Algorithme de Katz

Dans cette section, nous présenterons un algorithme dû à Katz, un des principaux résultats de son livre *Rigid local systems* [Kat96], très important dans l'étude des systèmes locaux irréductibles rigides. Cet algorithme a beaucoup été étudié et a eu de nombreux développements (notamment [Rob99], [DR00], [Sim09] et [DS13]). Le plan de ce chapitre 3 sera le suivant :

1. Dans un premier temps, nous détaillerons un lemme dû à Scott [Sco77], qui sera utile pour la suite.
2. Dans un deuxième temps, nous définirons la notion de système local *rigide*. Cette notion est due à Katz, mais l'idée mathématique de rigidité est quant à elle bien plus ancienne : Riemann s'y était intéressé dès 1857 [Rie57], mais dans un vocabulaire très différent de celui d'aujourd'hui.
3. Dans un troisième temps, nous détaillerons les deux opérations qui interviennent dans l'algorithme de Katz ainsi que leurs propriétés.
4. Dans un quatrième et dernier temps, nous expliciterons l'algorithme de Katz et donnerons plusieurs conséquences importantes.

Dans toute cette section, on notera $\Sigma = \{x_1, ..., x_r, x_{r+1}\} \subset \mathbb{P}^1$ avec $x_{r+1} = \infty$, $X = \mathbb{P}^1 \setminus \Sigma$ et $(U_s)_{s\in\Sigma}$ des petits disques ouverts épointés centrés en chacun des $s \in \Sigma$ qui ne s'intersectent pas deux à deux. Précisons que l'on entend par *petit disque ouvert centré en* ∞ l'image d'un petit disque ouvert centré en 0 par l'application $z \mapsto 1/z$.

3.1 Lemme de Scott

Définition 3.1.1 *Soit $\mathcal{L}$ un système local sur X de rang n. On définit la monodromie T_i autour de $x_i \neq \infty$ comme l'action (linéaire) de la classe d'un lacet simple autour de x_i dans $\pi_1(X, a)$ sur $\mathcal{L}_a = \mathbb{C}^n$, avec $a \in X$ un point quelconque. On définit la monodromie autour de ∞ par $T_\infty = T_r \cdots T_1$.*

Proposition 3.1.2 *Soient $\mathcal{L}$ un système local sur $\mathbb{C}^*$ de rang n, $j : \mathbb{C}^* \hookrightarrow \mathbb{C}$ l'inclusion et T la monodromie autour de 0. On a les propriétés suivantes :*
(i) $H^0(\mathbb{C}^*, \mathcal{L}) = \ker(T - \mathrm{Id})$
(ii) $H^1(\mathbb{C}^*, \mathcal{L}) = \mathrm{coker}(T - \mathrm{Id})$
(iii) $H^m(\mathbb{C}^*, \mathcal{L}) = 0$ *pour* $m \geq 2$
(iv) $\chi(\mathbb{C}^*, \mathcal{L}) = 0$
(v) $\chi(\mathbb{C}, j_*\mathcal{L}) = \chi(0, j_*\mathcal{L}) = \dim\ker(T - \mathrm{Id})$.

Preuve. Les propriétés (i), (ii) et (iii) sont démontrées dans [EZS07, §1.3.2] (voir aussi [Dim04, ex. 2.5.7]). On a alors

$$\chi(\mathbb{C}^*, \mathcal{L}) = \dim\ker(T - \mathrm{Id}) - \dim\mathrm{coker}(T - \mathrm{Id}) = 0.$$

Notons qu'on aurait pu le voir directement en remarquant que $\chi(\mathbb{C}^*, \mathcal{L}) = \chi(\mathbb{C}^*) \cdot \mathrm{rg}(\mathcal{L}) = 0$. Maintenant, par additivité de la caractéristique d'Euler, on a

$$\chi(\mathbb{C}, j_*\mathcal{L}) = \chi(\mathbb{C}^*, j_*\mathcal{L}) + \chi(0, j_*\mathcal{L}),$$

et comme $(j_*\mathcal{L})_{|\mathbb{C}^*}$ est un sytème local, on a $\chi(\mathbb{C}^*, j_*\mathcal{L}) = \chi(\mathbb{C}^*) \cdot \mathrm{rg}((j_*\mathcal{L})_{|\mathbb{C}^*}) = 0$ par le même argument que précédemment. On en déduit que

$$\chi(\mathbb{C}, j_*\mathcal{L}) = \chi(0, j_*\mathcal{L}) = \dim(j_*\mathcal{L})_0 = \dim\Gamma(\mathbb{C}^*, \mathcal{L}) = \dim H^0(\mathbb{C}^*, \mathcal{L}) = \dim\ker(T - \mathrm{Id}).$$

□

Dans toute la suite de cette section, on notera $j : X \hookrightarrow \mathbb{P}^1$ l'inclusion.

Proposition 3.1.3 *Soient $\mathcal{L}$ un système local sur X de rang n. Alors :*

$$\chi(\mathbb{P}^1, j_*\mathcal{L}) = 2n - \sum_{i=1}^{r+1} \mathrm{rg}(T_i - \mathrm{Id}).$$

Preuve. Par additivité de la caractéristique d'Euler, on a

$$\chi(\mathbb{P}^1, j_*\mathcal{L}) = \chi(X, j_*\mathcal{L}) + \sum_{i=1}^{r+1} \chi(U_{x_i}, j_*\mathcal{L}) - \sum_{i=1}^{r+1} \underbrace{\chi(X \cap U_{x_i}, j_*\mathcal{L})}_{=0}.$$

On a $\chi(X, j_*\mathcal{L}) = \chi(X) \cdot \mathrm{rg}((j_*\mathcal{L})_{|X}) = (1-r) \cdot \mathrm{rg}(\mathcal{L}) = (1-r)n$. D'où :

$$\chi(\mathbb{P}^1, j_*\mathcal{L}) = (1-r)n + \sum_{i=1}^{r+1} \dim \ker(T_i - \mathrm{Id}) = 2n - \sum_{i=1}^{r+1} \mathrm{rg}(T_i - \mathrm{Id}).$$

$\square$

Proposition 3.1.4 *On reprend les notations de la proposition précédente. On suppose de plus que $\mathcal{L}$ est irréductible et $T_\infty = \mathrm{Id}$. Alors :*

$$\sum_{i=1}^{r} \mathrm{rg}(T_i - \mathrm{Id}) = 2n + \dim H^1(\mathbb{P}^1, j_*\mathcal{L}) \geq 2n.$$

Preuve. Avec $T_\infty = \mathrm{Id}$, la proposition précédente donne

$$\chi(\mathbb{P}^1, j_*\mathcal{L}) = 2n - \sum_{i=1}^{r} \mathrm{rg}(T_i - \mathrm{Id}).$$

On déduit du fait que $\mathcal{L}$ est irréductible que

$$H^0(\mathbb{P}^1, j_*\mathcal{L}) = \Gamma(X, \mathcal{L}) = \bigcap_{i=1}^{r} \ker(T_i - \mathrm{Id}) = 0.$$

Par dualité de Poincaré, on a $H^2(\mathbb{P}^1, j_*\mathcal{L}) = 0$, ce qui donne bien l'égalité attendue :

$$\chi(\mathbb{P}^1, j_*\mathcal{L}) = 2n - \sum_{i=1}^{r} \mathrm{rg}(T_i - \mathrm{Id}) = -\dim H^1(\mathbb{P}^1, j_*\mathcal{L}).$$

$\square$

Ce dernier résultat est dû à Scott [Sco77], mais il est à noter qu'il existe une preuve très simple de l'inégalité seule n'utilisant que des outils d'algèbre linéaire élémentaire (voir [Beu08, th. 1.4.2] et [Sab12]).

3.2 Rigidité d'un système local

Définition 3.2.1 *Un système local $\mathcal{L}$ sur X est dit rigide si pour tout système local $\mathcal{F}$ sur X tel que $\mathcal{L}_{|U_s} \simeq \mathcal{F}_{|U_s}$ pour tout $s \in \Sigma$, on a $\mathcal{L} \simeq \mathcal{F}$.*

Remarque. Interprétons cette propriété de rigidité en terme de monodromie. Notons T_s les monodromies autour de $s \in \Sigma$: être rigide revient à dire que pour toute famille de matrices inversibles $(T'_s)_{s\in\Sigma}$ telle que T_s et T'_s soient conjuguées pour tout $s \in \Sigma$, alors il existe une matrice commune qui réalise la conjugaison. Autrement dit, on ne peut pas déformer les T_s dans leur classe de conjugaison, sauf à conjuguer par une matrice commune.

Définition 3.2.2 *Soit $\mathcal{L}$ un système local sur X. On définit l'indice de rigidité comme $rig(\mathcal{L}) := \chi(\mathbb{P}^1, j_*\underline{End}(\mathcal{L}))$.*

Remarque. En utilisant la proposition 3.1.2(v), on peut donner une expression explicite de l'indice de rigidité en terme de monodromie :

$$\begin{aligned} rig(\mathcal{L}) &= \chi(X, j_*\underline{End}(\mathcal{L})) + \sum_{s\in\Sigma} \chi(s, j_*\underline{End}(\mathcal{L})) \\ &= (2 - |\Sigma|) \cdot (\mathrm{rg}(\mathcal{L}))^2 + \sum_{s\in\Sigma} \dim\ker(ad(T_s) - \mathrm{Id}), \end{aligned}$$

où $ad : M_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{L}(M_n(\mathbb{C})),\ T \mapsto (A \mapsto TAT^{-1})$. En notant $Z(T_s)$ est le centralisateur de T_s, on a

$$rig(\mathcal{L}) = (1 - r) \cdot (\mathrm{rg}(\mathcal{L}))^2 + \sum_{s\in\Sigma} \dim Z(T_s).$$

Proposition 3.2.3 *Soit $\mathcal{L}$ un système local sur X irréductible. On a :*

$$rig(\mathcal{L}) = 2 - \dim H^1(\mathbb{P}^1, j_*\underline{End}(\mathcal{L})) \leq 2.$$

Preuve. On a $rig(\mathcal{L}) = 2 \cdot \dim H^0(\mathbb{P}^1, j_*\underline{End}(\mathcal{L})) - \dim H^1(\mathbb{P}^1, j_*\underline{End}(\mathcal{L}))$. De plus, on sait que

$$H^0(\mathbb{P}^1, j_*\underline{End}(\mathcal{L})) = \Gamma(X, \underline{End}(\mathcal{L})) = \bigcap_{s\in\Sigma} Z(T_s).$$

Si une matrice M commute avec tous les T_s alors ses espaces propres sont stables par tous les T_s, et par irréductibilité de $\mathcal{L}$, ils sont triviaux : la matrice M est donc scalaire. Ainsi $\dim H^0(\mathbb{P}^1, j_*\underline{End}(\mathcal{L})) = 1$, ce qui donne bien l'expression attendue. □

On a le critère suivant, dû à Katz [Kat96, th. 1.1.2] :

Théorème 3.2.4 *Soit $\mathcal{L}$ un système local sur X irréductible.*
Alors $\mathcal{L}$ est rigide si et seulement si $rig(\mathcal{L}) = 2$.

3.3 Opérations de l'algorithme de Katz

Soit $\mathcal{L}$ un système local sur X. Nous allons détailler ici les deux opérations qui interviendront dans l'algorithme de Katz ainsi que leurs propriétés. Ces deux opérations sont les suivantes :

1. la multiplication par un système local sur X de rang un
2. la convolution intermédiaire par un système local sur $\mathbb{C}^*$ de rang un

Définition 3.3.1 *On appelle multiplication d'un système local $\mathcal{L}$ sur X par un système local de rang un toute opération $\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L} \otimes \mathcal{F}$, où $\mathcal{F}$ est un système local sur X de rang un.*

Remarques. (i) En terme de monodromie, un système local sur X de rang un est donné par une famille de complexes $(\lambda_s)_{s\in\Sigma}$ non nuls. Ainsi, la monodromie T_s de $\mathcal{L}$ est transformée par multiplication en $\lambda_s T_s$. En particulier, l'opération de multiplication préserve le rang et est inversible.
(ii) La multiplication préserve l'irréductibilité d'une part, et la rigidité d'autre part dans la mesure où $\underline{End}(\mathcal{L}) \simeq \underline{End}(\mathcal{L} \otimes \mathcal{F})$ et donc $rig(\mathcal{L}) = rig(\mathcal{L} \otimes \mathcal{F})$.

On a déjà vu l'opération de convolution intermédiaire dans la partie précédente. On note $\mathcal{L}_\lambda$ le système local sur $\mathbb{C}^*$ de rang un, dont la monodromie autour de 0 est donnée par $T = \lambda \neq 0$, et MC_λ le foncteur de convolution intermédiaire avec $\mathcal{L}_\lambda$ dans la catégorie des systèmes locaux sur X. Contrairement à la partie précédente, on n'oblige *a priori* pas λ à être de module 1.

La proposition suivante est due à Katz (th. 2.9.8, th. 3.3.3 et §6.0.16 de [Kat96], voir aussi [DR00, cor. 3.6 et 4.4]) :

Proposition 3.3.2 *Soient $\mathcal{L}$ un système local sur X irréductible et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. On a alors :*
(i) $MC_\lambda(\mathcal{L})$ est irréductible
(ii) $rig(MC_\lambda(\mathcal{L})) = rig(\mathcal{L})$.

L'opération MC_λ préserve donc les systèmes locaux irréductibles rigides. De plus, d'après le théorème 3.5 de [DR00], elle est inversible d'inverse l'opération $MC_{\lambda^{-1}}$.

Une question importante reste cependant en suspens : quel est le rang de $MC_\lambda(\mathcal{L})$? Pour cela, il est utile d'avoir une interprétation matricielle de l'opération de convolution intermédiaire sur les monodromies, faite par Dettweiler et Reiter dans [DR00]. En notant $T_1, ..., T_r \in GL_n(\mathbb{C})$ les monodromies d'un système local $\mathcal{L}$ irréductible de rang n et $\lambda \in \mathbb{C}^*$, on pose

$$G_i^\lambda = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} & & & 0 & & & \\ & I_{(i-1)n} & & \vdots & & 0 & \\ & & & 0 & & & \\ \hline T_1 - I_n & \cdots & T_{i-1} - I_n & \lambda T_i & \lambda(T_{i+1} - I_n) & \cdots & \lambda(T_r - I_n) \\ \hline & & & 0 & & & \\ & 0 & & \vdots & & I_{(r-i)n} & \\ & & & 0 & & & \end{array}\right).$$

Les deux espaces

$$K = \{{}^t(x_1, ..., x_r) \mid x_i \in \ker(T_i - I_n)\} \text{ et } L_\lambda = \bigcap_{i=1}^{r} \ker(G_i^\lambda - I_{rn})$$

sont stables par les G_i^λ, on note alors T_i^λ les classes des G_i^λ dans $GL(\mathbb{C}^{rn}/(K+L_\lambda))$. Les T_i^λ correspondent alors aux monodromies de $MC_\lambda(\mathcal{L})$.

D'après le lemme 2.7 de [DR00], $L_\lambda = \{{}^t(u, T_1u, ..., T_{r-1} \cdots T_1u) \mid u \in \ker(\lambda T_\infty - I_n)\}$ et $K \cap L_\lambda = 0$, ce qui permet de donner l'expression du rang de $MC_\lambda(\mathcal{L})$:

$$\mathrm{rg}(MC_\lambda(\mathcal{L})) = rn - \sum_{i=1}^{r} \dim\ker(T_i - I_n) - \dim\ker(\lambda T_\infty - I_n) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{rg}(T_i - I_n) - \dim\ker(\lambda T_\infty - I_n).$$

Le corollaire 4.2 de [DR00] montre en outre que $\mathrm{rg}(T_\infty^\lambda - \lambda\mathrm{Id}) = \mathrm{rg}(\lambda T_\infty - I_n)$.

3.4 Algorithme de Katz

Tous les ingrédients sont maintenant en place pour introduire l'algorithme de Katz :

Théorème 3.4.1 *Soit $\mathcal{L}$ un système local sur X irréductible rigide de rang $n > 1$, de monodromies $T_1, ..., T_r$. On suppose que T_∞ est scalaire. Il est alors possible d'aboutir en un nombre fini de multiplications et de convolutions intermédiaires à un système local de rang 1.*

Preuve. Comme $\mathcal{L}$ est rigide et $T_\infty = \mu I_n$, on a

$$rig(\mathcal{L}) = (1-r)n^2 + \sum_{i=1}^{r} \dim Z(T_i) + \underbrace{Z(T_\infty)}_{=n^2} = 2.$$

Ainsi, en notant $r_{i,\lambda}$ le nombre de blocs de Jordan de T_i associé à la valeur propre λ et $t_{i,\lambda,k}$ la taille du $k$ème bloc de Jordan associé à cette même valeur propre, on a

$$(r-2)n^2 + 2 = \sum_{i=1}^{r} \dim Z(T_i) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\lambda \in Sp(T_i)} \sum_{1 \le k,\ell \le r_{i,\lambda}} \underbrace{\min(t_{i,\lambda,k}, t_{i,\lambda,\ell})}_{\le t_{i,\lambda,k}},$$

ce qui donne

$$(r-2)n^2 + 2 \le \sum_{i=1}^{r} \sum_{\lambda \in Sp(T_i)} r_{i,\lambda} \sum_{k=1}^{r_{i,\lambda}} t_{i,\lambda,k}.$$

Posons maintenant $n_i = \min\{\mathrm{rg}(\lambda T_i - I_n) \mid \lambda \in \mathbb{C}^*\}$, pour tout $i \in \{1, ..., r\}$. Pour tout $\lambda \in Sp(T_i)$, on a alors $r_{i,\lambda} = \dim\ker(T_i - \lambda I_n) \le n - n_i$ et donc

$$(r-2)n^2 + 2 \le \sum_{i=1}^{r} n(n - n_i) = rn^2 - n\sum_{i=1}^{r} n_i.$$

Il en résulte que

$$\sum_{i=1}^{r} n_i \leq \frac{2n^2-2}{n} < 2n.$$

Choisissons alors des λ_i tels que $n_i = \mathrm{rg}(\lambda_i T_i - I_n)$ (cela signifie en particulier que λ_i^{-1} est valeur propre de T_i) et effectuons l'opération de multiplication

$$(T_1, ..., T_r) \mapsto (T_1', ..., T_r') = (\lambda_1 T_1, ..., \lambda_r T_r).$$

On a alors $T_\infty' = \mu\lambda_1 \cdots \lambda_r I_n$ et par le lemme de Scott (proposition 3.1.4), on a $\mu\lambda_1 \cdots \lambda_r \neq 1$. Posons $\lambda = (\mu\lambda_1 \cdots \lambda_r)^{-1} \neq 1$ et effectuons l'opération de convolution MC_λ :

$$(T_1', ..., T_r') \mapsto (T_1^\lambda, ..., T_r^\lambda).$$

On sait alors qu'après cette opération, le rang du système local sera

$$\sum_{i=1}^{r} \mathrm{rg}(\lambda_i T_i - I_n) - \dim\ker(\lambda T_\infty' - I_n) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{rg}(\lambda_i T_i - I_n) - n < 2n - n = n.$$

On a donc strictement diminué le rang. De plus, comme $\mathrm{rg}(T_\infty^\lambda - \lambda \mathrm{Id}) = \mathrm{rg}(\lambda T_\infty' - I_n) = 0$, on a $T_\infty^\lambda = \lambda\mathrm{Id}$, matrice scalaire. On peut ainsi poursuivre l'algorithme, qui, après un nombre fini d'étapes, produira un système local de rang un. $\square$

Plusieurs remarques importantes peuvent être faites sur cet algorithme de Katz :

1. L'algorithme de Katz se termine se termine avec un système local de rang 1, il est donc possible de faire une dernière opération de multiplication pour amener ce dernier sur le système local de rang 1 de monodromies triviales $(1, ..., 1)$.
2. Les deux opérations utilisées dans l'algorithme étant inversibles, il est possible en reprenant l'algorithme dans l'autre sens d'obtenir tout système local irréductible rigide à partir du système local de rang 1 de monodromies triviales $(1, ..., 1)$.
3. Les λ_i et λ qui interviennent dans l'algorithme de Katz sont des monômes en les valeurs propres des T_i. Ainsi, à chaque étape de l'algorithme, le fait que les valeurs propres des monodromies soient de module 1 est une propriété conservée. Cette remarque aura des conséquences en théorie de Hodge, ce que nous verrons par la suite.
4. Cet algorithme peut être utilisé pour fabriquer des systèmes locaux irréductibles rigides intéressants. Par exemple, en appliquant au système local sur $\mathbb{P}^1 \setminus \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ de rang 1 de monodromies triviales $(1, 1, 1, 1)$ une certaine suite de multiplications et de convolutions intermédiaires, Dettweiler et Reiter obtiennent dans [DR10] un système local irréductible rigide de rang 7, tel que l'adhérence de Zariski du groupe engendré par ses monodromies dans $GL_7(\mathbb{C})$ est le groupe G_2.