

Algèbres d'Iwahori-Hecke et q -mesure de Plancherel

Dans ce chapitre, nous présentons finalement la **q -mesure de Plancherel**, et nous expliquons son lien avec la théorie des **algèbres d'Iwahori-Hecke**. L'idée initiale est d'étudier la mesure de Plancherel d'un module de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$ obtenu par induction parabolique à partir d'un caractère ζ d'un tore maximal T , et on s'intéresse au cas le plus simple, *i.e.*, $T = k^n$ est le sous-groupe des matrices diagonales et ζ est le caractère trivial $t \mapsto 1$. La mesure sous-jacente a été décrite pour la première fois par Kerov dans [Ker92], et elle a été étudiée en détail par E. Strahov ([Stro8]); dans la section 7.1, nous donnons plusieurs expressions pour cette mesure, et nous la relierons à un modèle combinatoire et à divers processus aléatoires.

La poissonisée des q -mesures de Plancherel est de nouveau une mesure de Schur, et les noyaux correspondants s'expriment à l'aide de fonctions de Bessel déformées, *cf.* la proposition 7.3. Malheureusement, on ne peut pas comme dans le paragraphe 5.2 en déduire l'asymptotique des q -mesures de Plancherel, car le comportement à l'infini de ces q -fonctions de Bessel n'est pas connu.

Pour cette raison, l'étude asymptotique sera menée en utilisant des techniques d'observables de diagrammes, voir le chapitre 8. En particulier, nous construirons plus loin une quantification de l'algèbre $\mathcal{O}$, *cf.* le paragraphe 8.1. Cette déformation s'inspire de la théorie des algèbres d'Hecke (*cf.* [Mat99a, Iwa64]); nous en rappelons les points principaux dans le paragraphe 7.2, et nous rappelons également dans la section 7.3 la théorie des caractères de l'algèbre d'Hecke de type A, en s'inspirant pour l'essentiel de l'article [Ram91]. Le point important à retenir est le suivant : la **formule de Ram** 7.7 exprime les caractères de l'algèbre $\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$ en fonction des caractères du groupe $\mathfrak{S}_n$, et ceci permettra un changement de base dans $\mathcal{O}$ et un calcul des espérances des observables Σ_λ sous la q -mesure de Plancherel.

7.1 q -mesures et q -processus de Plancherel

Soit n un entier positif, et q la puissance d'un nombre premier ; on s'intéresse à la mesure de Plancherel du $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$ -module $\mathbb{C}[\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)/\mathrm{B}(n, \mathbb{F}_q)] = R(\mathbb{1}; 1^n)$. Le cardinal du groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles est $(q-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$, donc

$$\dim \mathbb{C}[\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)/\mathrm{B}(n, \mathbb{F}_q)] = \prod_{i=1}^n \frac{q^i - 1}{q - 1}.$$

Dans ce qui suit, nous utiliserons librement les notations des q -entiers (voir [CK02]) : $\{n\}_q = (q^n - 1)/(q - 1)$ pour tout entier $n \geq 1$, et $\{n!\}_q = \prod_{i=1}^n \{i\}_q$. On retrouve les entiers et les factorielles usuelles pour $q = 1$, et $\dim \mathbb{C}[\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)/\mathrm{B}(n, \mathbb{F}_q)] = \{n!\}_q$. En un certain sens, le module que l'on étudie est donc une généralisation de l'algèbre du groupe symétrique¹.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que les composantes irréductibles du module $\mathbb{C}[\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)/\mathrm{B}(n, \mathbb{F}_q)]$ étaient indexées par les partitions $\lambda \in \mathcal{Y}_n$, et que la multiplicité du module unipotent $U^\lambda(q)$ était toujours $\dim \lambda$. On conserve cette indexation dans ce chapitre, à une conjugaison des diagrammes près : ainsi,

$$\dim U^\lambda(q) = D_\lambda(q) = q^{b(\lambda)} \frac{\prod_{i=1}^n q^i - 1}{\prod_{(i,j) \in \lambda} q^{h(i,j)} - 1} = q^{b(\lambda)} \frac{\{n!\}_q}{\prod_{(i,j) \in \lambda} \{h(i,j)\}_q}$$

— par rapport à la formule du chapitre précédent, on a changé $q^{b(\lambda')}$ en $q^{b(\lambda)}$. Comme $\dim \lambda = \dim \lambda'$, le changement d'indexation est compatible avec la décomposition du module $\mathbb{C}[\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)/\mathrm{B}(n, \mathbb{F}_q)]$.

Définition 7.1 (q -mesure de Plancherel). On appelle q -mesure de Plancherel la mesure de probabilité sur les partitions associée à la décomposition du module $\mathbb{C}[\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)/\mathrm{B}(n, \mathbb{F}_q)]$ en composantes unipotentes irréductibles $U^\lambda(q)$. Autrement dit,

$$M_{n,q}[\lambda] = \frac{\dim \lambda \times \dim U^\lambda(q)}{|\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)/\mathrm{B}(n, \mathbb{F}_q)|} = \frac{\dim \lambda \times D_\lambda(q)}{\{n!\}_q} = \frac{n! q^{b(\lambda)}}{\prod_{(i,j) \in \lambda} h(i,j) \{h(i,j)\}_q}.$$

Exemple. Pour $n = 4$, la q -mesure de Plancherel a pour valeurs :

$$\begin{aligned} M_{4,q}(4) &= 1/(q^6 + 3q^5 + 5q^4 + 6q^3 + 5q^2 + 3q + 1) \\ M_{4,q}(3,1) &= 3q/(q^4 + 2q^3 + 2q^2 + 2q + 1) \\ M_{4,q}(2,2) &= 2q^2/(q^4 + 3q^3 + 4q^2 + 3q + 1) \\ M_{4,q}(2,1,1) &= 3q^3/(q^4 + 2q^3 + 2q^2 + 2q + 1) \\ M_{4,q}(1,1,1,1) &= q^6/(q^6 + 3q^5 + 5q^4 + 6q^3 + 5q^2 + 3q + 1) \end{aligned}$$

On retrouve pour $q = 1$ les valeurs de la mesure de Plancherel M_4 données page 35.

En plus de la q -formule des équerres, il existe une autre expression de $D_\lambda(q)$ due à Steinberg (voir [GP00, théorème 10.5.2]), et qui a l'avantage de se généraliser au cas du type B, cf. le chapitre 9. Si $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r)$, notons A l'ensemble des parts de $\lambda + \delta$, où δ est la partition en escalier $(r-1, r-2, \dots, 0)$. Ainsi,

$$A = \{\lambda_i + r - i\}_{i \in \llbracket 1, r \rrbracket}.$$

On peut montrer que $D_\lambda(q)$ a pour expression :

$$D_\lambda(q) = \frac{\prod_{i=1}^n q^i - 1}{q^{\frac{r(r-1)(r-2)}{6}}} \frac{\prod_{a > a' \in A} q^a - q^{a'}}{\prod_{a \in A} \prod_{i=1}^a q^i - 1}.$$

Par exemple, $D_{2,2}(q) = \frac{(q^4-1)(q^3-1)(q^2-1)(q-1)(q^3-q^2)}{q^0(q^3-1)(q^2-1)(q-1)(q^2-1)(q-1)} = q^4 + q^2$.

1. On voit donc $\mathfrak{S}_n$ comme le groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension n sur le corps à un élément.

Dans [Stro8], E. Strahov utilise une troisième expression de $D_\lambda(q)$ pour donner un modèle combinatoire de la q -mesure de Plancherel. Si σ est une permutation de $\mathfrak{S}_n$, on appelle **descente** de σ un entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\sigma(i) > \sigma(i+1)$. Autrement dit, la i -ième case du ruban standard associé à σ est au-dessus de la $i+1$ -ième case. L'**indice majeur** de σ est la somme de ses descentes ; par exemple, si $\sigma = 352614$, alors $\text{imaj}(\sigma) = 2 + 4 = 6$. D'autre part, si T est un tableau standard de taille n , on dit que i est une descente de T si $i+1$ est dans une ligne strictement au-dessus de la ligne de i dans T . Par exemple, les descentes du tableau standard

5		
3	6	
1	2	4

sont 2 et 4. Comme précédemment, l'indice majeur d'un tableau standard est la somme de ses descentes. Une récurrence permet de montrer que pour toute permutation σ , l'ensemble des descentes de σ est aussi l'ensemble des descentes du tableau standard $Q(\sigma) = P(\sigma^{-1})$ qui lui est associé par la correspondance RSK, voir [Sta91, volume 2, chapitre 7]. D'autre part, le degré générique d'une partition λ s'écrit

$$D_\lambda(q) = \sum_{T \in \text{Std}(\lambda)} q^{\text{imaj}(T)}.$$

Exemple. Si $\lambda = (2, 2)$, les deux tableaux standards de forme λ sont

3	4
1	2

 et

2	4
1	3

,

et ils ont pour indices majeurs 2 et $1 + 3 = 4$, d'où l'identité $D_{2,2}(q) = q^4 + q^2$.

Enfin, si σ est une permutation de taille n et si $V(\sigma)$ est l'ensemble des permutations de taille $n+1$ obtenues en insérant $n+1$ dans le mot de σ , alors la fonction

$$\tau \mapsto \text{imaj}(\tau) - \text{imaj}(\sigma)$$

est une bijection entre $V(\sigma)$ et $\llbracket 0, n \rrbracket$ — plus précisément, si σ a d descentes, alors $\tau \in V(\sigma)$ a d ou $d+1$ descentes, et la fonction précédente va de $d+1$ à n pour les permutations τ avec $d+1$ descentes, et de d à 0 pour les permutations τ avec d descentes, étant entendu qu'on liste les voisins de σ suivant la position de la lettre $n+1$ dans leur mot (cf. [Gup78]). Par suite :

Proposition 7.2 (q -processus de Knuth et q -mesure de Plancherel). *Pour tout entier n , la fonction*

$$P_{n,q} : \sigma \mapsto \frac{q^{\text{imaj}(\sigma)}}{\{n!\}_q}$$

est une mesure de probabilité sur $\mathfrak{S}_n$, et c'est la n -ième marginale du processus de Knuth déformé $(\sigma^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ défini par les probabilités de transition

$$p(\sigma \in \mathfrak{S}_k, \tau \in \mathfrak{S}_{k+1}) = \begin{cases} \frac{q^{\text{imaj}(\tau) - \text{imaj}(\sigma)}}{\{k+1\}_q} & \text{si } \tau \in V(\sigma), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, la mesure image de $P_{n,q}$ par la correspondance RSK est la q -mesure de Plancherel $M_{n,q}$.

Démonstration. Comme $\{k+1\}_q = 1 + q + q^2 + \dots + q^k$, la fonction de transition p est bien une mesure de probabilité :

$$\forall \sigma, \sum_{\tau \in V(\sigma)} p(\sigma, \tau) = \frac{\sum_{\tau \in V(\sigma)} q^{\text{imaj}(\tau) - \text{imaj}(\sigma)}}{1 + q + q^2 + \dots + q^k} = 1.$$

La n -ième marginale du processus markovien $(\sigma^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ associé à ces probabilités de transition est évidemment la mesure $P_{n,q}$. De plus, si λ est une partition de taille n , alors :

$$\begin{aligned} \text{RSK}_* P_{n,q}[\lambda] &= \sum_{\sigma: Q(\sigma) \in \text{Std}(\lambda)} P_{n,q}[\sigma] = \sum_{T \in \text{Std}(\lambda)} \sum_{Q(\sigma)=T} \frac{q^{\text{imaj}(\sigma)}}{\{n!\}_q} \\ &= \frac{1}{\{n!\}_q} \sum_{T \in \text{Std}(\lambda)} q^{\text{imaj}(T)} \times \text{card} \{ \sigma \mid Q(\sigma) = T \} \\ &= \frac{\dim \lambda}{\{n!\}_q} \sum_{T \in \text{Std}(\lambda)} q^{\text{imaj}(T)} = \frac{\dim \lambda \times D_\lambda(q)}{\{n!\}_q} = M_{n,q}[\lambda]. \end{aligned}$$

Ainsi, la mesure non uniforme $P_{n,q}$ sur les permutations fournit un modèle combinatoire de la q -mesure de Plancherel : c'est l'image par la correspondance RSK de cette mesure. $\square$

Il y a toutefois une différence avec la construction du paragraphe 3.2 : la projection par RSK du q -processus de Knuth n'est plus un processus markovien. En effet, si tel était le cas, alors pour tout tableau standard T de taille $n+1$, notant t le tableau T moins la case $n+1$, et $\lambda^{(0)} \nearrow \lambda^{(1)} \nearrow \dots \nearrow \lambda^{(n+1)}$ la suite de partitions correspondant au tableau T , on aurait

$$p(\lambda^{(n)}, \lambda^{(n+1)}) = \frac{\mathbb{P}[\lambda(\sigma_0) = \lambda^{(0)}, \dots, \lambda(\sigma_{n+1}) = \lambda^{(n+1)}]}{\mathbb{P}[\lambda(\sigma_0) = \lambda^{(0)}, \dots, \lambda(\sigma_n) = \lambda^{(n)}]} = \frac{q^{\text{imaj}(T) - \text{imaj}(t)} \dim \lambda^{(n+1)}}{\{n+1\}_q \dim \lambda^{(n)}}.$$

On obtient une contradiction en prenant deux tableaux standards T et T' associés aux mêmes formes $\lambda^{(n)}$ et $\lambda^{(n+1)}$, mais tels que $\text{imaj}(T) - \text{imaj}(t) \neq \text{imaj}(T') - \text{imaj}(t')$; par exemple, les tableaux

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}.$$

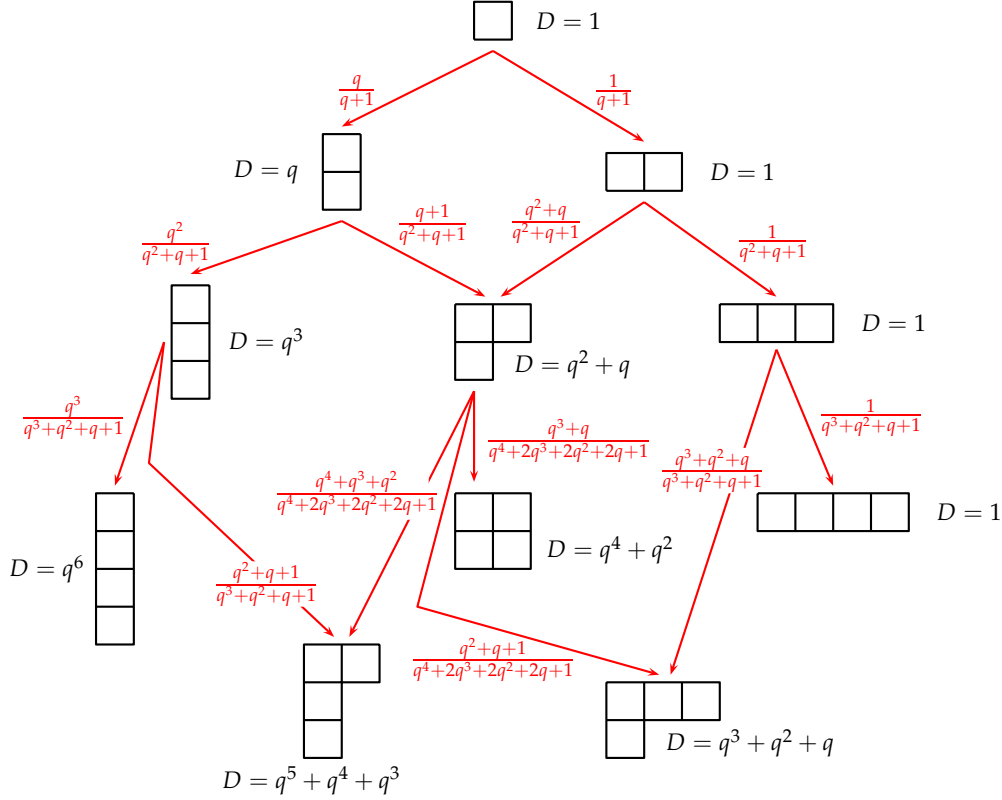
Le modèle combinatoire de la q -mesure de Plancherel ne fournit donc pas par correspondance RSK une généralisation raisonnable du processus de Plancherel. Il existe toutefois une généralisation markovienne de ce processus, mais on doit la définir directement au niveau du graphe Young $\mathscr{Y}$. Ainsi, si l'on pose

$$p_q(\lambda, \Lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\{|\Lambda|\}_q} \frac{D_\Lambda(q)}{D_\lambda(q)} & \text{si } \lambda \nearrow \Lambda, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

alors on a défini les probabilités de transition d'un processus markovien sur $\mathscr{Y}$ de lois marginales les q -mesures de Plancherel, et lorsque q tend vers 1, on retrouve le processus de Plancherel usuel. On appelle **q -processus de Plancherel** ces nouveaux processus. Leurs probabilités de transition p_q s'expriment facilement à l'aide de la q -formule des équerres :

$$p_q(\lambda, \Lambda) = q^{b(\Lambda) - b(\lambda)} \frac{\prod_{(i,j) \in \lambda} \{h(i,j)\}_q}{\prod_{(i,j) \in \Lambda} \{h(i,j)\}_q} = \frac{\prod_{i=1}^{v-1} \{x_k - y_i\}_q}{\prod_{i \neq k} \{x_k - x_i\}_q}$$

et ils sont donc tout aussi aisément programmables que le processus de Plancherel usuel. Des exemples numériques seront proposés au début du chapitre 8 ; sur la figure 7.1, on a indiqué les degrés génériques et les q -probabilités de transition pour les quatre premiers niveaux du graphe de Young.



génératrice satisfait une q -équation de Burgers ; il utilise également des q -observables de diagrammes. Malheureusement, les q -observables employées dans [Stro8] n'appartiennent pas à l'algèbre $\mathcal{O}$, et d'ailleurs elles ne spécialisent pas en les observables usuelles correspondantes lorsque le paramètre q tend vers 1. D'autre part, l'étude asymptotique menée par Strahov met en jeu des q -formes limites Ω_q extrêmement peu explicites (on ne sait pas du tout les dessiner...), et qui correspondent à une renormalisation simultanée des diagrammes et du paramètre q par un facteur $\sqrt{n}$; nous verrons dans le chapitre suivant une forme beaucoup plus simple de ces résultats. Enfin, la proposition 8.2.1 de [Stro8] ne donne rien de rigoureux concernant l'asymptotique des q -processus de Plancherel — ou du moins nous ne voyons pas comment l'exploiter.

Pour toutes ces raisons, nous avons été amené à abandonner l'approche « différentielle » dans le problème de l'asymptotique des q -mesures de Plancherel. Dans le chapitre 8, nous verrons que les observables de diagrammes (usuelles) permettent de résoudre entièrement le problème ; avant cela, voyons ce qu'il en est de l'approche « déterminantale ». Fixons un paramètre q strictement inférieur à 1. On a vu dans le chapitre précédent que

$$s_\lambda(q, q^2, q^3, \dots) = \frac{q^{-b(\lambda')}}{\prod_{(i,j) \in \lambda} q^{-h(i,j)} - 1} = \frac{q^{h(\lambda) - b(\lambda')}}{\prod_{(i,j) \in \lambda} 1 - q^{h(i,j)}} = \frac{q^{|\lambda| + b(\lambda)}}{\prod_{(i,j) \in \lambda} 1 - q^{h(i,j)}}.$$

Par conséquent, $s_\lambda(1 - q, q(1 - q), q^2(1 - q), \dots)$ vaut

$$\frac{q^{b(\lambda)}}{\prod_{(i,j) \in \lambda} \{h(i, j)\}_q} = \frac{D_\lambda(q)}{\{n!\}_q}.$$

Posons $b = (\sqrt{\theta}(1 - q), \sqrt{\theta}(1 - q)q, \sqrt{\theta}(1 - q)q^2, \dots)$; cette suite correspond aux paramètres de Miwa

$$t'_k = \frac{1}{k} p_k(b) = \frac{\theta^{k/2}}{k} \frac{(1 - q)^k}{1 - q^k}.$$

Alors, si $t = (\sqrt{\theta}, 0, 0, \dots)$, la mesure de Schur associée aux paramètres t et t' est

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\lambda) &= \frac{1}{Z} \left(\theta^{\frac{|\lambda|}{2}} \frac{\dim \lambda}{|\lambda|!} \right) \times \left(\theta^{\frac{|\lambda|}{2}} s_\lambda(1 - q, q(1 - q), q^2(1 - q), \dots) \right) \\ &= \frac{\theta^{|\lambda|}}{e^\lambda |\lambda|!} \frac{\dim \lambda \times D_\lambda(q)}{\{n!\}_q} = \mathcal{P}(\theta)(|\lambda|) M_{|\lambda|, q}(\lambda), \end{aligned}$$

c'est-à-dire que c'est la poissonisée de paramètre θ des q -mesures de Plancherel. Nous noterons cette mesure $M_{\mathcal{P}(\theta), q}$. Lorsque q tend vers 1, les paramètres t et t' tendent tous les deux vers $(\sqrt{\theta}, 0, 0, \dots)$, qui est le paramètre de la poissonisée de la mesure de Plancherel standard ; on a ainsi généralisé la construction du paragraphe 5.2.

Compte tenu du théorème 4.7, le processus ponctuel $\mathcal{D}_*(M_{\mathcal{P}(\theta), q})$ est déterminantal ; calculons son noyau. La fonction J introduite dans le paragraphe 4.2 s'écrit ici

$$\begin{aligned} J_q(x) &= \exp \left(\sum_{n \geq 1} t_n x^n - \sum_{n \geq 1} t'_n x^{-n} \right) = e^{\sqrt{\theta}x} \left(\prod_i 1 - b_i x^{-1} \right) \\ &= e^{\sqrt{\theta}x} \left(\prod_{i=0}^{\infty} 1 - q^i \sqrt{\theta}(1 - q)x^{-1} \right) = e^{\sqrt{\theta}x} (\sqrt{\theta}(1 - q)x^{-1}; q)_\infty \end{aligned}$$

en utilisant les notations de Pochhammer. Compte tenu des résultats du paragraphe 4.2, la fonction génératrice du noyau $K_{\mathcal{D}_*(M_{\mathcal{P}(\theta),q})}$ est donc

$$A_q(z, w) = \frac{\sqrt{zw}}{z-w} e^{\sqrt{\theta}(z-w)} \frac{(\sqrt{\theta}(1-q)z^{-1}; q)_\infty}{(\sqrt{\theta}(1-q)w^{-1}; q)_\infty}$$

et le q -calcul permet de développer les symboles de Pochhammer infinis en séries entières

$$(t; q)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}}}{(q; q)_n} t^n \quad ; \quad \frac{1}{(t; q)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(q; q)_n},$$

voir [CK02]. Ainsi, $A_q(z, w)$ est la somme quintuple

$$A_q(z, w) = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}'} K_{\mathcal{D}}(k, l) z^k w^{-l} = \sum_{r, s, t, u, v} \frac{(-1)^{t+u} \theta^{\frac{s+t+u+v}{2}} q^{\binom{u}{2}}}{s! t! \{u!\}_q \{v!\}_q} z^{s-u-r-1/2} w^{t-v+r+1/2},$$

les indices r, s, t, u, v appartenant à $\mathbb{N}$.

Fixons deux demi-entiers x et y , et introduisons le paramètre $n = \frac{s+t+u+v}{2} - \frac{x+y+1}{2}$. Le noyau $K_{\mathcal{D}}(x, y)$ est la restriction de la somme précédente à l'ensemble d'indices $\{r, s, t, u, v\}$ tels que $x = s - u - r - 1/2$ et $y = v - t - r - 1/2$. Par conséquent, $n = r + t + u$, et on peut écrire $K_{\mathcal{D}}(x, y)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r+t+u=n} \frac{(-1)^{t+u} \theta^{n+\frac{x+y+1}{2}} q^{\binom{u}{2}}}{s! t! \{u!\}_q \{v!\}_q} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \theta^{n+\frac{x+y+1}{2}} \left(\sum_{r+t+u=n} \frac{(-1)^r q^{\binom{u}{2}}}{t! (n+x+1/2-t)! \{u!\}_q \{n+y+1/2-u!\}_q} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n+\frac{x+y+1}{2}}}{(x+n+\frac{1}{2})! \{y+n+\frac{1}{2}\}_q} \left(\sum_{r+t+u=n} \binom{n+x+\frac{1}{2}}{t} \binom{n+y+\frac{1}{2}}{u}_q (-1)^r q^{\binom{u}{2}} \right). \end{aligned}$$

Lorsque $q = 1$, la somme sur les indices r, t, u se réduit par la formule de Vandermonde à $\binom{x+y+2n}{n}$, et la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \theta^{n+\frac{x+y+1}{2}}}{(x+n+\frac{1}{2})! (y+n+\frac{1}{2})!} \binom{x+y+2n}{n}$$

est bien le développement en série de $\sqrt{\theta} \frac{J_{x-1/2}(2\sqrt{\theta}) J_{y+1/2}(2\sqrt{\theta}) - J_{x+1/2}(2\sqrt{\theta}) J_{y-1/2}(2\sqrt{\theta})}{x-y}$. Nos formules généralisent donc bien celles données dans le paragraphe 5.2. Finalement, si l'on introduit les déformations de fonctions de Bessel

$$J_{r,q}^1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{\binom{n}{2}}}{\{n!\}_q r+n!} \left(\frac{z}{2}\right)^{r+2n} \quad ; \quad J_{r,q}^2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \{r+n!\}_q} \left(\frac{z}{2}\right)^{r+2n},$$

alors on obtient une expression semblable à celle donnée page 67 dans le cas $q = 1$:

Proposition 7.3 (Noyau associé à la poissonisée des q -mesures de Plancherel). *Étant donné un paramètre $q < 1$, le processus ponctuel $\mathcal{D}_*(M_{\mathcal{P}(\theta),q})$ est déterminantal, de noyau*

$$K_q(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} J_{x+n+1/2,q}^1(2\sqrt{\theta}) J_{y+n+1/2,q}^2(2\sqrt{\theta}).$$

Démonstration. En développant en séries les deux fonctions de Bessel déformées, on obtient une somme triple qui est exactement la deuxième ligne de la formule donnée précédemment pour $K_{\mathcal{D}}(x, y)$. $\square$

L'analogie avec les raisonnements du chapitre 5 s'arrête malheureusement ici, car on connaît pas l'asymptotique de $K_q(x, y)$ lorsque θ tend vers l'infini. Les fonctions de Bessel déformées que nous avons obtenues sont à notre connaissance inédites ; en particulier, elles diffèrent sensiblement des constructions usuelles de q -fonctions de Bessel, voir par exemple [Jac05]. Le noyau $K_q(x, y)$ est *a priori* non intégrable, c'est-à-dire qu'on ne sait pas comme dans le cas $q = 1$ l'écrire comme combinaison linéaire finie de produits de fonctions $f(x)g(y)$. Et même si c'était le cas, l'asymptotique des fonctions $J_{r,q}^1(z)$ et $J_{r,q}^2(z)$ lorsque z tend vers l'infini semble difficile à déterminer, essentiellement parce qu'il s'agit de sommes alternées. Nous devons donc également rejeter l'approche déterminantale ; *a posteriori*, nous verrons d'ailleurs qu'elle avait peu de chances d'aboutir, puisque la simple densité $K_q(x, x)$ doit dégénérer après renormalisation en une somme de Dirac en les points $(1 - q), q(1 - q), \dots$ voir le chapitre suivant et le théorème 8.5.

7.2 Algèbre d'Iwahori-Hecke d'un groupe de Chevalley

Lorsqu'on a étudié la mesure de Plancherel standard à l'aide de l'algèbre d'observables $\mathcal{O}$, le point de départ de la preuve était l'existence d'une base d'observables $(\Sigma_\mu)_{\mu \in \mathcal{Y}}$ telle que

$$M_n[\Sigma_\mu] = n^{\downarrow k} \mathbb{1}_{\mu=1^k},$$

cf. page 38. Dans la suite de ce chapitre, on cherche une base d'observables $(\Sigma_{\mu,q})_{\mu \in \mathcal{Y}}$ dont on peut calculer aussi aisément les espérances, mais cette fois-ci sous les q -mesures de Plancherel ; ces observables seront à la base de l'étude asymptotique des mesures $M_{n,q}$. La théorie algébrique sous-jacente est celle des **algèbres d'Hecke**, et dans ce contexte, on pourra donner plus loin une interprétation de la q -mesure de Plancherel analogue à celle donnée au début du paragraphe 3.2, c'est-à-dire en termes d'isométries d'espaces de probabilité non commutatifs.

Les algèbres d'Iwahori-Hecke peuvent être étudiées dans le contexte général des groupes de Chevalley (cf. [Car92, §1]), c'est-à-dire les groupes algébriques G^F définis sur un corps fini $k = \mathbb{F}_q$, avec G groupe réductif défini sur $\overline{\mathbb{F}_q}$. Nous adopterons ce point de vue général ; ceci nous permettra d'adapter les résultats relatifs au $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$ -module $\mathbb{C}[\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)/\mathrm{B}(n, \mathbb{F}_q)]$ à d'autres cas, par exemple celui du $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{F}_q)$ -module $\mathbb{C}[\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{F}_q)/\mathrm{BSp}(2n, \mathbb{F}_q)]$, voir le chapitre 9. On rappelle qu'un **sous-groupe de Borel** de G est un sous-groupe algébrique B qui est connexe résoluble maximal ; tout tore maximal $T \subset G$ est inclus dans un tel sous-groupe, et si N est le normalisateur de T dans G , alors $B \cap N = T$ et $W = N/T$ est un **groupe de Coxeter**, c'est-à-dire un groupe engendré par des involutions et qui admet une présentation du type

$$W = \langle s \in S \mid \forall s \in S, s^2 = 1 ; \forall s \neq t \in S, \exists m_{st} \in \mathbb{N}, (st)^{m_{st}} = (ts)^{m_{st}} = 1 \rangle,$$

voir [GP00, chapitre 1]. On dit que W est le **groupe de Weyl** de G ; il ne dépend pas du choix d'un tore T et d'un sous-groupe de Borel B , car toutes ces paires sont conjuguées dans G . L'application de Frobenius F agit sur W , et $W^F = N^F/T^F$. On parle de groupe de Chevalley

non tordu si F agit trivialement sur W (ou, car c'est équivalent, trivialement sur le diagramme de Dynkin de G); alors, $W = N^F/T^F$. Dans ce qui suit, nous supposons toujours que G est un groupe de Chevalley non tordu. Dans ce contexte, le groupe G est muni d'une **paire BN**, ce qui se traduit en particulier par l'existence d'une **décomposition de Bruhat**, valable sur $\bar{k}$ et sur k :

$$G = \bigsqcup_{w \in W} BwB \quad ; \quad G^F = \bigsqcup_{w \in W} B^F w B^F.$$

On renvoie à [GPoo, §8.4] et à [Gar97] pour des précisions sur cette terminologie, et à [DM91] et [Car92, §1] pour des précisions sur la théorie des groupes finis réductifs de type Lie.

Suivant [Iwa64], nous appellerons **algèbre d'Iwahori-Hecke** d'un groupe de Chevalley G^F non tordu sur un corps fini $\mathbb{F}_q$ la sous-algèbre de $\mathbb{C}[G^F]$ constituée des fonctions qui sont bi- B^F -invariantes, c'est-à-dire que

$$\mathcal{H}(G^F, B^F) = \mathbb{C}[B^F \backslash G^F / B^F],$$

le produit des éléments de cette algèbre étant bien sûr le produit de convolution des fonctions. Compte tenu de la décomposition de Bruhat, $\mathcal{H}(G^F, B^F)$ est engendrée linéairement par les classes $B^F w B^F$, et on peut montrer qu'elle est engendrée en tant qu'algèbre par les $B^F s B^F$, où $s \in S$ parcourt les générateurs du groupe de Weyl W . Plus précisément, si

$$w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_r}$$

est une **expression réduite**² de w , c'est-à-dire une écriture de w comme produits de générateurs $s \in S$ de longueur minimale, alors

$$B^F w B^F = (B^F s_{i_1} B^F) (B^F s_{i_2} B^F) \cdots (B^F s_{i_r} B^F),$$

voir le théorème 3.2 de [Iwa64].

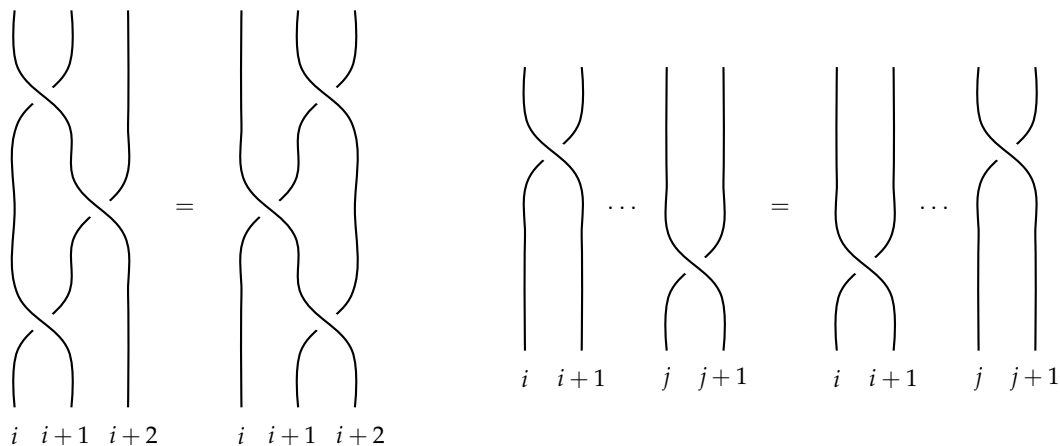
Exemple. Si $G^F = \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$, on peut prendre pour sous-groupe de Borel le groupe $B^F = \mathrm{B}(n, \mathbb{F}_q)$ constitué des matrices triangulaires supérieures, et pour tore maximal le sous-groupe diagonal $T^F = (\mathbb{F}_q)^n$. Le normalisateur N^F est le sous-groupe des matrices monomiales, *i.e.*, celles qui ont exactement un coefficient non nul sur chaque ligne et sur chaque colonne. Le groupe de Weyl $W = N^F/T^F$ s'identifie donc au groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, et vu comme groupe de Coxeter, ce dernier admet pour présentation

$$\mathfrak{S}_n = \left\langle s_1, \dots, s_{n-1} \mid \begin{array}{l} \forall i, (s_i)^2 = 1 \\ \forall i \leq n-2, s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \\ \forall i, j, |i-j| \geq 2 \Rightarrow s_i s_j = s_j s_i \end{array} \right\rangle,$$

où les s_i sont les transpositions élémentaires $(i, i+1)$. Les relations autres que $(s_i)^2 = 1$ sont appelées **relations de tresse**; elles correspondent aux opérations sur les tresses représentées sur la figure 7.2.

On doit à N. Iwahori une présentation explicite de l'algèbre $\mathcal{H}(G^F, B^F)$ en termes des générateurs $T_s = B^F s B^F$, où s parcourt un ensemble d'involutions S engendrant le groupe de

2. On dit dans ce cas que r est la **longueur** de l'élément w , ce qu'on note $r = \ell(w)$.


 FIGURE 7.2 – Relations de tresse entre les générateurs s_i du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$.

Weyl W , cf. [Iwa64]. Ainsi, si $W = \langle S \rangle$ admet pour présentation les relations quadratiques $s^2 = 1$ et les relations de tresse

$$\forall s, t, \underbrace{ststst \cdots}_{m_{st} \text{ termes}} = \underbrace{tststs \cdots}_{m_{st} \text{ termes}},$$

alors les relations entre les T_s sont données par le théorème suivant :

Théorème 7.4 (Iwahori-Hecke, [Iwa64]). *L'algèbre d'Iwahori-Hecke $\mathcal{H}(G^F, B^F)$ admet pour présentation :*

$$\begin{aligned} \forall s, (T_s)^2 &= (q-1)T_s + q \\ \forall s, t, \underbrace{T_s T_t T_s T_t \cdots}_{m_{st} \text{ termes}} &= \underbrace{T_t T_s T_t T_s \cdots}_{m_{st} \text{ termes}} \end{aligned}$$

Autrement dit, $\mathcal{H}(G^F, B^F)$ a les mêmes relations de tresse que l'algèbre de groupe $\mathbb{C}W$, et les relations quadratiques $(s-1)(s+1) = 0$ sont déformées en $(T_s - q)(T_s + 1) = 0$.

Plus généralement, un groupe de Coxeter (W, S) étant fixé, nous appellerons **algèbre d'Hecke générique** de W la $\mathbb{C}(q)$ -algèbre engendrée par des symboles T_s vérifiant les relations de tresse du groupe et les relations quadratiques $(T_s - q)(T_s + 1) = 0$. Cette $\mathbb{C}(q)$ -algèbre sera notée $\mathcal{H}(W)$; elle admet pour $\mathbb{C}(q)$ -base linéaire les

$$T_w = T_{s_{i_1}} T_{s_{i_2}} \cdots T_{s_{i_r}},$$

où w parcourt W et $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_r}$ est une expression réduite — le choix d'une expression réduite ne change pas T_w en vertu du théorème de Matsumoto, voir [GP00, §1.2]. Pour toute spécialisation du paramètre q différente de $q = 0$, on peut montrer que la $\mathbb{C}$ -algèbre spécialisée $\mathcal{H}_q(W)$ est semi-simple si et seulement si le **polynôme de Poincaré**

$$W(q) = \sum_{w \in W} q^{\ell(w)}$$

ne s'annule pas, voir [GP00, chapitre 7] et [Gyo95] — c'est le **théorème de Gyoja-Uno**. L'algèbre générique $\mathcal{H}(W)$ est également semi-simple, et dans le cas semi-simple, l'algèbre

d'Hecke a les mêmes représentations irréductibles que l'algèbre de groupe CW, et avec les mêmes multiplicités, voir [GPoo, théorèmes 7.4.6 et 8.1.7].

Exemple. L'algèbre d'Hecke de type A, c'est-à-dire l'algèbre d'Hecke du groupe symétrique, est semi-simple si et seulement si

$$W(q) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{\ell(\sigma)} \neq 0.$$

Or, dans l'algèbre du groupe symétrique, la somme de toutes les permutations admet pour factorisation :

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma = (1 + s_{n-1} + s_{n-2}s_{n-1} + \cdots + s_1 \cdots s_{n-2}s_{n-1}) \cdots (1 + s_2 + s_1s_2) (1 + s_1)$$

En effet, les termes du premier facteur du terme à droite sont les cycles (n) , $(n, n-1)$, $\dots$ et toute permutation de $\mathfrak{S}_n$ s'écrit de manière unique

$$\sigma = (n, n-1, \dots, \sigma^{-1}(n)) \circ \tau$$

où τ est une permutation de $\mathfrak{S}_{n-1}$. L'identité est donc vraie par récurrence sur n , et de plus, cette factorisation des permutations ne donne que des expressions réduites. En spécialisant l'algèbre du groupe symétrique par la règle $s_i \mapsto q$, on obtient donc :

$$W(q) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} q^{\ell(\sigma)} = (1 + q + \cdots + q^{n-1}) \cdots (1 + q + q^2) (1 + q) = \{n!\}_q$$

L'algèbre d'Hecke du groupe symétrique est donc semi-simple si et seulement si $q \neq 0$ n'est pas une racine de l'unité d'ordre $2 \leq i \leq n$. Et dans ce cas, les modules irréductibles $V^\lambda(q)$ sur $\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$ sont indexés par les partitions $\lambda \in \mathcal{Y}_n$, et ils ont pour dimensions et multiplicités les dimensions usuelles $\dim \lambda$. En particulier, pour q réel strictement positif, $\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$ est toujours une algèbre semi-simple qui a la même théorie des représentations que $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$.

Expliquons maintenant le lien entre ces algèbres d'Hecke et la mesure de Plancherel du module des fonctions sur la variété de drapeaux G^F/B^F , où G^F est toujours un groupe de Chevalley non tordu sur $\mathbb{F}_q$. On note $V = \mathbb{C}[G^F/B^F]$, et on considère une application linéaire $u \in \text{End}(V)$ qui commute avec l'action de G^F . Comme G^F agit transitivement sur la variété de drapeaux, u est entièrement déterminée par la valeur de $u(B^F)$, et nous noterons cette valeur

$$u \left(\sum_{b \in B^F} b \right) = \sum_{g \in G^F} h_g g.$$

L'image $u(B^F)$ est dans $\mathbb{C}[G^F/B^F]$, donc h est B^F -invariante à droite. De plus, $bB^F = B^F$ pour tout b dans B^F , donc h est aussi B^F -invariante à gauche. Par conséquent, le commutant de l'action de $\mathbb{C}G^F$ sur la variété de drapeaux est

$$\text{End}_{G^F} \left(\mathbb{C}[G^F/B^F] \right) = \mathbb{C}[B^F \backslash G^F/B^F] = \mathcal{H}(G^F, B^F) = \mathcal{H}_q(W),$$

c'est-à-dire que c'est l'algèbre d'Hecke du groupe de Weyl W . On peut donc considérer $\mathbb{C}[G^F/B^F]$ comme un $(\mathbb{C}G^F, \mathcal{H}_q(W))$ -bimodule, et la théorie du bicommutant de Schur-Weyl

(voir le paragraphe 9.4) s'applique. Ainsi, en tant que bimodule, on a la décomposition suivante en produits tensoriels d'irréductibles :

$$G^F \curvearrowright \{\mathbb{C}[G^F/B^F]\} \curvearrowright \mathcal{H}_q(W) = \sum_{\lambda \in \widehat{W}} U^\lambda(q) \otimes_{\mathbb{C}} V^\lambda(q).$$

où les $U^\lambda(q)$ sont les classes d'isomorphisme de modules intervenant dans la décomposition de $\mathbb{C}[G^F/B^F]$ en G^F -modules irréductibles (les **modules unipotents**), et où les $V^\lambda(q)$ sont les classes d'isomorphisme de modules irréductibles sur $\mathcal{H}_q(W)$. En particulier, pour $G = \mathrm{GL}(n)$:

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q) \curvearrowright \{\mathbb{C}[\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)/\mathrm{B}(n, \mathbb{F}_q)]\} \curvearrowright \mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n) = \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_n} U^\lambda(q) \otimes_{\mathbb{C}} V^\lambda(q).$$

Soit τ la restriction de la trace normalisée de $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[G^F/B^F])$ à l'algèbre d'Iwahori-Hecke $\mathrm{End}_{G^F}(\mathbb{C}[G^F/B^F]) = \mathcal{H}_q(W)$. Sur la base $(T_w)_{w \in W}$ de l'algèbre d'Hecke, cette trace vaut

$$\tau(T_w) = \mathbb{1}_{(w=e_W)},$$

et la trace d'un produit $\tau(T_w T'_w)$ vaut 0 si $ww' \neq e_W$, et $q^{\ell(w)}$ si $ww' = e_W$. On peut donc considérer cette trace quelque soit la valeur du paramètre q , même si ce n'est pas la puissance d'un nombre premier ; et l'algèbre d'Hecke (complexe) $\mathcal{H}_q(W)$ a donc une structure naturelle d'espace de probabilité non commutatif³. Pour cette structure, la base duale de la base « canonique » $(T_w)_{w \in W}$ est $(q^{\ell(w)} T_{w^{-1}})_{w \in W}$. Ceci étant, étant donnée une mesure de probabilité P sur $\widehat{W}$, on peut comme dans le chapitre 3 lui associer une structure d'espace de probabilité non commutatif en considérant la trace normalisée

$$\tau_P = \bigoplus_{\lambda \in \widehat{W}} P(\lambda) \mathrm{tr}_{V^\lambda(q)}$$

sur l'algèbre $\bigoplus_{\lambda \in \widehat{W}} \mathrm{End}(V^\lambda(q))$. Alors, la transformée de Fourier abstraite

$$\mathcal{H}_q(W) \rightarrow \bigoplus_{\lambda \in \widehat{W}} \mathrm{End}(V^\lambda(q))$$

est une isométrie d'espaces de probabilité non commutatifs si et seulement si l'on prend pour P la q -mesure de Plancherel

$$P(\lambda) = \frac{(\dim U^\lambda(q)) \times (\dim V^\lambda)}{\mathrm{card} G^F/B^F};$$

en particulier, $P = M_{n,q}$ si $G^F = \mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$. Autrement dit :

Proposition 7.5 (Décomposition de la trace de l'algèbre d'Hecke dans la base des q -caractères). *Dans la base $(\chi^\lambda(q))_{\lambda \in \widehat{W}}$ des caractères normalisés des modules irréductibles $(V^\lambda(q))_{\lambda \in \widehat{W}}$, la trace canonique τ de l'algèbre d'Hecke $\mathcal{H}_q(W)$ admet pour décomposition*

$$\tau = \sum_{\lambda \in \widehat{W}} \frac{D_\lambda(q) \times \dim \lambda}{W(q)} \chi^\lambda(q).$$

Cette décomposition reste valable pour tout paramètre $q \neq 0$ tel que $W(q) \neq 0$.

Compte tenu de cette proposition, il est naturel de prendre pour analogues des observables Σ_μ des versions renormalisées $\Sigma_{\mu,q}$ des q -caractères $\chi^\lambda(q)$ de l'algèbre d'Hecke $\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$. Le prochain paragraphe est consacré à l'étude approfondie de ces q -caractères.

3. Notons que τ est une quantification de la trace usuelle de $\mathbb{C}W$ associée à la représentation régulière gauche. Si W est le groupe symétrique, il existe en réalité deux quantifications possibles de τ , voir [RR97, §6] ; mais celle que nous présentons est la seule intéressante dans le contexte des groupes linéaires finis $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$.

7.3 Caractères des algèbres d'Hecke de type A

Dans cette section, q est un paramètre complexe non nul et qui n'est pas une racine non triviale de l'unité, de sorte que $\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$ est une algèbre semi-simple abstraitement isomorphe à l'algèbre de groupe $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$. Si $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ est une partition de taille n , on note σ_μ la permutation standard de type μ , c'est-à-dire que

$$\begin{aligned}\sigma_\mu &= (1, 2, \dots, \mu_1) (\mu_1 + 1, \dots, \mu_1 + \mu_2) \cdots (\mu_1 + \dots + \mu_{r-1} + 1, \dots, n) \\ &= (s_1 s_2 \cdots s_{\mu_1-1}) (s_{\mu_1+1} \cdots s_{\mu_1+\mu_2-1}) \cdots (s_{\mu_1+\dots+\mu_{r-1}+1} \cdots s_n-1).\end{aligned}$$

C'est une permutation de longueur minimale dans la classe de conjugaison C_μ ; on note T_μ l'élément correspondant dans l'algèbre d'Hecke $\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$. La **table des caractères** de l'algèbre d'Hecke est la matrice $(\chi^\lambda(q, T_\mu) = \chi^\lambda(q, \mu))_{\lambda, \mu \in \mathfrak{S}_n}$. *A priori*, il n'est pas clair que cette table des caractères détermine entièrement les caractères de $\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$. En effet, si deux permutations σ et τ sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$, il n'est pas vrai en général que les éléments T_σ et T_τ soient conjugués dans l'algèbre $\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$, et étant donnée une fonction ϕ telle que

$$\forall a, b \in \mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n), \quad \phi(ab) = \phi(ba),$$

on peut avoir $\phi(T_\sigma) \neq \phi(T_\tau)$. Ainsi, T_σ et T_τ ne sont pas forcément congrus modulo le sous-espace $[\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n), \mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)]$.

Exemple. Pour tout entier $n \geq 2$, l'algèbre d'Hecke $\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$ a exactement deux caractères irréductibles de dimension 1 : le **caractère signature** $T_\sigma \mapsto (-1)^{\ell(\sigma)}$, et le **caractère d'indice** $T_\sigma \mapsto q^{\ell(\sigma)}$. Pour $n = 3$, les transpositions $(1, 2)$ et $(1, 3)$ sont évidemment conjuguées dans $\mathfrak{S}_3$, mais la première a pour longueur 1, et la seconde a pour longueur 3. Par conséquent, si χ est le caractère d'indice, alors

$$\chi(T_{(1,2)}) = q \neq q^3 = \chi(T_{(1,3)}).$$

Néanmoins, si σ et τ sont des permutations **fortement conjuguées**, c'est-à-dire qu'il existe une suite de permutations $\sigma = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_r = \tau$ telle que

$$\forall i, \exists x \in \mathfrak{S}_n, \quad \begin{cases} x\sigma_i = \sigma_{i+1}x \text{ et } \ell(x\sigma_i) = \ell(x) + \ell(\sigma_i) \\ \text{ou } \sigma_i x = x\sigma_{i+1} \text{ et } \ell(\sigma_i x) = \ell(\sigma_i) + \ell(x), \end{cases}$$

alors T_σ et T_τ sont conjugués dans $\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$, et ils sont donc congrus modulo $[\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n), \mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)]$ dans $\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$. Par suite, ils ont la même image par tout caractère $\chi^\lambda(q)$. En particulier, si σ est un élément de longueur minimale dans une classe de conjugaison C_μ , alors on peut montrer qu'il est fortement conjugué à σ_μ (voir [GP00, théorème 3.2.9]), et on a donc

$$\chi^\lambda(q, T_\sigma) = \chi^\lambda(q, \mu)$$

pour tout caractère irréductible. Maintenant, si σ n'est pas de longueur minimale dans sa classe de conjugaison, alors il existe un algorithme qui donne une $\mathbb{Z}[q]$ -combinaison linéaire

$$\sum_{\substack{\tau \text{ minimal dans sa} \\ \text{classe de conjugaison}}} c_{\sigma\tau} T_\tau$$

congrue à T_σ modulo $[\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n), \mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)]$, voir [GP00, §8.2] et [Ram91, théorème 5.1]. Les valeurs $\chi^\lambda(q, \mu)$ déterminent donc bien les caractères de l'algèbre d'Iwahori-Hecke $\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$.

Dans ce qui suit, nous utiliserons également les notations $\varsigma^\lambda(q, \mu)$, qui correspondent aux caractères non normalisés ; ainsi, $\varsigma^\lambda(q, \mu) = (\dim \lambda) \chi^\lambda(q, \mu)$. Notons que tous ces résultats restent valables pour l'algèbre d'Hecke de n'importe quel groupe de Coxeter fini : la table des caractères de l'algèbre est toujours doublement indexée par les classes de conjugaison du groupe W .

Ceci étant, le calcul explicite de la table des caractères $(\varsigma^\lambda(q, \mu))_{\lambda, \mu \in \mathcal{Y}_n}$ de l'algèbre d'Hecke du groupe symétrique peut être mené comme dans la section 1.5, c'est-à-dire à l'aide d'une formule de Frobenius dans l'algèbre Λ des fonctions symétriques. Ainsi, dans [Ram91], A. Ram utilise la dualité de Schur-Weyl⁴ sur $(\mathbb{C}^N)^{\otimes n}$ entre le groupe quantique $U_q(\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C}))$ et l'algèbre d'Hecke $\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$ pour calculer les caractères $\varsigma^\lambda(q, \mu)$, et il les relie aux polynômes de Hall-Littlewood modifiés (voir [RRW96] pour les propriétés de ces polynômes) :

$$q_k(X, q) = \frac{h_k(X(q-1))}{q-1}.$$

Ici, X est un alphabet et q est une variable ; $X(q-1)$ est donc la différence d'alphabets $qX - X$. Comme $h_k = s_k$, par la formule de Frobenius,

$$h_k(X) = \sum_{\mu \in \mathcal{Y}_k} (z_\mu)^{-1} p_\mu(X) \quad ; \quad q_k(X, q) = \frac{1}{q-1} \sum_{\mu \in \mathcal{Y}_k} (q^\mu - 1) (z_\mu)^{-1} p_\mu(X)$$

où $q^\mu - 1 = \prod_{i=1}^{\ell(\mu)} q^{\mu_i} - 1$. Si $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_r)$ est une partition, notons $q_\mu(X, q) = \prod_{i=1}^r q_{\mu_i}(X, q)$. D'après ce qui précède, $q_\mu(X, 1) = p_\mu(X)$ pour toute partition μ .

Théorème 7.6 (q -formule de Frobenius, [Ram91]). *La valeur du q -caractère non normalisé $\varsigma^\lambda(q, \mu)$ est $\varsigma^\lambda(q, \mu) = \langle s_\lambda \mid q_\mu(q) \rangle$. Ainsi, pour toute partition $\mu \in \mathcal{Y}$,*

$$q_\mu(X, q) = \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_n} \varsigma^\lambda(q, \mu) s_\lambda(X).$$

$\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_1)$	(1)				
(1)	1				

$\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_2)$	(2)	(1, 1)			
(2)	q	1			
(1, 1)	-1	1			

$\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_3)$	(3)	(2, 1)	(1, 1, 1)		
(3)	q^2	q	1		
(2, 1)	$-q$	$q-1$	2		
(1, 1, 1)	1	-1	1		

$\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_4)$	(4)	(3, 1)	(2, 2)	(2, 1, 1)	(1, 1, 1, 1)
(4)	q^3	q^2	q^2	q	1
(3, 1)	$-q^2$	$q^2 - q$	$q^2 - 2q$	$2q - 1$	3
(2, 2)	0	$-q$	$q^2 + 1$	$q - 1$	2
(2, 1, 1)	q	$-q + 1$	$-2q + 1$	$q - 2$	3
(1, 1, 1, 1)	-1	1	1	-1	1

FIGURE 7.3 – Tables des caractères des algèbres d'Hecke $\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$ pour $n \leq 4$.

4. Nous donnerons un bref aperçu de cette théorie dans la section 9.4.

Cette formule a de nombreuses conséquences; en particulier, elle implique une q -règle de Murnaghan-Nakayama qui généralise celle donnée par le théorème 1.6, et qui permet un calcul récursif de tous les q -caractères, voir la figure 7.3. Ainsi, si $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$, alors $\varsigma^\lambda(q, \mu)$ est égal à

$$\sum_{\emptyset = \lambda_0 \subset \lambda_1 \subset \dots \subset \lambda_m = \lambda} \prod_{j=1}^m \left((q-1)^{\text{cc}(\lambda_j \setminus \lambda_{j-1})-1} \prod_{v_{j,k} \subset \lambda_j \setminus \lambda_{j-1}} (-1)^{r(v_{j,k})-1} q^{c(v_{j,k})-1} \right),$$

la somme étant effectuée sur les suites de partitions telles que chaque $\lambda_j \setminus \lambda_{j-1}$ soit un ruban de poids μ_j avec $\text{cc}(\lambda_j \setminus \lambda_{j-1})$ composantes connexes $v_{j,k}$, chaque composante connexe ayant $r(v_{j,k})$ lignes et $c(v_{j,k})$ colonnes — par rapport à la formule usuelle, notons qu'on autorise ici des rubans éventuellement non connexes. On retrouve bien le théorème 1.6 en spécialisant la formule en $q = 1$. On renvoie à [RR97, §2] pour une preuve de cette q -formule; l'article [HR96] traite également le cas des algèbres d'Hecke des groupes de Coxeter de type B et D, mais nous y reviendrons dans le chapitre 9.

Exposons finalement la formule de Ram (cf. [Ram91, théorème 5.4]), qui relie les q -caractères de l'algèbre d'Hecke $\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$ aux caractères usuels du groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. D'après la q -formule de Frobenius, $\varsigma^\lambda(q, \mu)$ est égal à

$$\begin{aligned} \langle q_\mu(X, q) \mid s_\lambda(X) \rangle &= \frac{1}{(q-1)^{\ell(\mu)}} \langle h_\mu(X(q-1)) \mid s_\lambda(X) \rangle \\ &= \frac{1}{(q-1)^{\ell(\mu)}} \sum_{v \in \mathcal{Y}_n} \frac{\langle h_\mu \mid p_v \rangle \langle p_v(X(q-1)) \mid s_\lambda(X) \rangle}{\langle p_v \mid p_v \rangle} \\ &= \frac{1}{(q-1)^{\ell(\mu)}} \sum_{v \in \mathcal{Y}_n} \frac{q^v - 1}{z_v} \langle h_\mu \mid p_v \rangle \langle p_v \mid s_\lambda \rangle \end{aligned}$$

et dans la dernière expression, les produits scalaires $\langle p_v \mid s_\lambda \rangle$ sont les caractères usuels $\varsigma^\lambda(v)$. Ainsi :

Proposition 7.7 (Formule de Ram, [Ram91]). *Pour toute partition λ , les valeurs du q -caractère irréductible $\varsigma^\lambda(q)$ s'expriment en fonction de celles du caractère non déformé ς^λ :*

$$\forall \mu, \quad (q-1)^{\ell(\mu)} \varsigma^\lambda(q, \mu) = \sum_{v \in \mathcal{Y}_n} \frac{\langle p_v \mid h_\mu \rangle}{\langle p_v \mid p_v \rangle} (q^v - 1) \varsigma^\lambda(v).$$

Si $\mathcal{Y}_n$ est muni de l'ordre lexicographique inverse, alors cette « formule de changement de base » entre q -caractères de $\mathcal{H}_q(\mathfrak{S}_n)$ et caractères de $\mathfrak{S}_n$ est triangulaire : en effet, $\langle h_\mu \mid p_v \rangle = 0$ si $v \prec \mu$. On peut donc inverser la formule, et exprimer les caractères en fonction des q -caractères (!). Ainsi, comme $(m_\mu)_{\mu \in \mathcal{Y}}$ est la base duale de $(h_\mu)_{\mu \in \mathcal{Y}}$ pour le produit scalaire canonique sur l'algèbre Λ , et comme $(p_\mu)_{\mu \in \mathcal{Y}}$ est une base orthogonale, on peut écrire :

$$\begin{aligned} (q^\mu - 1) \varsigma^\lambda(\mu) &= \sum_{\rho} \frac{\langle p_\mu \mid p_\rho \rangle}{\langle p_\rho \mid p_\rho \rangle} (q^\rho - 1) \varsigma^\lambda(\rho) \\ &= \sum_{\rho, v} \langle p_\mu \mid m_v \rangle \frac{\langle h_v \mid p_\rho \rangle}{\langle p_\rho \mid p_\rho \rangle} (q^\rho - 1) \varsigma^\lambda(\rho) \\ &= \sum_{v \in \mathcal{Y}_n} \langle p_\mu \mid m_v \rangle (q-1)^{\ell(v)} \varsigma^\lambda(q, v). \end{aligned}$$

Cette réécriture de la formule de Ram est quelque peu étrange, puisqu'on exprime maintenant les caractères du groupe symétrique en fonction d'objets beaucoup plus complexes, à savoir les caractères de l'algèbre d'Iwahori-Hecke. C'est néanmoins cette forme de la proposition 7.7 qui va permettre le calcul des espérances $M_{n,q}[\Sigma_\mu]$ des observables de diagrammes sous les q -mesures de Plancherel.