robustesse est assurée pour le correcteur H_∞ sur l'intervalle de fréquences choisie pour toutes les incertitudes structurées Δ telles que $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{4.8023}$.

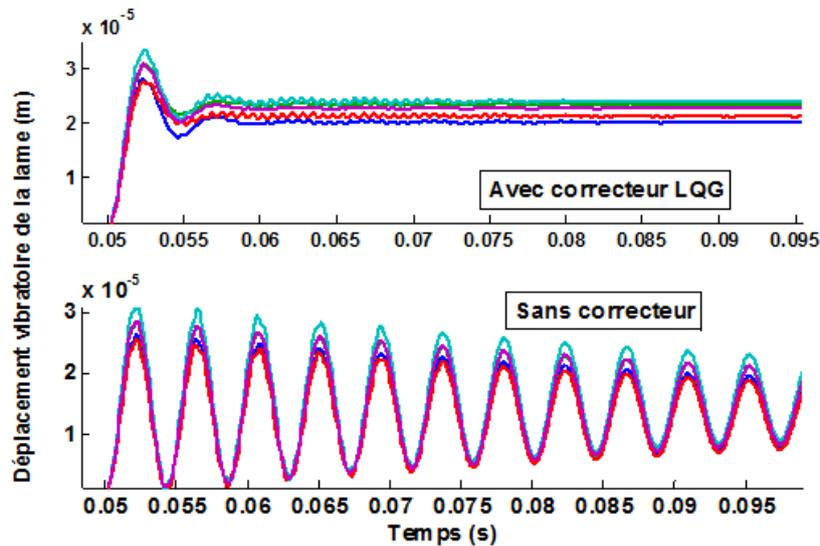


Figure 106 Réponse Temporelle du système incertain avec correcteur LQG

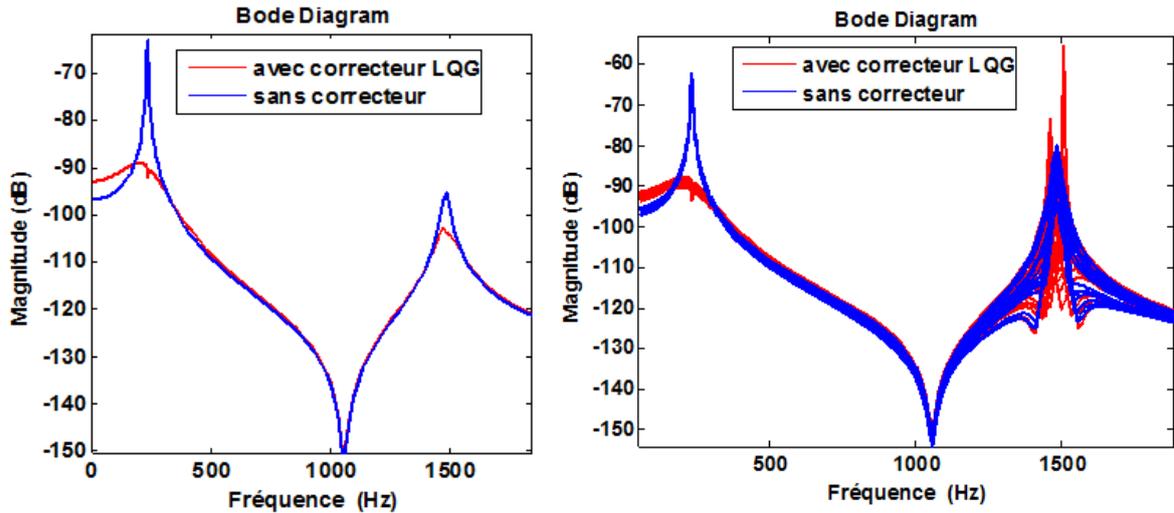


Figure 107 Diagramme de Bode du système certain et incertain avec correcteur *LQG*

Le correcteur *LQG* qu'on a choisi d'étudier ici (Figure 106, Figure 107) atténue le 1^{er} mode de résonance de 25.9 dB et le 2^{ème} de seulement 7.7 dB. Mais son effet se dégrade lorsqu'on atteint le 2^{ème} pic. En effet, il réagit mal face aux incertitudes du système tout comme le correcteur H_∞ . Finalement, d'après les graphes du système incertain avec les trois correcteurs, on peut conclure que c'est le correcteur μ *synthèse* qui est le plus robuste, puis vient le correcteur H_∞ et enfin la technique *LQG*.

Dans le cas d'incertitudes non structurées avec le correcteur *LQG*, on obtient $\|M_{11}(s)\|_\infty = 4.0834$. D'ailleurs on retrouve cette valeur en traçant le graphe des valeurs singulières de $M_{11}(j\omega)$ (Figure 108) puisqu'on sait que $\bar{\sigma}(M_{11}(j\omega)) = \|M_{11}(j\omega)\|_\infty$.

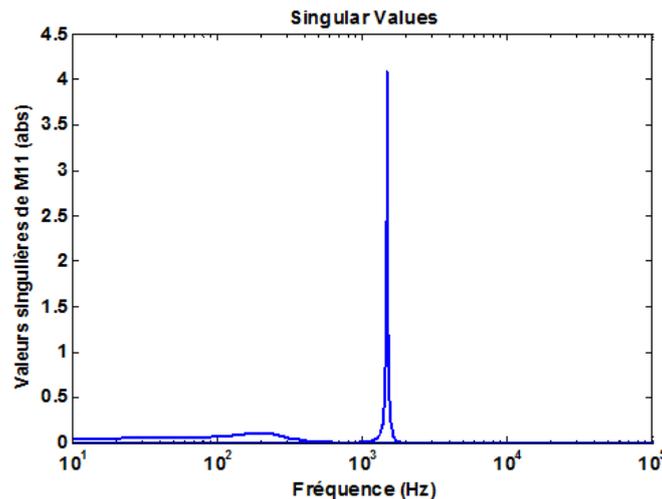


Figure 108 Valeurs singulières du système bouclé avec correcteur *LQG*

On a donc le correcteur *LQG* robuste pour toutes les incertitudes Δ telles que $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{4.0834}$.

Dans le cas d'incertitudes structurées avec le correcteur *LQG*, on cherche plutôt à calculer la VSS de $M_{11}(s)$. Mais on sait déjà que $\mu(M_{11}(s)) \leq \bar{\sigma}(M_{11}(j\omega))$. On en déduit alors que la robustesse de la stabilité est garantie pour toutes les incertitudes structurées Δ telles que

$\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{4.0834}$. En faisant varier la fréquence sur [50, 2000 Hz], le calcul de μ en utilisant la fonction Matlab *mussv* nous donne :

$$\mu(M_{11}(j\omega)) \leq 3.87$$

On en conclut que la robustesse pour le correcteur *LQG* est assurée sur l'intervalle de fréquences choisie pour un domaine d'incertitudes structurées Δ , telles que $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{3.87}$, plus large donc que celui donné par la propriété de la borne supérieure.

✓ **Correcteurs de la deuxième stratégie**

Le correcteur H_∞ déterminé ici suivant la deuxième stratégie (Figure 109, Figure 110, Figure 111) agit seulement sur le 1^{er} pic de résonance en l'atténuant de 15.7 dB. Même en présence d'incertitudes dans le modèle, le correcteur amortit toujours le 1^{er} pic.

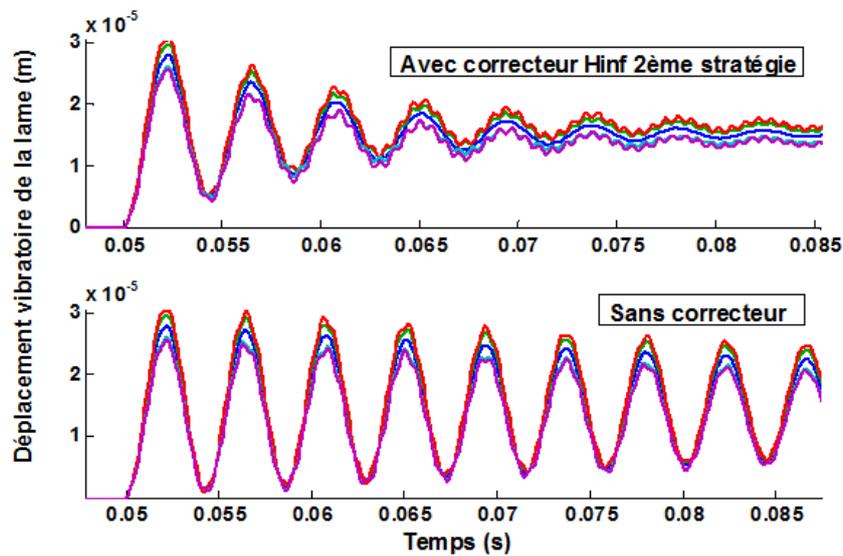


Figure 109 Réponse Temporelle du système incertain avec correcteur H_∞ de la deuxième stratégie

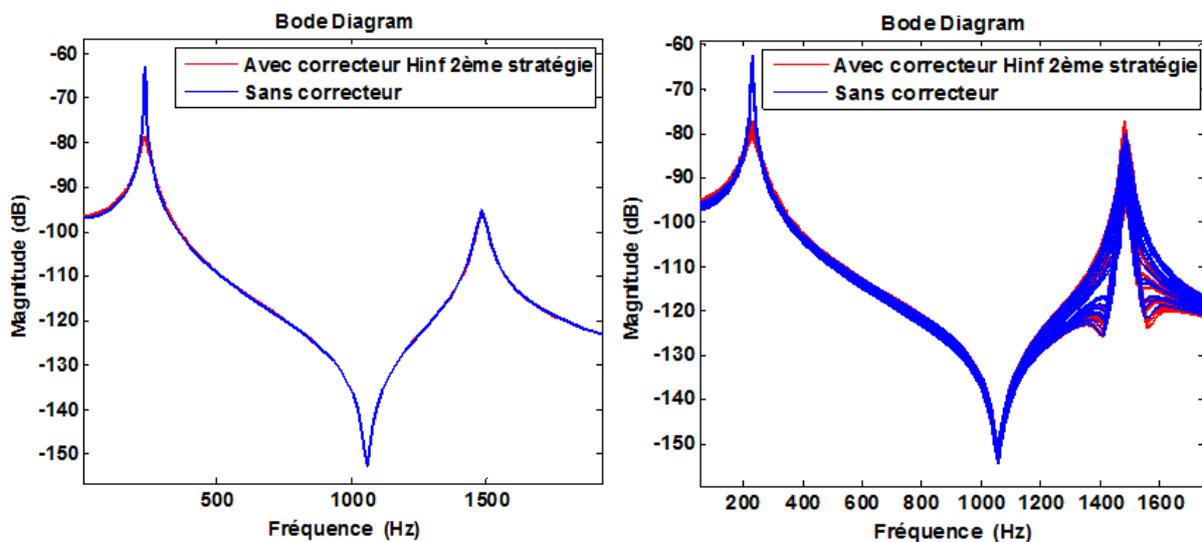


Figure 110 Diagramme de Bode du système certain et incertain avec correcteur H_∞ de la deuxième stratégie

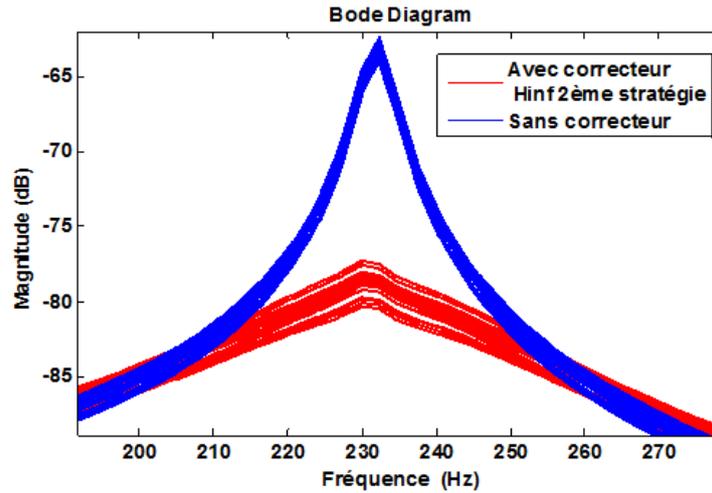


Figure 111 Réponse fréquentielle du système incertain avec correcteur H_∞ de la deuxième stratégie au niveau du 1^{er} pic de résonance

Dans le cas d'incertitudes non structurées avec ce correcteur H_∞ , on obtient $\|M_{11}(s)\|_\infty = 0.5493$. On retrouve cette valeur en traçant le graphe des valeurs singulières de $M_{11}(j\omega)$ (Figure 112) puisqu'on sait que $\bar{\sigma}(M_{11}(j\omega)) = \|M_{11}(j\omega)\|_\infty$.

Ce correcteur H_∞ est donc robuste pour les incertitudes Δ telles que $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{0.5493}$.

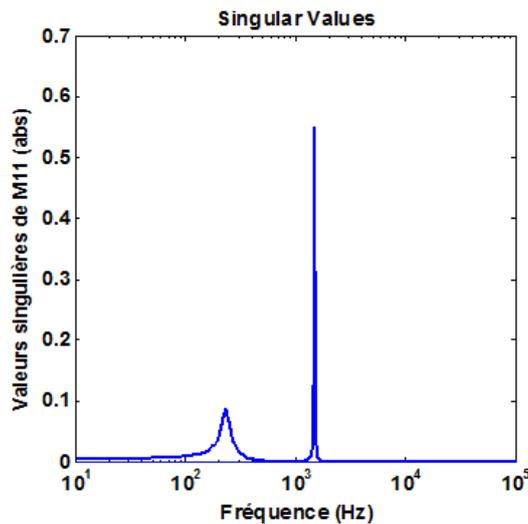


Figure 112 Valeurs singulières du système bouclé avec correcteur H_∞ de la deuxième stratégie

Dans le cas d'incertitudes structurées avec le correcteur H_∞ , on cherche plutôt à déterminer la VSS de $M_{11}(s)$. Mais on sait déjà que $\mu(M_{11}(s)) \leq \bar{\sigma}(M_{11}(j\omega))$. En faisant varier la fréquence sur [50, 2000 Hz] le calcul de μ nous donne :

$$\mu(M_{11}(j\omega)) \leq 0.5080$$

On déduit que la robustesse est assurée pour ce correcteur H_∞ sur l'intervalle de fréquences choisie pour un domaine d'incertitudes structurées Δ , telles que $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{0.5080}$.

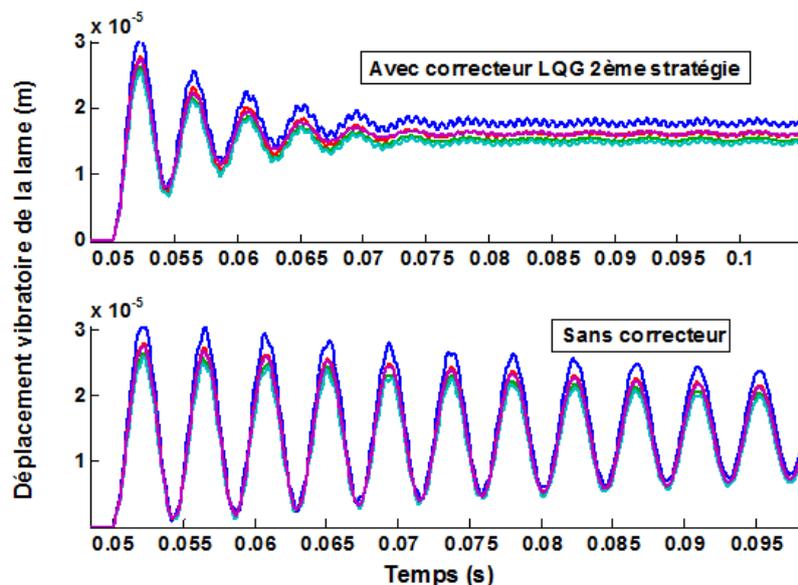


Figure 113 Réponse Temporelle du système incertain avec correcteur *LQG* de la deuxième stratégie

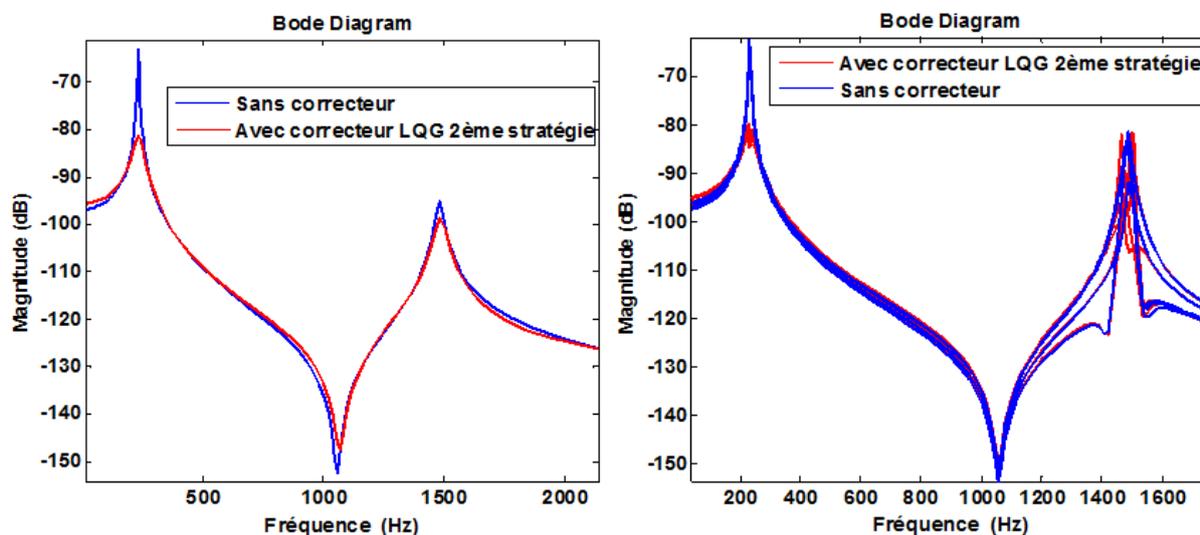


Figure 114 Diagramme de Bode du système certain et incertain avec correcteur *LQG* de la deuxième stratégie

Ce correcteur *LQG* (Figure 113, Figure 114) déterminé suivant la deuxième stratégie atténue le 1^{er} pic de résonance de 18.3 dB et le 2^{ème} de seulement 3.6 dB. Mais lorsqu'il y a des incertitudes dans le modèle du système, le correcteur apporte toujours de l'amortissement sur le 1^{er} pic mais devient instable sur le 2^{ème} pic (Figure 115).

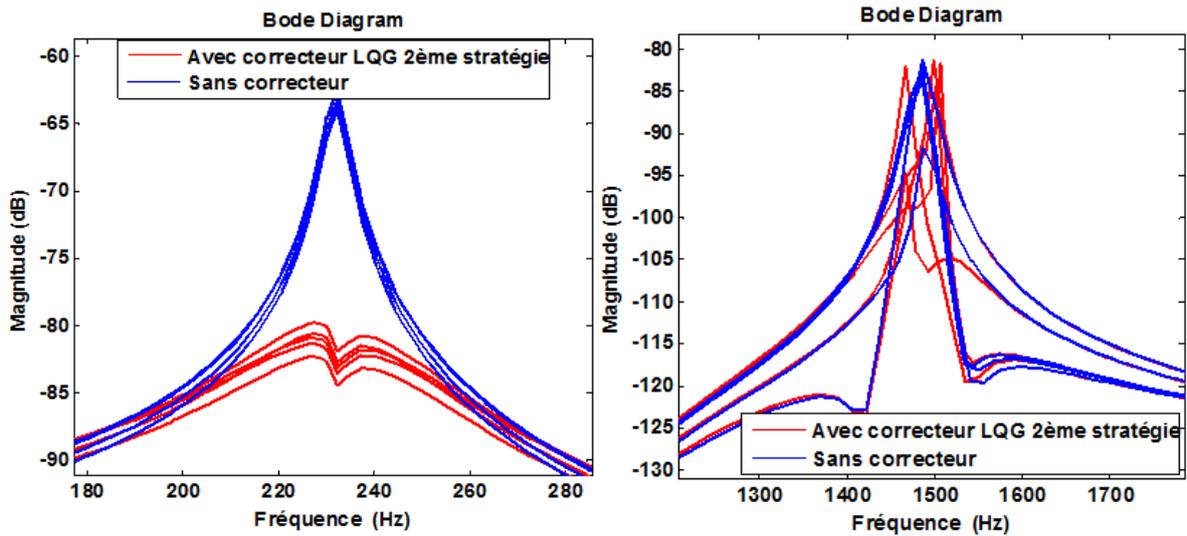


Figure 115 Réponse fréquentielle du système incertain avec correcteur *LQG* de la deuxième stratégie au niveau du 1^{er} et 2^{ème} pic de résonance

Dans le cas d'incertitudes non structurées avec ce correcteur *LQG*, on obtient $\|M_{11}(s)\|_{\infty} = 2.7656$. On retrouve cette valeur en traçant le graphe des valeurs singulières de $M_{11}(j\omega)$ (Figure 116) puisqu'on sait que $\bar{\sigma}(M_{11}(j\omega)) = \|M_{11}(j\omega)\|_{\infty}$.

Le correcteur *LQG* est donc robuste pour les incertitudes Δ telles que $\|\Delta\|_{\infty} < \frac{1}{2.7656}$.

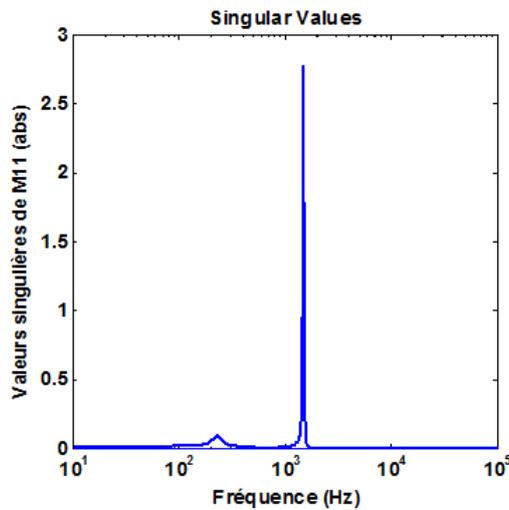


Figure 116 Valeurs singulières du système bouclé avec correcteur *LQG* de la deuxième stratégie

Dans le cas d'incertitudes structurées, on cherche plutôt à déterminer la VSS de $M_{11}(s)$. On sait déjà que $\mu(M_{11}(s)) \leq \bar{\sigma}(M_{11}(j\omega))$. En faisant varier la fréquence sur [50, 2000 Hz], on obtient:

$$\mu(M_{11}(j\omega)) \leq 2.6366$$

On déduit que la robustesse est assurée pour le correcteur *LQG* sur l'intervalle de fréquences choisie pour un domaine d'incertitudes structurées Δ , telles que $\|\Delta\|_{\infty} < \frac{1}{2.6366}$.

b) Robustesse paramétrique

Cette analyse consiste à utiliser des incertitudes paramétriques, c'est-à-dire des incertitudes sur la valeur paramètres physiques du processus tels que la fréquence de résonance ou l'amortissement modal avant de générer le correcteur correspondant dont la robustesse est par la suite analysée. Ces paramètres sont incertains puisqu'ils sont susceptibles de changer durant les essais par rapport à la modélisation théorique. Dans notre cas, on a estimé que ces paramètres de résonance à la fréquence de résonance $f_{i=1,2}$ et l'amortissement modal $\lambda_{i=1,2}$ qui peuvent varier légèrement par rapport à nos prédictions. Comme précédemment, on peut utiliser soit le théorème du petit gain soit la μ analyse pour l'analyse de robustesse. Mais appliquer le théorème du petit gain nous donnera un résultat conservatif car ce serait ne pas tenir en compte de la structure particulière des incertitudes. En effet, on dispose d'incertitudes structurées :

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \delta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Avec $f_i = \bar{f}_i + F_i \delta_i$ et $\lambda_i = \bar{\lambda}_i + L_i \beta_i$ où \bar{f}_i et $\bar{\lambda}_i$ sont les valeurs nominales de la fréquence de résonance et de l'amortissement modal du $i^{\text{ème}}$ mode ($i = 1,2$), F_i et L_i sont les taux d'incertitudes normalisés à l'aide des paramètres δ_i et β_i .

On calcule alors la $\|\Delta\|$, ensuite μ pour vérifier le critère de robustesse ; $\mu < 1/\alpha$ tel que $\|\Delta\| \leq \alpha$. Comme dans le cas d'analyse de robustesse aux dynamiques négligées, on a généré plusieurs réponses possibles de notre système perturbé dans N cas incertains du modèle nous permettant de visualiser à chaque fois le comportement du correcteur obtenu suivant les deux stratégies.

On choisit de simuler la réponse de notre système présentant une incertitude de +/- 20 Hz ainsi qu'une erreur de +/- 0.005 d'amortissement modal sur chaque pic de résonance. Ce qui correspond aux variations suivantes:

$$f_i = \bar{f}_i + 20 \delta_i \text{ et } \lambda_i = \bar{\lambda}_i + 0.005 \beta_i \text{ avec } |\delta_i|, |\beta_i| \leq 1, i = 1, 2 \quad (10)$$

✓ **Correcteurs déterminés suivant la première stratégie**

Dans le cas d'incertitudes non structurées avec le correcteur μ *synthèse* (Figure 117), on obtient $\|M_{11}(s)\|_{\infty} = 4.3635 \cdot 10^{12}$. On retrouve cette valeur sur le graphe des valeurs singulières de $M_{11}(j\omega)$ (Figure 118) car $\bar{\sigma}(M_{11}(j\omega)) = \|M_{11}(j\omega)\|_{\infty}$. Le correcteur μ *synthèse* est donc robuste pour les incertitudes Δ telles que :

$$\|\Delta\|_{\infty} < \frac{1}{4.3635 \cdot 10^{12}}$$

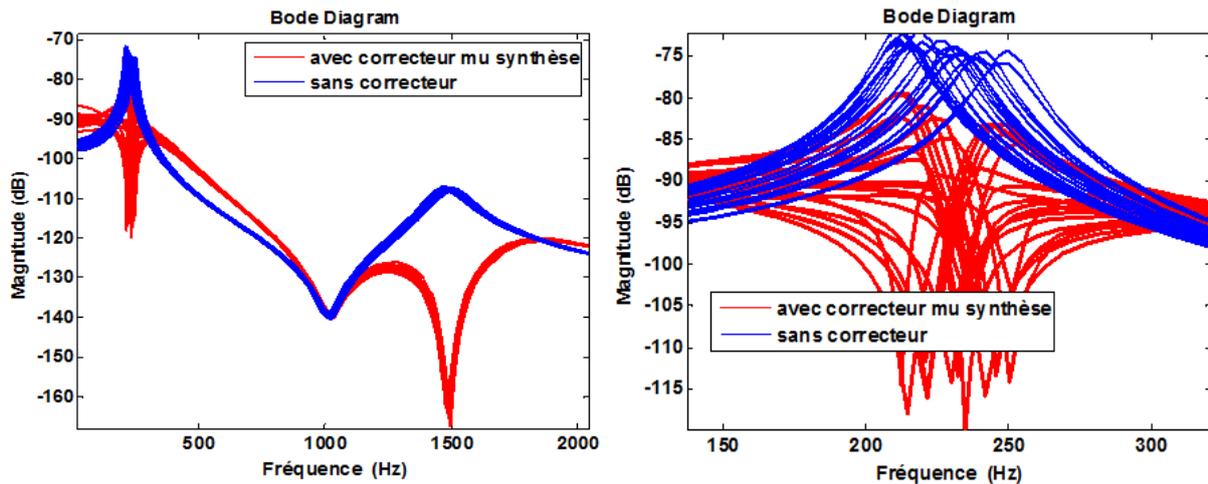


Figure 117 Diagramme de Bode du système incertain avec correcteur μ *synthèse*

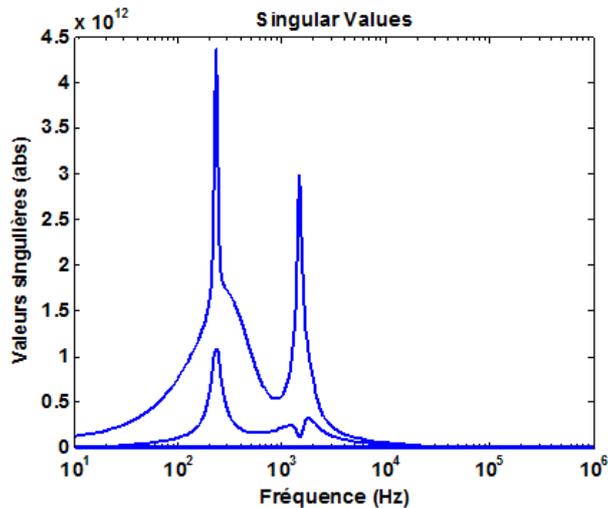


Figure 118 Valeurs singulières du système bouclé avec correcteur μ *synthèse*

Dans le cas d'incertitudes structurées avec le correcteur μ *synthèse*, on arrive à déterminer la VSS de $M_{11}(s)$ dont on connaît la borne supérieure puisque $\mu(M_{11}(s)) \leq \bar{\sigma}(M_{11}(j\omega))$. En faisant varier la fréquence sur [50, 2000 Hz] on obtient:

$$\mu(M_{11}(j\omega)) \leq 1.7471$$

On déduit alors que la robustesse est assurée pour ce correcteur μ *synthèse* sur l'intervalle de fréquences choisie pour un domaine d'incertitudes structurées Δ , telles que $\|\Delta\|_{\infty} < \frac{1}{1.7471}$. Cela signifie que la robustesse du correcteur μ *synthèse* est assurée pour :

$$|\delta_i| \leq \frac{1}{1.7471} \text{ et } |\beta_i| \leq \frac{1}{1.7471}$$

Sachant que les valeurs nominales des fréquences de résonance sont $\bar{f}_1 = 232 \text{ Hz}$ et $\bar{f}_2 = 1500 \text{ Hz}$, on obtient les intervalles de leurs variations possibles pour lesquels le correcteur demeure robuste :

$$f_1 \in [220.5525, 243.4475] , f_2 \in [1.4886 \times 10^3, 1.5114 \times 10^3]$$

Les valeurs nominales des amortissements modaux sont $\bar{\lambda}_1 = 0.0350$ et $\bar{\lambda}_2 = 0.0500$. Nous obtenons donc ces variations possibles avec lesquels la robustesse du correcteur μ *synthèse* est assurée :

$$\lambda_1 \in [0.0321, 0.0379] , \lambda_2 \in [0.0471, 0.0529]$$

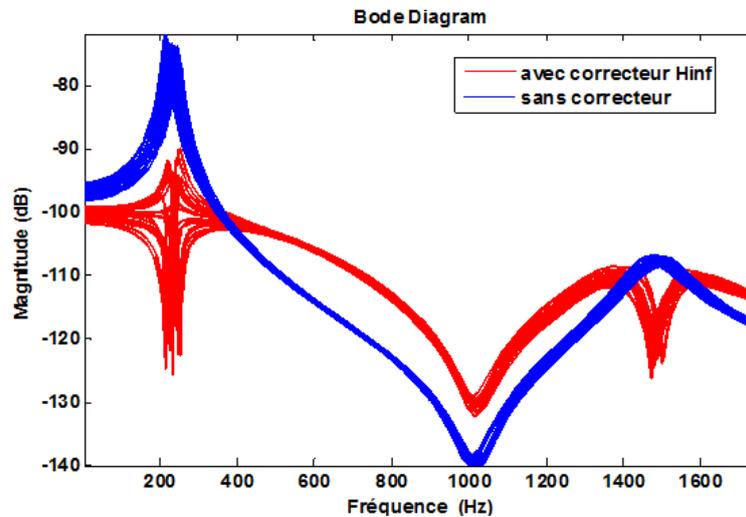


Figure 119 Diagramme de Bode du système incertain avec correcteur H_∞

Dans le cas d'incertitudes quelconques avec le correcteur H_∞ (Figure 119), on obtient $\|M_{11}(s)\|_\infty = 4.2772 \times 10^{12}$. On retrouve cette valeur en $\bar{\sigma}(M_{11}(j\omega))$ sur le graphe des valeurs singulières (Figure 120).

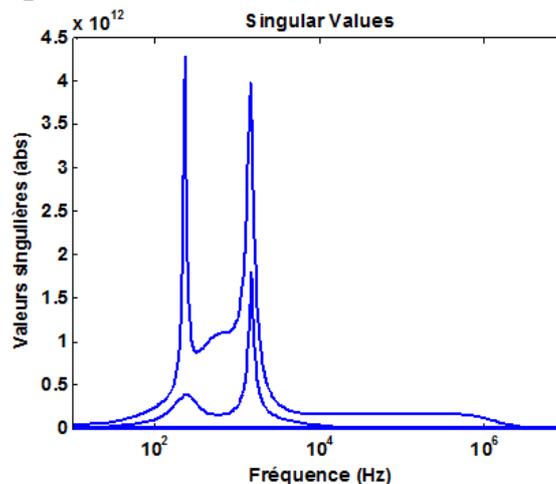


Figure 120 Valeurs singulières du système bouclé avec correcteur H_∞

Dans le cas d'incertitudes structurées avec le correcteur H_∞ , on dispose de la VSS de $M_{11}(s)$ pour l'analyse de robustesse de ce correcteur. En faisant varier la fréquence sur $[50, 2000 \text{ Hz}]$, le calcul de μ nous donne :

$$\mu(M_{11}(j\omega)) \leq 2.1134$$

Ce qui signifie que la robustesse est assurée sur l'intervalle de fréquences choisie pour toutes les incertitudes structurées Δ telles que $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{2.1134}$ correspondant aux domaines d'incertitudes suivants :

$$|\delta_i| \leq \frac{1}{2.1134} \text{ et } |\beta_i| \leq \frac{1}{2.1134}$$

On obtient donc les intervalles des variations possibles des paramètres incertains pour lesquels le correcteur H_∞ demeure robuste :

$$f_1 \in [222.5366, 241.4634], f_2 \in [1.4905 \times 10^3, 1.5095 \times 10^3], \lambda_1 \in [0.0326, 0.0374], \lambda_2 \in [0.0476, 0.0524]$$

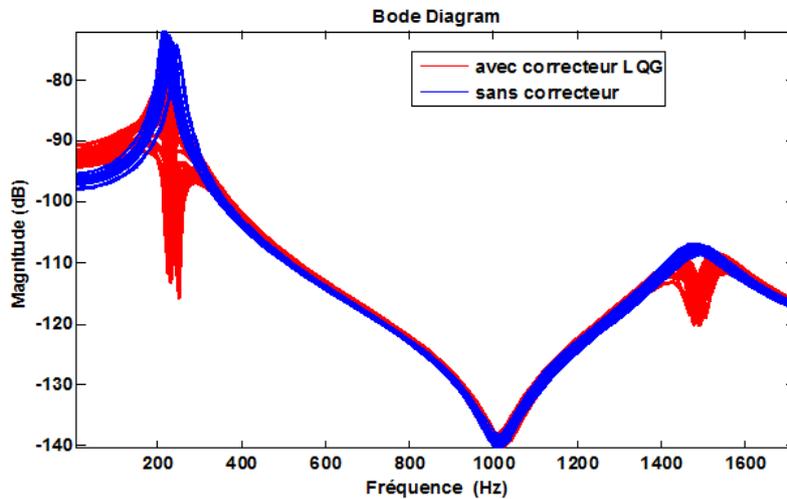


Figure 121 Diagramme de Bode du système incertain avec correcteur *LQG*

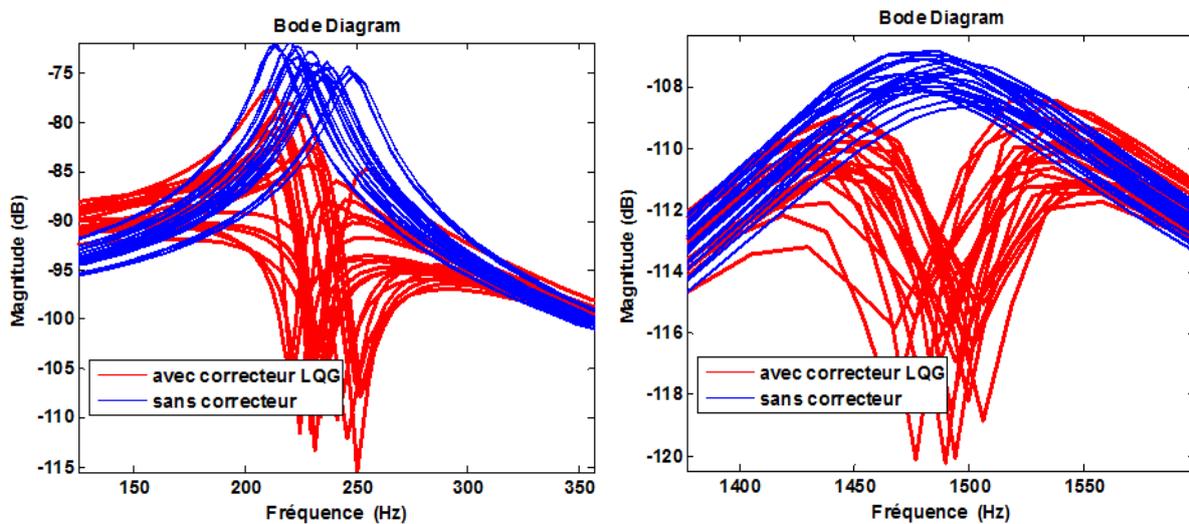


Figure 122 Diagramme de Bode du système incertain avec correcteur *LQG* sur le 1^{er} et 2^{ème} pic de résonance

Dans le cas d'incertitudes non structurées avec le correcteur LQG (Figure 121, Figure 122) on obtient $\|M_{11}(s)\|_{\infty} = 6.15 * 10^{12}$. On retrouve cette valeur en $\bar{\sigma}(M_{11}(j\omega))$ d'après le graphe des valeurs singulières (Figure 123). Le correcteur LQG est alors robuste pour toutes les incertitudes Δ telles que :

$$\|\Delta\|_{\infty} < \frac{1}{6.15 * 10^{12}}$$

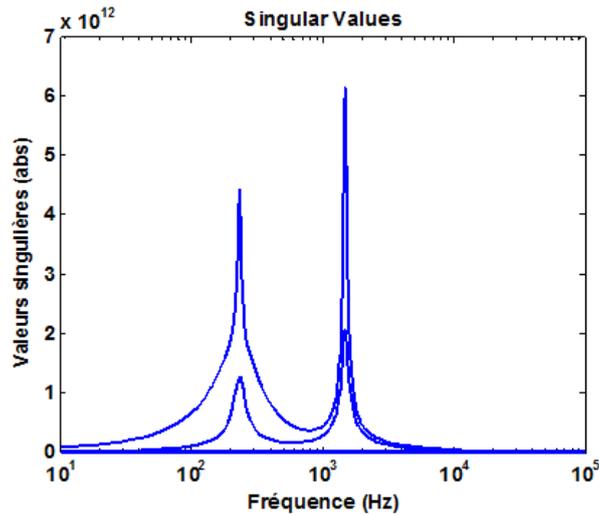


Figure 123 Valeurs singulières du système bouclé avec correcteur LQG

Dans le cas d'incertitudes structurées avec le correcteur LQG , on cherche plutôt à calculer la VSS de $M_{11}(s)$. Mais on sait déjà que $\mu(M_{11}(s)) \leq \bar{\sigma}(M_{11}(j\omega)) = 6.15 * 10^{12}$. On en déduit alors que la robustesse de la stabilité est garantie pour les incertitudes structurées Δ telles que $\|\Delta\|_{\infty} < \frac{1}{6.15 * 10^{12}}$. En faisant varier la fréquence sur [50, 2000 Hz], le calcul de μ nous donne :

$$\mu(M_{11}(j\omega)) \leq 2.0004$$

On en conclut que la robustesse est assurée pour le correcteur LQG sur l'intervalle de fréquences choisie pour toutes les incertitudes structurées Δ telles que $\|\Delta\|_{\infty} < \frac{1}{2.0004}$. On obtient alors un net élargissement du domaine d'incertitudes que le système peut tolérer sans que sa stabilité soit détériorée.

En effet, les domaines d'incertitudes pour lesquels le correcteur LQG est robuste sont les suivants :

$$|\delta_i| \leq \frac{1}{2.0004} \text{ et } |\beta_i| \leq \frac{1}{2.0004}$$

On obtient donc les intervalles des variations possibles des paramètres incertains pour lesquels le correcteur LQG demeure robuste :

$$f_1 \in [222.0020 , 241.9980] , f_2 \in [1.4900 \times 10^3 , 1.5100 \times 10^3] , \lambda_1 \in [0.0325 , 0.0375] , \lambda_2 \in [0.0475 , 0.0525]$$

Finalement, on constate le même résultat qu'avec un système incertain en présence de dynamiques négligées puisqu'on voit bien que le correcteur μ *synthèse* est toujours plus robuste que la commande H_∞ . Néanmoins, la technique *LQG* agit mieux sur le système que le correcteur H_∞ en particulier au niveau du 2^{ème} mode.

Les réponses fréquentielles du système incertain en présence des trois correcteurs étudiés, donnent la même conclusion de robustesse quelque soit le type d'incertitude négligée ou paramétrique. En effet, la stratégie μ *synthèse* paraît être la plus robuste tandis que le correcteur H_∞ semble être le plus performant. Ainsi, le choix d'un correcteur approprié à un système dépend de l'exactitude du modèle utilisé ; si celui-ci ne représente pas très bien le phénomène physique qui a lieu, alors on optera pour le correcteur qui est plus capable d'agir sur le système malgré des incertitudes. Mais si on travaille avec un modèle identifié du système, et donc plus exact que celui obtenu par calculs, alors on pourra utiliser le correcteur le plus performant sans trop se préoccuper de sa sensibilité aux erreurs de modélisation.

✓ **Correcteurs déterminés suivant la deuxième stratégie**

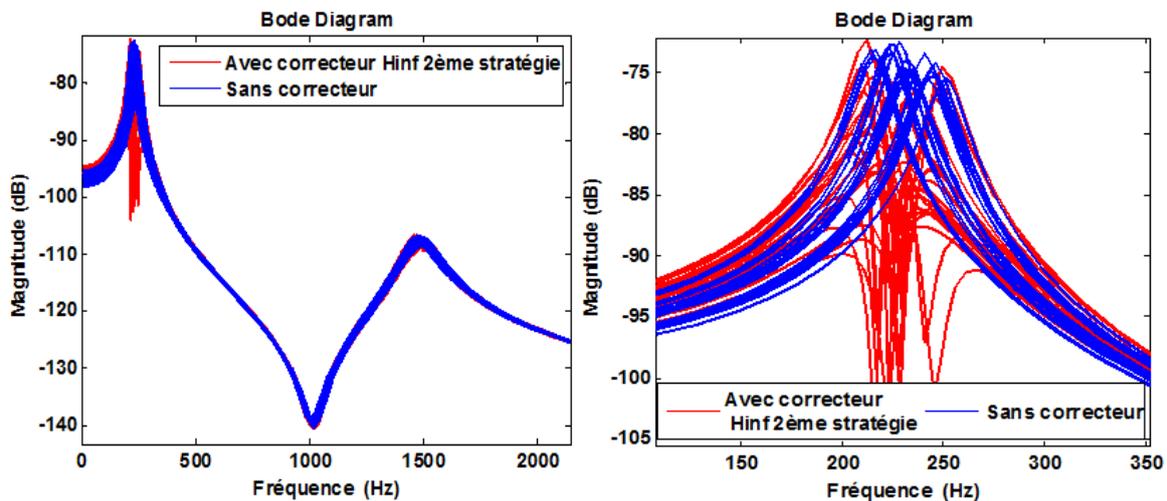


Figure 124 Diagramme de Bode du système incertain avec correcteur H_∞ de la deuxième stratégie

Dans le cas d'incertitudes non structurées avec le correcteur H_∞ (Figure 124), on obtient $\|M_{11}(s)\|_\infty = 1.5099 * 10^{13}$. On retrouve cette valeur sur le graphe des valeurs singulières de $M_{11}(j\omega)$ (Figure 125).

Ce correcteur H_∞ est donc robuste pour les incertitudes Δ telles que :

$$\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{1.5099 * 10^{13}}$$

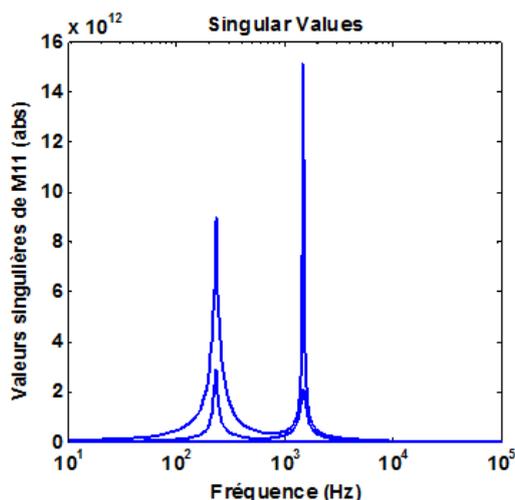


Figure 125 Valeurs singulières du système bouclé avec correcteur H_∞ de la deuxième stratégie

Dans le cas d'incertitudes structurées avec le correcteur H_∞ , on arrive à déterminer la VSS de $M_{11}(s)$ dont on connaît la borne supérieure puisque $\mu(M_{11}(s)) \leq \bar{\sigma}(M_{11}(j\omega))$. En faisant varier la fréquence sur [50, 2000 Hz] on obtient:

$$\mu(M_{11}(j\omega)) \leq 1.9994$$

On déduit que la robustesse est assurée pour le correcteur H_∞ sur l'intervalle de fréquences choisie pour un domaine d'incertitudes structurées Δ , telles que $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{1.9994}$ correspondant aux domaines d'incertitudes suivants :

$$|\delta_i| \leq \frac{1}{1.9994} \text{ et } |\beta_i| \leq \frac{1}{1.9994}$$

On obtient donc les intervalles des variations possibles des paramètres incertains pour lesquels le correcteur H_∞ demeure robuste :

$$f_1 \in [221.9970, 242.0030] , f_2 \in [1.4900 \times 10^3, 1.5100 \times 10^3] , \lambda_1 \in [0.0325, 0.0375] , \lambda_2 \in [0.0475, 0.0525]$$

D'après les diagrammes de Bode dans les deux types d'incertitudes étudiées, le correcteur H_∞ obtenu suivant la deuxième stratégie agit mieux sur le 1^{er} pic de résonance lorsqu'on a des dynamiques négligées plutôt que des paramètres incertains dans le système.

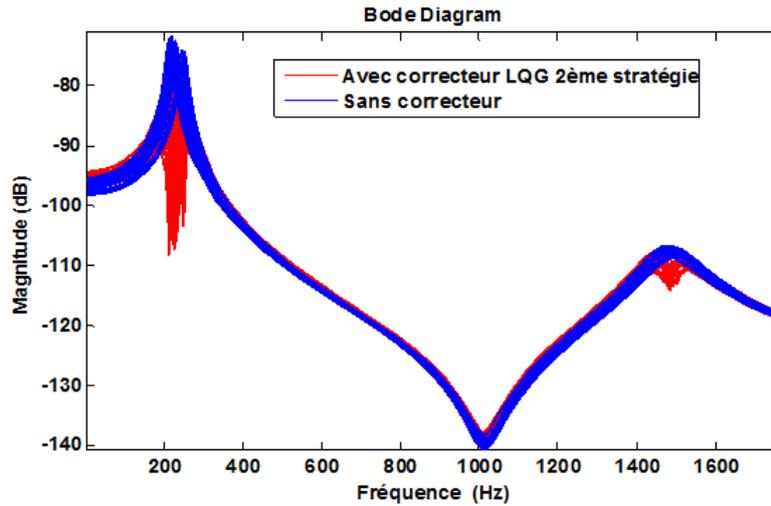


Figure 126 Diagramme de Bode du système incertain avec correcteur *LQG* de la deuxième stratégie

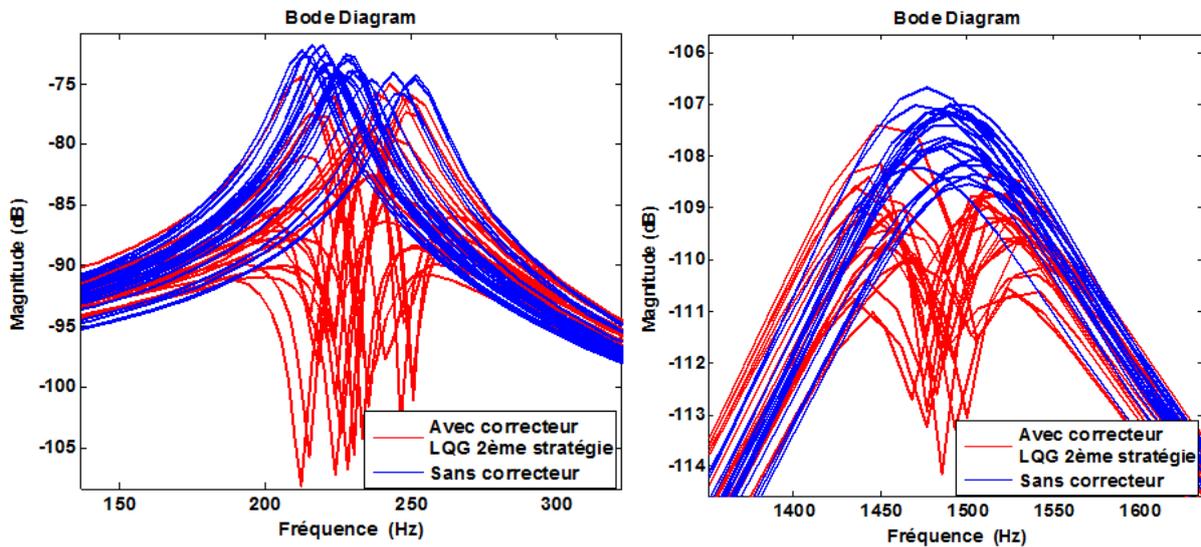


Figure 127 Diagramme de Bode du système incertain avec correcteur *LQG* de la deuxième stratégie sur le 1^{er} et 2^{ème} pic de résonance

Dans le cas d'incertitudes non structurées avec le correcteur *LQG* (Figure 126, Figure 127) on obtient $\|M_{11}(s)\|_{\infty} = 9.8030 \times 10^{12}$. On retrouve cette valeur sur le graphe des valeurs singulières de $M_{11}(j\omega)$ (Figure 128).

Le correcteur *LQG* calculé suivant la deuxième stratégie est donc robuste pour les incertitudes Δ telles que :

$$\|\Delta\|_{\infty} < \frac{1}{9.8030 \times 10^{12}}$$

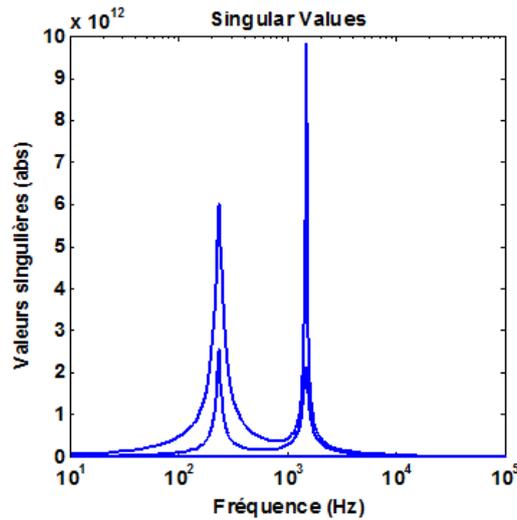


Figure 128 Valeurs singulières du système bouclé avec correcteur *LQG* de la deuxième stratégie

Dans le cas d'incertitudes structurées avec le correcteur *LQG*, on arrive à déterminer la VSS de $M_{11}(s)$ dont on connaît la borne supérieure puisque $\mu(M_{11}(s)) \leq \bar{\sigma}(M_{11}(j\omega))$. En faisant varier la fréquence sur [50, 2000 Hz] on obtient:

$$\mu(M_{11}(j\omega)) \leq 3.6825$$

On déduit que la robustesse est assurée pour le correcteur *LQG* sur l'intervalle de fréquences choisie pour un domaine d'incertitudes structurées Δ , telles que $\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{3.6825}$ correspondant aux domaines d'incertitudes suivants :

$$|\delta_i| \leq \frac{1}{3.6825} \text{ et } |\beta_i| \leq \frac{1}{3.6825}$$

On obtient donc les intervalles des variations possibles des paramètres incertains pour lesquels le correcteur *LQG* demeure robuste :

$$f_1 \in [226.5689, 237.4311] , f_2 \in [1.4946 \times 10^3, 1.5054 \times 10^3] , \lambda_1 \in [0.0336, 0.0364] , \lambda_2 \in [0.0486, 0.0514]$$

D'après ses diagrammes de Bode dans les deux types d'incertitudes (dynamiques négligées et paramètres incertains), ce correcteur *LQG* calculé suivant la deuxième stratégie est toujours efficace sur le 1^{er} pic. Mais, l'effet de ce dernier sur le 2^{ème} pic est loin de faire l'unanimité. En effet, le correcteur atténue le 2^{ème} pic lorsqu'on est en présence de paramètres incertains dans le modèle du système mais devient instable à cette fréquence quand des dynamiques négligées s'ajoutent au système.

Conclusion de l'analyse de robustesse

La μ analyse a permis de quantifier la robustesse des correcteurs à travers le calcul de la valeur singulière structurée du système incertain (dynamiques négligées/paramètres incertains) associée à chaque correcteur. En effet, on a délimité à chaque fois l'ensemble des incertitudes pour lequel la stabilité du système bouclé est garantie. D'ailleurs on peut même utiliser ce

domaine d'incertitudes pour la comparaison des correcteurs. Plus l'intervalle d'incertitudes est large et plus le correcteur est robuste. Ceci correspond à dire que le correcteur le plus robuste est celui ayant la valeur singulière structurée la plus petite. On déduit alors que le correcteur μ synthèse est plus robuste que la technique quadratique et la commande H_∞ lorsqu'on travaille avec des incertitudes paramétriques. Par contre, en présence de dynamiques négligées dans le système, on aboutit à la conclusion que la μ synthèse est moins robuste que la commande H_∞ moins robuste que la méthode LQG .

	μ synthèse	H_∞	LQG
Dynamiques négligées	$\mu \leq 5.52$	$\mu \leq 4.80$	$\mu \leq 3.87$
Paramétriques	$\mu \leq 1.74$	$\mu \leq 2.11$	$\mu \leq 2.0004$

Tableau 4 Comparaison des correcteurs de la première stratégie

Pour les correcteurs déterminés suivant la deuxième stratégie, la stratégie H_∞ est bien plus robuste que la méthode gaussienne selon la μ analyse quel que soit le type d'incertitudes.

	H_∞	LQG
Dynamiques négligées	$\mu \leq 0.5080$	$\mu \leq 2.6366$
Paramétriques	$\mu \leq 1.9994$	$\mu \leq 3.6825$

Tableau 5 Comparaison des correcteurs de la deuxième stratégie

Nous avons par la suite comparé les résultats de la μ analyse des correcteurs de la première et deuxième stratégie et déterminé pour chaque type d'incertitudes le correcteur le plus robuste.

Dynamiques négligées	$\mu \leq 0.5080$ (H_∞ deuxième stratégie)
Paramétriques	$\mu \leq 1.74$ (μ synthèse première stratégie)

Tableau 6 Comparaison des correcteurs de la première et deuxième stratégie

Dans le cas d'incertitudes type dynamiques négligées présentes dans le système, le résultat est clair. En effet, chacun des correcteurs H_∞ et LQG obtenus suivant la deuxième stratégie sont nettement plus robustes lorsqu'ils sont déterminés suivant la deuxième stratégie. Par conséquence, cette stratégie qui tient compte du processus de coupe dans l'obtention des correcteurs l'emporte largement en termes de robustesse quel que soit le résultat d'analyse de robustesse du correcteur μ synthèse de la deuxième stratégie. En effet, s'il s'avère que ce dernier est plus robuste que celui obtenu suivant la première stratégie, alors les correcteurs deuxième stratégie restent en tête. Sinon, nous savons déjà que le plus robuste des correcteurs avec des dynamiques négligées dans le système est bien le correcteur H_∞ de la deuxième stratégie.

Dans le deuxième cas d'incertitudes, on constate que le correcteur LQG est plus robuste lorsqu'il est calculé suivant la première stratégie alors que le correcteur H_∞ est plutôt plus robuste suivant la deuxième stratégie. C'est le correcteur μ synthèse obtenu suivant la première stratégie qui est le plus robuste de tous les correcteurs lorsqu'il y a des paramètres incertains dans le modèle du système sauf si celui obtenu suivant la deuxième stratégie donnerait une borne supérieure de μ plus petite que 1.74.

3. Identification du système

On dispose d'un système linéaire invariant dans le temps, on peut donc utiliser soit le modèle de la réponse impulsionnelle qui est non paramétrique, soit le modèle de l'équation d'état soit le modèle de la fonction de transfert. Or, la modélisation de notre système repose essentiellement sur les deux fonctions de transfert H_u et H_w qui sont des modèles quantitatifs paramétriques dont les paramètres sont des constantes inconnues numériquement (e_i, g_i, c_i, d_i) mais qui seront déterminées en utilisant les mesures. On choisit donc naturellement le modèle paramétrique de la fonction de transfert.

$$H_u = \frac{e_4 s^4 + e_3 s^3 + e_2 s^2 + e_1 s + e_0}{g_4 s^4 + g_3 s^3 + g_2 s^2 + g_1 s + g_0} \quad H_w = \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{d_4 s^4 + d_3 s^3 + d_2 s^2 + d_1 s + d_0} \quad (1)$$

On a effectué du pré filtrage des données du système identifiées en sortie. On a récupéré la partie du signal de sortie (déplacement vibratoire de la lame) comprenant les deux premiers pics de résonance [232 Hz, 1500 Hz]. Le choix du modèle d'identification dépend de sa finalité. Dans notre cas, on cherche à obtenir un modèle plus représentatif du système pour la commande robuste de ce dernier. Nous utiliserons alors un modèle dit linéaire ayant une structure simple tel que ARX qu'on explique [79] :

Soit P^N un ensemble de mesures expérimentales effectuées sur le processus :

$$P^N = \{u_1, y_1, \dots, u_N, y_N\} \quad (2)$$

Avec u_i, y_i sont respectivement les entrées et sorties du système.

Soit $\varepsilon(k, \theta)$ une mesure d'écart sur la k -ième mesure entre une quantité sur le système et cette même quantité sur le modèle défini par l'ensemble des paramètres θ :

$$\varepsilon(k, \theta) = y_k - \widehat{y}_k(\theta) \quad (3)$$

Où $\widehat{y}_k(\theta)$ est la sortie du modèle prédite qui se met sous la forme suivante dans le cas d'une structure de modèle ARX :

$$\widehat{y}_k(\theta) = -a_1 y_{k-1} - \dots - a_p y_{k-p} + b_1 u_{k-1} + \dots + b_m u_{k-m} \quad (4)$$

Ce qui revient à :

$$\widehat{y}_k(\theta) = \begin{bmatrix} -y_{k-1} & \dots & -y_{k-p} & u_{k-1} & \dots & u_{k-m} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_p \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} : \text{est le vecteur paramètre de dimension } p + m.$$

Lorsque θ varie, on décrit un ensemble de modèles particuliers correspondants à θ et dans lequel on devra déterminer le modèle qui répond le plus fidèlement aux mesures. Une estimation de ces paramètres θ est obtenue, dans l'approche d'identification basée sur l'erreur de prédiction, en minimisant un critère d'estimation dépendant de θ :

$$\widehat{\theta}_N = \arg \min_{\theta} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(k, \varepsilon(k, \theta)) \right] \quad (6)$$

$\widehat{\theta}_N$ est appelé l'estimateur, f est une fonction de l'écart.

Dans notre cas, on a eu recours à la méthode d'estimation par les moindres carrés. L'estimateur des moindres carrés $\widehat{\theta}_N^{ls}$ est alors donné par :

$$\widehat{\theta}_N^{ls} = \arg \min_{\theta} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \varepsilon^2(k, \theta) \right] \quad (7)$$

N (≈ 3000000) est le nombre de points de mesures entrées-sorties échantillonnées pour un essai d'identification qui a duré 60s.

L'essai d'impact consiste à récupérer la réponse vibratoire du système avec un capteur de déplacement suite à la perturbation qu'on génère au niveau de l'extrémité de la lame avec un marteau choc. Le signal est échantillonné à la fréquence de 50 kHz, c'est-à-dire plus de 30 fois la fréquence du 2^{ème} pic 1500 Hz. Il s'agit alors de l'essai d'identification de la fonction de transfert H_w . Par la suite, on envoie un signal de type sinus balayé à l'actionneur piézoélectrique au point $x = a$ et on récupère la réponse du système pour déterminer la deuxième fonction de transfert H_u . Les deux fonctions de transfert H_u et H_w sont d'ordre 4. Le modèle d'état de notre système est défini par sa matrice de transfert P obtenue à partir des deux fonctions de transfert H_u et H_w . On obtient un modèle global du système d'ordre 8.

$$(z) = P \begin{pmatrix} \omega \\ u \end{pmatrix} = (H_w \quad H_u) \begin{pmatrix} \omega \\ u \end{pmatrix} = H_w \omega + H_u u \quad (8)$$

$$P = (H_w \quad H_u)$$

z est la sortie du système (déplacement vibratoire) mesurée qu'on désire contrôler, ω est la perturbation et u est la commande correctrice.

a) Dispositif expérimental

On a utilisé des capteurs type capacitif de référence Micro Epsilon CSH2FL, associés à leurs contrôleurs, avec les caractéristiques suivantes :

- Conditionneur NCDT 6110
- Plage de mesure : 2 mm
- Résolution (statique) : 0.2 μm
- Résolution (dynamique, 1kHz) : 0.3 μm
- Linéarité : +/- 10 μm

Pour agir sur la structure, on a utilisé un actionneur piézoélectrique fourni par PiezoJENA. Il est de type haute tension (1000V) avec une course de 0.08 mm et pouvant générer des forces de l'ordre de 10 kN. La lame utilisée est fabriquée en matériau 55Si7 de dimensions 5 x 80 x 180 mm (Figure 129).

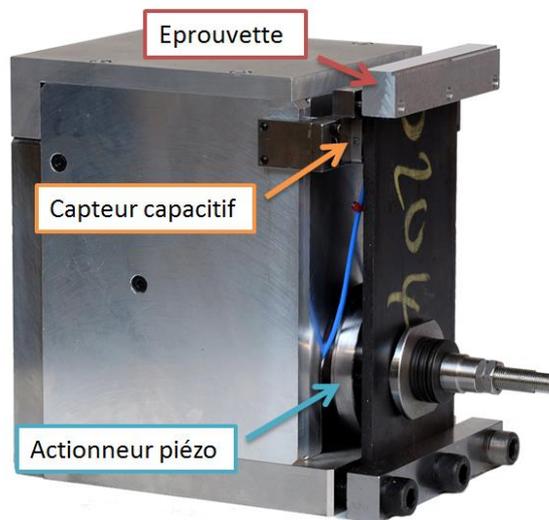


Figure 129 Banc d'essai du Contrôle actif en repère fixe

b) Modèle du système identifié

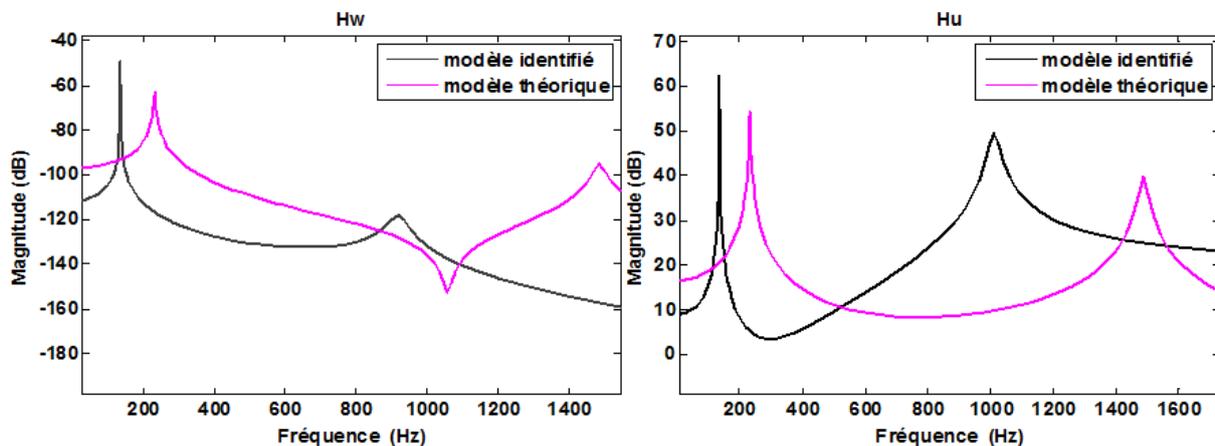


Figure 130 Comparaison des deux fonctions de transfert H_w et H_u théoriques et identifiées

Il est évident que le modèle du système obtenu par modélisation analytique est « légèrement » différent de celui résultant des essais d'identification (Figure 130). En effet, théoriquement les deux pics de résonance ont lieu à 232 Hz et 1500 Hz alors qu'en réalité ils apparaissent avant cela aux fréquences de 135 Hz et 1000 Hz. L'antirésonance présente dans la fonction de transfert H_w théorique disparaît dans le modèle identifié pouvant s'expliquer soit par l'amortissement sous-estimé du système ou encore par les opérations de filtrage effectuées sur les signaux récupérés des essais d'identification. La différence visible entre le modèle théorique et celui identifié au niveau des fréquences de résonance s'explique par la présence de l'éprouvette dans le dispositif (Figure 129) pendant les essais d'identification. L'éprouvette représente une masse supplémentaire qui se rajoute au système modélisé théoriquement entraînant la baisse des fréquences de résonance. Néanmoins, les essais de contrôle actif du système usinant en fraisage ont montré l'efficacité des correcteurs provenant du modèle théorique. Cette différence existante entre les deux modèles prouve encore une fois la robustesse des correcteurs, qui bien qu'ils aient été déterminés à partir du modèle théorique non identique au modèle identifié, ont réussi à atténuer les vibrations du système lors des essais.

4. Correcteurs première stratégie du système identifié

A partir des fonctions de transfert identifiées H_u et H_w , on détermine les correcteurs H_∞ , LQG et μ *synthèse* suivant la première stratégie en simulations (chapitre 1/paragraphe 3). Puis, des essais expérimentaux valideront ces correcteurs dans différentes situations d'un processus de fraisage décrit dans le paragraphe suivant.

a) Simulations

On teste d'abord nos correcteurs sur le système, décrit dans le paragraphe précédent, perturbé par un effort extérieur appliqué à l'extrémité de la lame (échelon) pour constater leur efficacité à atténuer les vibrations (Figure 131, Figure 132).

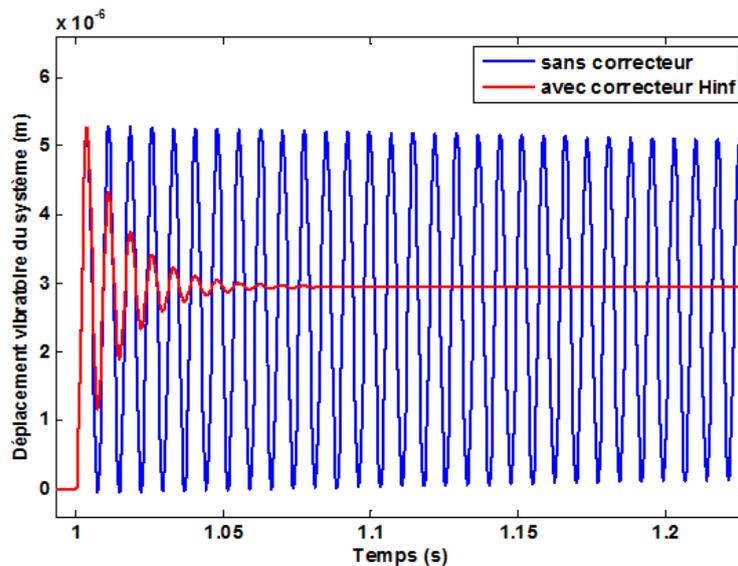


Figure 131 Réponse temporelle du système avec et sans correcteur H_∞

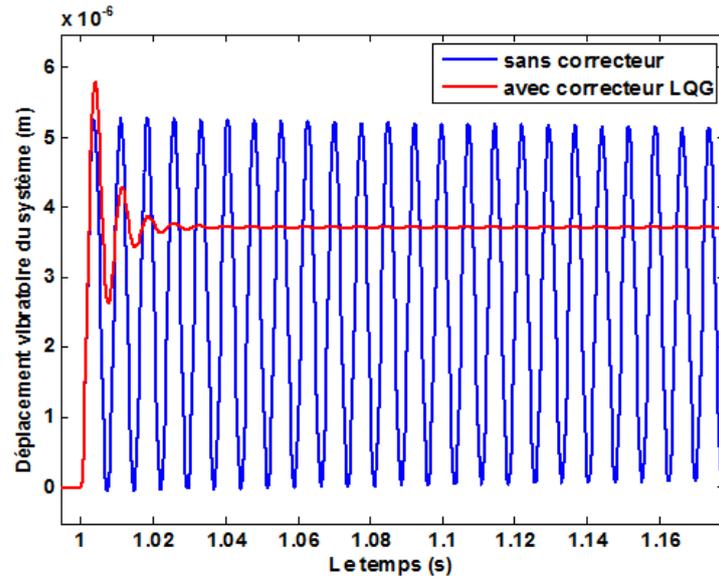


Figure 132 Réponse temporelle du système avec et sans correcteur *LQG*

Pour les essais d'usinage avec et sans correcteur, nous utiliserons une éprouvette, en alliage d'aluminium 2017A de dimensions 100 x 15 x 20 mm. Celle-ci va subir une opération de fraisage avec un outil de référence ALPHA COUPE, de diamètre 16 mm, ayant 2 dents F200/16 et fabriqué en matériau ARS C0 8%. Le système sera soumis à une opération de fraisage ayant les paramètres suivants : N allant de 2000 tr/min à 3500 tr/min, $f_z = 0.05$ mm/tr/dent, $Z = 2$ dents, $K_t = 1000$ MPa, $K_r = 300$ MPa, $D_{\text{outil}} = 16$ mm, a_r (engagement radial) variant de 0.3 mm à 0.8 mm (pris égale à 1 mm dans les simulations) et a_p (engagement axial) = 1.5 mm (Figure 133).

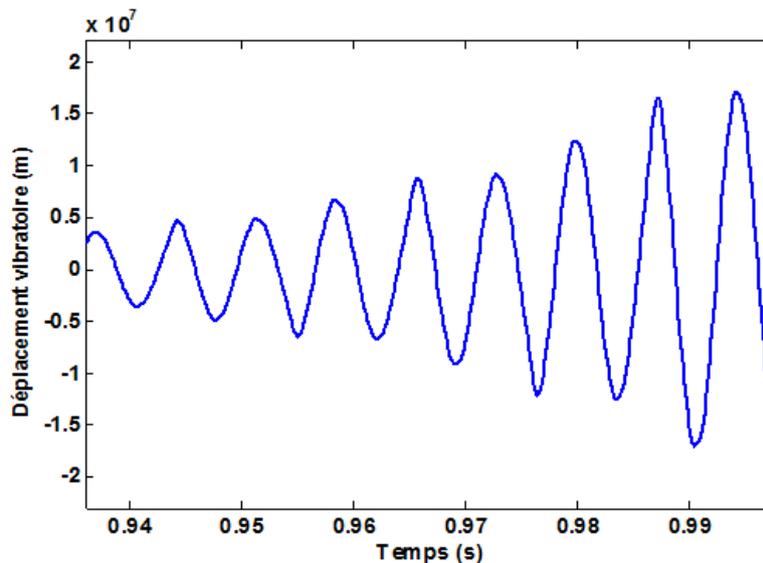


Figure 133 Réponse du système usinant sans correcteur

Le correcteur H_∞ calculé à partir du modèle du système identifié (Figure 134) atténue le 1^{er} pic de résonance de 56.5 dB et le 2^{ème} de 11 dB.

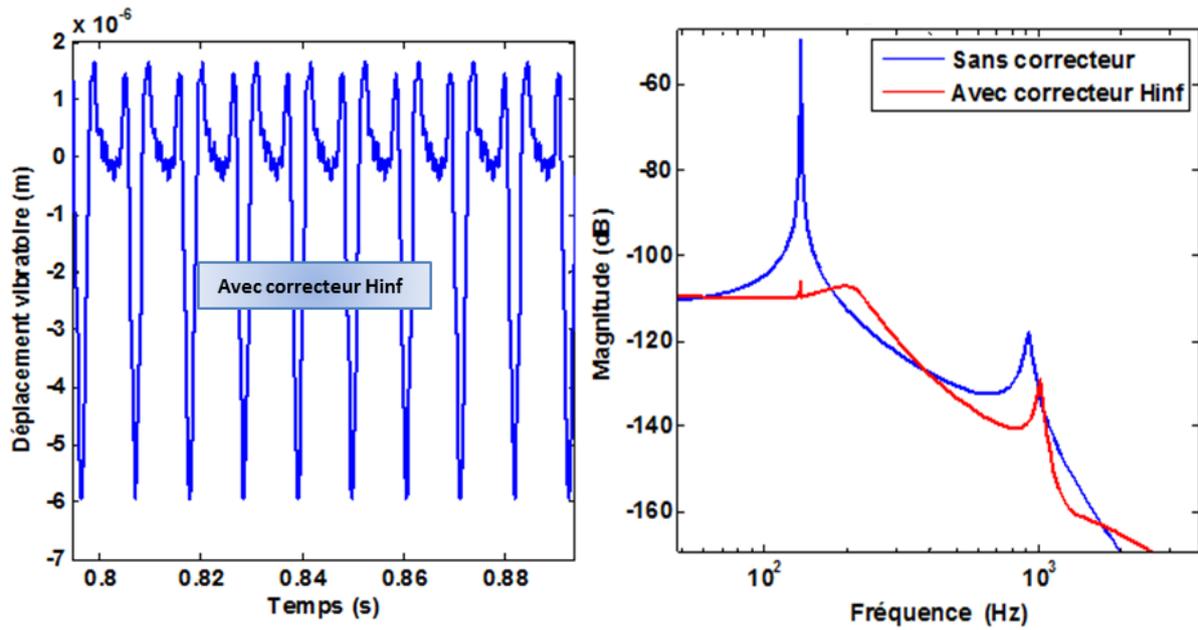


Figure 134 Contrôle actif du système usinant avec correcteur H_{∞} et son diagramme de Bode

Le correcteur LQG calculé à partir du modèle du système identifié (Figure 135) suivant la première stratégie atténue le 1^{er} pic de résonance de 47 dB et le 2^{ème} de 14 dB.

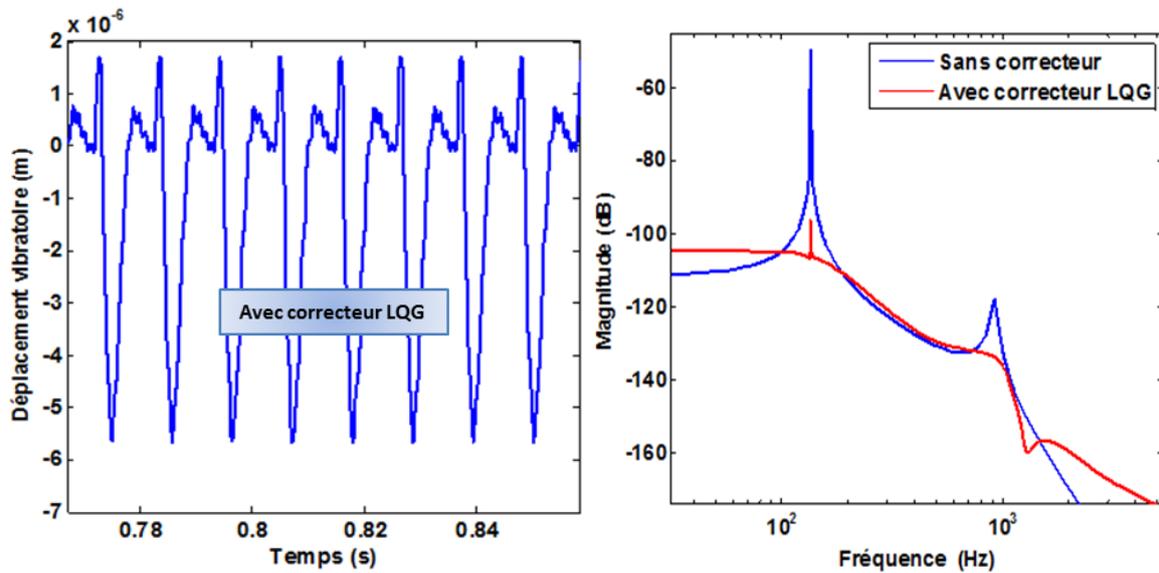


Figure 135 Contrôle actif du système usinant avec correcteur LQG et son diagramme de Bode

Avec le correcteur μ *synthèse* à ordre réduit et filtré (Figure 136), on obtient une atténuation du 1^{er} pic de 31.9 dB et de 5 dB sur le 2^{ème}.

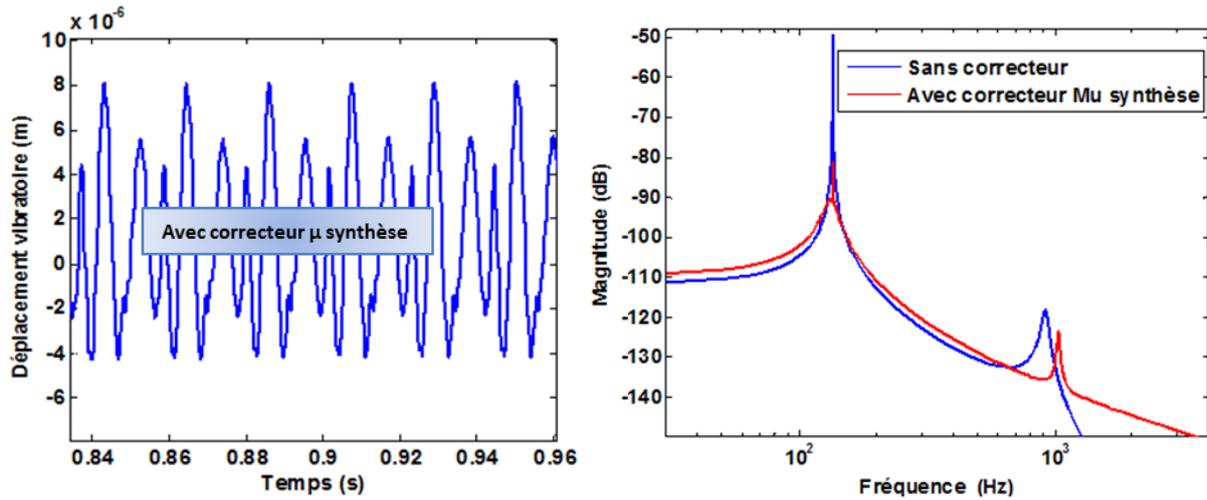


Figure 136 Contrôle actif du système usinant avec correcteur μ synthèse (réduit et filtré) et son diagramme de Bode

Les diagrammes de Bode des correcteurs calculés suivant la première stratégie montrent des signaux raisonnables ne nécessitant aucun recours au filtrage, en plus ils montrent une cohérence par rapport aux deux pics de résonance du système. Le correcteur H_∞ semble être légèrement meilleur que celui calculé avec la méthode quadratique (LQG). Néanmoins, ce dernier donne un domaine d'usinage stable plus large.

Finalement, si on devait classer ces trois correcteurs en se basant seulement sur leur performance, ce serait le correcteur H_∞ qui l'emporte largement suivi du correcteur LQG et puis de la μ synthèse.

On a tracé les lobes de stabilité du système usinant en rendant le critère du rmsmax plus sévère que celui utilisé dans le chapitre N°2 ($2 \cdot 10^{-4}$) afin d'obtenir des lobes plus visibles, pour un rmsmax égale à $1 \cdot 10^{-4}$ (Figure 137, Figure 138) et $1 \cdot 10^{-5}$ (Figure 139).

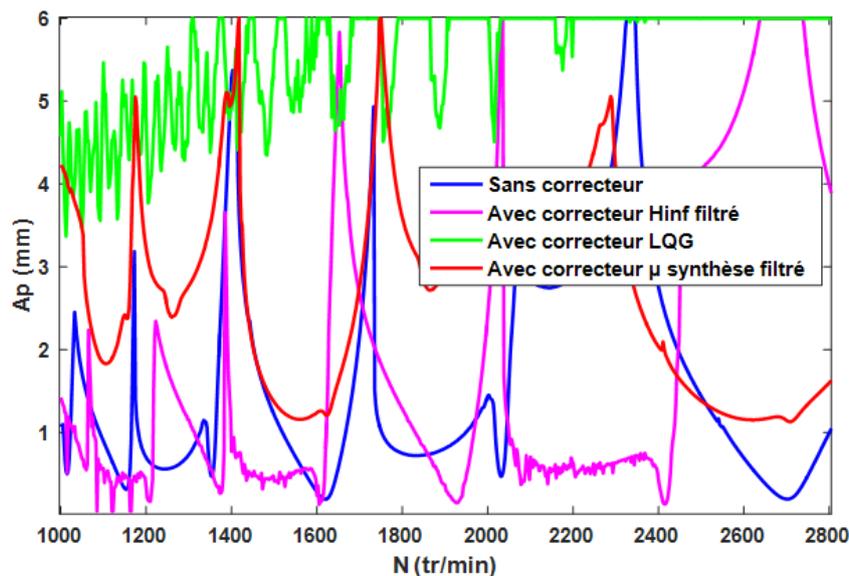


Figure 137 Lobes de stabilité du système usinant avec les correcteurs du système identifié déterminés suivant la première stratégie avec $\text{rmsmax} = 1 \cdot 10^{-4}$

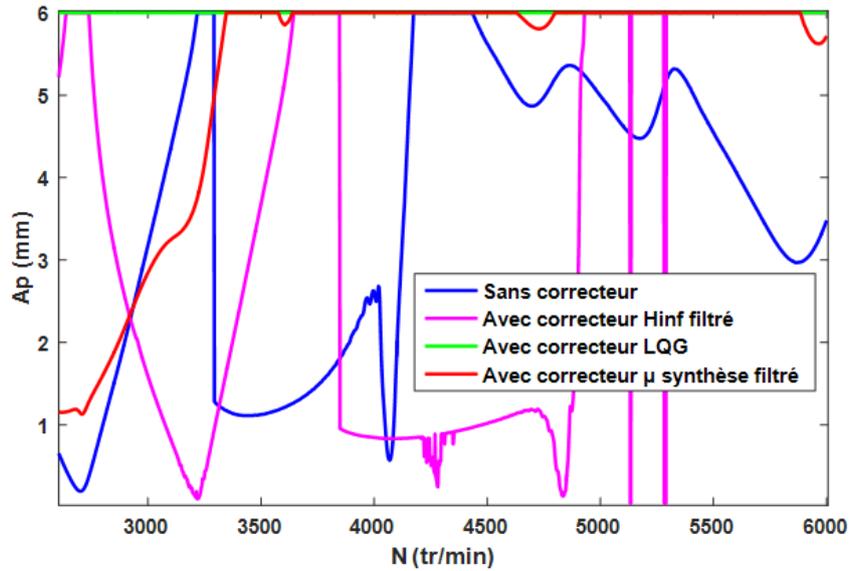


Figure 138 Lobes de stabilité du système avec $\text{rmsmax} = 1 \cdot 10^{-4}$

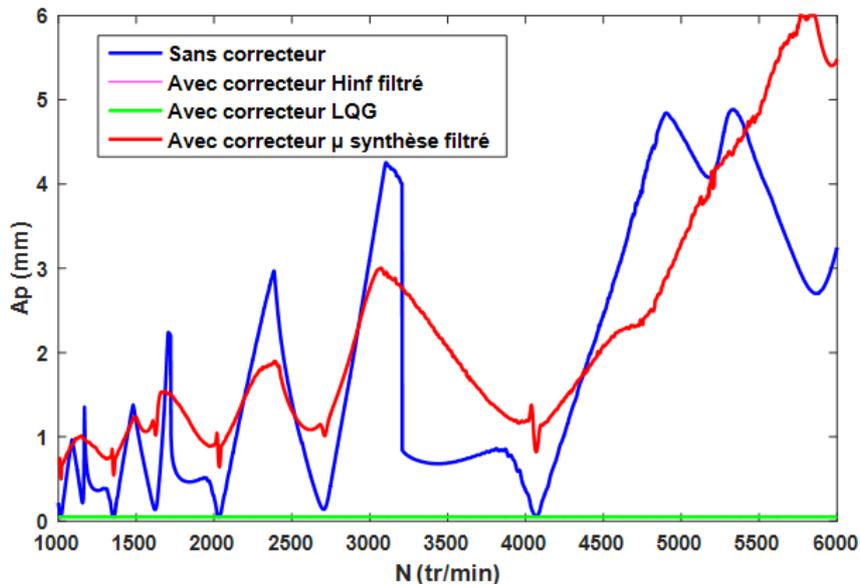


Figure 139 Lobes de stabilité avec $\text{rmsmax} = 1 \cdot 10^{-5}$

b) Validation expérimentale

On a utilisé un capteur capacitif placé à l'extrémité de l'éprouvette pour la mesure du déplacement vibratoire de celle-ci. Plusieurs éprouvettes identiques ont été testées pour valider le contrôle actif du fraisage en repère fixe (Figure 140) avec différents correcteurs H_∞ et LQG . Cette liste des correcteurs est constituée de ceux déterminés à partir du modèle théorique du système mais aussi de ceux provenant du modèle identifié. On a choisi de montrer les résultats de ces derniers qui nous ont semblé les meilleurs (Figure 141, Figure 142, Figure 143, Figure 144).

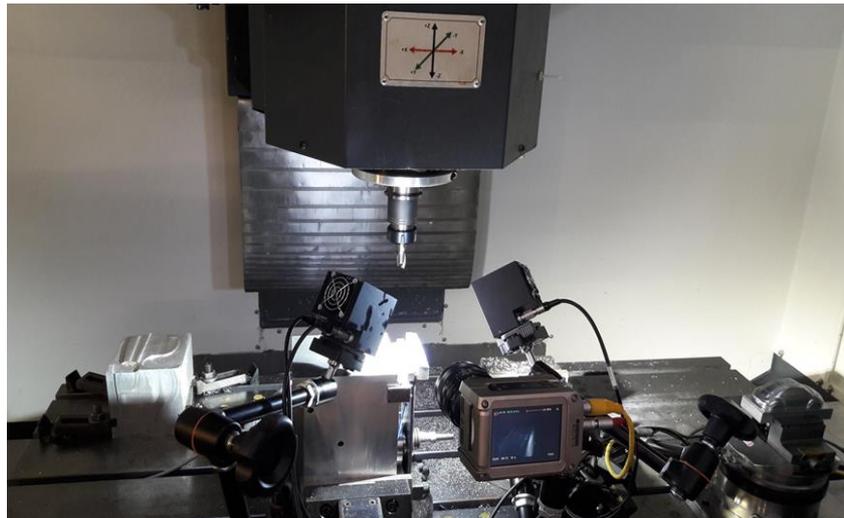


Figure 140 Montage du dispositif pour l'essai du fraisage avec/sans contrôle

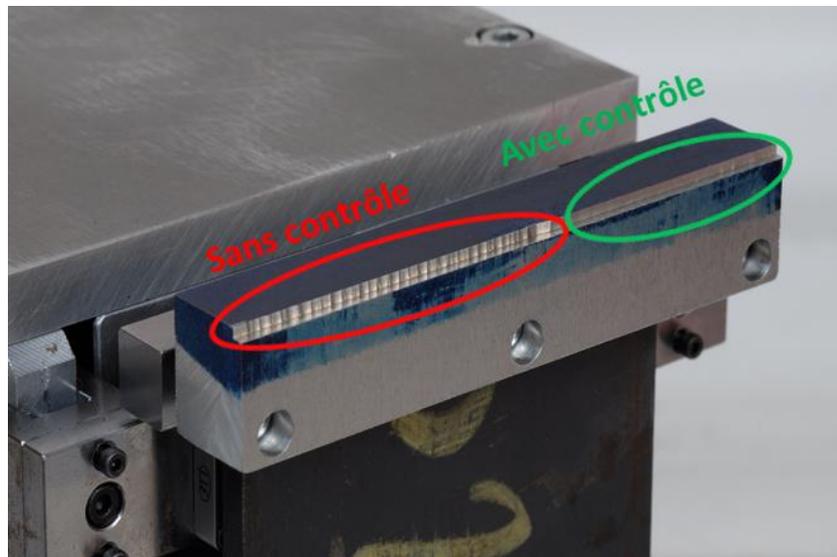


Figure 141 Résultat du fraisage de l'éprouvette avec/sans contrôle

On a testé les deux correcteurs H_∞ et LQG pour une opération de fraisage à 3000 tr/min avec une fraise à 2 dents de diamètre 16 mm. On a effectué des passes à 1.6 mm en radial et 1.5 mm en axial pour tester le correcteur H_∞ et un engagement radial de 2 mm pour le correcteur LQG en gardant la même profondeur de passe axiale. Les signaux sont mesurés avec une carte d'acquisition, développée en interne, ayant une fréquence d'échantillonnage de 160kHz avec une résolution de 16 bits. On a aussi eu recours à la carte SB-RIO-9607 de National Instrument équipée de l'ensemble processeur + FPGA (ZYNQ -7020) fourni par Xilinx. L'ensemble de cette électronique fait partie d'un contrôleur d'actionneurs piézoélectriques spécialement conçu au LSIS pour des applications destinées à l'usinage.

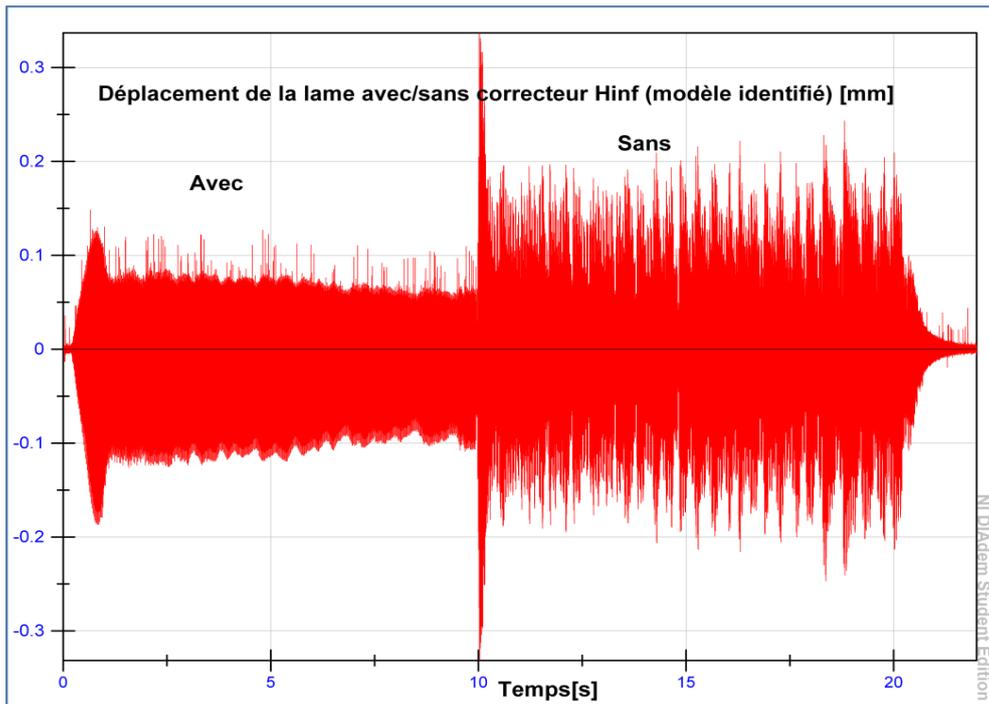


Figure 142 Résultats d'essai du correcteur H_{∞} du modèle identifié

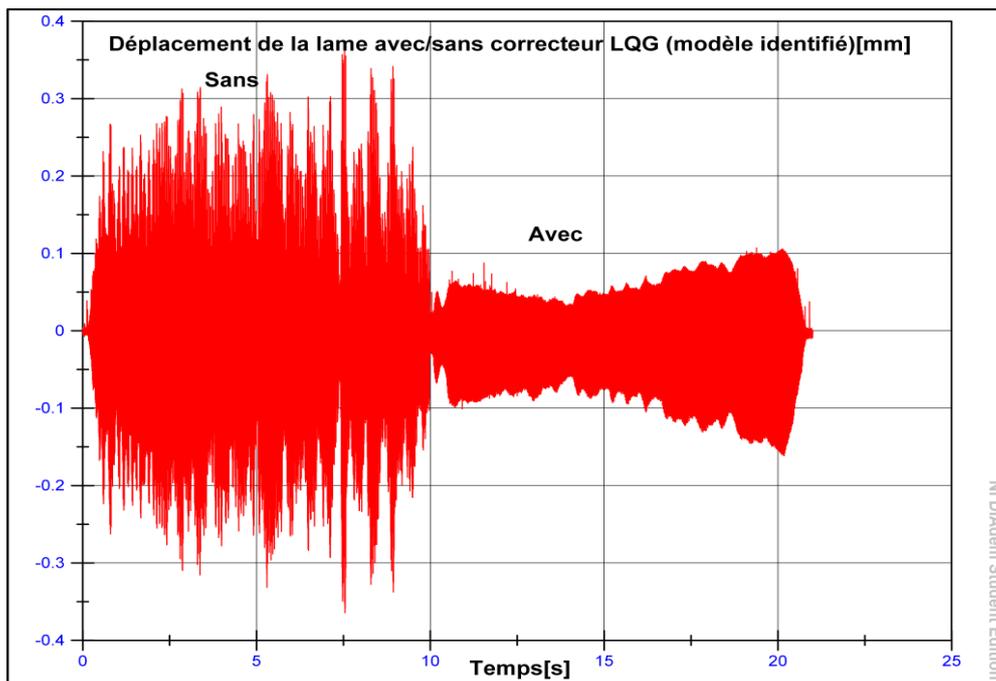


Figure 143 Résultats d'essai du correcteur LQG identifié

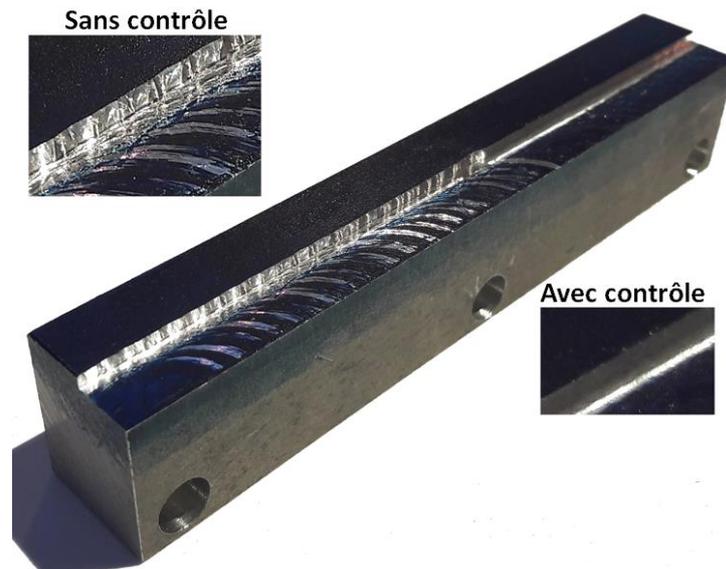


Figure 144 Etat de l'éprouvette après l'essai du fraisage avec/sans contrôle

5. Correcteurs deuxième stratégie du système identifié

a) Simulations

Le correcteur H_∞ calculé suivant la deuxième stratégie à partir du modèle identifié (Figure 145) atténue certes les 2 pics de résonance ; le 1^{er} pic de 33.2 dB et le 2^{ème} de 9 dB mais il ne stabilise pas le système usinant instable avec les paramètres de coupe définis précédemment ($A_p=1.5$ mm) contrairement au correcteur équivalent déterminé suivant la première stratégie. En effet, ce n'est qu'en diminuant les valeurs de quelques paramètres de coupe utilisés tels que l'engagement axial que le correcteur H_∞ de la deuxième stratégie stabilise le système usinant.

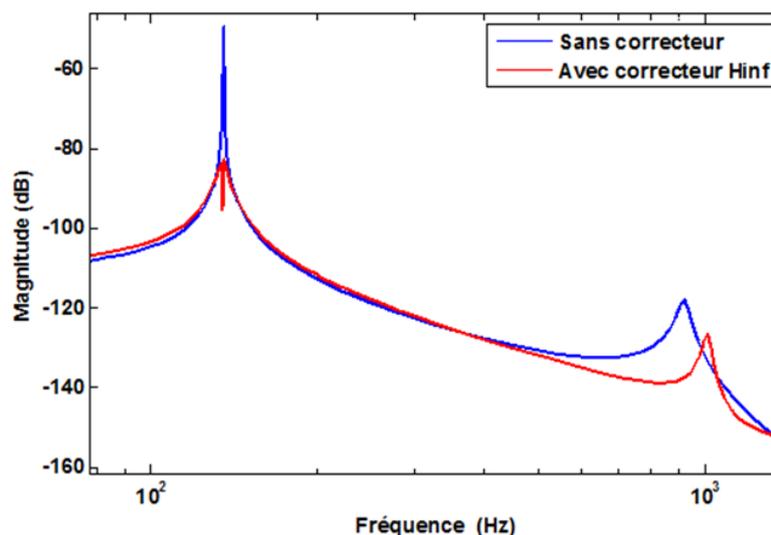


Figure 145 Diagramme de Bode du système usinant avec/ sans correcteur H_∞ de la deuxième stratégie

Ce correcteur LQG obtenu suivant la deuxième stratégie (Figure 146) amortit le 1^{er} pic de résonance de 30.3 dB et le 2^{ème} de 11 dB. Comme le correcteur précédent, il ne réussit pas aussi

à stabiliser le système pour les paramètres de coupe choisis malgré l'amortissement apporté au système.

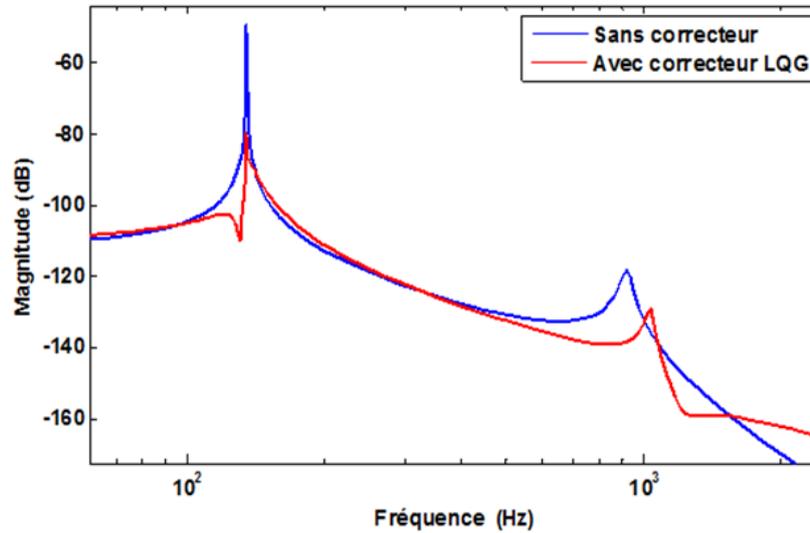


Figure 146 Diagramme de Bode du système usinant avec/ sans correcteur LQG de la deuxième stratégie

Ces deux correcteurs H_∞ et LQG déterminés suivant la deuxième stratégie ne stabilisent pas le système pour les paramètres de coupe définis mais une atténuation de la réponse temporelle du système avec est bien plus visible en présence du correcteur quadratique (LQG) qu'avec le correcteur H_∞ (Figure 147).

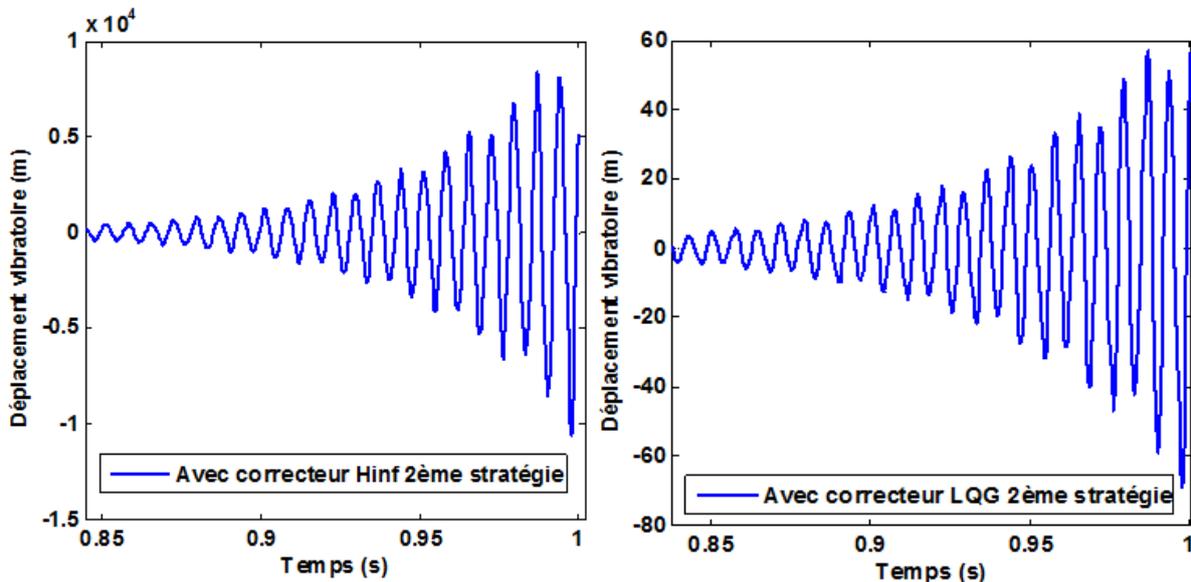


Figure 147 Réponse temporelle du système usinant avec les correcteurs LQG et H_∞ de la deuxième stratégie

Nous avons tracé les lobes de stabilité du système avec le critère de stabilité initial, c'est-à-dire un rms_{max} égale à $2 \cdot 10^{-4}$ (Figure 148). On obtient des lobes visibles du système sans et avec correcteur H_∞ . Mais le critère semble sévère pour le correcteur LQG . On diminue alors la valeur du rms_{max} à $8.5 \cdot 10^{-4}$ (Figure 149, Figure 150). Ensuite on diminue à nouveau la valeur de ce

paramètre ($\text{rmsmax}=10^{-5}$) pour afficher des lobes de stabilité entières du système avec correcteur H_∞ (Figure 151).

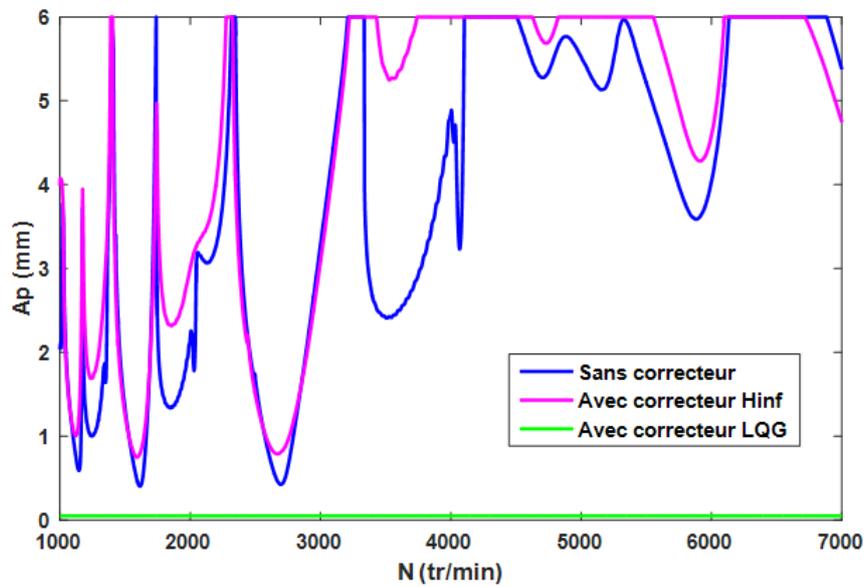


Figure 148 Lobes de stabilité du système usinant avec les correcteurs de la deuxième stratégie ($\text{rmsmax}=2 \cdot 10^{-4}$)

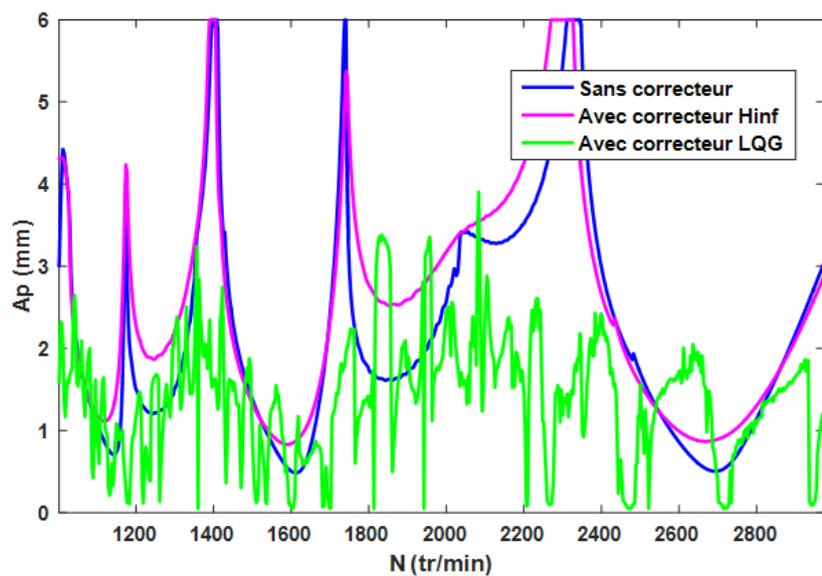


Figure 149 Lobes de stabilité du système usinant avec les correcteurs de la deuxième stratégie ($\text{rmsmax}=8.5 \cdot 10^{-4}$)

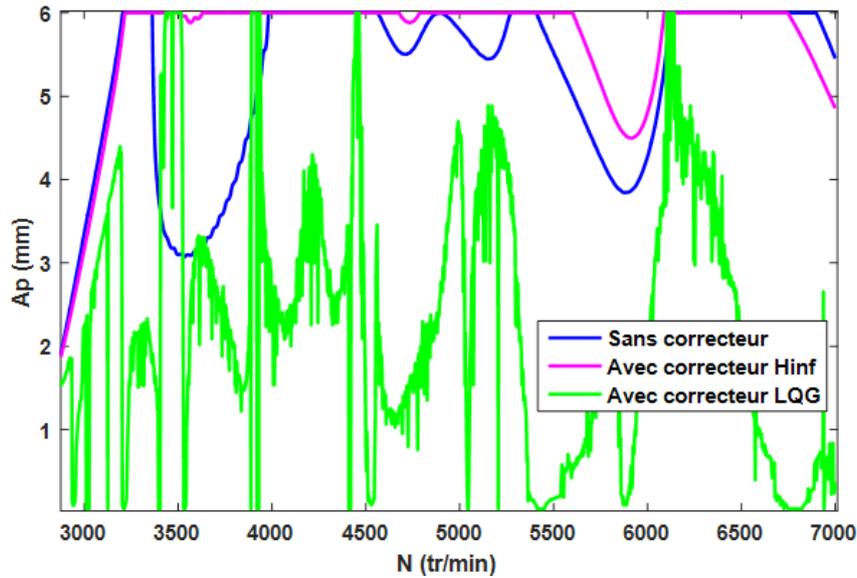


Figure 150 Lobes de stabilité du système usinant avec les correcteurs de la deuxième stratégie ($\text{rmsmax}=8.5 \cdot 10^{-4}$)

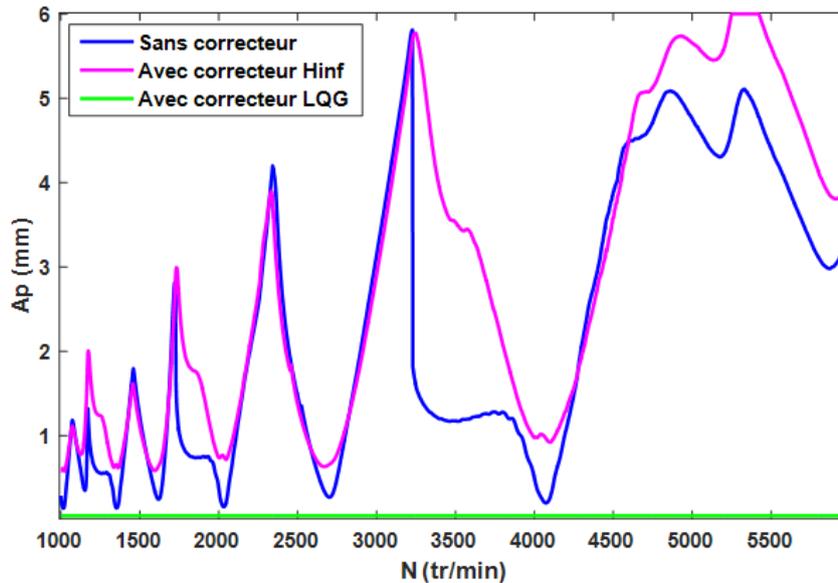


Figure 151 Lobes de stabilité du système usinant avec les correcteurs de la deuxième stratégie ($\text{rmsmax}= 10^{-5}$)

Conclusion

Les correcteurs déterminés suivant la première stratégie donnent de bien meilleurs résultats que ceux obtenus suivant la deuxième stratégie. Pourtant, le calcul de ces derniers tient compte de la perturbation du système (le processus de coupe). L'explication réside dans le fait que l'obtention des correcteurs de la deuxième stratégie repose sur l'approximation du terme retard présent dans le modèle du processus de coupe. En effet, cette approximation est indispensable pour rendre le modèle du système résultant du couplage de la dynamique du système usinant avec le processus de coupe linéaire. Plus l'ordre de cette approximation est élevé, plus le modèle linéaire obtenu se rapproche certes du modèle initial mais plus le calcul devient fastidieux. Dans notre cas on a choisi un ordre égal à 2 (Figure 152).

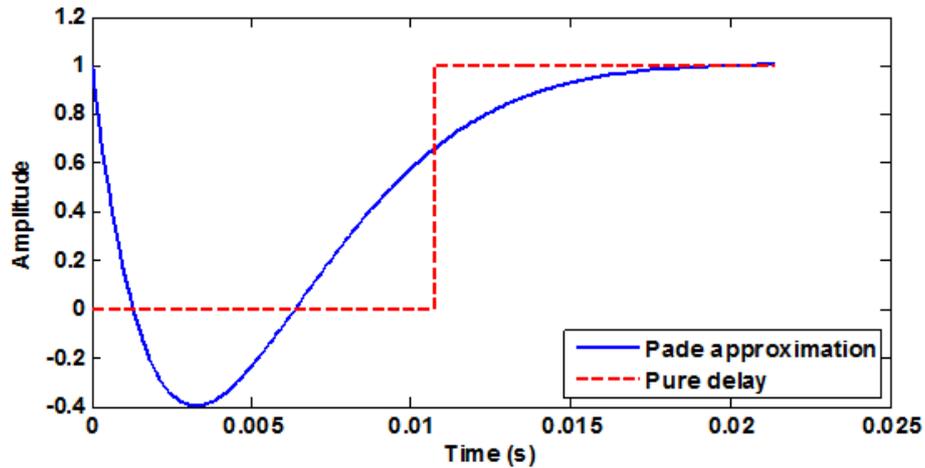


Figure 152 Comparaison de l'approximation linéaire du terme de retard avec la valeur exacte du terme retard

D'un autre côté, les correcteurs calculés suivant la deuxième stratégie intégrant par définition le processus de coupe augmentent le taux d'incertitudes liées au modèle de coupe dans la modélisation globale du système usinant. En plus, ces correcteurs dépendent évidemment des paramètres de coupe rendant le contrôle actif d'une opération de fraisage moins pratique si on change souvent l'un de ces paramètres.

Finalement, les correcteurs déterminés suivant les deux stratégies nous permettent d'affirmer une meilleure performance pour ceux de la première stratégie et une robustesse supérieure pour ceux de la deuxième stratégie. On est donc amenés à faire un compromis entre la performance et la robustesse pour chaque application donnée. Si on envisage une opération de fraisage nécessitant une variation importante de la dynamique du système, alors les correcteurs obtenus suivant la deuxième stratégie seront privilégiés parce qu'on a besoin dans ce cas-là de la robustesse du contrôle plus que de l'efficacité de contrôle. En revanche, si l'opération de fraisage n'entraîne pas un changement important de la dynamique du système, alors on pourrait songer dans ce cas là à utiliser des correcteurs plutôt efficaces que robustes : des correcteurs obtenus suivant la première stratégie. Le choix de la stratégie de contrôle dépend fortement du type d'application, du besoin.