Algèbres de Hopf combinatoires

Les algèbres de Hopf sont des structures algébriques très riches puisqu'elles sont constituées d'un espace vectoriel sur lequel est à la fois défini une structure d'algèbre et une structure de cogèbre. Dans une algèbre, on dispose d'un produit qui permet d'*assembler* des éléments, et à l'inverse, dans une cogèbre, on dispose d'un coproduit qui permet plutôt de les *désassembler*. Ces deux opérations doivent vérifier un certain nombre de compatibilités, ce qui fait que les algèbres de Hopf sont, informellement parlant, des structures algébriques extrêmement contraintes. Des références classiques sur le sujet sont entre autres [Swe69], [Abe80], et [Car06].

Lorsque l'espace vectoriel sous-jacent à une algèbre de Hopf possède des bases indexées par des objets combinatoires, son produit et son coproduit sont la plupart du temps reformulables en termes d'algorithmes combinatoires. Moyennant quelques conditions supplémentaires, un tel objet est appelé de manière heuristique *algèbre de Hopf combinatoire*, dont la définition exacte n'est à l'heure actuelle toujours pas fixée — il est intéressant de voir à ce propos [ABS03] ou [LR10] qui donnent chacun de leur coté leur propre définition de ce concept. Ce sont précisément ces objets qui occupent une place de choix dans ce mémoire, et nous proposons nous aussi une définition adaptée à notre contexte. De bonnes introductions aux algèbres de Hopf combinatoires sont [Hiv03] et [Bla10].

La littérature dans ce domaine est très abondante : citons par exemple [MR95] (voir également [DHT02]) où une algèbre de Hopf sur les permutations est introduite, mais aussi [NTT04] et [HNT08a] où des algèbres de Hopf combinatoires sur des graphes étiquetés sont construites et étudiées, ou encore [NT04] et [NT07] où les auteurs construisent une algèbre de Hopf sur les fonctions de parking et plusieurs sous-algèbres de Hopf de celle-ci dont l'une est basée sur les arbres de Schröder et une autre sur les objets catalans. Une grande quantité d'algèbres de Hopf combinatoires mettent en jeu des arbres, parmi lesquelles celle de Loday-Ronco sur les arbres binaires [LR98] (voir aussi [HNT02]), et celle de Connes-Kreimer sur les forêts d'arbres enracinés [CK98] sont sans doute les plus célèbres.

Une manière très avantageuse de voir ces algèbres de Hopf est d'interpréter ses éléments comme des polynômes — commutatifs ou non. Le produit de l'algèbre devient un simple produit polynomial, et le coproduit de la cogèbre étant obtenu par une transformation d'alphabet [KLT97] adéquate. Cette manière de voir les choses simplifie considérablement la théorie puisque la plupart des produits, définis sur les objets combinatoires eux-mêmes, peuvent être a priori extrêmement complexes, en contraste avec la simplicité du produit de polynômes offerte a posteriori par une réalisation polynomiale. De plus, la compatibilité entre le produit et le coproduit, propriété essentielle dans une algèbre de Hopf, devient immédiate. On appelle ce procédé une *réalisation polynomiale* d'une algèbre de Hopf. Plusieurs algèbres de Hopf combinatoires ont été ainsi *réalisées* : l'algèbre de Hopf des permutations [DHT02], celle de Loday-Ronco des arbres binaires [HNT02], celle des fonctions de Parking et des arbres de Schröder [NT07], et celle de Connes-Kreimer [FNT10].

Ce chapitre préliminaire est organisé comme suit. Nous commençons en donnant dans le paragraphe 2.1 la définition de plusieurs structures algébriques : les algèbres associatives, les cogèbres, et les bigèbres, ainsi que les notions de base qui s'y rattachent. Nous terminons ce paragraphe en formalisant dans notre contexte la notion de réalisation polynomiale d'une algèbre de Hopf. Finalement, les concepts présentés sont illustrés dans le paragraphe 2.2 par des exemples. Nous passons ainsi en revue l'algèbre de Hopf de mélange et de déconcaténation, l'algèbre de Hopf de Connes-Kreimer, et l'algèbre de Hopf de Malvenuto-Reutenauer.

2.1 Définitions et propriétés de base

Nous rappelons ici les concepts généraux propres aux algèbres, cogèbres, bigèbres, et algèbres de Hopf, et définissons ensuite ce que nous entendons par réalisation polynomiale d'une algèbre de Hopf.

Dans certains cas, certaines propriétés s'expriment de manière agréable par l'intermédiaire de diagrammes commutatifs. Ainsi, il nous arrivera ponctuellement d'utiliser le langage de la théorie des catégories. Un texte de base sur le sujet comme [Pie91] est amplement suffisant dans notre contexte.

2.1.1 Algèbres combinatoires

Algèbres associatives unitaires

Définition 2.1.1. *Une* algèbre associative unitaire *— ou simplement* algèbre *lorsque le contexte est clair — est un espace vectoriel $\mathcal{A}$ muni d'une application linéaire $\cdot : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ appelée* produit*, et d'une application linéaire $u : \mathbb{K} \to \mathcal{A}$ appelée* unité *telles que, pour tout $x, y, z \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,*

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z), \tag{2.1.1}$$

$$u(\lambda) \cdot x = \lambda x = x \cdot u(\lambda). \tag{2.1.2}$$

La condition (2.1.1) signifie que le produit $\cdot$ est associatif, ce qui revient à dire que le diagramme suivant est commutatif, où $I : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ est l'application identité, et le symbole $\cdot$ est remplacé par le symbole p par souci de lisibilité :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[r, "I\otimes p"] \arrow[d, "p\otimes I"'] & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[d, "p"] \\ \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[r, "p"'] & \mathcal{A} \end{tikzcd} \tag{2.1.3}$$

La condition (2.1.2) signifie que $u\,(1_{\mathbb{K}})$ est l'élément neutre du produit $\cdot$, ce qui revient à dire que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \otimes \mathbb{K} \arrow[r, "I\otimes u"] \arrow[dr, "\simeq"'] & \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \arrow[d, "p"] & \mathbb{K} \otimes \mathcal{A} \arrow[l, "u\otimes I"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\ & \mathcal{A} & \end{tikzcd} \tag{2.1.4}$$

Selon nos besoins, nous serons amenés à considérer des algèbres $\mathcal{A}$ où l'unité u n'est pas donnée par une application $u : \mathbb{K} \to \mathcal{A}$ mais par un élément $1_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$, qui est neutre pour le produit. Ces deux présentations sont équivalentes puisque l'on déduit u à partir de $1_{\mathcal{A}}$ en posant $u(\lambda) := \lambda 1_{\mathcal{A}}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, et réciproquement, on déduit $1_{\mathcal{A}}$ à partir de u en posant $1_{\mathcal{A}} := u(1_{\mathbb{K}})$.

Voyons à présent quelques définitions de base sur les algèbres. Soit $(\mathcal{A}, \cdot_{\mathcal{A}}, u_{\mathcal{A}})$ une algèbre. Un sous-espace vectoriel $\mathcal{A}'$ de $\mathcal{A}$ est une *sous-algèbre* de $\mathcal{A}$ si pour tous $x, y \in \mathcal{A}'$, $x \cdot_{\mathcal{A}} y \in \mathcal{A}'$, et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $u_{\mathcal{A}}(\lambda) \in \mathcal{A}'$. Nous dirons que $\mathcal{A}$ est *graduée* si l'espace vectoriel $\mathcal{A}$ est gradué et

$$x \in \mathcal{A}^{(n)} \text{ et } y \in \mathcal{A}^{(m)} \qquad \text{impliquent} \qquad x \cdot_{\mathcal{A}} y \in \mathcal{A}^{(n+m)}. \tag{2.1.5}$$

Lorsque $\mathcal{A}$ est graduée et que $\dim \mathcal{A}^{(0)} = 1$, $\mathcal{A}$ est dite *connexe*. L'algèbre $\mathcal{A}$ est *commutative* si pour tous $x, y \in \mathcal{A}$, $x \cdot_{\mathcal{A}} y = y \cdot_{\mathcal{A}} x$. Soit maintenant $(\mathcal{B}, \cdot_{\mathcal{B}}, u_{\mathcal{B}})$ une autre algèbre. Un *morphisme d'algèbre* est une application linéaire $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ telle que pour tous $x, y \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\phi(x \cdot_{\mathcal{A}} y) = \phi(x) \cdot_{\mathcal{B}} \phi(y), \tag{2.1.6}$$

et

$$\phi(u_{\mathcal{A}}(\lambda)) = u_{\mathcal{B}}(\lambda). \tag{2.1.7}$$

Lorsque $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont graduées, on impose de plus la condition

$$x \in \mathcal{A}^{(n)} \qquad \text{implique} \qquad \phi(x) \in \mathcal{B}^{(n)}. \tag{2.1.8}$$

Le *produit tensoriel* de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ est l'algèbre $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ avec le produit $\cdot$ défini linéairement pour tous $x \otimes y, x' \otimes y' \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ par

$$(x \otimes y) \cdot (x' \otimes y') := (x \cdot_{\mathcal{A}} x') \otimes (y \cdot_{\mathcal{B}} y'), \tag{2.1.9}$$

et l'unité u définie par $u := u_{\mathcal{A}} \otimes u_{\mathcal{B}}$. Un *idéal* de $\mathcal{A}$ est un sous-espace vectoriel V de $\mathcal{A}$ tel que, pour tout $x \in V$ et pour tout $y \in \mathcal{A}$, $x \cdot_{\mathcal{A}} y \in V$ et $y \cdot_{\mathcal{A}} x \in V$. Le *quotient* de $\mathcal{A}$ par l'idéal V est l'algèbre $\mathcal{A}/_V$ avec le produit $\cdot$ défini pour tous $\widehat{x}, \widehat{y} \in \mathcal{A}/_V$ par

$$\widehat{x} \cdot \widehat{y} := \tau(x \cdot_{\mathcal{A}} y), \tag{2.1.10}$$

où $\tau : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/_V$ est la projection canonique et x et y sont des éléments de $\mathcal{A}$ tels que $\tau(x) = \widehat{x}$ et $\tau(y) = \widehat{y}$, et l'unité u définie par $u := \tau \circ u_{\mathcal{A}}$.

L'algèbre tensorielle

Soit V un espace vectoriel de dimension potentiellement infinie, et l'espace vectoriel

$$T(V) := \mathbb{K} \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus V^{\otimes 3} \oplus \dots, \tag{2.1.11}$$

où l'espace $V^{\otimes k}$ est défini récursivement par $V^{\otimes 0} := \mathbb{K}$ et $V^{\otimes k+1} := V^{\otimes k} \otimes V$. Les éléments de $T(V)$ sont de la forme $u_1 \otimes \dots \otimes u_n$, où $n \geqslant 0$ et $u_i \in V$. Nous noterons ces éléments simplement par $u_1 \dots u_n$. L'espace $T(V)$ est muni d'un produit $\cdot$ défini linéairement par

$$u_1 \dots u_n \cdot v_1 \dots v_m := u_1 \dots u_n v_1 \dots v_m, \tag{2.1.12}$$

pour tous $u_1 \dots u_n, v_1 \dots v_m \in T(V)$. Le *degré* d'un élément $x \in V^{\otimes n}$ est l'entier n. L'espace $T(V)$ admet comme unité l'unique élément de degré 0. De plus, comme le produit d'un élément de degré n avec un élément de degré m donne un élément de degré $n+m$, $T(V)$ admet une structure d'algèbre graduée et connexe : c'est l'*algèbre tensorielle* de V.

L'algèbre symétrique

L'*algèbre symétrique* $S(V)$ sur l'espace vectoriel V est définie par

$$S(V) := T(V)/_W, \tag{2.1.13}$$

où W est le sous-espace vectoriel de $T(V)$ engendré par les éléments de la forme

$$u_1 \dots u_n - u_{\sigma_1} \dots u_{\sigma_n}, \tag{2.1.14}$$

tels que $n \geqslant 1$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. L'espace W est clairement un idéal de $T(V)$. Les éléments de $S(V)$ peut donc être interprétés comme des éléments $u_1 \dots u_n$ de $T(V)$ où l'ordre des u_i ne compte pas. Le produit dans l'algèbre symétrique est ainsi clairement commutatif.

Algèbres libres, bases algébriques et bases multiplicatives

Une algèbre non commutative (resp. commutative) $\mathcal{A}$ est *libre* s'il existe un espace vectoriel V et un isomorphisme d'algèbre $\phi : \mathcal{A} \to T(V)$ (resp. $\phi : \mathcal{A} \to S(V)$).

Une base d'une algèbre $\mathcal{A}$ est dite *multiplicative* si le produit de deux éléments de base s'exprime par un unique élément de base ayant $1_{\mathbb{K}}$ comme coefficient. De plus, un élément de base est dit *indécomposable* s'il est impossible de l'exprimer par un produit non trivial d'éléments de base.

Un ensemble G d'éléments de $\mathcal{A}$ est un ensemble de *générateurs algébriques* de $\mathcal{A}$ si $\mathcal{A}$ est la plus petite algèbre qui contient G. De plus, lorsque $\mathcal{A}$ est libre sur G, G est une *base algébrique* de $\mathcal{A}$. Dans ce cas, en posant $\mathcal{S}_G(t)$ la série génératrice de G définie par

$$\mathcal{S}_G(t) := \sum_{g \in G} t^{|g|}, \tag{2.1.15}$$

où $|g|$ désigne le degré de g, alors la série de Hilbert de $\mathcal{A}$ vérifie

$$F_{\mathcal{A}}(t) = \frac{1}{1 - \mathcal{S}(t)}. \tag{2.1.16}$$

Algèbres combinatoires

Dans ce mémoire, nous considérerons plus particulièrement la sous-classe des *algèbres combinatoires* :

Définition 2.1.2. *Une* algèbre combinatoire *est une algèbre dont l'espace vectoriel sous-jacent est combinatoire.*

Notons que d'après la définition 1.1.5 du chapitre 1, tout espace vectoriel combinatoire est gradué, et la dimension de sa composante homogène de degré 0 et 1. Ainsi, une algèbre combinatoire est en particulier une algèbre graduée, connexe, et ses composantes homogènes sont de dimension finie.

Lorsque $(\mathcal{A}, \cdot, u)$ est une algèbre combinatoire, étant donné qu'elle est graduée et connexe, la seule façon de définir l'unité u est de poser linéairement $u(1_{\mathbb{K}}) := 1$ où 1 est l'unique élément de $\mathcal{A}$ de degré zéro. Ainsi, nous ne mentionnerons plus dans la suite l'unité des algèbres combinatoires, seul l'espace vectoriel sous-jacent et le produit le nécessitent.

La plupart des algèbres combinatoires s'implantent facilement, par exemple en Sage [S⁺11]. Il suffit en effet de spécifier la classe combinatoire sous-jacente et de programmer le produit de deux éléments de base. Le système étend automatiquement le produit par linéarité. Un bon nombre d'implantations ont été réalisées dans ce travail pour des expérimentations.

Exemples et notations

Donnons à présent des exemples d'algèbres, dans le but de fixer quelques notations :

1. l'espace vectoriel des polynômes commutatifs sur A, noté $\mathbb{K}[A]$, avec le produit de polynômes usuel, est une algèbre. Celle-ci est de plus commutative, graduée, et connexe. Les éléments de base de cette algèbre sont les mots commutatifs sur A, *i.e.*, les mots où l'ordre des lettres ne compte pas.
2. L'espace vectoriel des polynômes non commutatifs sur A, noté $\mathbb{K}\langle A\rangle$, avec le produit non commutatif de polynômes, est une algèbre. Puisque A possède plus de deux éléments — A est un alphabet infini — cette algèbre n'est pas commutative. Elle est cependant graduée et connexe, et ses éléments de base sont les mots sur A.
3. Ces deux algèbres possèdent respectivement des analogues notés $\mathbb{K}[[A]]$ et $\mathbb{K}\langle\langle A\rangle\rangle$ dont les éléments ne sont plus des polynômes mais des séries sur A, respectivement commutatives et non commutatives.
4. Si M est un monoïde, on note $\mathbb{K}[M] := \mathrm{Vect}(M)$ l'*algèbre du monoïde M*. Les éléments de $\mathbb{K}[M]$ sont des sommes formelles d'éléments de M à coefficients dans $\mathbb{K}$, son produit est le produit de M étendu par linéarité, et son unité est l'élément neutre de M.

2.1.2 Cogèbres combinatoires

Cogèbres coassociatives counitaires

Définition 2.1.3. *Une* cogèbre coassociative counitaire *— ou simplement* cogèbre *lorsque le contexte est clair — est un espace vectoriel $\mathcal{C}$ muni d'une application linéaire $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ appelée* coproduit*, et d'une application linéaire $c : \mathcal{C} \to \mathbb{K}$ appelée* counité *telles que, pour tout $x \in \mathcal{C}$,*

$$(\Delta \otimes I)\Delta(x) = (I \otimes \Delta)\Delta(x), \tag{2.1.17}$$

$$(c \otimes I)\Delta(x) = 1_{\mathbb{K}} \otimes x \quad \text{et} \quad (I \otimes c)\Delta(x) = x \otimes 1_{\mathbb{K}}, \tag{2.1.18}$$

où $I : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ est l'application identité.

Le coproduit $\Delta(x)$ d'un élément x de $\mathcal{C}$ s'écrit comme une somme finie de tenseurs et est de ce fait de la forme

$$\Delta(x) = \sum_i x_i^L \otimes x_i^R. \tag{2.1.19}$$

Il est avantageux dans bien des cas de recourir à la *notation de Sweedler* qui résume (2.1.19) en

$$\Delta(x) = \sum x^L \otimes x^R. \tag{2.1.20}$$

La condition (2.1.17) signifie que le coproduit Δ est *coassociatif*, ce qui est équivalent à dire que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \arrow[d, "I\otimes\Delta"] \\ \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \arrow[r, "\Delta\otimes I"'] & \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \end{tikzcd} \tag{2.1.21}$$

De même, la condition (2.1.18) est encodée par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \otimes \mathbb{K} & \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \arrow[l, "I\otimes c"'] \arrow[r, "c\otimes I"] & \mathbb{K} \otimes \mathcal{C} \\ & \mathcal{C} \arrow[ul, "\simeq"] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ur, "\simeq"'] & \end{tikzcd} \tag{2.1.22}$$

Remarquons que la notion de cogèbre est en un certain sens duale de la notion d'algèbre. En effet, on obtient le diagramme (2.1.21) en inversant le sens des flèches du diagramme (2.1.3). Il en est de même pour le diagramme (2.1.22) qui peut être obtenu de la même façon à partir du diagramme (2.1.4). Ainsi, les notions définies dans le paragraphe 2.1.1 sont adaptables aux cogèbres. Reformulons-les tout de même.

Soit $(\mathcal{C}, \Delta_{\mathcal{C}}, c_{\mathcal{C}})$ une cogèbre. Un élément $x \in \mathcal{C}$ est dit *primitif* si $\Delta_{\mathcal{C}}(x) = 1_{\mathbb{K}} \otimes x + x \otimes 1_{\mathbb{K}}$. Il est dit de *type groupe* si $\Delta_{\mathcal{C}}(x) = x \otimes x$. Un sous-espace vectoriel $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ est une *sous-cogèbre* de $\mathcal{C}$ si pour tout $x \in \mathcal{C}'$, $\Delta(x) \in \mathcal{C}' \otimes \mathcal{C}'$. Nous dirons que $\mathcal{C}$ est *cograduée* si l'espace vectoriel $\mathcal{C}$ est gradué et

$$x \in \mathcal{C}^{(n)} \qquad \text{implique} \qquad \Delta_{\mathcal{C}}(x) \in \bigoplus_{i+j=n} \mathcal{C}^{(i)} \otimes \mathcal{C}^{(j)}. \tag{2.1.23}$$

Lorsque $\mathcal{C}$ est cograduée et que $\dim \mathcal{C}^{(0)} = 1$, $\mathcal{C}$ est dite *coconnexe*. Notons $\omega : \mathcal{C} \otimes \mathcal{C} \to \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ l'application linéaire définie pour tout $x \otimes y \in \mathcal{C} \otimes \mathcal{C}$ par $\omega(x \otimes y) := y \otimes x$. La cogèbre $\mathcal{C}$ est *cocommutative* si pour tous $x \in \mathcal{C}$, $\Delta_{\mathcal{C}}(x) = \omega(\Delta_{\mathcal{C}}(x))$. Soit maintenant $(\mathcal{D}, \Delta_{\mathcal{D}}, c_{\mathcal{D}})$ une autre cogèbre. Un *morphisme de cogèbre* est une application linéaire $\phi : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ telle que pour tout $x \in \mathcal{C}$,

$$(\phi \otimes \phi)\Delta_{\mathcal{C}}(x) = \Delta_{\mathcal{D}}(\phi(x)), \tag{2.1.24}$$

et

$$c_{\mathcal{C}}(x) = c_{\mathcal{D}}(\phi(x)). \tag{2.1.25}$$

Lorsque $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont cograduées, on impose de plus la condition

$$x \in \mathcal{C}^{(n)} \qquad \text{implique} \qquad \phi(x) \in \mathcal{D}^{(n)}. \tag{2.1.26}$$

Le *produit tensoriel* de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ est la cogèbre $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$ avec le coproduit Δ défini linéairement pour tout $x \otimes y \in \mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$ par

$$\Delta(x \otimes y) := \sum \left(x^L \otimes y^L\right) \otimes \left(x^R \otimes y^R\right), \tag{2.1.27}$$

où $\Delta_{\mathcal{C}}(x) = \sum x^L \otimes x^R$ et $\Delta_{\mathcal{D}}(y) = \sum y^L \otimes y^R$, et la counité c définie par $c := c_{\mathcal{C}} \otimes c_{\mathcal{D}}$. Un *coidéal* de $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel V de $\mathcal{C}$ tel que, pour tout $x \in V$, $\Delta_{\mathcal{C}}(x) \in V \otimes \mathcal{C} + \mathcal{C} \otimes V$ et $V \subseteq \ker c$. Le *quotient* de $\mathcal{C}$ par le coidéal V est la cogèbre $\mathcal{C}/_V$ avec le coproduit Δ défini pour tous $\widehat{x} \in \mathcal{C}/_V$ par

$$\Delta(\widehat{x}) := (\tau \otimes \tau)\Delta_{\mathcal{C}}(x), \tag{2.1.28}$$

où $\tau : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/_V$ est la projection canonique et x est un élément de $\mathcal{C}$ tel que $\tau(x) = \widehat{x}$, et la counité c définie par $c(\widehat{x}) := c_{\mathcal{C}}(x)$.

La cogèbre tensorielle et cogèbres libres

Soit V un espace vectoriel potentiellement infini. Munissons l'espace vectoriel $T(V)$ d'un coproduit Δ défini linéairement pour tout $u_1 \dots u_n \in T(V)$ par

$$\Delta(u_1 \dots u_n) := \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} u_1 \dots u_i \otimes u_{i+1} \dots u_n, \tag{2.1.29}$$

et d'une counité $c : T(V) \to \mathbb{K}$ définie linéairement par $c(x) = \delta_{x,1}$ où 1 est l'élément de degré 0 de $T(V)$. Puisque la somme des degrés de u et de v est n, où $u \otimes v$ est un tenseur qui apparaît dans un coproduit d'un élément de degré n, $T(V)$ admet une structure de cogèbre cograduée coconnexe : c'est la *cogèbre tensorielle*. Une cogèbre $\mathcal{C}$ est dite *colibre* s'il existe un un isomorphisme de cogèbre $\phi : \mathcal{C} \to T(V)$ où V est l'espace vectoriel des éléments primitifs de $\mathcal{C}$.

Cogèbres combinatoires

Dans ce mémoire, nous considérerons plus particulièrement la sous-classe des *cogèbres combinatoires* :

Définition 2.1.4. *Une* cogèbre combinatoire *est une cogèbre dont l'espace vectoriel sous-jacent est combinatoire.*

Comme dans le cas des algèbres combinatoires, toute cogèbre combinatoire est cograduée, coconnexe, et ses composantes homogènes sont de dimension finie.

Dans ce cas aussi, lorsque $(\mathcal{C}, \Delta, c)$ est une cogèbre combinatoire, étant donné qu'elle est cograduée et coconnexe, la seule façon de définir la counité c est de poser linéairement $c(x) := \delta_{x,1}$ où 1 est l'unique élément de $\mathcal{C}$ de degré zéro. Ainsi, nous ne mentionnerons plus dans la suite la counité des cogèbres combinatoires, seul l'espace vectoriel sous-jacent et le coproduit le nécessitent.

La plupart des cogèbres combinatoires s'implantent facilement, par exemple en Sage [S+11]. Il suffit en effet de spécifier la classe combinatoire sous-jacente et de programmer le coproduit d'un élément de base. Le système étend automatiquement le coproduit par linéarité. Un bon nombre d'implantations ont été réalisées dans ce travail pour des expérimentations.

2.1.3 Bigèbres et algèbres de Hopf combinatoires

Bigèbres

Définition 2.1.5. *Une* bigèbre $\mathcal{B}$ *est un espace vectoriel qui possède à la fois une structure d'algèbre* $(\mathcal{B}, \cdot, u)$ *et une structure de cogèbre* $(\mathcal{B}, \Delta, c)$ *telles que* Δ *et* c *sont des morphismes d'algèbre, ou de manière équivalente,* $\cdot$ *et* u *des morphismes de cogèbre.*

En notant $I : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ l'application identité, le fait que Δ et c soient des morphismes d'algèbre, et le fait que $\cdot$ et u soient des morphismes de cogèbre sont équivalent aux relations suivantes. Pour tous $x, y \in \mathcal{B}$,

$$\Delta(x \cdot y) = (\cdot \otimes \cdot)(I \otimes \omega \otimes I)(\Delta(x) \otimes \Delta(y)), \tag{2.1.30}$$

$$c(x \cdot y) = c(x)c(y), \tag{2.1.31}$$

$$\Delta\left(u\left(1_{\mathbb{K}}\right)\right) = u\left(1_{\mathbb{K}}\right) \otimes u\left(1_{\mathbb{K}}\right), \tag{2.1.32}$$

$$c\left(u\left(1_{\mathbb{K}}\right)\right) = 1_{\mathbb{K}}, \tag{2.1.33}$$

où, rappelons-le, ω est l'application linéaire définie pour tout $x \otimes y \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ par $\omega(x \otimes y) := y \otimes x$. Ces relations sont traduites respectivement par les diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\Delta\otimes\Delta"'] & \mathcal{B} \arrow[r, "\Delta"] & \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \\
\mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \arrow[rr, "I\otimes\omega\otimes I"'] & & \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \arrow[u, "p\otimes p"']
\end{tikzcd} \tag{2.1.34}$$

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{B} \arrow[dr, "c"] & \\
\mathcal{B} \otimes \mathcal{B} \arrow[ur, "p"] \arrow[rr, "c\otimes c"'] & & \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \simeq \mathbb{K}
\end{tikzcd} \tag{2.1.35}$$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[dl, "\Delta"'] & \\ \mathcal{B}\otimes\mathcal{B} & & \mathbb{K}\otimes\mathbb{K}\simeq\mathbb{K} \arrow[ul, "u"'] \arrow[ll, "u\otimes u"] \end{tikzcd} \qquad (2.1.36)$$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{B} \arrow[dr, "c"] & \\ \mathbb{K} \arrow[ur, "u"] \arrow[rr, "I"'] & & \mathbb{K} \end{tikzcd} \qquad (2.1.37)$$

où l'application I dans le dernier diagramme est l'identité sur $\mathbb{K}$.

Voyons à présent quelques définitions de base à propos des bigèbres. Soit $(\mathcal{B}, \cdot_{\mathcal{B}}, u_{\mathcal{B}}, \Delta_{\mathcal{B}}, c_{\mathcal{B}})$ une bigèbre. Un sous-espace vectoriel $\mathcal{B}'$ de $\mathcal{B}$ est une *sous-bigèbre* de $\mathcal{B}$ si $\mathcal{B}'$ est à la fois une sous-algèbre et une sous-cogèbre de $\mathcal{B}$. Nous dirons que $\mathcal{B}$ est *graduée* si $\mathcal{B}$ est à la fois graduée en tant qu'algèbre et cograduée en tant que cogèbre. De plus, quand $\mathcal{B}$ est graduée et que $\mathcal{B}$ est connexe en tant qu'algèbre et coconnexe en tant que cogèbre, $\mathcal{B}$ est qualifiée de *connexe*. Soit maintenant $(\mathcal{C}, \cdot_{\mathcal{C}}, u_{\mathcal{C}}, \Delta_{\mathcal{C}}, c_{\mathcal{C}})$ une autre bigèbre. Un *morphisme de bigèbre* est une application linéaire $\phi : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ qui est à la fois un morphisme d'algèbre et un morphisme de cogèbre. Le *produit tensoriel* de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est la bigèbre $\mathcal{B} \otimes \mathcal{C} =: \mathcal{D}$, où $\mathcal{D}$ est en tant qu'algèbre (resp. en tant que cogèbre) le produit tensoriel des algèbres (resp. des cogèbres) $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$. Un *idéal de bigèbre* V de $\mathcal{B}$ est à la fois un idéal de $\mathcal{B}$ en tant qu'algèbre, et un coidéal de $\mathcal{B}$ en tant que cogèbre. Le sous-espace $\ker c_{\mathcal{B}}$ forme un idéal particulier de $\mathcal{B}$: on l'appelle *idéal d'augmentation* de $\mathcal{B}$ et on le note $\mathcal{B}^+$. Le *quotient* de $\mathcal{B}$ par l'idéal V est la bigèbre $\mathcal{B}/_V$, qui est en tant qu'algèbre (resp. que cogèbre) le quotient de l'algèbre $\mathcal{B}$ (resp. de la cogèbre $\mathcal{B}$) par l'idéal V (resp. le coidéal V).

Bases du côté gauche

En suivant la terminologie de [LR09], une base d'une bigèbre $\mathcal{B}$ est *du coté gauche* si elle est multiplicative, et pour tout élément indécomposable x, en utilisant la notation de Sweedler, nous avons

$$\Delta(x) = \sum x^L \otimes x^R, \qquad (2.1.38)$$

où les x^L sont des éléments indécomposables.

Bigèbres combinatoires

Dans ce mémoire, nous considérerons plus particulièrement la sous-classe des *bigèbres combinatoires* :

Définition 2.1.6. *Une* bigèbre combinatoire *est une bigèbre dont l'espace vectoriel sous-jacent est combinatoire.*

Comme dans le cas des algèbres et des cogèbres combinatoires, toute bigèbre combinatoire est graduée, connexe, et ses composantes homogènes sont de dimension finie.

Comme nous l'avons mentionné dans les paragraphes 2.1.1 et 2.1.2, toute algèbre (resp. cogèbre) combinatoire est entièrement spécifiée par la donnée de son espace vectoriel et de son produit (resp. coproduit). Ainsi, une bigèbre combinatoire est entièrement définie par un triplet $(\mathcal{B}, \cdot, \Delta)$.

Étant donné que toutes les composantes homogènes d'une bigèbre combinatoire sont de dimensions finies, la définition suivante est valide :

Définition 2.1.7. *Soit* $(\mathcal{B}, \cdot, \Delta)$ *une bigèbre combinatoire. Le* dual gradué *de* $\mathcal{B}$ *est la bigèbre combinatoire* $(\mathcal{B}^\star, \cdot^\star, \Delta^\star)$ *où* $\mathcal{B}^\star$ *est le dual gradué de* $\mathcal{B}$ *en tant qu'espace vectoriel, et les applications* $\cdot^\star$ *et* $\Delta^\star$ *sont respectivement les applications transposées de* Δ *et* $\cdot$*. En d'autre termes, le produit* $\cdot^\star$ *et le coproduit* $\Delta^\star$ *vérifient*

$$\langle x \cdot y, z \rangle = \langle x \otimes y, \Delta^\star(z) \rangle \qquad \textit{pour tous } x \in \mathcal{B}^{(n)},\ y \in \mathcal{B}^{(m)},\ \textit{et } z \in \mathcal{B}^{\star(n+m)}\ , \tag{2.1.39}$$

$$\langle \Delta(x), y \otimes z \rangle = \langle x, y \cdot^\star z \rangle \qquad \textit{pour tous } x \in \mathcal{B}^{(n+m)},\ y \in \mathcal{B}^{\star(n)},\ \textit{et } z \in \mathcal{B}^{\star(m)}\ , \tag{2.1.40}$$

où $\langle -, - \rangle : \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}^\star \to \mathbb{K}$ *est le crochet de dualité.*

Dans la suite, nous parlerons simplement de *dual* pour le dual gradué d'une bigèbre combinatoire. Une bigèbre $\mathcal{B}$ est *autoduale* s'il existe un isomorphisme de bigèbre $\phi : \mathcal{B} \to \mathcal{B}^\star$.

Produit de convolution et algèbres de Hopf

Soit $(\mathcal{B}, \cdot, u, \Delta, c)$ une bigèbre — non nécessairement combinatoire. Notons $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel des applications linéaires de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$. Nous pouvons munir $\mathcal{E}$ d'un produit $*$ défini pour tous $f, g \in \mathcal{E}$ par :

$$f * g := \cdot \circ (f \otimes g) \circ \Delta. \tag{2.1.41}$$

De manière équivalente, en utilisant la notation de Sweedler, on a pour tout $x \in \mathcal{B}$,

$$(f * g)(x) = \sum f\left(x^L\right) \cdot g\left(x^R\right). \tag{2.1.42}$$

L'associativité de $\cdot$ et la coassociativité de Δ impliquent que $*$ est associatif. Ce produit est appelé *produit de convolution*. D'autre part, on vérifie facilement que l'élément $u \circ c$ de $\mathcal{E}$ est l'élément neutre du produit de convolution. La structure $(\mathcal{E}, *, u \circ c)$ est donc une algèbre.

Nous pouvons maintenant définir la notion d'algèbre de Hopf :

Définition 2.1.8. *Une* algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ *est une bigèbre* $(\mathcal{H}, \cdot, u, \Delta, c)$ *munie d'une application linéaire* $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *appelée* antipode*. Cette dernière est l'inverse de l'identité* $I : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ *pour le produit de convolution.*

En d'autres termes, l'antipode S d'une algèbre de Hopf $\mathcal{H}$ vérifie

$$S * I = I * S = u \circ c, \tag{2.1.43}$$

ce qui équivaut à dire que S rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \arrow[rr, "I \otimes S"] & & \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \arrow[dr, "p"] & \\
\mathcal{H} \arrow[ur, "\Delta"] \arrow[rr, "c"] \arrow[dr, "\Delta"'] & & \mathbb{K} \arrow[rr, "u"] & & \mathcal{H} \\
& \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \arrow[rr, "S \otimes I"'] & & \mathcal{H} \otimes \mathcal{H} \arrow[ur, "p"'] &
\end{tikzcd} \tag{2.1.44}$$

Citons quelques propriétés notables des antipodes. Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf et S son antipode. Alors, S est la seule application linéaire qui vérifie (2.1.43). Toute bigèbre admet donc au plus une structure d'algèbre de Hopf. De plus, S est un antihomomorphisme de Hopf de $\mathcal{H}$, *i.e.*,

$$S(x \cdot y) = S(y) \cdot S(x), \tag{2.1.45}$$

pour tous $x, y \in \mathcal{H}$. Enfin, si $\mathcal{H}$ est commutative ou cocommutative, alors S est une involution, *i.e.*, $S \circ S$ est l'application identité.

Algèbres de Hopf combinatoires

Nous pouvons maintenant poser la définition fondamentale de ce paragraphe :

Définition 2.1.9. *Une* algèbre de Hopf combinatoire *est une bigèbre combinatoire.*

Remarquons que la définition 2.1.9 est consistante car toute bigèbre combinatoire $(\mathcal{B}, \cdot, \Delta)$ admet un antipode S, ce qui fait d'elle automatiquement une algèbre de Hopf. En effet, en se basant sur le fait que $\mathcal{B}$ est combinatoire, cette dernière est graduée et connexe, et ceci implique que S se calcule degré par degré selon la formule suivante, que l'on écrit à l'aide de la notation de Sweedler :

$$S(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in \mathcal{B}^{(0)}, \\ -\displaystyle\sum_{x^L \neq x} S\left(x^L\right) \cdot x^R & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.1.46}$$

Ainsi, nous ne détaillerons presque jamais l'antipode des algèbres de Hopf combinatoires que nous rencontrerons dans ce mémoire, leur existence est assurée par (2.1.46). Leur étude, souvent intéressante du point de vue combinatoire, ne rentre néanmoins pas dans le cadre de notre travail.

La plupart des algèbres de Hopf combinatoires s'implantent facilement, par exemple en Sage [S+11]. Il suffit en effet de spécifier la classe combinatoire sous-jacente et de programmer le produit de deux éléments de base et le coproduit d'un élément de base. Le système étend automatiquement le produit et le coproduit par linéarité. Pour réaliser des expérimentations, un grand nombre d'algèbres de Hopf combinatoires ont été implantées.

2.1.4 Réalisations polynomiales d'algèbres de Hopf

Nous décrivons dans ce paragraphe une parcelle, suffisante pour le contenu des chapitres qui suivent, de la théorie des réalisations polynomiales d'algèbres de Hopf.

L'algèbre des polynômes non commutatifs

L'algèbre des polynômes non commutatifs $\mathbb{K}\langle A\rangle$ sur l'alphabet de variables A peut être vue comme l'algèbre tensorielle sur l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(A)$. Pour cette raison, $\mathbb{K}\langle A\rangle$ est libre, et nous l'appelons *algèbre associative libre* sur A. Notons cependant que $\mathbb{K}\langle A\rangle$ n'est pas une algèbre combinatoire au sens de la définition 2.1.2 puisque, comme A est infini, il existe une infinité de mots sur A de taille $n \geqslant 1$, impliquant que les dimensions des composantes homogènes de degrés $n \geqslant 1$ de $\mathbb{K}\langle A\rangle$ sont infinies. Cette algèbre joue malgré tout un rôle central dans la théorie des réalisations polynomiales d'algèbres de Hopf.

Réalisations polynomiales d'algèbres

Définition 2.1.10. *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre. Une application linéaire $r_A : \mathcal{A} \to \mathbb{K}\langle A\rangle$ est une* réalisation polynomiale d'algèbre *de $\mathcal{A}$ si, pour tout alphabet A infini, r_A est un morphisme d'algèbre injectif.*

En d'autres termes, une réalisation polynomiale d'une algèbre $\mathcal{A}$ permet d'encoder ses éléments par des polynômes de $\mathbb{K}\langle A\rangle$ où A est un alphabet infini quelconque. Le fait que r_A soit injectif assure que cet encodage est sans perte d'information. De plus, le fait que r_A soit un morphisme d'algèbre assure qu'il est possible de calculer le produit dans $\mathcal{A}$ de deux éléments x et y en considérant le produit de leurs polynômes réalisateurs $r_A(x)$ et $r_A(y)$. Le polynôme $r_A(x) \cdot r_A(y)$ est en effet le polynôme réalisateur $r_A(x \cdot y)$ de l'élément $x \cdot y$.

Sommes ordinales de $\prec$-alphabets et algèbres associées

Tel qu'il est défini pour le moment, l'alphabet A est muni d'une relation d'ordre totale $\leqslant$. Cependant, nous serons amenés dans la suite à considérer que A est plus généralement muni d'une structure supplémentaire. Par structure supplémentaire, nous entendons une relation binaire $\prec$ sur ses éléments. Dans ce cas, nous dirons que A est un *$\prec$-alphabet*.

Soient $(A, \prec_A)$ et $(B, \prec_B)$ deux $\prec$-alphabets. Nous notons $A \oplus B$ la *somme ordinale* des alphabets A et B, c'est-à-dire, l'ensemble $A \uplus B$ muni de la relation $\prec$ où l'on pose, pour tous $x, y \in A \uplus B$,

$$x \prec y \qquad \text{si et seulement si} \qquad \begin{array}{c} x \in A,\ y \in A \text{ et } x \prec_A y, \\ \text{ou} \\ x \in B,\ y \in B \text{ et } x \prec_B y, \\ \text{ou} \\ x \in A \text{ et } y \in B. \end{array} \tag{2.1.47}$$

L'algèbre $\mathbb{K}\langle A \oplus B\rangle$ sur l'alphabet constitué de la somme ordinale de A et de B est l'algèbre des polynômes non commutatifs sur l'alphabet $A \uplus B$ où les lettres de A et de B commutent entre elles. En d'autres termes, cette algèbre est un quotient de l'algèbre associative libre sur l'alphabet $A \uplus B$, et nous avons

$$\mathbb{K}\langle A \oplus B\rangle = \mathbb{K}\langle A \uplus B\rangle /_V, \tag{2.1.48}$$

où V est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}\langle A \uplus B\rangle$ défini par

$$V := \operatorname{Vect}\left(\left\{u - v : u, v \in (A \uplus B)^+, u_{|A} = v_{|A}, \text{ et } u_{|B} = v_{|B}\right\}\right). \tag{2.1.49}$$

Tout élément de base x de $\mathbb{K}\langle A \oplus B\rangle$ peut ainsi être écrit sous la forme

$$x = u \cdot v, \tag{2.1.50}$$

où u est un mot sur l'alphabet A, et v un mot sur l'alphabet B. L'élément x admet ainsi l'écriture

$$x = u \otimes v, \tag{2.1.51}$$

ce qui montre que x peut être vu comme un élément de $\mathbb{K}\langle A\rangle \otimes \mathbb{K}\langle B\rangle$ et que

$$\mathbb{K}\langle A \oplus B\rangle \;\simeq\; \mathbb{K}\langle A\rangle \otimes \mathbb{K}\langle B\rangle. \tag{2.1.52}$$

Réalisations polynomiales de cogèbres

Définition 2.1.11. *Soit $\mathcal{C}$ une cogèbre. Une application linéaire $r_A : \mathcal{C} \to \mathbb{K}\langle A\rangle$ est une* réalisation polynomiale de cogèbre *de $\mathcal{C}$ si, pour tout alphabet A infini muni d'une relation $\prec$, r_A est injective, et de plus, pour tout alphabet B infini muni d'une relation $\prec$, on a*

$$(r_A \otimes r_B)\, \Delta(x) = r_{A\oplus B}(x). \tag{2.1.53}$$

En d'autres termes, comme dans le cas précédent des réalisations polynomiales d'algèbres, une réalisation polynomiale d'une cogèbre $\mathcal{C}$ permet d'encoder ses éléments par des polynômes de $\mathbb{K}\langle A\rangle$. Le fait que r_A soit injectif assure que cet encodage est sans perte d'information. En outre, (2.1.53) permet de calculer le coproduit d'un élément x de $\mathcal{C}$ par la technique du *doublement d'alphabet* sur le polynôme réalisateur de x (voir aussi à ce propos [Hiv03]). Il devient en effet possible de calculer le coproduit de x en considérant le polynôme réalisateur de x sur l'alphabet $A \oplus A$. Grâce à l'identification (2.1.52), le polynôme $r_{A\oplus A}(x)$ est en effet le polynôme réalisateur $(r_A \otimes r_A)\, \Delta(x)$ de l'élément $\Delta(x)$.

Réalisations polynomiales d'algèbres de Hopf

Définition 2.1.12. *Soit $\mathcal{H}$ une algèbre de Hopf. Une* réalisation polynomiale d'algèbre de Hopf *de $\mathcal{H}$ est une application linéaire $r_A : \mathcal{H} \to \mathbb{K}\langle A \rangle$ qui est à la fois une réalisation polynomiale de $\mathcal{H}$ en tant qu'algèbre et une réalisation polynomiale de $\mathcal{H}$ en tant que cogèbre.*

Plusieurs réalisations polynomiales d'algèbres de Hopf furent découvertes récemment et chacune d'elle nécessite un $\prec$-alphabet particulier. Par exemple, l'algèbre de Hopf des permutations **FQSym** [DHT02] (voir le paragraphe 2.2.3), l'algèbre de Hopf **WQSym** [NT06] basée sur les mots tassés et l'algèbre de Hopf **PQSym** [NT07] basée sur des fonctions de parking ainsi que certaines de leurs sous-algèbres de Hopf sont réalisées en utilisant un alphabet de variables non commutatives où $\prec$ est une relation d'ordre totale. La réalisation polynomiale de l'algèbre de Hopf de Connes-Kreimer [FNT10] nécessite quant à elle un alphabet de variables non commutatives et bi-indexées, où $\prec$ n'est dans ce cas pas un ordre mais seulement une relation binaire.

2.2 Exemples d'algèbres de Hopf combinatoires

Il est maintenant temps d'illustrer les concepts rappelés dans le paragraphe précédent. Nous proposons ici trois exemples d'algèbres de Hopf combinatoires. Le premier est une algèbre de Hopf bien connue sur les mots [Reu93]. Le second porte sur l'algèbre de Connes-Kreimer, introduite en [CK98] et [Kre98] dans le contexte de la renormalisation dans la théorie quantique des champs. Notre dernier exemple traite d'une algèbre de Hopf basée sur les permutations : l'algèbre de Hopf de Malvenuto-Reutenauer [MR95]. Nous poserons ici les notations principales à son sujet, en vue d'y faire référence au chapitre 5.

2.2.1 L'algèbre de Hopf de mélange et de déconcaténation

L'algèbre de mélange

Soit L un alphabet fini et non vide. L'ensemble L^* des mots finis sur L où la taille d'un élément est sa longueur est une classe combinatoire au sens de la définition 1.1.1 du chapitre 1. Ainsi, et comme il existe exactement un mot de longueur 0, l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(L^*) =: \mathcal{M}$ est un espace vectoriel combinatoire au sens de la définition 1.1.5 et l'ensemble L^* forme une base. En munissant $\mathcal{M}$ du produit de mélange $\sqcup\!\sqcup$ (sa définition est donnée en (1.2.6) dans le chapitre 1), on obtient une algèbre combinatoire : l'*algèbre de mélange*.

La cogèbre de déconcaténation

Sur le même espace $\mathcal{M}$ nous pouvons définir linéairement un coproduit Δ par

$$\Delta(u) := \sum_{u = v \cdot w} v \otimes w, \tag{2.2.1}$$

pour tout mot $u \in L^*$. Ce coproduit est connu sous le nom de *coproduit de déconcaténation* [LR06]. Nous obtenons ainsi une cogèbre combinatoire : la *cogèbre de déconcaténation*. Remarquons au passage que $(\mathcal{M}, \Delta, c)$ est une *cogèbre colibre* (voir [LR06]).

Voici un exemple de coproduit avec $L := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$:

$$\Delta(\mathtt{bacc}) = 1 \otimes \mathtt{bacc} + \mathtt{b} \otimes \mathtt{acc} + \mathtt{ba} \otimes \mathtt{cc} + \mathtt{bac} \otimes \mathtt{c} + \mathtt{bacc} \otimes 1, \tag{2.2.2}$$

où le mot vide est noté 1.

L'algèbre de Hopf de mélange et de déconcaténation

Le produit $\sqcup\!\sqcup$ et le coproduit Δ définis sur $\mathcal{M}$ vérifient les conditions de la définition 2.1.5, et de ce fait, $\mathcal{M}$ est une bigèbre combinatoire [Mal93]. De plus, comme nous l'avons mentionné dans le paragraphe 2.1.3, toute bigèbre combinatoire peut être munie d'un antipode S défini selon (2.1.46), ce qui fait d'elle une algèbre de Hopf combinatoire. On peut montrer par récurrence sur la longueur des mots de L^* que S est défini linéairement par

$$S(u) := (-1_{\mathbb{K}})^{|u|} \; u^{\sim}, \tag{2.2.3}$$

pour tout $u \in L^*$. Notons finalement que $\mathcal{M}$ est commutative et non cocommutative, et que sa série de Hilbert est

$$F_{\mathcal{M}}(t) = \sum_{n \geqslant 0} (\#L)^n t^n. \tag{2.2.4}$$

Nous appelons $\mathcal{M}$ l'*algèbre de Hopf de mélange et de déconcaténation.*

L'algèbre de Hopf duale

Intéressons-nous à présent à l'algèbre de Hopf duale $\mathcal{M}^\star$. Le crochet de dualité $\langle -, - \rangle$: $\mathcal{M} \otimes \mathcal{M}^\star \to \mathbb{K}$ est défini par

$$\langle u, v \rangle := \delta_{u,v}, \tag{2.2.5}$$

pour tous $u, v \in L^*$. D'après (2.1.40), le produit $\cdot$ de $\mathcal{M}^\star$, dual du coproduit Δ de $\mathcal{M}$, admet pour tous $u, v \in L^*$ l'expression suivante étendue par linéarité :

$$u \cdot v = \sum_{w \,\in\, L^*} \langle \Delta(w), u \otimes v \rangle \, w. \tag{2.2.6}$$

Ainsi, un mot w apparaît dans le produit $u \cdot v$ si et seulement si le tenseur $u \otimes v$ apparaît dans $\Delta(w)$. L'apparition de $u \otimes v$ dans $\Delta(w)$ implique $w = u \cdot v$ par définition de Δ. Le produit $\cdot$ correspond donc à la concaténation. De même, d'après (2.1.39), le coproduit $\Delta^\star$ de $\mathcal{M}^\star$, dual du produit $\sqcup\!\sqcup$ de $\mathcal{M}$, admet pour tout $w \in L^*$ l'expression suivante étendue par linéarité :

$$\Delta^\star(w) = \sum_{u,v \,\in\, L^*} \langle u \sqcup\!\sqcup v, w \rangle \, u \otimes v. \tag{2.2.7}$$

Ainsi, un tenseur $u \otimes v$ apparaît dans $\Delta^\star(w)$ si et seulement si w apparaît dans le produit de mélange de u et de v. De plus, son coefficient est le coefficient avec lequel w apparaît dans $u \sqcup\!\sqcup v$. Ceci implique que le coefficient du tenseur $u \otimes v$ dans $\Delta^\star(w)$ est le nombre de couples de suites d'entiers $(i_1 < \cdots < i_{|u|}, j_1 < \cdots < j_{|v|})$ tels que $w_{i_1} = u_1$, …, $w_{i_{|u|}} = u_{|u|}$ et $w_{j_1} = v_1$, …, $w_{j_{|v|}} = v_{|v|}$.

Voici un exemple avec avec $L := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$:

$$\begin{aligned} \Delta^\star(\mathtt{bacc}) = 1 \otimes \mathtt{bacc} + \mathtt{b} \otimes \mathtt{acc} + \mathtt{a} \otimes \mathtt{bcc} + 2\,\mathtt{c} \otimes \mathtt{bac} + \mathtt{ba} \otimes \mathtt{cc} + 2\,\mathtt{bc} \otimes \mathtt{ac} \\ + 2\,\mathtt{ac} \otimes \mathtt{bc} + \mathtt{ba} \otimes \mathtt{cc} + 2\,\mathtt{bac} \otimes \mathtt{c} + \mathtt{bcc} \otimes \mathtt{a} + \mathtt{acc} \otimes \mathtt{b} + \mathtt{bacc} \otimes 1. \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Une autre manière de voir ce coproduit se base sur le fait que les mots sur L de taille 1 sont les générateurs algébriques de $\mathcal{M}^\star$. Tout mot peut en effet être obtenu par concaténation de lettres, et aucune relation n'a lieu entre ces générateurs. Maintenant, étant donné que d'après la définition 2.1.5, $\Delta^\star$ doit être un morphisme d'algèbre, il suffit de définir $\Delta^\star$ sur les générateurs algébriques de $\mathcal{M}^\star$ pour le définir entièrement, et la seule possibilité est

$$\Delta^\star(\mathtt{a}) = 1 \otimes \mathtt{a} + \mathtt{a} \otimes 1, \tag{2.2.9}$$

pour toute lettre $\mathtt{a} \in L$.

Une réalisation polynomiale

Rappelons maintenant la réalisation polynomiale de $\mathcal{M}^\star$ décrite en [Hiv03]. Celle-ci est extrêmement simple puisque $\mathcal{M}^\star$ peut être considérée comme la réalisation polynomiale d'elle-même. En effet, pour tout $\mathtt{a} \in L$, on pose

$$r_L(\mathtt{a}) := \mathtt{a}. \tag{2.2.10}$$

Comme les lettres $\mathtt{a}$ de L sont les générateurs algébriques de $\mathcal{M}^\star$, l'application $r_A : \mathcal{M}^\star \to \mathbb{K}\langle L\rangle$, qui se doit d'être un morphisme d'algèbre, est entièrement définie par (2.2.10). Cette application, clairement injective, est donc une réalisation polynomiale de $\mathcal{M}^\star$ en tant qu'algèbre. Maintenant, pour définir $r_{L\oplus L}$, il suffit de décrire les images des éléments $\mathtt{a} \in L$. Il existe pour ce faire un unique choix, et pour tout $\mathtt{a} \in L$, on pose

$$r_{L\oplus L}(\mathtt{a}) := \mathtt{a}' + \mathtt{a}'', \tag{2.2.11}$$

où $\mathtt{a}'$ et $\mathtt{a}''$ sont les lettres qui correspondent à $\mathtt{a}$ dans la somme ordinale $L \uplus L$. Ainsi, en identifiant, d'après (2.1.52), l'élément $\mathtt{a}'+\mathtt{a}'' \in \mathbb{K}\langle L\oplus L\rangle$ à l'élément $1\otimes\mathtt{a}+\mathtt{a}\otimes 1 \in \mathbb{K}\langle L\rangle\otimes\mathbb{K}\langle L\rangle$, on a

$$(r_L \otimes r_L)\,\Delta^\star(\mathtt{a}) = r_{L\oplus L}(\mathtt{a}), \tag{2.2.12}$$

ce qui montre que (2.2.11) est bien une réalisation polynomiale de $\mathcal{M}^\star$ en tant que cogèbre, impliquant finalement que r_L est une réalisation polynomiale de l'algèbre de Hopf combinatoire $\mathcal{M}^\star$.

Calculons par exemple, pour $L := \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}$, le coproduit de $\mathtt{aab}$. Il suffit pour cela de réaliser l'élément $\mathtt{aab}$ sur l'alphabet $L \oplus L$. Nous avons

$$\begin{aligned} r_{L\oplus L}(\mathtt{aab}) &= (\mathtt{a}+\mathtt{a}')\cdot(\mathtt{a}+\mathtt{a}')\cdot(\mathtt{b}+\mathtt{b}') \\ &= \mathtt{aab}+\mathtt{aab}'+\mathtt{aa}'\mathtt{b}+\mathtt{aa}'\mathtt{b}'+\mathtt{a}'\mathtt{ab}+\mathtt{a}'\mathtt{ab}'+\mathtt{a}'\mathtt{a}'\mathtt{b}+\mathtt{a}'\mathtt{a}'\mathtt{b}' \\ &= \mathtt{aab}\otimes 1+\mathtt{aa}\otimes\mathtt{b}'+\mathtt{ab}\otimes\mathtt{a}'+\mathtt{a}\otimes\mathtt{a}'\mathtt{b}'+\mathtt{ab}\otimes\mathtt{a}'+\mathtt{a}\otimes\mathtt{a}'\mathtt{b}' \\ &\quad +\mathtt{b}\otimes\mathtt{a}'\mathtt{a}'+1\otimes\mathtt{a}'\mathtt{a}'\mathtt{b}' \\ &= 1\otimes\mathtt{aab}+2\,\mathtt{a}\otimes\mathtt{ab}+\mathtt{aa}\otimes\mathtt{b}+2\,\mathtt{ab}\otimes\mathtt{a}+\mathtt{b}\otimes\mathtt{aa}+\mathtt{aab}\otimes 1, \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

qui est égal, comme un simple calcul le montre, à $(r_L \otimes r_L)\,\Delta^\star(\mathtt{aab})$.

Pour plus de détails sur les algèbres de Hopf $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^\star$, on pourra consulter [Reu93].

2.2.2 L'algèbre de Hopf de Connes-Kreimer

L'algèbre des forêts d'arbres enracinés

Nous considérons ici la classe combinatoire des forêts non ordonnées d'arbres enracinés, que nous appellerons *forêts* dans ce paragraphe par souci de concision. La *taille* d'une forêt est la somme du nombre de nœuds de chacun des arbres qui la constituent. La suite **A000081** de [Slo] commençant par

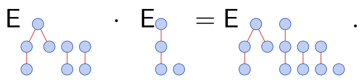
$$1, 1, 2, 4, 9, 20, 48, 115, 286, 719, 1842, 4766, \tag{2.2.14}$$

énumère les forêts selon leur taille. Étant donné qu'il existe exactement une forêt de taille 0, l'espace vectoriel combinatoire engendré par la classe combinatoire des forêts, que nous notons CK, est bien défini. Les élément de la *base élémentaire* de CK sont notés E_F où F est une forêt.

Sur l'espace CK, nous définissons linéairement, pour toutes forêts F_0 et F_1, le produit $\cdot$ par

$$\mathsf{E}_{F_0} \cdot \mathsf{E}_{F_1} = \mathsf{E}_{F_0 \,\uplus\, F_1}, \tag{2.2.15}$$

où $F_0 \uplus F_1$ désigne la forêt constituée des arbres de F_0 et de F_1. Nous avons ainsi par exemple,



(2.2.16)

Notons que le produit $\cdot$ est commutatif. En notant $\perp$ la forêt de taille 0, l'élément $\mathsf{E}_\perp$ est l'élément neutre de ce produit. La structure $(\mathsf{CK}, \cdot)$ est une algèbre combinatoire. La base des E est en outre, d'après la définition de $\cdot$, une base multiplicative. De plus, la famille des éléments de la forme E_T, où T est une forêt constituée d'un unique arbre, forme une base algébrique de CK puisqu'il n'existe pas de relations non triviales entre les E_T — outre celles imposées par le fait que le produit est commutatif — et que tout élément E_F s'obtient de manière évidente par un produit

$$\mathsf{E}_F = \mathsf{E}_{T_1} \cdot \ldots \cdot \mathsf{E}_{T_\ell}, \tag{2.2.17}$$

où $F = T_1 \uplus \cdots \uplus T_\ell$, et les T_i sont les arbres qui constituent F. De plus, les éléments indécomposables de CK sont les éléments de la forme E_T où T est un arbre.

La cogèbre des forêts d'arbres enracinés

Nous pouvons munir l'espace CK d'une structure de cogèbre combinatoire de la manière suivante. Soit T un arbre. Un ensemble E de nœuds de T forme une *coupe admissible* de T si

$$x \in E \quad \text{et} \quad y \text{ est un ancêtre de } x \qquad \text{impliquent} \qquad y \in E. \tag{2.2.18}$$

Nous notons $\mathrm{Adm}(T)$ l'ensemble des coupes admissibles de T. Une coupe admissible E permet de construire à partir de T un couple $T_{|E} := (T', F)$ où T' est l'arbre T restreint aux nœuds de E et à leurs arêtes adjacentes, et F est la forêt composée des nœuds de T qui ne sont pas dans E ainsi que de leurs arêtes adjacentes. Chaque composante connexe de F forme un arbre dont la racine est son unique nœud qui connectait dans T la racine de T par le chemin le plus court. La figure 2.1 montre une coupe admissible et le couple que l'on obtient à partir de celle-ci.

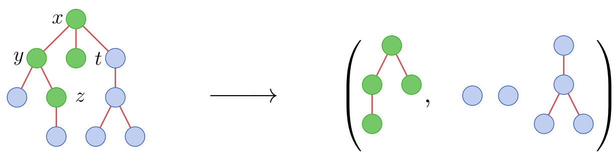


FIGURE 2.1 – Un arbre enraciné T, et le couple $T_{|E} := (T', F)$ où $E := \{x, y, z, t\}$ est une coupe admissible de Connes-Kreimer.

Soit le coproduit défini linéairement pour tout arbre T par

$$\Delta(\mathsf{E}_T) := \sum_{\substack{E \in \mathrm{Adm}(T) \\ (T', F) := T_{|E}}} \mathsf{E}_{T'} \otimes \mathsf{E}_F. \tag{2.2.19}$$

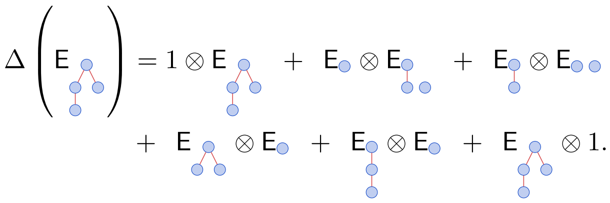
L'expression (2.2.19), définie sur les générateurs algébriques de CK, définit en réalité un coproduit Δ sur CK tout entier car Δ se doit d'être un morphisme d'algèbre. En effet, si F est une forêt telle que

$$\mathsf{E}_F = \mathsf{E}_{T_1} \cdot \ldots \cdot \mathsf{E}_{T_\ell}, \tag{2.2.20}$$

où les T_i sont des arbres, on calcule $\Delta(\mathsf{E}_F)$ par

$$\Delta(\mathsf{E}_F) = \Delta(\mathsf{E}_{T_1}) \odot \cdots \odot \Delta(\mathsf{E}_{T_\ell}), \tag{2.2.21}$$

où $\odot$ désigne l'application $I \otimes \omega \otimes I$ définie en conformité avec (2.1.30). Voici un exemple de coproduit, où l'on note l'élément neutre $\mathsf{E}_\perp$ par 1 :



(2.2.22)

Notons que cet exemple montre que Δ n'est pas cocommutatif. La structure (CK, Δ) est une cogèbre combinatoire.

L'algèbre de Hopf des forêts d'arbres enracinés

Le produit $\cdot$ et le coproduit Δ définis sur CK forment, comme l'ont montré Connes et Kreimer [CK98], une algèbre de Hopf combinatoire. Cette dernière est connue sous le nom d'*algèbre de Hopf de Connes-Kreimer*. Donnons ici, afin d'être exhaustif, l'antipode S de CK, mais sans explications supplémentaires — pour plus de détails, voir par exemple [Foi02]. Il est défini linéairement pour tout arbre T par

$$S\left(\mathsf{E}_T\right) = -\mathsf{E}_T \quad - \sum_{\substack{E \,\in\, \mathrm{Adm}(T) \\ (T', F) := T_{|E}}} (-1_{\mathbb{K}})^{|T|} \; \mathsf{E}_{T' \uplus F}. \tag{2.2.23}$$

Comme tout antipode est un antihomomorphisme d'algèbre, de la même manière que pour le coproduit, l'expression de S donnée en (2.2.23) permet de calculer l'antipode de tout élément de CK. Remarquons de plus que d'après la définition du coproduit Δ, la base des E de CK est du coté gauche.

Pour terminer avec cet exemple, notons que l'algèbre de Hopf de Connes-Kreimer admet un certain nombre de variantes — qui sont plus précisément des généralisations. Il existe par exemple une version non commutative de CK [Foi09], [FNT10] dont les bases sont indexées par des forêts ordonnées d'arbres plans, et une version décorée de CK [Foi02], [Foi09] dont les bases sont indexées par des forêts d'arbres étiquetés sur un alphabet non vide. Une version non commutative de cette dernière, dont les bases sont indexées par des forêts ordonnées d'arbres plans enracinés étiquetés, est également étudiée dans ces références. Une réalisation polynomiale de cette algèbre de Hopf fut découverte récemment par Foissy, Novelli, et Thibon [FNT10] et du même coup, une réalisation polynomiale de CK également.

2.2.3 L'algèbre de Hopf des fonctions quasi-symétriques libres

L'algèbre des permutations

Notons **FQSym** l'espace vectoriel combinatoire engendré par la classe combinatoire des permutations. Les éléments de la *base fondamentale* de **FQSym** sont notés $\mathbf{F}_\sigma$ où σ est une permutation. Les dimensions composante homogène par composante homogène de cet espace forment la suite **A000142** de [Slo] qui commence par

$$1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, 362880, \tag{2.2.24}$$

et qui dénombre bien entendu les permutations selon leur taille — le n^{e} terme de cette suite est $n!$.

Sur l'espace **FQSym**, on définit linéairement pour toutes permutations σ et ν le produit $\cdot$ par

$$\mathbf{F}_\sigma \cdot \mathbf{F}_\nu := \sum_{\pi \,\in\, \sigma \,\overline{\sqcup\!\sqcup}\, \nu} \mathbf{F}_\pi. \tag{2.2.25}$$

Nous avons ainsi par exemple

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{132} \cdot \mathbf{F}_{12} = \mathbf{F}_{13245} + \mathbf{F}_{13425} + \mathbf{F}_{13452} + \mathbf{F}_{14325} + \mathbf{F}_{14352} \\ + \mathbf{F}_{14532} + \mathbf{F}_{41325} + \mathbf{F}_{41352} + \mathbf{F}_{41532} + \mathbf{F}_{45132}.\end{aligned} \tag{2.2.26}$$

La structure $(\mathbf{FQSym}, \cdot)$ est une algèbre combinatoire.

La cogèbre des permutations

L'espace **FQSym** peut également être muni d'un coproduit Δ, défini linéairement pour toute permutation π par

$$\Delta(\mathbf{F}_\pi) := \sum_{\pi = u \cdot v} \mathbf{F}_{\mathrm{std}(u)} \otimes \mathbf{F}_{\mathrm{std}(v)}. \tag{2.2.27}$$

Nous avons par exemple

$$\begin{aligned}\Delta(\mathbf{F}_{24153}) = 1 \otimes \mathbf{F}_{24153} + \mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{F}_{3142} + \mathbf{F}_{12} \otimes \mathbf{F}_{132} \\ + \mathbf{F}_{231} \otimes \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{2314} \otimes \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_{24153} \otimes 1.\end{aligned} \tag{2.2.28}$$

La structure $(\mathbf{FQSym}, \Delta)$ est une cogèbre combinatoire.

L'algèbre de Hopf des permutations

Le produit $\cdot$ et le coproduit Δ définis sur **FQSym** forment, comme l'on montré Malvenuto et Reutenauer [MR95], une bigèbre combinatoire et donc une algèbre de Hopf combinatoire. Pour être exact, dans leur construction initiale, Malvenuto et Reutenauer ont construit le dual $\mathbf{FQSym}^\star$ de **FQSym**. Une formule explicite pour l'antipode que nous ne détaillerons pas est établie en [AS05].

L'algèbre de Hopf duale et autodualité

Voici la description de $\mathbf{FQSym}^\star$. Pour toutes permutations σ et ν, le produit $\cdot$ de $\mathbf{FQSym}^\star$ vérifie

$$\mathbf{F}^\star_\sigma \cdot \mathbf{F}^\star_\nu = \sum_{\substack{u \cdot v \,\in\, \mathfrak{S} \\ \mathrm{std}(u) = \sigma \\ \mathrm{std}(v) = \nu}} \mathbf{F}^\star_\pi. \tag{2.2.29}$$

Le coproduit Δ de $\mathbf{FQSym}^\star$ vérifie quant à lui, pour toute permutation π,

$$\Delta(\mathbf{F}^\star_\pi) = \sum_{\substack{0 \leqslant i \leqslant n \\ \sigma := \pi_{|[1,i]} \\ \nu := \mathrm{std}\left(\pi_{|[i+1,n]}\right)}} \mathbf{F}^\star_\sigma \otimes \mathbf{F}^\star_\nu. \tag{2.2.30}$$

L'algèbre de Hopf **FQSym** est autoduale. En effet, en posant $\psi : \mathbf{FQSym} \to \mathbf{FQSym}^\star$, le morphisme de Hopf défini linéairement pour toute permutation σ par

$$\psi(\mathbf{F}_\sigma) := \mathbf{F}^\star_{\sigma^{-1}}, \tag{2.2.31}$$

est un isomorphisme.

Autres bases, liberté et générateurs algébriques

Il existe plusieurs bases intéressantes de **FQSym**, construites en imitant les définitions de diverses bases de l'algèbre des fonctions symétriques [Mac95], dont le comportement vis à vis du produit dépend de propriétés combinatoires du permutoèdre [DHNT08]. La *base élémentaire* de **FQSym** est définie pour toute permutation σ par

$$\mathbf{E}^{\sigma} := \sum_{\sigma \leqslant_{\mathrm{P}} \sigma'} \mathbf{F}_{\sigma'}. \tag{2.2.32}$$

Similairement, la *base homogène* de **FQSym** est définie par

$$\mathbf{H}^{\sigma} := \sum_{\sigma' \leqslant_{\mathrm{P}} \sigma} \mathbf{F}_{\sigma'}. \tag{2.2.33}$$

Ces deux bases sont multiplicatives puisque le produit vérifie, pour toutes permutations σ et ν,

$$\mathbf{E}^{\sigma} \cdot \mathbf{E}^{\nu} = \mathbf{E}^{\sigma \,/\, \nu}, \tag{2.2.34}$$

et

$$\mathbf{H}^{\sigma} \cdot \mathbf{H}^{\nu} = \mathbf{H}^{\sigma \,\backslash\, \nu}. \tag{2.2.35}$$

Ces bases permettent de montrer que **FQSym** est libre et que les éléments $\mathbf{E}^{\sigma}$ (resp. $\mathbf{H}^{\sigma}$) où σ est une permutation connexe (resp. anti-connexe) forment une famille de générateurs algébriques. Ainsi, les dimensions des générateurs algébriques de **FQSym** constituent la suite **A003319** de [Slo] qui commence par

$$0, 1, 1, 3, 13, 71, 461, 3447, 29093, 273343, \tag{2.2.36}$$

et qui dénombre les permutations connexes (ou les permutations anti-connexes).

Une autre base usuelle de **FQSym** est la base des **G** définie pour toute permutation σ par $\mathbf{G}_{\sigma} := \mathbf{F}_{\sigma^{-1}}$. D'après l'expression de l'isomorphisme (2.2.31) entre **FQSym** et son dual, le produit et le coproduit dans la base des **G** vérifient respectivement (2.2.29) et (2.2.30) en substituant dans ces deux expressions les symboles $\mathbf{F}^{\star}$ par **G**.

Une réalisation polynomiale

Rappelons que $A = \{\mathtt{a}_i : i \geqslant 1\}$ est un alphabet totalement ordonné par la relation $\leqslant$ où $\mathtt{a}_i \leqslant \mathtt{a}_j$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant j$. Soit l'application linéaire $r_A : \mathbf{FQSym} \to \mathbb{K}\langle A \rangle$ définie dans la base des **G** pour toute permutation σ par

$$r_A(\mathbf{G}_{\sigma}) := \sum_{\substack{u \in A^* \\ \mathrm{std}(u) = \sigma}} u. \tag{2.2.37}$$

Hivert, Duchamp et Thibon ont montré [DHT02] (voir aussi [Hiv03]) que r_A est une réalisation polynomiale de l'algèbre **FQSym**. L'image de **FQSym** par r_A forme l'*algèbre des fonctions quasi-symétriques libres*. Nous avons ainsi par exemple

$$r_A(\mathbf{G}_1) = \sum_{\mathtt{a} \in A} \mathtt{a} = \mathtt{a}_1 + \mathtt{a}_2 + \mathtt{a}_3 + \cdots, \tag{2.2.38}$$

$$r_A(\mathbf{G}_{4213}) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant k < \ell} \mathtt{a}_\ell \mathtt{a}_j \mathtt{a}_i \mathtt{a}_k = \mathtt{a}_3\mathtt{a}_2\mathtt{a}_1\mathtt{a}_2 + \mathtt{a}_4\mathtt{a}_2\mathtt{a}_1\mathtt{a}_3 + \cdots. \tag{2.2.39}$$

En outre, l'application r_A est également une réalisation de la cogèbre **FQSym**. En effet, si $B := \{\mathtt{b}_i : i \geqslant 1\}$ est un alphabet totalement ordonné par $\mathtt{b}_i \leqslant \mathtt{b}_j$ pour tous $1 \leqslant i \leqslant j$, nous avons par exemple

$$\begin{aligned} r_{A \oplus B}(\mathbf{G}_{31524}) = & \sum_{i \leqslant j < k \leqslant \ell < r} \mathtt{a}_k \mathtt{a}_i \mathtt{a}_r \mathtt{a}_j \mathtt{a}_\ell \; + \sum_{\substack{i \leqslant j < k \leqslant \ell \\ r}} \mathtt{a}_k \mathtt{a}_i \mathtt{b}_r \mathtt{a}_j \mathtt{a}_\ell \; + \sum_{\substack{i \leqslant j < k \\ \ell < r}} \mathtt{a}_k \mathtt{a}_i \mathtt{b}_r \mathtt{a}_j \mathtt{b}_\ell \\ & + \sum_{\substack{i \leqslant j \\ k \leqslant \ell < r}} \mathtt{b}_k \mathtt{a}_i \mathtt{b}_r \mathtt{a}_j \mathtt{b}_\ell \; + \sum_{\substack{i \\ j < k \leqslant \ell < r}} \mathtt{b}_k \mathtt{a}_i \mathtt{b}_r \mathtt{b}_j \mathtt{b}_\ell \; + \sum_{i \leqslant j < k \leqslant \ell < r} \mathtt{b}_k \mathtt{b}_i \mathtt{b}_r \mathtt{b}_j \mathtt{b}_\ell . \end{aligned} \tag{2.2.40}$$

On s'aperçoit que si l'on applique $r_A \otimes r_B$ à l'expression (2.2.28), on retrouve bien (2.2.40) puisque les lettres de A et de B commutent entre elles.

Terminons ce paragraphe en citant [Mal93], [DHT02], [AS05] et [DHNT08] qui constituent les principales références à propos des travaux réalisés sur **FQSym**.