

# Analyse des tolérances de systèmes mécaniques hyperstatiques sans défauts de forme

## Sommaire

1.1	Introduction .....	8
1.2	Analyse des tolérances des mécanismes hyperstatiques.....	10
1.2.1	Modélisation des variations géométriques .....	11
1.2.2	Modélisation du comportement géométrique d'un mécanisme .....	18
1.2.3	Formulation des problèmes d'assemblage et fonctionnel .....	24
1.3	Les différentes méthodes d'analyse des tolérances du projet AHTOLA .....	26
1.3.1	Simulation de Monte Carlo et optimisation .....	26
1.3.2	La méthode FORM pour la résolution du problème fonctionnel .....	29
1.4	Conclusion.....	30

## 1.1 Introduction

Ce chapitre présente une synthèse des travaux sur les méthodes probabilistes de l'analyse des tolérances des systèmes mécaniques hyperstatiques sans défauts de forme, développées principalement dans le projet AHTOLA.

L'analyse des tolérances est un outil d'aide à la décision, utilisé durant la phase de conception pour vérifier le respect des spécifications géométriques et des tolérances des éléments d'un produit au regard des conditions d'assemblage et des conditions fonctionnelles. Globalement, il s'agit de répondre pendant l'analyse des tolérances aux trois questions suivantes :

- comment modéliser les variations géométriques des surfaces d'un mécanisme et les jeux entre deux surfaces potentiellement en contact ?

- comment modéliser le comportement géométrique du système ?
- quels sont les techniques et modèles mathématiques associés à la réalisation de l'analyse des tolérances ?

Pour répondre à ces trois problématiques de l'analyse des tolérances, deux types d'approche sont généralement proposés (voir Figure 0.2) : une approche par accumulation des tolérances et une approche par accumulation des déplacements.

L'approche par accumulation des tolérances est basée sur la méthode d'analyse au pire des cas pour définir des tolérances garantissant la probabilité de rebut égal à zéro. Les dimensions et les tolérances sont définies de telle manière que toutes les combinaisons possibles des pièces du mécanisme assurent son assemblage. Des domaines de variations admissibles sont définis par rapport aux écarts géométriques et aux jeux (domaines écarts et domaines jeux).

Les spécifications géométriques simples sont représentés par :

- les domaines écarts (Giordano et al., 2001; Mansuy et al., 2011; Petit, 2004), des polytopes (Gouyou et al., 2016; L. Homri, 2014) ;
- des T-maps (Davidson et al., 2002; Singh et al., 2013);
- les enveloppes convexes de spécifications (Dantan et Ballu, 2002; Dantan et al., 2005).

Ces concepts sont d'hypothétiques volumes euclidiens qui représentent tous les écarts possibles (la taille, l'orientation et la position des caractéristiques). Pour l'analyse des tolérances, cette représentation mathématique des tolérances permet le calcul de l'accumulation des tolérances par la somme de Minkowski des domaines écarts et jeux. L'utilisation de cette méthode au pire des cas, conduit souvent à des tolérances plus serrées et à des coûts de production élevés à cause du fait que l'occurrence qui permet de calculer les pires des cas soit faible (Hong et Chang, 2002).

L'approche par accumulation des déplacements est quant à elle basée sur la méthode d'analyse statistique. Elle a pour but de déterminer la qualité d'un produit pas le biais d'une probabilité de défaillance ou d'un taux de rebut (Beucaire et al., 2013; J-Y Dantan, A-J Qureshi, 2009; Morse, 2004; Nigam et Turner, 1995). Les écarts géométriques sont modélisés par des variables aléatoires qui suivent des distributions statistiques. Les paramètres des jeux sont modélisés par des variables libres et constituent les inconnues à identifier pour déterminer les configurations possibles d'assemblage et de fonctionnement du système mécanique. L'utilisation de la

méthode d'analyse statistique conduit à des tolérances plus larges. Les coûts de productions basées sur cette méthode sont moins élevés et les produits sont d'une qualité optimale (Hong et Chang, 2002). Cette méthode de l'analyse statistique a été déployée tout au long du projet AHTOLA dans le cadre des travaux de Dumas (2014).

L'analyse statistique des tolérances constitue la méthode de base du projet AHTOLA et elle représente la méthode qui est décrite dans ce chapitre pour l'étude des systèmes mécaniques hyperstatiques. Les méthodes d'analyse statistique ont été appliquées dans de nombreux travaux à de différents types de mécanisme : isostatique et hyperstatique. Les mécanismes isostatiques sont plus simples à étudier. L'étude des mécanismes hyperstatiques est plus complexe (Ballu et al., 2008). Plus récemment, Dumas *et al.* (2015a) ont proposé une démarche d'analyse statistique des tolérances des systèmes hyperstatiques avec jeux.

L'approche statistique permet d'évaluer les probabilités de respect des contraintes liées à l'assemblage et à la fonctionnalité d'un système mécanique et cela par le calcul des deux probabilités associées (Dumas, 2014; J-Y Dantan, A-J Qureshi, 2009).

Les travaux développés dans la littérature sont basés sur certaines hypothèses fortes qu'il est nécessaire d'énumérer :

- les défauts de forme des pièces sont négligés, ainsi, les surfaces considérées dans l'analyse sont les surfaces de substitution ;
- Les solides sont considérés comme rigides ;
- Les rotations entre les surfaces et les pièces sont supposées petites.

La prochaine section décrit les étapes ayant permis de calculer les probabilités de non-assemblage et de non-fonctionnalité, permettant ainsi de réaliser l'analyse des tolérances des systèmes hyperstatiques dans le cadre du projet AHTOLA.

## **1.2 Analyse des tolérances des mécanismes hyperstatiques**

L'objectif de cette section est de présenter les trois problématiques de l'analyse des tolérances :

- la modélisation des écarts géométriques inhérents aux processus de fabrication et les jeux entre les pièces ;
- la modélisation du comportement géométrique du système ;
- le développement de techniques d'analyse pour évaluer la qualité du système.

La sous-section 1.2.1 est consacrée à la définition des différentes variations géométriques ainsi que la technique de modélisation choisie. La sous-section 1.2.2 décrit les étapes de modélisation du comportement géométrique d'un système mécanique. Ces étapes sont constituées de plusieurs formulations mathématiques qui sont présentées en détail. Enfin la sous-section 1.2.3 présente la formalisation mathématique des problèmes d'assemblage et fonctionnel.

### **1.2.1 Modélisation des variations géométriques**

Les variations géométriques représentent les écarts observés entre une surface dite idéale (une surface parfaite sans défauts) et une surface non-idéale (une surface avec des imperfections). Il est donc nécessaire de maîtriser ces variations géométriques afin d'apporter des garanties sur la qualité des produits. Il existe plusieurs modèles de surfaces comme le stipule la norme ISO17450-1 et peuvent être regroupés en trois groupes (voir Figure 1.1) :

- Le modèle nominal est une surface parfaite, sans défauts et constitue l'intention du concepteur.
- Le skin modèle représente la surface non-idéale ou la surface réelle des pièces fabriquées qui sont sujettes à toutes les imperfections causées durant le processus de fabrication, de mesure et d'assemblage [ISO17450-1]. C'est une surface non-idéale qui représente l'interface physique de la pièce avec son environnement (Ballu et Mathieu, 1996; Charpentier et al., 2012).
- Le modèle de substitution représente une surface souvent utilisée pour approximer la surface non-idéale. C'est une représentation de la surface non-idéale pilotée par un nombre fini de paramètres qui assurent un compromis entre le niveau de détail, la difficulté de calcul et la validité des résultats. Les orientations et les positions de ce modèle dépendent de la surface réelle (Dantan, 2000). Plusieurs choix sont disponibles pour obtenir la surface de ce modèle : la tangente à l'intérieur de matière, la tangente à l'extérieur de matière et la méthode des moindres carrés (Dumas, 2014). C'est ce modèle de substitution qui est utilisé dans l'analyse des tolérances de ce chapitre.

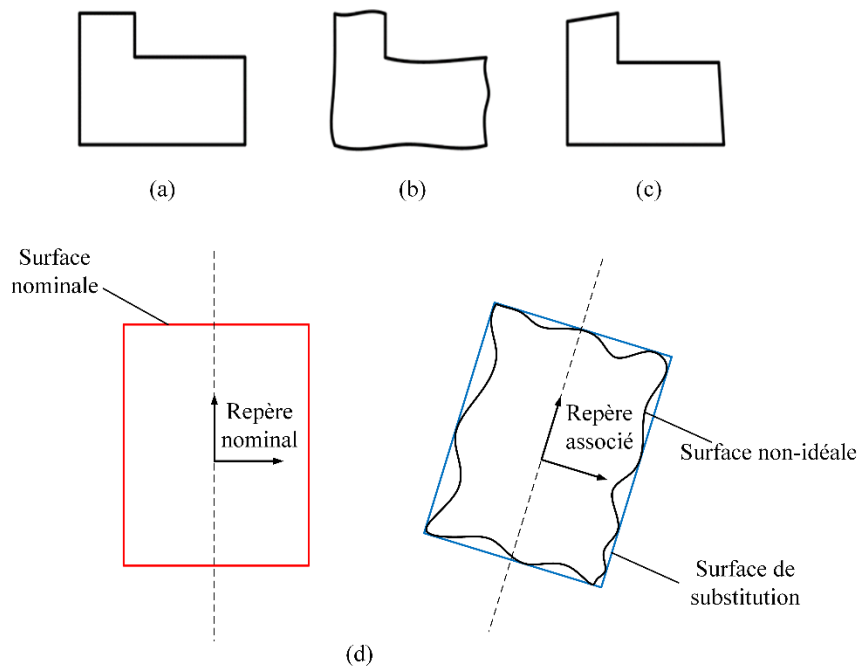


Figure 1.1 : (a) Surface nominale, (b) Surface non-idéale, (c) Surface de substitution, (d) différents types de surface pour une surface nominale cylindrique (Dumas, 2014)

Les écarts géométriques observés sur les surfaces des pièces fabriquées et dans un mécanisme sont de caractéristiques et natures différentes. On distingue : les écarts intrinsèques, les écarts de situation et les jeux entre les surfaces des liaisons et les caractéristiques fonctionnelles.

**Les écarts intrinsèques** sont comme le nom l'indique, intrinsèques à la surface, ils dépendent du type de surface, ils représentent les variations des paramètres intrinsèques des surfaces de substitution comme le cas de la variation du rayon pour une surface cylindrique (Dantan, 2000). Plus précisément, la variation intrinsèque du cylindre constitue la variation du rayon entre la surface de substitution du cylindre et la surface nominale du cylindre (Qureshi et al., 2012).

**Les écarts de situation** définissent les déplacements en position, en orientation d'une surface de substitution par rapport à sa surface nominale (Dantan, 2000). Ils sont composés des défauts de translations, de rotations. Ce sont ces écarts de situation ajoutés aux écarts intrinsèques qui décrivent les écarts entre la surface nominale et la surface de substitution.

**Les jeux** constituent les déplacements en position et en orientation entre deux surfaces de substitution, qui sont nominalelement en contact. Leur présence est indispensable dans un mécanisme hyperstatique afin que ce dernier puisse s'assembler ou fonctionner.

La première problématique de l'analyse des tolérances consiste à modéliser mathématiquement à la fois les différents écarts des surfaces et les jeux au niveau des contacts. Ainsi, de nombreux outils ou modèles mathématiques existent dans la littérature permettant de modéliser ces écarts :

- *avec des vecteurs ou le tolérancement vectoriel* (Chase et Parkinson, 1991) ;
- *par les torseurs de petits déplacements* (Bourdet et al., 1996; Dantan et al., 2005; Dumas et al., 2015b; Qureshi et al., 2012; Sergent et al., 2011) ;
- *par les matrices* (Gupta et Turner, 1993; Roy et Li, 1999; Zou et Morse, 2004) ;
- *par l'approche cinématique* (M-H Kyung, E. Sacks, 2003; Sacks et Joskowicz, 1997).

Dans le projet AHTOLA, l'approche retenue est basée sur le *torseur de petits déplacements*. Le concept du torseur de petits déplacements a été proposé par Bourdet *et al.* (1996) pour caractériser les défauts géométriques des surfaces usinées en métrologie et en fabrication. Cependant, différents outils et modèles d'analyse peuvent être déployés avec d'autres modélisations des écarts et des jeux. Le concept du torseur de petits déplacements est basé sur le mouvement des solides rigides. Il modélise l'ensemble des déplacements en tout point. Plusieurs types de torseurs ont été définis pour représenter les différents types de défauts géométriques et jeux dans un mécanisme (Ballot, 1995; Petit, 2004) :

- Le torseur écart : il permet de décrire les déplacements relatifs d'une surface nominale rigide par rapport à la surface de substitution associée à la surface réelle (Dantan, 2000);
- Le torseur jeu : il permet de décrire les déplacements relatifs d'une surface de substitution par rapport à une autre surface de substitution ; ces deux surfaces de substitution étant nominale en contact (Ballot, 1995; Giordano et Duret, 1993);
- Le torseur défaut : il permet de décrire les déplacements relatifs entre deux ou plusieurs surfaces d'une même pièce (Giordano et Duret, 1993);
- Le torseur pièce : il permet de décrire les déplacements entre une pièce nominale et un repère global fictif (Ballot, 1995).

Dans le cadre du projet AHTOLA, deux torseurs sont principalement utilisés pour modéliser les variations géométriques dans la démarche de l'analyse des tolérances : les torseurs écarts et les torseurs jeux. Ces deux concepts sont ainsi détaillés.

*Le torseur écart* décrit les déplacements d'orientation et de position d'une surface de substitution par rapport au repère de référence associé à sa géométrie nominale (voir Figure 1.2). Il est défini en un point spécifique du repère. Deux vecteurs sont utilisés afin de former

les composantes de ce torseur écart : le vecteur des petites rotations  $\mathbf{R} = (\alpha, \beta, \gamma)$  et le vecteur des petites translations  $\mathbf{T}_M = (u_M, v_M, w_M)$  représentant respectivement les rotations autour des trois axes Ox, Oy et Oz et les translations du point  $M$  suivant ces trois axes. Certaines des composantes de ce torseur écart peuvent être nulles lorsqu'elles sont associées à des degrés d'invariance de la surface considérée. Les degrés d'invariance représentent les directions dans lesquelles la rotation ou la translation ne change pas globalement la position ou l'orientation de la surface. Le tableau 1.1 présente les degrés d'invariance de différentes classes de surfaces (plan, cylindre, sphère, cône, tore). Un torseur écart d'une surface  $a$  dans une pièce  $i$  et écrit en un point  $M$  peut être généralement exprimé par :

$$\{T_{ia/i}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{iai} & u_{iai,M} \\ \beta_{iai} & v_{iai,M} \\ \gamma_{iai} & w_{iai,M} \end{Bmatrix}_M \quad (1.1)$$

Par exemple, le torseur écart d'une surface cylindrique d'axe Oz (voir Figure 1.2) est donné

$$\text{par : } \{T_{3c/3}\} = \begin{Bmatrix} \alpha_{3c3} & u_{3c3,M} \\ \beta_{3c3} & v_{3c3,M} \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_M .$$

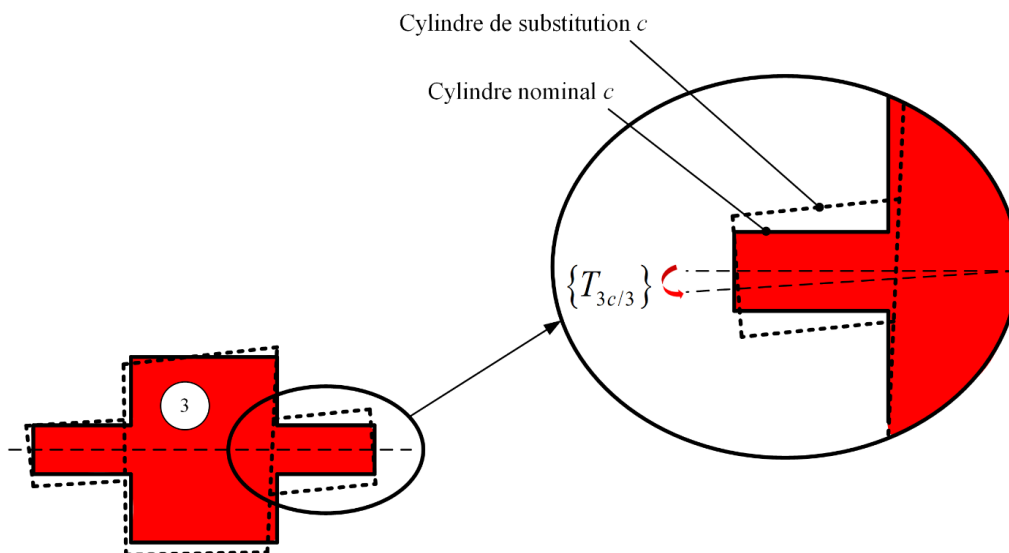
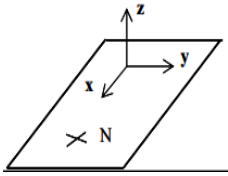
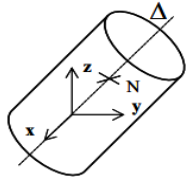
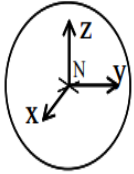
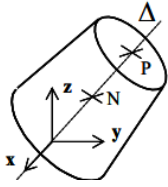
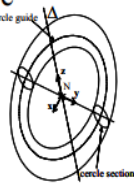


Figure 1.2 : Représentation du torseur écart pour une surface cylindrique

Le Tableau 1.1 présente la caractérisation des 5 surfaces par rapport à leur degré d'invariance et leur torseur écart, souvent rencontrées en tolérancement.

Tableau 1.1 : Classes de surface avec leur degré d'invariance et la représentation de leur torseur écart

Surface de substitution S	Classe d'invariance	Degrés d'invariance	Elément de situation	Torseur écart
<p>Plan</p> 	Plane	<p>1 rotation <b>z</b> (<math>\gamma</math>)</p> <p>2 translations <b>x</b> et <b>y</b> (<math>u, v</math>)</p>	S	$\{T\}_M = \begin{Bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & 0 \\ 0 & w \end{Bmatrix}$
<p>Cylindre</p> 	Cylindrique	<p>1 rotation <b>x</b> (<math>\alpha</math>)</p> <p>1 translation <b>x</b> (<math>u</math>)</p>	$\Delta$ : axe de S	$\{T\}_M = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{Bmatrix}$
<p>Sphère</p> 	Sphérique	<p>3 rotations <b>x, y, z</b> (<math>\alpha, \beta, \gamma</math>)</p>	N : centre de S	$\{T\} = \begin{Bmatrix} 0 & u \\ 0 & v \\ 0 & w \end{Bmatrix}$
<p>Cône</p> 	Surface de révolution	<p>1 rotation <b>x</b> (<math>\alpha</math>)</p>	<p><math>\Delta</math>: axe de S</p> <p>P : centre de la petite base</p>	$\{T\} = \begin{Bmatrix} 0 & u \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{Bmatrix}$
<p>Tore</p> 	Surface de révolution	<p>1 rotation <b>x</b> (<math>\alpha</math>)</p>	<p><math>\Delta</math>: axe de S</p> <p>N : centre du cercle guide</p>	$\{T\} = \begin{Bmatrix} 0 & u \\ \beta & v \\ \gamma & w \end{Bmatrix}$



Le *torseur jeu* comme le *torseur écart*, est défini dans une base vectorielle donnée et en un point donné. Un *torseur jeu* représente le déplacement possible en position et en orientation d'une surface de substitution par rapport à une autre des deux pièces potentiellement en contact. L'expression d'un *torseur jeu* entre une surface  $b$  sur la pièce  $i$  et une surface  $b$  sur la pièce  $j$  est donnée par :

$$\left\{ \mathbf{g}_{ib/jb} \right\}_M = \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{ibjb} \mathbf{u}_{ibjb} \\ \beta_{ibjb} \mathbf{v}_{ibjb} \\ \gamma_{ibjb} \mathbf{w}_{ibjb} \end{array} \right\}_{R_0} \quad (1.2)$$

La Figure 1.3 représente le *torseur jeu* entre deux surfaces cylindriques nominale-ment en contact et d'axe Oz.

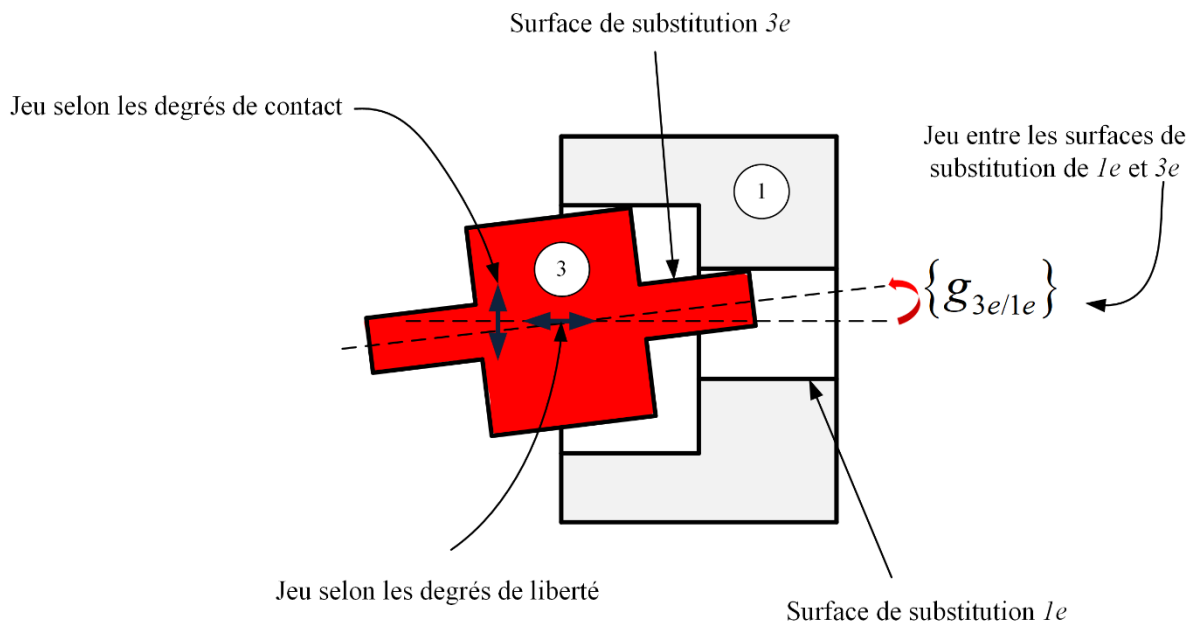


Figure 1.3 : Représentation de jeu entre deux pièces

Les composantes des six degrés de liberté composant ce *torseur jeu*  $\{g_{1a/2a}\}_M$  dépendent de la nature du contact et doivent être déterminées par une méthode d'analyse (Dantan et Ballu, 2002). En effet, il existe 3 types de contacts, souvent rencontrés dans les systèmes mécaniques (Dantan, 2002; Dantan et Ballu, 2002) (voir Figure 1.4) : les contacts fixes, les contacts glissants et les contacts flottants.

Les contacts fixes possèdent des surfaces en contact maintenues dans une position particulière grâce à une contrainte mécanique qui empêche tout déplacement relatif des deux surfaces lors d'une utilisation du mécanisme. Les composantes du torseur jeu dans ce type de contact sont fixées à zéro dans l'hypothèse où les surfaces sont considérées sans défauts de forme.

Les contacts glissants ont également leurs surfaces de liaison aussi maintenues par une action mécanique qui laisse admissible les déplacements tangentiels lors d'une utilisation normale ; les déplacements relatifs non tangentiels (déplacements normaux, déplacements par rapport aux normales des surfaces en liaison) ne sont pas possibles. Les composantes du torseur jeu dans le cas d'un contact glissant sont ceux des déplacements cinématiques i.e. des déplacements qui sont possibles. Les autres composantes sont fixées à zéro ou à des valeurs spécifiques connues.

Les contacts flottants sont des contacts où tous les déplacements relatifs des deux surfaces sont possibles (déplacements tangentiels et normaux). Le torseur jeu d'un contact flottant possède toutes les composantes des six degrés de liberté qui sont inconnus.

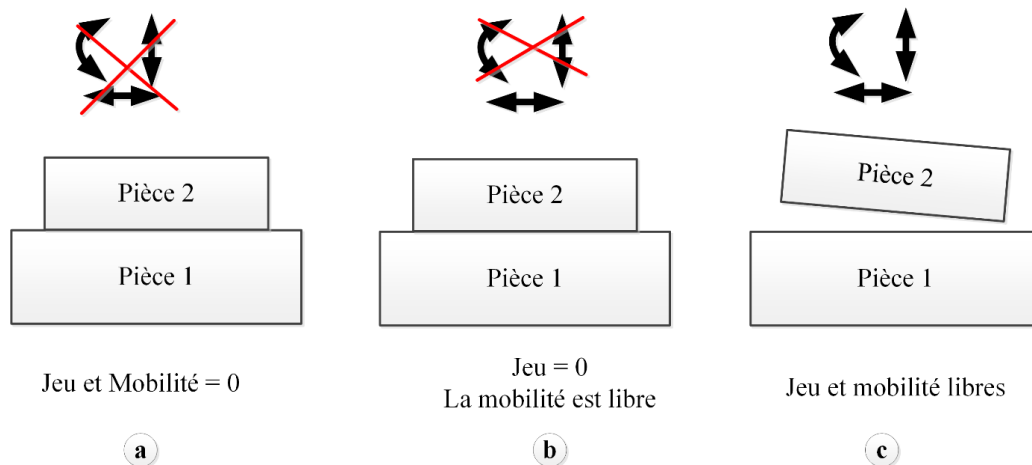


Figure 1.4 : (a) contact fixe, (b) contact glissant, (c) contact flottant (Dantan et Ballu, 2002)

Les caractéristiques fonctionnelles décrivent les déplacements en position, en orientation entre deux surfaces de substitution qui sont fonctionnellement en relation (Dantan, 2000; Dantan et Qureshi, 2009). Elles sont aussi modélisées à l'aide de torseurs jeu nommés torseurs jeux fonctionnels.

Toutes les composantes de ces variations géométriques présentées ci-dessus sont incluses dans la définition des contraintes modélisant le comportement géométrique d'un système mécanique.

**Synthèse** : cette première partie a permis de définir les écarts géométriques et le concept du jeu rencontrés dans les systèmes mécaniques hyperstatiques. Le concept du torseur de petits déplacements est la méthode choisie pour modéliser les écarts géométriques et les jeux grâce aux torseurs écarts et aux torseurs jeux. Les composantes des torseurs écarts caractérisent les écarts de situation. Ces composantes et les écarts intrinsèques constituent les écarts géométriques et sont représentés par  $\mathbf{X}$ . L'ensemble des composantes des torseurs jeux est représenté par  $\mathbf{G}$ . Ces notations sont adoptées pour la suite de la présentation des travaux de ce chapitre.

Cependant, l'ensemble  $\mathbf{G}$  subira une modification dans sa définition dans le cadre des travaux de thèse qui suivront. Plus amples informations concernant les notations utilisées dans ce manuscrit peuvent être trouvées dans l'annexe A. Une distinction est faite par rapport aux composantes des torseurs jeux des contacts fixes et glissants d'une part, et des composantes des torseurs jeux des contacts flottants d'autre part.

## **1.2.2 Modélisation du comportement géométrique d'un mécanisme**

La modélisation mathématique des interactions entre les différentes pièces d'un système mécanique permet de construire son modèle de comportement. Ainsi, un ensemble de contraintes permet de traduire mathématiquement le comportement géométrique d'un système mécanique : les équations de compatibilité, les contraintes d'interface et les conditions fonctionnelles.

### **1.2.2.1 Les équations de compatibilité**

Les équations de compatibilité représentent les contraintes sur les déplacements inhérentes aux boucles topologiques (Ballot et Bourdet, 1998; Dantan et Ballu, 2002; Dantan et al., 2005). Elles représentent donc les relations de compatibilité entre les écarts et les jeux. L'ensemble des équations de compatibilité forment un système d'équations linéaires. Ces équations permettent de modéliser la propagation des défauts géométriques et des jeux dans un assemblage. En effet, dans un mécanisme, les défauts d'une pièce ont des influences sur une autre pièce. Il est donc nécessaire d'écrire les équations reliant ces différents écarts et jeux pour caractériser l'équilibre entre les positions et les orientations entre les différentes pièces dans le

mécanisme. L'ensemble des équations de compatibilité est identifiée par une relation de la forme :  $C_c(\mathbf{X}, \mathbf{G}) = 0$ .

La structure topologique d'un système mécanique est modélisé par un graphe (Ballu et Mathieu, 1999; L. Homri, 2014). Un graphe est composé de plusieurs cycles. Un cycle est défini comme une chaîne finie qui part d'un sommet pour en finir à ce même sommet et correspond à une boucle topologique (voir Figure 1.5). Chaque cycle du graphe permet d'écrire 6 équations de compatibilité, chacune écrite suivant les axes de chaque composante des torseurs (3 translations et 3 rotations).

Pour la formalisation, les torseurs des équations de compatibilité doivent être définis tous au même point du repère. Les torseurs qui ne le sont pas, peuvent être ramenés à ce point commun en utilisant la relation de Varignon.

Le nombre de boucle topologique dans un graphe nécessaire pour formuler les équations de compatibilité d'un système mécanique est donné par la relation :

$$N_{boucles} = N_{liaisons} - N_{pièces} + 1 \quad (1.3)$$

En se basant sur la boucle topologique identifié dans la Figure 1.5 par la flèche bleue, les équations de compatibilité peuvent être ainsi développées faisant appel généralement à la relation de Chasles sur les déplacements (Dantan, 2000).

Les équations de compatibilité de la boucle topologique considérée dans graphe d'assemblage (exemple, Figure 1.5) et exprimés au point M, sont données par les équations suivantes :

$$\{T_{3/3}\} = \{T_{3/3e}\}_M + \{g_{3e/1e}\}_M + \{T_{1e/1}\}_M + \{T_{1/1d}\}_M + \{g_{1d/3d}\}_M + \{T_{3d/3}\}_M = 0 \quad (1.4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\alpha_{3e3} + \alpha_{3e1e} + \alpha_{1e1} - \alpha_{1d1} - \alpha_{3d1d} + \alpha_{3d3} = 0 \\ -\beta_{3e3} + \beta_{3e1e} + \beta_{1e1} - \beta_{1d1} - \beta_{3d1d} + \beta_{3d3} = 0 \\ \gamma_{3e1e} - \gamma_{3d1d} = 0 \\ -u_{3e3} + u_{3e1e} + u_{1e1} - u_{1d1} - u_{3d1d} + u_{3d3} = 0 \\ -v_{3e3} + v_{3e1e} + v_{1e1} - v_{1d1} - v_{3d1d} + v_{3d3} = 0 \\ w_{3e1e} - w_{3d1d} = 0 \end{array} \right. \quad (1.5)$$

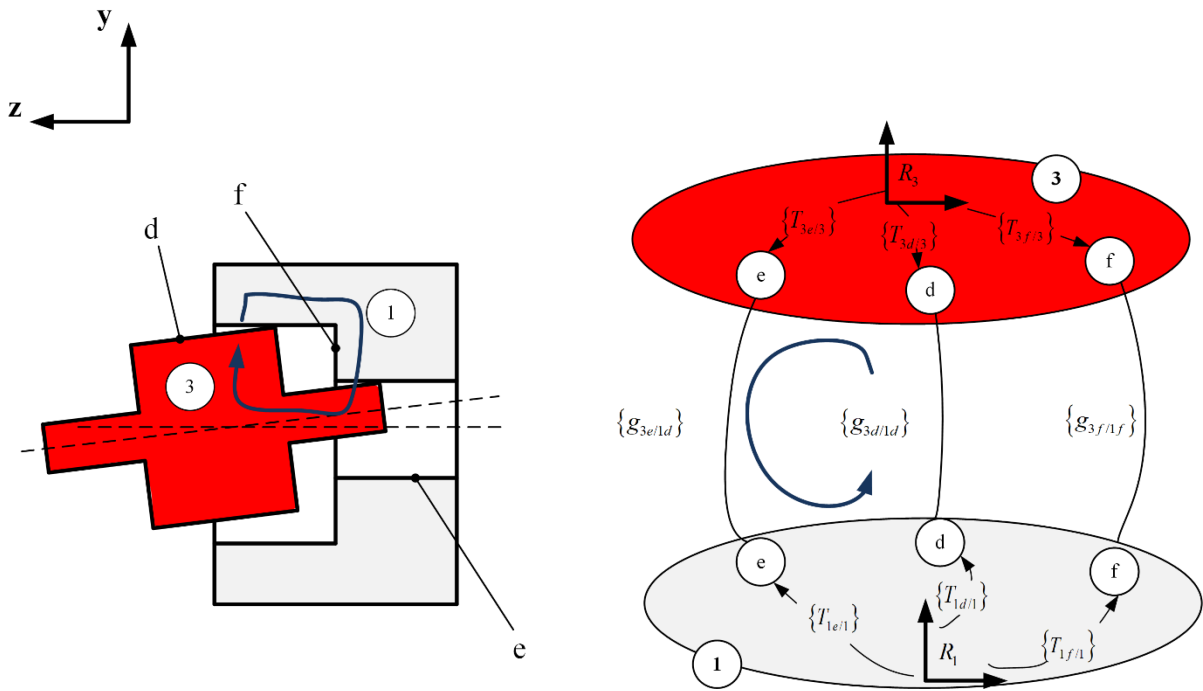


Figure 1.5 : Boucle topologique et graphe d'assemblage d'un mécanisme

Après la définition des compositions de déplacements entre les différentes pièces d'un mécanisme, il faut dans un second temps modéliser mathématiquement, le second phénomène physique qui correspond aux conditions de non-interpénétration entre les surfaces potentiellement en contact.

### 1.2.2.2 Les contraintes d'interface

Les contraintes d'interface limitent les déplacements relatifs des deux surfaces de substitution d'une liaison et caractérisent la non-interpénétration ou association entre les surfaces de substitution qui sont nominalement en contact (Dantan, 2000; Dumas et al., 2015b; Gaunet, 1994; Giordano et Duret, 1993; Qureshi et al., 2012; Roy et Li, 1999). Les jeux entre deux surfaces de substitution sont donc limités. Développer les contraintes d'interface revient à développer des inégalités ou égalités limitant ces jeux. Dans le cas d'un contact flottant (Dantan et Ballu, 2002), les positions relatives des surfaces de substitution sont contraintes technologiquement par la non-interpénétration. Les contraintes d'interface sont alors identifiées par :  $C_i(\mathbf{X}, \mathbf{G}) \leq 0$ . Dans le cas d'un contact fixe ou glissant, les positions relatives sont

technologiquement contraintes dans une configuration donnée par une action mécanique. Par conséquent, les contraintes d'interface sont identifiées dans ce cas par :  $C_{i^s}(\mathbf{X}, \mathbf{G}) = 0$ .

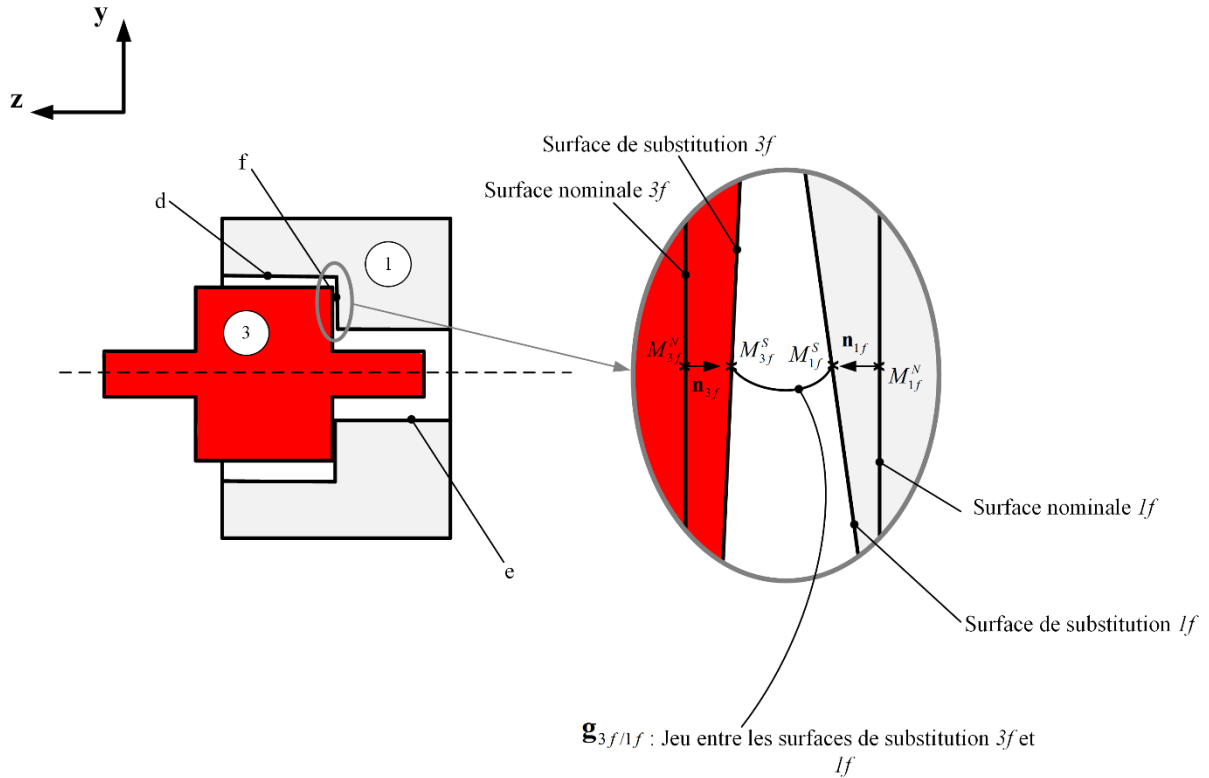


Figure 1.6 : Contrainte de non-interpénétration entre deux surfaces

En prenant l'exemple de la Figure 1.6, les contraintes d'interface peuvent être développées entre les surfaces  $3f$  et  $1f$ , en utilisant l'inégalité suivante :

$$\mathbf{M}_{3f}^S \cdot \mathbf{M}_{1f}^S \cdot \mathbf{n}_{3f} \geq 0 \quad (1.6)$$

Pour des pièces rigides sans défaut de forme, les contraintes d'interface peuvent être écrites seulement aux points extrêmes de chaque élément de contact. Dans le cas d'un contact flottant entre deux surfaces planes avec jeu, les contraintes d'interface sont écrites uniquement au niveau des points des extrémités (A, B, C et D, voir Figure 1.7a).

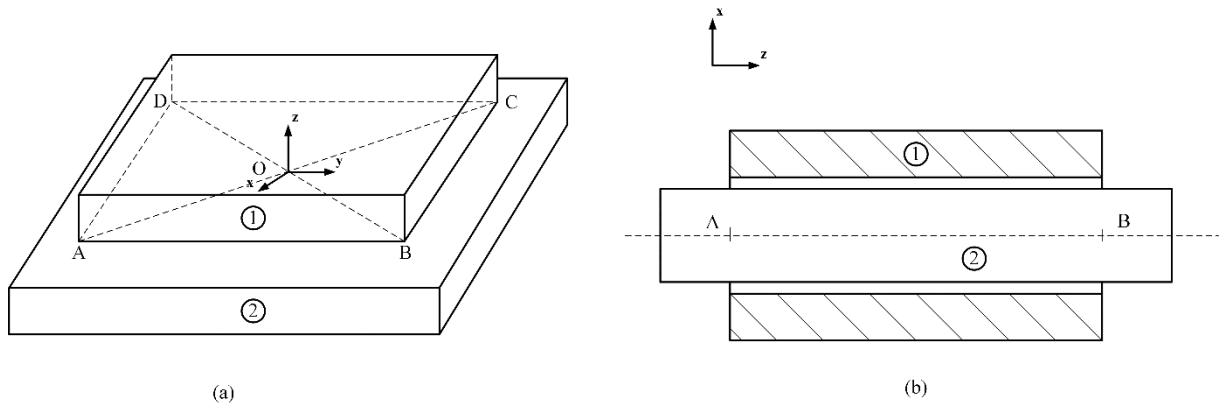


Figure 1.7 : Considération des points d'écriture des contraintes d'interface : (a) contact flottant plan-plan, (b) contact flottant cylindre-cylindre (Dantan, 2000)

Si les contraintes d'interface sont vérifiées au niveau de ces points du contour de l'élément de contact alors elles sont vérifiées pour l'ensemble des points de la surface de contact (Dantan, 2000). De même pour le contact flottant cylindre-cylindre (voir Figure 1.7b), les contraintes d'interface sont uniquement développées aux points extrêmes A et B. La vérification de ces contraintes d'interface à ces points signifie qu'elles sont aussi vérifiées à tous les points du cylindre de contact.

L'écriture des contraintes d'interface peut parfois conduire à des contraintes non-linéaires sous forme quadratique qui nécessitent d'être linéarisées pour la suite de l'analyse des tolérances et cela par souci de simplification des calculs et aussi pour avoir un ensemble de contraintes (de compatibilité et d'interface) linéaires. Un exemple de linéarisation des contraintes d'interface a été développé au cours des travaux de Dumas (2014) et permet de n'avoir que des équations et inéquations linéaires. Par exemple, dans le cas d'un contact pivot glissant (voir Figure 1.7b), la contrainte d'interface peut être donnée par l'inéquation :

$$C_i(u, v) = u^2 + v^2 - \Delta R^2 \quad (1.7)$$

où  $u$  et  $v$  représentent les composantes de jeux représentant les translations suivant l'axe Ox et Oy et  $\Delta R$  représente la différence de rayon entre l'alésage et l'arbre.

La linéarisation développée par Dumas *et al.* (2015b), consiste à discrétiser le cercle de déplacement possible en polygone dont le nombre de facette dépend d'un paramètre  $N_d$ . La méthode de linéarisation du premier ordre du développement de Taylor de la fonction de

contrainte d'interface ( $C_i$ ), est utilisée en un point  $M_k$  de coordonnées

$$(x_{M_k} = \Delta R \cdot \cos \theta_k, y_{M_k} = \Delta R \cdot \sin \theta_k) \text{ où } \theta_k = \frac{2k\pi}{N_d}, \text{ et } k = 1, \dots, N_d .$$

La contrainte d'interface quadratique peut être linéarisée comme suit :

$$C_i(u, v) = u \cdot \cos \theta_k + v \cdot \sin \theta_k \leq \Delta R \text{ avec } \theta_k = \frac{2k\pi}{N_d}, \text{ et } k = 1, \dots, N_d \quad (1.8)$$

### 1.2.2.3 Les conditions fonctionnelles

Une condition fonctionnelle décrit une aptitude à l'emploi (montabilité, étanchéité, ...). Elle se traduit par des contraintes géométriques sur les surfaces appelées "surfaces fonctionnelles" : jeu minimum, ajustement, condition de non dépassement de pièces, réserve de filetage dans un assemblage vissé, garantie de longueur suffisante pour un guidage, un centrage etc. Ce sont des exigences sur le déplacement relatif entre des surfaces en condition fonctionnelle. Une condition fonctionnelle est identifiée par :  $C_f(\mathbf{X}, \mathbf{G}) \geq 0$ . L'ensemble  $\mathbf{G}$  de cette inégalité, comporte les composantes du torseur jeu fonctionnel.

Une condition fonctionnelle peut être exprimée à l'aide d'un domaine qui modélise les déplacements possibles de la surface fonctionnelle à l'intérieur de sa zone des tolérances associée (dans le cas de l'approche par accumulation des tolérances) (Ameta et al., 2011; Mansuy, 2012) ou à l'aide des contraintes représentées grâce aux inéquations qui limitent les déplacements de la surface fonctionnelle dans un intervalle donné (dans le cas de l'approche par accumulation des déplacements) (Dumas et al., 2015b). Les conditions fonctionnelles d'une surface dont les déplacements sont contraints dans un intervalle  $I = [I_{\min}, I_{\max}]$  sont traduites généralement par les inéquations :

$$\begin{cases} C_f - I_{\min} \geq 0 \\ -C_f + I_{\max} \geq 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

Des formalisations mathématiques des conditions d'assemblage et de fonctionnalité ont été développées par Dantan *et al.* (2005). Ces formalisations ont pour objectif d'évaluer les probabilités de non-assemblage et de non-fonctionnalité d'un système mécanique.



**Synthèse** : la modélisation du comportement géométrique d'un système mécanique est traduite mathématiquement par un ensemble de contraintes : les équations de compatibilité, les contraintes d'interfaces et les conditions fonctionnelles. La modélisation du comportement géométrique d'un système mécanique permet de décrire deux phénomènes :

- la composition des déplacements dans les boucles topologiques. Ainsi, les écarts géométriques et les jeux du système mécanique sont liés entre eux. Les équations de compatibilité permettent de décrire ce phénomène ;
- la non-interpénétration de matière qui est traduite par les contraintes d'interface.

Cet ensemble de formulations mathématiques constitue les contraintes des optimisations qui sont réalisées lors de l'analyse des tolérances.

Cependant, dans le cadre des travaux de thèse actuels, une attention particulière est portée sur les contraintes d'interface. Les défauts de forme qui sont intégrés ont un impact sur la modélisation de ces contraintes d'interface.

### 1.2.3 Formulation des problèmes d'assemblage et fonctionnel

L'analyse des tolérances par approche d'accumulation des déplacements a pour but d'estimer la qualité d'un produit au moyen d'un indicateur. Les indicateurs dans le projet AHTOLA représentent les probabilités de non-assemblage et de non-fonctionnalité. Des formalisations mathématiques de ces conditions ont été proposées par Dantan *et al.* (2005) à l'aide des notions de quantificateurs (' $\exists$ ' (il existe) et ' $\forall$ ' (pour tout)).

- **Condition d'assemblage - Probabilité de non assemblage**

Une condition d'assemblage d'un mécanisme exige d'identifier les positions des pièces d'un système mécanique tel qu'elles puissent s'assembler. La condition d'assemblage peut être traduite par (Dantan, 2000; Dantan et al., 2005; Qureshi et al., 2012): « *Il existe une configuration des jeux du mécanisme telle que les équations de compatibilité et les contraintes d'interface soient respectées* ». **Une configuration** est une position relative particulière entre les pièces d'un mécanisme permettant la non-interférence entre les surfaces dans le contact. La condition d'assemblage ou de montabilité peut être mathématiquement exprimée par :

$$\exists \mathbf{G} \in \{ \mathbf{G} \in \mathbf{R}^m : C_c(\mathbf{X}, \mathbf{G}) = 0 \cap C_i(\mathbf{X}, \mathbf{G}) \leq 0 \cap C_f(\mathbf{X}, \mathbf{G}) = 0 \} \quad (1.10)$$

La probabilité de non-assemblage  $P_{na}$  peut ainsi être formalisée de la manière suivante (Dumas et al., 2015c) :

$$P_{na} = 1 - \text{Prob}(\exists \mathbf{G} \in \mathbb{R}^m \text{ tel que } C_c(\mathbf{X}, \mathbf{G}) = 0 \cap C_i(\mathbf{X}, \mathbf{G}) \leq 0 \cap C_i(\mathbf{X}, \mathbf{G}) = 0) \quad (1.11)$$

Le calcul de la probabilité de non assemblage découle de la résolution d'un problème d'optimisation où la fonction objectif est fonction des composantes des torseurs et les contraintes à respecter : les équations de compatibilité, les contraintes d'interfaces. Dans ce problème d'optimisation, les valeurs des composantes des torseurs jeux qui sont trouvées ne sont pas importantes car c'est juste leur existence qui est vérifiée. Leur existence traduit l'existence d'une configuration de jeux telle que les pièces s'assemblent.

- **Condition fonctionnelle - Probabilité de non fonctionnalité**

(Dantan, 2000; Dantan et al., 2005; Qureshi et al., 2012) proposent la définition suivante pour une condition fonctionnelle respectée : « Pour toutes les configurations admissibles du mécanisme, les conditions d'assemblage et la ou les contraintes fonctionnelles sont respectées ». Pour les configurations admissibles du mécanisme, il n'est pas nécessaire de vérifier le respect de la condition fonctionnelle pour chacune d'elles, mais il suffit de chercher la configuration qui donne la pire valeur de la caractéristique fonctionnelle. Si pour cette configuration la condition fonctionnelle est vérifiée alors elle l'est pour toutes les autres configurations du système mécanique. Mathématiquement, cette condition fonctionnelle peut être exprimée par :

$$\forall \mathbf{G} \in \{ \mathbf{G} \in \mathbb{R}^m : C_c(\mathbf{X}, \mathbf{G}) = 0 \cap C_i(\mathbf{X}, \mathbf{G}) \leq 0 \cap C_i(\mathbf{X}, \mathbf{G}) = 0 \}, C_f(\mathbf{X}, \mathbf{G}) \geq 0 \quad (1.12)$$

Basée sur cette équation (1.12) la fonctionnalité d'un système mécanique est vérifiée. La probabilité de non-fonctionnalité  $P_{nf}$  d'un système est définie par A. Dumas (2015):

$$P_{nf} = 1 - \text{Prob} \left\{ \left( \min_{\mathbf{G}} C_f(\mathbf{X}, \mathbf{G}) \geq 0 \right) \text{ sujet à } C_c(\mathbf{X}, \mathbf{G}) = 0 \cap C_i(\mathbf{X}, \mathbf{G}) \leq 0 \cap C_i(\mathbf{X}, \mathbf{G}) = 0 \right\} \quad (1.13)$$

En se basant sur cette équation (1.13), la détermination de la probabilité de non fonctionnalité représente un problème d'optimisation dont l'objectif est de déterminer les composantes du torseur jeu fonctionnel assurant les conditions fonctionnelles et en tenant en compte l'ensemble des équations de compatibilité et des contraintes d'interface. Ainsi, dans cette optimisation, les

valeurs des composantes des torseurs jeux à déterminer sont importantes vu qu'elles doivent respecter un certain seuil ou appartenir à un intervalle donné pour le bon fonctionnement du mécanisme.

Après avoir formulé mathématiquement les probabilités d'assemblage et de fonctionnalité, différentes techniques de résolution peuvent être développées. La section suivante synthétise quelques-unes.

### **1.3 Les différentes méthodes d'analyse des tolérances du projet AHTOLA**

Les formulations mathématiques des conditions d'assemblage et de fonctionnalité ont permis de poser les bases mathématiques des techniques d'analyse des tolérances d'un système mécanique. Différentes approches de quantification ont été développées dans la littérature et permettent de considérer les systèmes hyperstatiques avec jeux : la simulation de Monte Carlo couplée à une optimisation, la méthode FORM système. Cette section permet de présenter une synthèse de ces méthodes. Ces méthodes sont par la suite adaptées et améliorées lors de l'introduction des défauts de forme des pièces dans une démarche d'analyse des tolérances.

#### **1.3.1 Simulation de Monte Carlo et optimisation**

Cette méthode a été développée et testée au cours de la thèse de Qureshi (2011). L'objectif de la méthode est de simuler et d'évaluer les influences des défauts géométriques sur les exigences d'assemblage et de fonctionnalité. La simulation de Monte Carlo (MC) est utilisée pour simuler les défauts géométriques et une optimisation permet de déterminer la pire configuration des jeux permettant l'assemblage et le fonctionnement du système mécanique. La procédure est effectuée pour un nombre donné d'échantillon de défauts géométriques afin de déterminer les probabilités de défaillance et de non fonctionnalité.

Dans un premier temps, les différentes contraintes modélisant le comportement géométrique du système mécanique sont développées : les équations de compatibilité, les contraintes d'interface et les conditions fonctionnelles. Puis, un échantillon  $\mathbf{X}^{(i)}$ ,  $i = 1, \dots, N_{mc}$  ( $\mathbf{X}^{(i)} \in \mathbf{X}$ ) de défauts géométriques est généré tel qu'il vérifie les spécifications géométriques pré-stipulées sur les dessins techniques du mécanisme. Cet échantillon est défini selon une distribution

statistique, par exemple une loi normale de moyenne les dimensions nominales et en définissant les écarts types à l'aide des intervalles des tolérances. Ensuite, une optimisation est utilisée pour déterminer les composantes des torseurs jeux qui permettent d'identifier la pire configuration des jeux telle que les pièces du mécanisme puissent s'assembler et fonctionner. L'existence d'une solution minimisant ces composantes de torseurs jeux et qui respectent les contraintes du comportement géométrique du mécanisme, signifie l'existence d'une configuration des jeux telle que les pièces s'assemblent. Dans le cas contraire, cela signifie que pour cet échantillon de défauts géométriques, l'assemblage est impossible. De plus, lors de l'optimisation, quand une solution est trouvée, les composantes optimisées des torseurs jeux fonctionnels sont introduites dans les conditions fonctionnelles afin de les vérifier. Des fonctions indicatrices sont utilisées pour dénombrer le nombre des occurrences des évènements dont les probabilités sont calculées. A la fin de la simulation de Monte Carlo, les probabilités de défaillance d'assemblage et de fonctionnalité sont calculées ; elles sont égales au nombre d'occurrences de ces évènements, divisé par le nombre d'échantillons. La Figure 1.8 présente la méthode de l'analyse des tolérances basée sur la simulation de Monte Carlo couplée à une optimisation. L'estimation des probabilités de défaillance en se basant sur les fonctions indicatrices est donnée par :

- Probabilité de non-assemblage :

$$\tilde{P}_{na} = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1}^{N_{mc}} I_{Dfa}(\mathbf{X}^{(i)}) \quad (1.14)$$

où  $N_{mc}$  représente le nombre total d'échantillons générés par la simulation de Monte Carlo et

$I_{Dfa}$  représente la fonction indicatrice définie par :

$$I_{Dfa}(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } R_f(\mathbf{X}) \text{ n'a pas de solution} \\ 0 & \text{si } R_f(\mathbf{X}) \text{ a une solution} \end{cases} \quad (1.15)$$

avec

$$\begin{aligned} R_f(\mathbf{X}) &= \min_{\tilde{\mathbf{G}} \in \mathbb{R}^p} C_f(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{G}}) \\ \text{sous } & C_c^{(j)}(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{G}}) = 0 \quad \forall j = \{1, \dots, N_{comp}\} \\ & C_i^{(l)}(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{G}}) \leq 0 \quad \forall l = \{1, \dots, N_{ci}\} \end{aligned} \quad (1.16)$$

Avec  $N_{comp}$  le nombre total d'équations de compatibilité,  $N_{c_i}$  le nombre total de contraintes d'interfaces.

- Probabilité de non-fonctionnalité :

$$\tilde{P}_{nf} = \frac{1}{N_{mc}} \sum_{i=1}^{N_{mc}} I_{Df}(\mathbf{X}^{(i)}) \quad (1.17)$$

où  $N_{mc}$  représente le nombre total d'échantillons générés par la simulation de Monte Carlo et

$I_{Df}$  représente la fonction indicatrice définie par :

$$I_{Df}(\mathbf{X}) = \begin{cases} 1 & \text{si } C_f(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{G}}) \leq 0 \\ 0 & \text{si } C_f(\mathbf{X}, \tilde{\mathbf{G}}) > 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

où  $\tilde{\mathbf{G}}$  représente les valeurs des torseurs jeux issues de l'optimisation.

Le développement des contraintes du comportement géométrique du mécanisme peut conduire à l'obtention des contraintes non-linéaires qui peuvent être soit des équations ou des inéquations. Qureshi et al. (2012) proposent l'utilisation de techniques numériques d'optimisation globale non-linéaire comme les méthodes basées sur les gradients ou les méthodes de recherche directe. Mais l'utilisation de ces méthodes numériques peut conduire à des violations de contraintes. Pour pallier ce problème, Dumas *et al.* (2015b) proposent une méthode de linéarisation décrite dans la Section 1.2.2 afin de pouvoir utiliser un algorithme d'optimisation linéaire comme l'algorithme du simplexe (Bertsimas et Tsitsiklis, 1997; Nelder, 1965; Nocedal et Wright, 1999).

Toutefois, la simulation de Monte Carlo couplée à une optimisation, est une méthode coûteuse en temps de calcul. Dans le but de réduire de temps de simulation, deux méthodes ont été proposées par Dumas (2014), l'une pour le problème d'assemblage et l'autre pour le problème fonctionnel.

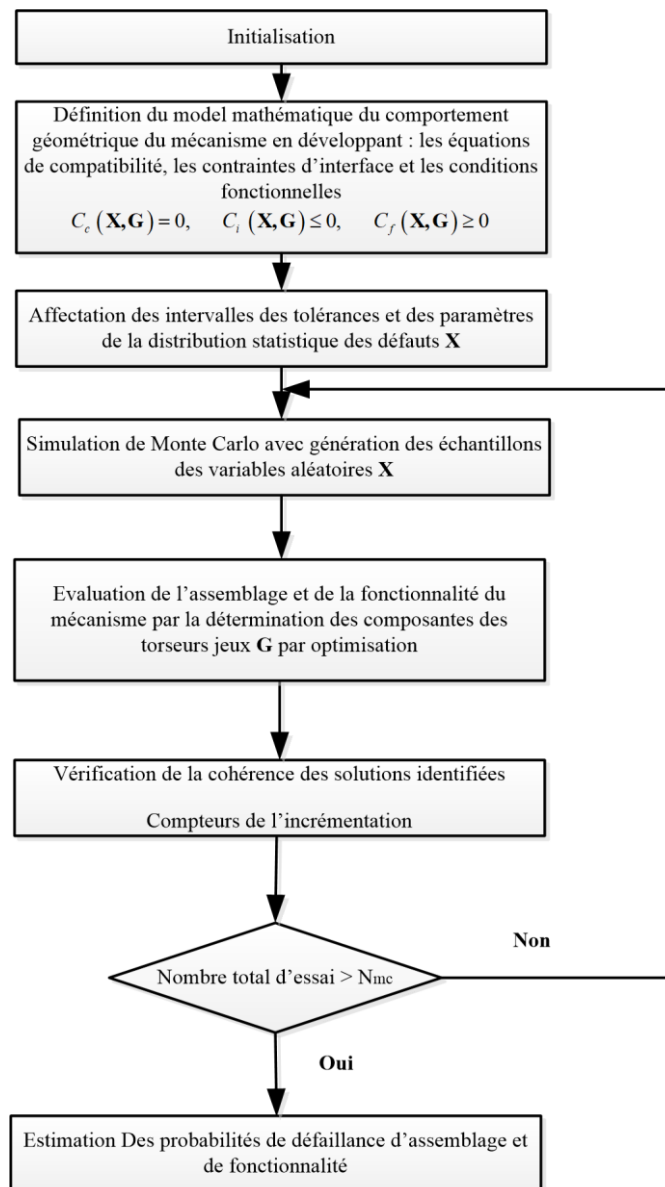


Figure 1.8 : Méthode de la simulation de Monte Carlo couplée à l'algorithme d'optimisation

### 1.3.2 La méthode FORM pour la résolution du problème fonctionnel

La méthode proposée pour la résolution du problème fonctionnel est basée sur une méthode de fiabilité système. Cette méthode a été utilisée dans plusieurs recherches (Ballu et al., 2008; Beaucaire et al., 2013; Dumas et al., 2015a). Avant de pouvoir utiliser cette méthode de fiabilité, l'ancienne formulation du problème d'analyse des tolérances est transformée à une formulation sous forme d'un problème de fiabilité système. Le calcul de la probabilité de non-fonctionnalité ( $P_{nf}$ ) dans cette formulation sous forme d'un problème de fiabilité système est effectué grâce à l'utilisation de la forme duale de Lagrange de l'optimisation. La probabilité  $P_{nf}$  est désormais

décrite sous forme d'une intersection d'évènements. Chaque configuration de jeux du mécanisme est définie comme un évènement de défaillance. Etant donné que les évènements sont nombreux, un algorithme préliminaire de recherche sélectif (Kim et al., 2013) des configurations de défaillance dominantes du mécanisme est appliqué. La méthode de fiabilité nommée First Order Reliability Method (FORM) est appliquée pour déterminer la probabilité  $P_{nf}$  avec un temps de résolution plus faible que celui de la méthode MC. La différence entre la méthode de formulation système de Dumas *et al.* (2015a) par rapport aux autres recherches utilisant la même technique est que la pire configuration est déterminée par une procédure d'optimisation alors que pour les autres méthodes, cela revient au technicien de le stipuler lors de la résolution. En plus les formulations des autres méthodes basées sur l'union des intersections des évènements, ne peuvent pas être appliquées aux mécanismes complexes (Dumas et al., 2015a).

**Synthèse :** Différentes techniques d'analyse des tolérances ont été proposées dans le cadre du projet AHTOLA : une technique d'optimisation couplée à la simulation de Monte Carlo, la méthode FORM système pour la résolution de problème fonctionnel. Une synthèse de ces techniques a été présentée dans cette partie.

Dans le cadre du projet AHTOLAND, la simulation de Monte Carlo couplée à la technique d'optimisation est la méthode qui est choisie afin de réaliser l'analyse des tolérances des systèmes mécaniques hyperstatiques. Toutefois, des modifications sont apportées afin de prendre en compte les défauts de forme et le comportement géométrique des différents types de contacts.

## **1.4 Conclusion**

L'objectif de ce chapitre est de faire la synthèse de démarches d'analyse statistique des tolérances des systèmes mécaniques hyperstatiques avec jeux développées dans la littérature et plus particulièrement au sein du projet AHTOLA. Cette démarche repose sur des solutions aux trois problématiques fondamentales à savoir la modélisation des variations géométriques, la modélisation du comportement géométrique du système mécanique, et le développement de techniques de résolution numérique. Une attention particulière est donnée à la modélisation du

comportement géométrique en particulier le développement des conditions d'assemblage et de fonctionnalité faisant appel à des outils mathématiques comme les notions de quantificateurs et de probabilités. Ensuite, certaines techniques de l'analyse des tolérances proposées dans la littérature et qui sont en relation avec les travaux qui sont développés dans ce manuscrit, ont été analysées.

Les différents développements de ce chapitre constituent une base pour la suite afin mieux cerner les travaux développés dans le projet AHTOLAND : la considération des défauts de forme des surfaces, leurs impacts dans la modélisation mathématique des contraintes d'assemblage et de fonctionnalité. La procédure adaptée pour une analyse des tolérances des systèmes mécaniques hyperstatiques avec jeux est modifiée et améliorée. Les enjeux sont :

- comment générer les défauts de forme des surfaces ?
- comment simuler les impacts de l'intégration des défauts de forme lors de l'analyse des liaisons entre les surfaces ?