

Action du groupe symétrique sur les polynômes

Les bases de l'anneau des polynômes étudiées dans ce chapitre apparaissent naturellement dans un problème ancien de géométrie algébrique, le calcul de Schubert. Le principe est de décomposer une variété géométrique en ce qu'on appelle des cellules de Schubert en fonction de leurs intersections avec un drapeau, c'est-à-dire un ensemble d'espaces vectoriels emboîtés. Le cas où la variété de départ est la Grassmannienne est en particulier décrit par Fulton [Ful84]. Les intersections de cellules de Schubert peuvent alors être obtenues par un calcul algébrique dans l'anneau de cohomologie qui correspond ici à un quotient de l'anneau des fonctions symétriques. En particulier, les images des cellules de Schubert sont les *fonctions de Schur*. Quand la variété de départ est une variété de drapeau, l'anneau de cohomologie est un quotient de l'anneau des polynômes non symétriques et l'image des cellules de Schubert est donné par les polynômes de Schubert [LS82]. Malgré leur origine géométrique, ces polynômes se calculent de façon purement combinatoire et font intervenir les structures vues dans la partie I.

En particulier, l'action du groupe symétrique joue un rôle fondamental. Les propriétés des polynômes sont donc fortement liées à celles du groupe symétrique et en particulier aux structures d'ordres que nous avons définies. Nous expliquons ici comment certains opérateurs particuliers, les *différences divisées*, permettent de retrouver les bases des polynômes multivariés et le lien ténu qui existe entre ces opérateurs et les ordres sur les permutations, en particulier l'ordre de Bruhat.

Dans tout ce chapitre, nous nous appuyons sur le travail de Lascoux et Schützenberger à qui l'on doit en particulier les polynômes de Schubert et de Grothendieck [LS82, LS83, Las90]. Si les différences divisées étaient connues depuis Newton, ce n'est que récemment qu'elles ont été utilisées dans le contexte de la combinatoire et de la géométrie, d'abord par Demazure [Dem73, Dem74] et Bernstein-Gelfand-Gelfand [BGG73] puis de façon plus systématique par Lascoux et Schützenberger [LS92]. On trouvera dans l'oeuvre de Lascoux de nombreuses explications sur les calculs à partir de différences divisées. On peut par exemple se reporter à l'his-

torique des polynômes de Schubert [Las95]. L'article [LS96] que nous avons déjà largement utilisé dans le chapitre 2 fait le lien entre les différences divisées et les ordres sur les groupes de Coxeter. Par ailleurs, la thèse de Veigneau [Vei96] aborde la théorie d'une façon très similaire à la nôtre avec des explications détaillées de l'interprétation géométrique.

Dans le paragraphe 3.1, nous définissons l'action de base du groupe symétrique sur les polynômes et introduisons les différences divisées. Le paragraphe 3.2 est un rapide survol de la théorie des fonctions symétriques et plus précisément de la construction des fonctions de Schur par différence divisée. Dans le paragraphe 3.3, nous généralisons cette construction au cas des polynômes non symétriques. Enfin, dans le paragraphe 3.4, nous étudions plus particulièrement les différences divisées isobares π et $\hat{\pi}$, générateurs de l'algèbre 0-Hecke. Les relations entre ces opérateurs permettent de faire le lien avec l'ordre de Bruhat vu en partie I. Le cadre formel que nous définissons ici sera la base de notre travail sur les polynômes de Grothendieck dans le chapitre 4.

3.1 Opérateurs sur les polynômes

3.1.1 Action élémentaire sur les monômes

Le groupe symétrique, et plus généralement les groupes de Coxeter, agissent fidèlement sur les vecteurs. Soit $v = [v_1, \dots, v_n] \in \mathbb{Z}^n$ on a :

$$vs_i = [v_1, \dots, v_{i+1}, v_i, \dots, v_n] \quad \text{pour } 1 \leq i < n, \quad (3.1)$$

$$vs_i^B = [v_1, \dots, -v_i, \dots, v_n] \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n, \quad (3.2)$$

$$vs_i^D = [v_1, \dots, -v_i, -v_{i-1}, \dots, v_n] \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n. \quad (3.3)$$

où les opérateurs agissent sur leur gauche. On vérifie facilement que les relations définies dans les paragraphes 2.1.1 et 2.1.3 sont bien respectées. On rappelle que le groupe BC_n (resp. D_n) est engendré par s_1, \dots, s_{n-1} et s_n^B (resp. s_n^D). Cependant, on s'autorise aussi à utiliser s_i^B (resp. s_i^D) pour $i \neq n$. On a vu que \mathfrak{S}_n était le groupe des permutations, ce qui correspond bien à l'orbite du vecteur $[1, \dots, n]$. Dans le cas de BC_n (resp. D_n), on obtient les permutations signées (resp. signées avec un nombre pair de négatifs).

On se place maintenant dans l'espace $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$ des polynômes multivariés. Pour $v \in \mathbb{Z}^n$, on écrit :

$$x^v = x_1^{v_1} x_2^{v_2} \dots x_n^{v_n}. \quad (3.4)$$

Ainsi, les polynômes sont vus comme des sommes formelles de vecteurs (les exposants). L'action du groupe symétrique sur les vecteurs nous donne alors une opération sur les polynômes. De la même façon, les groupes BC et D agissent

sur les polynômes à exposants dans \mathbb{Z} . Pour f un polynôme (éventuellement avec exposants négatifs), on a donc :

$$f s_i = f(x_1, \dots, x_{i+1}, x_i, \dots, x_n), \quad (3.5)$$

$$f s_i^B = f(x_1, \dots, \frac{1}{x_i}, \dots, x_n), \quad (3.6)$$

$$f s_i^D = f(x_1, \dots, \frac{1}{x_i}, \frac{1}{x_{i-1}}, \dots, x_n). \quad (3.7)$$

3.1.2 Différences divisées

On utilise les opérations élémentaires s_i pour définir des familles d'opérateurs plus sophistiquées, les *différences divisées*. La différence divisée ∂_i s'écrit :

$$f \partial_i = \frac{f - f s_i}{x_i - x_{i+1}}. \quad (3.8)$$

La différence entre f et $f s_i$ *symétrise* le polynôme f . C'est-à-dire que si $g = f \partial_i$, on a $g s_i = g$. Par ailleurs, le résultat est toujours un polynôme car la symétrie fait que $f - f s_i$ s'annule pour $x_i = x_{i+1}$. Plus précisément, on peut écrire la différence divisée directement comme une somme.

$$x^v \partial_i = 0 \quad \text{si } v_i = v_{i+1} \quad (3.9)$$

$$x^v \partial_i = \sum_{k=v_{i+1}}^{v_i-1} x^{[\dots, k, v_i-k, \dots]} \quad \text{si } v_i > v_{i+1} \quad (3.10)$$

$$x^v \partial_i = \sum_{k=v_i}^{v_{i+1}-1} -x^{[\dots, k, v_{i+1}-k, \dots]} \quad \text{si } v_i < v_{i+1} \quad (3.11)$$

Par exemple,

$$x_1^5 x_2 \partial_1 = x_1 x_2^4 + x_1^2 x_2^3 + x_1^3 x_2^2 + x_1^4 x_2. \quad (3.12)$$

La famille d'opérateurs $(\partial_i)_{1 \leq i < n}$ satisfait des relations proches de celles des s_i . En effet, les relations de tresses (2.7) et (2.8) sont conservées et seule la relation quadratique est modifiée. On a :

$$\partial_i^2 = 0. \quad (3.13)$$

$$\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i \text{ pour } |i - j| > 1 \quad (3.14)$$

$$\partial_i \partial_{i+1} \partial_i = \partial_{i+1} \partial_i \partial_{i+1} \quad (3.15)$$

Il existe d'autres types de différences divisées. Nous présentons deux sortes de *différences divisées isobares* qui, contrairement aux ∂_i , conservent le degré du polynômes :

$$\pi_i := x_i \partial_i, \quad (3.16)$$

$$\hat{\pi}_i := \partial_i x_i. \quad (3.17)$$

Ou de façon équivalente,

$$f \pi_i = \frac{x_i f - x_{i+1} (f s_i)}{x_i - x_{i+1}}, \quad (3.18)$$

$$f \hat{\pi}_i = \frac{x_{i+1} (f - f s_i)}{x_i - x_{i+1}}. \quad (3.19)$$

Les familles $(\pi_i)_{1 \leq i < n}$ et $(\hat{\pi}_i)_{1 \leq i < n}$ vérifient elles aussi les relations de tresses ainsi que les relations quadratiques :

$$\pi_i^2 = \pi_i, \quad (3.20)$$

$$\hat{\pi}_i^2 = -\hat{\pi}_i. \quad (3.21)$$

Par ailleurs, on vérifie que

$$\hat{\pi}_i = \pi_i - 1. \quad (3.22)$$

Pour $s_{i_1} \dots s_{i_r}$ une décomposition réduite de σ , on écrit $\partial_\sigma := \partial_{i_1} \dots \partial_{i_r}$, $\pi_\sigma := \pi_{i_1} \dots \pi_{i_r}$ et $\hat{\pi}_\sigma := \hat{\pi}_{i_1} \dots \hat{\pi}_{i_r}$. Comme les différences divisées vérifient les relations de tresse, ces produits ne dépendent pas de la décomposition réduite choisie et sont donc bien définis.

Nous verrons dans le paragraphe 3.3 que les différences divisées sont utilisées pour définir des bases de l'anneau des polynômes multivariés. Par ailleurs, les opérateurs π_i et $\hat{\pi}_i$ sont liés à l'algèbre de 0-Hecke que nous présentons dans le paragraphe 3.4 et à l'ordre de Bruhat. Dans le chapitre 4, nous les étudions de façon plus approfondie et prouvons un résultat sur un produit mélangeant des opérateurs π_i et $\hat{\pi}_i$.

3.1.3 Types B, C et D

Les différences divisées ∂_i , π_i et $\hat{\pi}_i$ sont définies à partir des générateurs s_i du groupe symétrique. Nous avons vu dans le paragraphe 2.1.3 que le groupe symétrique \mathfrak{S}_n appartient à une famille plus générale : les groupes de Coxeter. Dans le paragraphe 3.1.1, nous avons en particulier défini les actions des éléments s_i^B et s_i^D sur les vecteurs. De façon similaire, il existe aussi des différences divisées ∂_i^B , ∂_i^C et ∂_i^D .

Les groupes de Coxeter sont générés par des réflexions que l'on peut réaliser géométriquement comme des systèmes de racines [Hil82]. Les vecteurs d'exposants s'interprètent comme des éléments de l'espace ambiant de ces systèmes de racines. La différence divisée ∂_i appliquée à x^v revient à sommer des éléments x^{v-e_i-kr} où

$e_i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$ et $r = [0, \dots, -1, 1, \dots, 0]$, comme on l'a vu en (3.10). Le vecteur r est une racine simple de l'espace ambiant du système de racine A_{n-1} . De façon générale les racines simples de A_{n-1} sont les vecteurs $(r_i)_{1 \leq i < n}$ de \mathbb{Z}^n où $r_i[i] = 1$, $r_i[i+1] = -1$ et où les autres valeurs sont nulles. On pose

$$r_n^B = [0, \dots, 0, 1] \quad (3.23)$$

$$r_n^C = [0, \dots, 0, 2] \quad (3.24)$$

$$r_n^D = [0, \dots, 0, 1, 1]. \quad (3.25)$$

Les racines simples des espaces ambiants des systèmes de racines de type B_n (resp. C_n et D_n) sont les vecteurs $(r_i)_{1 \leq i < n}$ et r_n^B (resp. r_n^C et r_n^D). On a alors, par exemple

$$x_1 x_2^3 \partial_2^B = \sum_{0 \leq k < 6} x^{[1,2]-k \cdot [0,1]} \quad (3.26)$$

$$= x_1 x_2^2 + x_1 x_2^1 + x_1 x_2^0 + x_1 x_2^{-1} + x_1 x_2^{-2} + x_1 x_2^{-3}, \quad (3.27)$$

$$x_1 x_2^3 \partial_2^C = \sum_{0 \leq k < 3} x^{[1,2]-k \cdot [0,2]} \quad (3.28)$$

$$= x_1 x_2^2 + x_1 x_2^0 + x_1 x_2^{-2}, \quad (3.29)$$

$$x_1 x_2^3 \partial_2^D = \sum_{0 \leq k < 4} x^{[1,2]-k \cdot [1,1]} \quad (3.30)$$

$$= x_1 x_2^2 + x_1^0 x_2^1 + x_1^{-1} x_2^0 + x_1^{-2} x_2^{-1}. \quad (3.31)$$

La valeur maximale de k est donnée par le produit scalaire entre le vecteur et la co-racine de r_i dans l'espace ambiant. De façon générale, on traduit ces sommes par

$$\partial_n^B = \frac{1 - s_n^B}{x_n^{\frac{1}{2}} - x_n^{-\frac{1}{2}}} \quad (3.32)$$

$$\partial_n^C = \frac{1 - s_n^C}{x_n - x_n^{-1}} \quad (3.33)$$

$$\partial_n^D = \frac{1 - s_n^D}{x_{n-1}^{-1} - x_n}. \quad (3.34)$$

Les différences divisées isobares peuvent aussi s'exprimer de façon formelle sur les espaces ambiants des systèmes de racines. On obtient alors les définitions suivantes

$$\pi_i^B = x_i^{1/2} \partial_i^B, \quad \hat{\pi}_i^B = \partial_i^B x_i^{-1/2}, \quad (3.35)$$

$$\pi_i^C = x_i \partial_i^C, \quad \hat{\pi}_i^C = \partial_i^C x_i^{-1}, \quad (3.36)$$

$$\pi_i^D = \left(1 - \frac{s_i^D}{x_{i-1} x_i}\right) \frac{1}{1 - \frac{1}{x_{i-1} x_i}}, \quad \hat{\pi}_i^D = \frac{1 - s_i^D}{x_{i-1} x_i - 1}. \quad (3.37)$$

3.2 Polynômes et fonctions symétriques

3.2.1 Définition et premières bases

On dit qu'un polynôme en n variables est *symétrique* s'il est invariant par l'action de \mathfrak{S}_n . Par exemple, le polynôme suivant sur $\{x_1, x_2, x_3\}$ est symétrique :

$$x_1x_2x_3^2 + x_1x_2^2x_3 + x_1^2x_2x_3. \quad (3.38)$$

Si l'on considère maintenant des séries formelles sur un alphabet infini, les *fonctions symétriques* sont les séries invariantes par l'action de \mathfrak{S}_n pour tout n . On notera cet ensemble Sym et sa projection sur les polynômes en n variables Sym_n .

Les fonctions symétriques sont un objet d'étude fondamental en combinatoire algébrique. Elles admettent plusieurs bases dont nous présentons ici quelques exemples. Le calcul des changements de base est un problème ancien, déjà abordé par Newton puis plus tard par Vandermonde, Faà de Bruno, Cayley et Kostka. Elles apparaissent dans des problèmes liés à la fois à la combinatoire, l'algèbre et la géométrie. Nous nous contentons ici d'un très rapide survol des notions de base. Le premier chapitre du livre de Macdonald [Mac95] est une très bonne introduction à la théorie.

La base la plus naturelle des fonctions symétriques est celle des *fonctions monomiales* obtenue en symétrisant les monômes. Soit v un vecteur de taille n , le symétrisé de x^v est la somme de tous les éléments distincts $x^{v\sigma}$ avec $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Par exemple, le symétrisé de $x_1x_2^2x_3$ est le polynôme symétrique (3.38). Soit λ une partition de longueur n , c'est-à-dire un vecteur tel que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$, alors m_λ est le symétrisé de x^λ . Tout polynôme symétrique peut s'écrire comme une somme de m_λ . Les (m_λ) forment donc une base des polynômes symétriques. Par exemple, le polynôme (3.38) est égal à $m_{2,1,1}(x_1, x_2, x_3)$.

On définit aussi deux autres bases : les fonctions *élémentaires* et *complètes*. Soit $r \in \mathbb{N}$, alors

$$e_r := \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_r}, \quad (3.39)$$

$$h_r := \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_r} x_{i_1}x_{i_2} \dots x_{i_r}. \quad (3.40)$$

Par exemple,

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \quad (3.41)$$

$$h_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3. \quad (3.42)$$

A présent, pour λ une partition, on écrit $e_\lambda := e_{\lambda_1}e_{\lambda_2} \dots e_{\lambda_n}$ et de la même façon, $h_\lambda := h_{\lambda_1}h_{\lambda_2} \dots h_{\lambda_n}$. On prouve que les e_λ ainsi que les h_λ sont algébriquement indépendants et forment des bases des fonctions symétriques.

Les *partitions* sont les objets combinatoires indexant les bases des fonctions symétriques. Une partition λ est un vecteur $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ tel que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k$. La *longueur* d'une partition $\ell(\lambda)$ est le nombre d'éléments dans le vecteur. La *taille* d'une partition est donnée par la somme des valeurs $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$. On représente souvent une partition par un *diagramme de Ferrers* : un ensemble de cases tel que la i ème ligne (en partant du bas) contienne λ_i cases. Par exemple, la partition $(4, 3, 2, 2)$ est représentée par

$$\begin{array}{cccc} \square & & & \\ \square & & & \\ \square & \square & & \\ \square & \square & \square & \square \end{array}. \quad (3.43)$$

En lisant le diagramme selon les colonnes plutôt que selon les lignes, on obtient $\lambda' = (4, 4, 2, 1)$ la *partition conjuguée* de λ ,

$$\begin{array}{cccc} \square & & & \\ \square & \square & & \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{array}. \quad (3.44)$$

3.2.2 Fonctions de Schur

Nous avons vu dans le paragraphe 3.1.2 que les opérateurs de différence divisée symétrisaient les polynômes. En effet, si $f = x_1^4 x_2^2 x_3$, alors

$$f \partial_1 = x_1^3 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2^3 x_3 \quad (3.45)$$

est un polynôme symétrique en x_1 et x_2 . Si à présent on applique ∂_2 , on obtient

$$f \partial_1 \partial_2 = x_1^3 x_2 x_3 + x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^2 \quad (3.46)$$

qui est symétrique en x_2 et x_3 . Cependant, on a perdu la symétrie entre x_1 et x_2 , on peut la retrouver en réappliquant ∂_1 . On obtient alors

$$f \partial_1 \partial_2 \partial_1 = x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2. \quad (3.47)$$

Pour obtenir un polynôme symétrique en 3 variables, on a appliqué $\partial_1 \partial_2 \partial_1 = \partial_\omega$ où ω est la permutation maximale de taille 3. Cette propriété est vraie quelque soit n et les polynômes symétriques obtenus sont appelés *fonctions de Schur*. Celles-ci forment une base des fonctions symétriques. Plus précisément, soit λ une partition de longueur n et δ le vecteur $[n-1, n-2, \dots, 1, 0]$, alors

$$s_\lambda := x^{\lambda+\delta} \partial_\omega \quad (3.48)$$

$$= \frac{x^{\lambda+\delta} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) s_\sigma}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)}. \quad (3.49)$$

Le numérateur est l'*antisymétrisé* de $x^{\lambda+\delta}$: on applique toutes les permutations de \mathfrak{S}_n pondérées par leur signature $\varepsilon(\sigma)$. Le dénominateur est le *déterminant de Vanderrmonde*.

Les fonctions de Schur peuvent aussi être exprimées en tant que déterminants de fonctions élémentaires ou complètes. On a

$$s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq n}, \quad (3.50)$$

$$s_\lambda = \det(e_{\lambda'_i - i + j})_{1 \leq i, j \leq m}, \quad (3.51)$$

où λ' est la partition conjuguée de λ et $n = \ell(\lambda)$, $m = \ell(\lambda')$. En particulier,

$$s_{(n)} = h_n, \quad (3.52)$$

$$s_{(1^n)} = e_n. \quad (3.53)$$

3.2.3 Formule de Pieri et interprétation géométrique

Les fonctions de Schur jouent un rôle fondamental en combinatoire algébrique. Elles correspondent en particulier aux caractères des représentations du groupe symétrique [Mac95]. Leur structure multiplicative est liée à une très jolie combinatoire sur les tableaux décrite par la règle de Littlewood-Richardson. Le cas spécifique de la multiplication d'une fonction de Schur par une fonction complète est donné par la *formule de Pieri* [Mac95]. Soit μ une partition et $r \in \mathbb{N}$, alors

$$s_\mu h_r = \sum_\lambda s_\lambda \quad (3.54)$$

sommé sur les partitions λ égales à la partition μ augmentée d'une bande horizontale de taille r . Cela revient à ajouter des cases sur le diagramme de Ferrers de la partition μ : au maximum une case par colonne et r cases en tout. Par exemple, le produit de la fonction de Schur $s_{(2,2,1)}$ par la fonction complète h_2 s'écrit

$$s_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} h_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} = s_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} + s_{\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array}} \quad (3.55)$$

$$s_{(2,2,1)} h_2 = s_{(2,2,2,1)} + s_{(3,2,1,1)} + s_{(3,2,2)} + s_{(4,2,1)}. \quad (3.56)$$

Ce calcul a une importance particulière en géométrie algébrique. La géométrie énumérative est apparue vers le milieu du XIXème siècle. Son but est de calculer le nombre de solutions de problèmes de type intersection de variétés. Un cas classique est le *calcul de Schubert*. La Grassmannienne $G(k, n)$ est l'ensemble des sous-espaces vectoriels de dimension k d'un espace de dimension n . Soit maintenant un ensemble de sous-espaces vectoriels V_i de dimension i tel que $V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_n$, ou *drapeau*. On décompose l'ensemble $G(k, n)$ en *cellules de Schubert* en fonction de la dimension de $W \cap V_i$ pour $W \subset G(k, n)$ et $i = 1, \dots, k$. Les cellules de Schubert sont indexées par des partitions et notées Ω_μ . Une cellule Ω_μ est incluse dans l'adhérence d'une cellule Ω_ν si et seulement si $\mu \subset \nu$. Cela donne un ordre

sur les cellules de Schubert introduit par Ehresmann et qu'on appelle aussi ordre de Bruhat. En effet, quand on ne travaille plus sur la Grassmannienne mais sur les variétés de drapeau, l'ordre sur les cellules de Schubert correspond alors à celui que nous avons vu dans le chapitre 2.

Un des buts de la géométrie algébrique est de résoudre des problèmes énumératifs comme celui que nous avons décrit par des méthodes algébriques. Ainsi, on montre que les adhérences Ω_μ des cellules de Schubert peuvent être identifiées à des variétés algébriques et on les appelle *variétés de Schubert*. Il est alors possible de définir une relation d'équivalence appelée homologie sur le \mathbb{Z} -module des combinaisons linéaires des sous-variétés de $G(k, n)$. On peut ainsi travailler dans l'anneau de cohomologie de $G(k, n)$. Le produit des classes des sous-variétés U et V de $G(k, n)$ dans cet anneau code l'information géométrique liée à l'intersection de U et V . Plus précisément, la classe de cohomologie d'un point de $G(k, n)$ est toujours indexée par la partition (k^{n-k}) , on la note $\sigma_{(k^{n-k})}$. Si U et V sont deux sous-variétés de dimensions complémentaires dont on note les classes respectives $[U]$ et $[V]$ alors

$$[U][V] = m\sigma_{(k^{n-k})} \tag{3.57}$$

où m est le nombre de points d'intersection de U et de V .

Ce produit s'interprète en réalité comme un produit de polynôme. Plus précisément, à une variété de Schubert Ω_μ , on fait correspondre une fonction de Schur s_μ . L'anneau de cohomologie de $G(k, n)$ s'identifie alors au quotient $Sym/\mathcal{I}(k, n)$ où $\mathcal{I}(k, n)$ est l'idéal engendré par les fonctions de Schur s_ν telles que ν n'est pas contenue dans la partition (k^{n-k}) . C'est dans ce contexte que la formule de Pieri a d'abord été établie. Ces problèmes géométriques motivent encore aujourd'hui les questions combinatoires liées aux fonctions symétriques ainsi qu'aux polynômes non symétriques.

Le premier cas non trivial est la Grassmannienne $G(2, 4)$ des plans de dimensions 2 dans \mathbb{C}^4 qui peut en fait être identifiée à l'espace de module des droites projectives dans $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$. Le calcul suivant

$$s^2_{\square} \equiv 1.s_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}} \tag{3.58}$$

nous confirme un résultat géométrique clair : il existe exactement une droite contenue dans deux plans en position générale. En effet, dans $G(2, 4)$, la classe d'un plan est donnée par la partition $(1, 1)$. Si ce résultat est relativement simple, ce système de calcul permet de résoudre des problèmes beaucoup plus complexes. En restant dans $G(2, 4)$ on obtient par exemple qu'il existe deux droites s'appuyant sur quatre droites en position générale. Le résultat est donné par le calcul

$$s^4_{\square} \equiv 2s_{\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}}, \tag{3.59}$$

la classe d'une droite s'appuyant sur une droite donnée étant s_{\square} . De la même façon, dans $G(2, 5)$ (identifiée à l'espace de module des droites projectives dans

\mathbb{P}^4), le nombre de droites coupant six plans est donné par le coefficient de s^6 dans le développement de s^6_{\square} . La règle de Littlewood-Richardson nous dit qu'il est égal au nombre de tableaux standard de forme $(3, 3)$, c'est-à-dire 5.

3.3 Polynômes non symétriques

La théorie des fonctions symétriques a été largement étudiée en combinatoire. Nous avons vu ses motivations géométriques. Elle fait aussi le lien avec la théorie des représentations. L'étude par une approche similaire des polynômes non symétriques et de leur combinatoire est plus récente. Elle est liée à des problèmes géométriques qui généralisent ceux que nous avons abordés. Si pour les fonctions symétriques, les objets combinatoires de base sont les partitions et les tableaux, les problèmes du cas non symétrique font intervenir les permutations et les ordres du groupe symétrique par le biais des différences divisées.

3.3.1 Polynômes de Schubert

Nous avons vu qu'en appliquant la différence divisée maximale ∂_ω à un monôme, on obtenait un polynôme symétrique. Si on applique à présent toutes les différences divisées ∂_σ , on symétrise partiellement le polynôme. Ces symétrisations partielles nous donnent une base des polynômes non symétriques : les polynômes de Schubert. On se place sur l'anneau des polynômes sur \mathbb{Z} en deux alphabets commutatifs potentiellement infinis $\{x_1, x_2, \dots\}$ et $\{y_1, y_2, \dots\}$.

Définition 3.3.1. Soit λ une partition, on définit le polynôme de Schubert dominant Y_λ par

$$Y_\lambda := \prod_{\substack{i=1 \dots n \\ j=1 \dots \lambda_i}} (x_i - y_j). \quad (3.60)$$

Les polynômes de Schubert sont l'ensemble des images non nulles des polynômes dominants par les différences divisées en x .

Si l'on pose l'alphabet $y = 0$, alors pour λ une partition, le polynôme dominant correspondant à λ est simplement x^λ . Pour éviter les confusions, on parlera souvent de polynômes *simples* quand $y = 0$ et *doubles* lorsqu'on utilise les deux alphabets.

Un polynôme est donné par un polynôme dominant et un produit de différences divisées. En réalité, on indexe les polynômes par des vecteurs tels que pour v avec $v_i > v_{i+1}$, on a

$$Y_{\dots, v_{i+1}, v_i - 1, \dots} = Y_v \partial_i. \quad (3.61)$$

Par exemple, sur la figure 3.1 on lit que

$$Y_{[1, 2, 2, 3]} = Y_{[6, 3, 3, 1]} \partial_1 \partial_2 \partial_3 \partial_2 \partial_1. \quad (3.62)$$

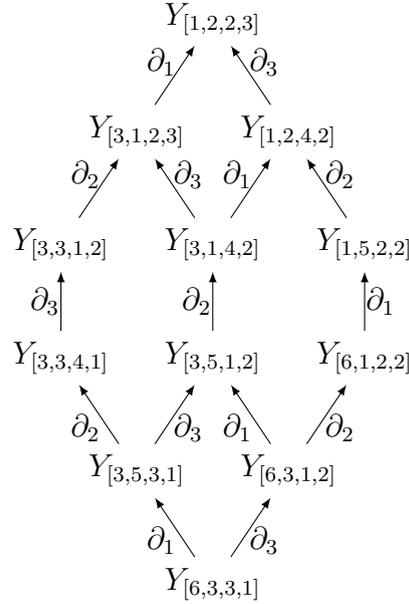


FIGURE 3.1 – Images par différences divisées du polynôme Schubert dominant $Y_{[6,3,3,1]}$

On applique les différences divisées en suivant un chemin dans le graphe entre $Y_{[6,3,3,1]}$ et $Y_{[1,2,2,3]}$. Le résultat ne dépend pas du chemin suivi car les différences divisées vérifient les relations de tresses. Dans le cas des polynômes de Schubert simples, cela donne

$$\begin{aligned}
 Y_{[1,2,2,3]} = & x_1^3 x_2^2 x_3^2 x_4 + x_1^3 x_2^2 x_3 x_4^2 + x_1^3 x_2 x_3^2 x_4^2 + x_1^2 x_2^3 x_3^2 x_4 + x_1^2 x_2^3 x_3 x_4^2 + x_1^2 x_2^2 x_3^3 x_4 \\
 & + 3 x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 + x_1^2 x_2^2 x_3 x_4^3 + x_1^2 x_2 x_3^3 x_4^2 + x_1^2 x_2 x_3^2 x_4^3 + x_1 x_2^3 x_3^2 x_4^2 + x_1 x_2^2 x_3^3 x_4^2 \\
 & + x_1 x_2^2 x_3^2 x_4^3.
 \end{aligned}
 \tag{3.63}$$

C'est la fonction de Schur $s_{(3,2,2,1)}$ développée sur $\{x_1, x_2, x_3\}$. De façon générale, les polynômes de Schubert indexés par des vecteurs croissants sont des fonctions de Schur.

Il arrive qu'en appliquant une différence divisée, on retombe selon (3.61) sur un polynôme dominant. Par exemple, on a $Y_{[6,3,3,1]} = Y_{[6,4,3,1]}\partial_2$. Le polynôme $Y_{[6,3,3,1]}$ a donc deux définitions : $x_1^6 x_2^3 x_3^3 x_4$ ou $x_1^6 x_2^4 x_3^3 x_4 \partial_2$. Cependant, on prouve que cela ne provoque pas d'incohérence.

Le vecteur indexant le polynôme peut être interprété comme le code de Lehmer d'une permutation. On peut donc aussi indexer les polynômes par une permutation plutôt que par un vecteur et la relation (3.61) s'écrit

$$Y_\sigma = Y_{\sigma s_i} \partial_i.
 \tag{3.64}$$

où σ est une permutation telle que $\sigma_i > \sigma_{i+1}$. Les différences divisées sont alors

simplement des opérateurs formels de réordonnement sur les permutations. Le produit de différences divisées qu'on applique à un polynôme dominant pour obtenir un polynôme donné est un chemin dans l'ordre faible.

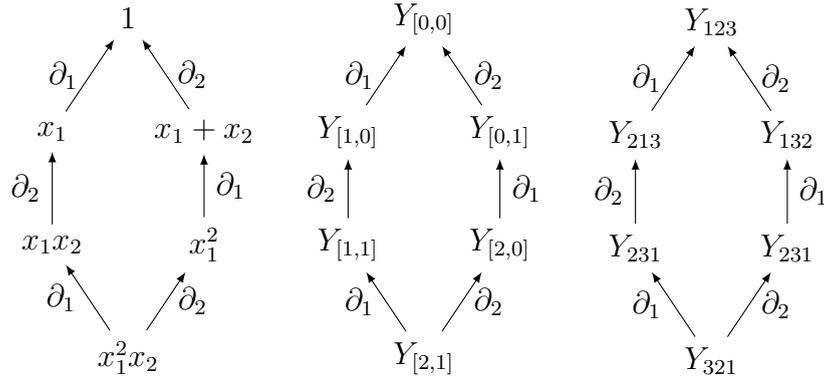


FIGURE 3.2 – Polynômes de Schubert indexés par \mathfrak{S}_3 . A gauche, les polynômes développés en somme de monômes, au milieu la notation avec codes de Lehmer en index et à droite la notation avec permutations en index.

L'indexation par code de Lehmer permet de connaître le nombre de variables nécessaires (sur l'alphabet x) au développement du polynôme. En effet, si v est un vecteur de taille n sans 0 final, par construction Y_v se développe sur n variables. Plus précisément, l'ensemble $(Y_v)_{|v| \leq n}$ forme une base triangulaire des polynômes en n variables. Par ailleurs, chaque polynôme est de degré homogène donné par la somme des valeurs du vecteur. Ces propriétés sont illustrées figure 3.3 pour les polynômes en 2 variables de degré inférieur ou égal à 3.

	1	x_1	x_2	x_1^2	x_1x_2	x_2^2	x_1^3	$x_1^2x_2$	$x_1x_2^2$	x_2^3
$Y_{[0,0]}$	1									
$Y_{[1,0]}$	0	1								
$Y_{[0,1]}$	0	1	1							
$Y_{[2,0]}$	0	0	0	1						
$Y_{[1,1]}$	0	0	0	0	1					
$Y_{[0,2]}$	0	0	0	1	1	1				
$Y_{[3,0]}$	0	0	0	0	0	0	1			
$Y_{[2,1]}$	0	0	0	0	0	0	0	1		
$Y_{[1,2]}$	0	0	0	0	0	0	0	1	1	
$Y_{[0,3]}$	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1

FIGURE 3.3 – Matrice de transition des polynômes de Schubert pour les vecteurs de taille 2 jusqu'en degré 3

Les polynômes de Schubert sont donc une généralisation des fonctions de Schur à la fois sur les polynômes non symétriques et par l'utilisation d'un double alphabet. Ils répondent aussi à un problème géométrique plus général. Nous avons vu

que le produit des fonctions Schur correspondait au produit des variétés de Schubert de la Grassmannienne dans l'anneau de cohomologie. Au lieu de la Grassmannienne, considérons une suite de variétés linéaires emboîtées

$$W_{k_1} \subset W_{k_2} \subset \cdots \subset W_{k_n} \quad (3.65)$$

de dimension $k_1 < \cdots < k_n$. On l'appelle une *variété de drapeau*, le drapeau est dit complet si $k_i = i$.

Tout comme pour la Grassmannienne, on peut considérer les intersections d'éléments de la variété de drapeau avec un drapeau de référence. On doit à Ehresmann [Ehr34] la décomposition en cellules de Schubert des variétés de drapeaux. Pour \mathcal{F}_n , la variété des drapeaux complets de \mathbb{C}^n , les cellules sont indexées par une suite de tableaux colonnes

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{n1} & \\ & a_{22} & a_{32} & & a_{n2} & \\ & & a_{33} & & \cdots & \\ & & & & & a_{nn} \end{array} \quad (3.66)$$

qui sont par construction emboîtées les unes dans les autres. C'est-à-dire, on a $\{a_{11}\} \subset \{a_{21}, a_{22}\} \subset \cdots \{a_{n1}, \dots, a_{nn}\}$. On a vu dans le chapitre 2 qu'on pouvait interpréter ce type de tableau comme des facteurs gauches réordonnés de permutations. Les cellules de Schubert sont donc indexées par des permutations et l'ordre d'inclusion est l'ordre de Bruhat vu au paragraphe 2.3.

Comme dans le cas de la Grassmannienne, les anneaux d'homologie et de cohomologie des variétés de drapeaux peuvent être interprétés comme des quotients d'anneaux de polynômes, non symétriques cette fois. Plus précisément, l'anneau de cohomologie de la variété de drapeau \mathcal{F}_n est isomorphe au quotient $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]/I^+$ où I^+ est l'idéal engendré par les fonctions symétriques sans termes constants en les variables $\{x_1, \dots, x_n\}$. Dans ce contexte, la variété de Schubert indexée par la permutation σ correspond au polynôme de Schubert simple Y_σ . Les polynômes doubles permettent de travailler dans l'anneau de cohomologie équivariante, généralisation classique de la cohomologie. Nous donnerons des exemples de calcul et d'interprétations géométriques dans le chapitre 5.

3.3.2 Polynômes de Grothendieck

Pour obtenir une information plus précise sur la géométrie d'une variété, on remplace parfois l'anneau de cohomologie par l'anneau de Grothendieck des classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels. On parle dans ce cas de K -théorie et de K -théorie équivariante. Pour la variété de drapeau \mathcal{F}^n , les variétés de Schubert sont alors représentées par une autre base des polynômes multivariés, les polynômes de Grothendieck, introduits par Lascoux et Schützenberger [Las90].

Définition 3.3.2. Soit λ une partition, on définit le polynôme de Grothendieck dominant G_λ par

$$G_\lambda := \prod_{\substack{i=1\dots n \\ j=1\dots\lambda_i}} \left(1 - \frac{y_j}{x_i}\right). \quad (3.67)$$

Les polynômes de Grothendieck sont l'ensemble des images des polynômes dominants par les différences divisées π_i .

Tout comme pour les polynômes de Schubert, on indexe les polynômes de Grothendieck par des vecteurs. Pour v tel que $v_i > v_{i+1}$, on a

$$G_{\dots, v_{i+1}, v_i-1, \dots} = G_v \pi_i. \quad (3.68)$$

Le vecteur correspond là aussi au code de Lehmer d'une permutation. On peut décider d'indexer directement par la permutation elle-même. Dans ce cas, pour σ telle que $\sigma_i > \sigma_{i+1}$, on obtient

$$G_\sigma = G_{\sigma s_i} \pi_i. \quad (3.69)$$

L'algorithme de calcul d'un polynôme de Grothendieck est donc le même que celui d'un polynôme de Schubert, seuls l'opération et le développement du polynôme dominant changent. Par exemple, pour calculer $G_{[1,2,2,3]}$ on suivra dans le graphe dessiné figure 3.1 le même chemin que pour $Y_{[1,2,2,3]}$ et on obtient

$$G_{[1,2,2,3]} = G_{[6,3,3,1]} \pi_1 \pi_2 \pi_3 \pi_2 \pi_1. \quad (3.70)$$

On utilisera parfois des polynômes de Grothendieck en un seul alphabet. Deux solutions sont alors possibles. On peut spécialiser l'alphabet y en 1. Dans ce cas les polynômes de Grothendieck forment une base de l'anneau $\mathbb{Z}[\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_n}]$. Cette base est triangulaire pour les variables $(1 - \frac{1}{x_i})$. Une seconde solution consiste donc à effectuer un changement de variable $x_i = (1 - \frac{1}{x_i})$ pour obtenir une base de $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$. On a illustré le changement de base dans ce dernier cas figure 3.4.

3.3.3 Polynômes Clés

Nous avons vu qu'un polynôme de Schubert dominant simple est donné par x^λ avec λ une partition. Les polynômes de Schubert sont ensuite obtenus par l'application des opérateurs ∂_i . Dans le cas des polynômes de Grothendieck, on applique les opérateurs π_i tout en modifiant la définition des polynômes dominants. Il est aussi possible d'appliquer les opérateurs π_i sur les monômes dominants de Schubert, on obtient alors les *polynômes clés* ou *caractères de Demazure*.

Définition 3.3.3. Soit λ une partition, on définit les polynômes clés dominants K_λ et \hat{K}_λ par

$$\hat{K}_\lambda = K_\lambda := x^\lambda \quad (3.71)$$

Les polynômes clés K et \hat{K} sont l'ensemble des images des polynômes dominants par les différences divisées isobares, respectivement π_i et $\hat{\pi}_i$.

	1	x_1	x_1x_2	x_2	x_1^2	$x_1^2x_2$	$x_1^2x_2^2$	$x_1x_2^2$	x_2^2
$G_{[0,0]}$	1								
$G_{[1,0]}$	0	1							
$G_{[1,1]}$	0	0	1						
$G_{[0,1]}$	0	1	-1	1					
$G_{[2,0]}$	0	0	0	0	1				
$G_{[2,1]}$	0	0	0	0	0	1			
$G_{[2,2]}$	0	0	0	0	0	0	1		
$G_{[1,2]}$	0	0	0	0	0	1	-1	1	
$G_{[0,2]}$	0	0	1	0	1	-1	0	-1	1

FIGURE 3.4 – Début de la matrice de transition des polynômes de Grothendieck simples pour les vecteurs de taille 2 (après le changement de variable $x_i = 1 - \frac{1}{x_i}$)

On obtient donc deux sortes de polynômes clés, K et \hat{K} . Ces polynômes ont été introduits à l'origine par Demazure et sont les caractères en théorie des représentations des *modules de Demazure*.

Tout comme les polynômes de Schubert et de Grothendieck, on les indexe par des vecteurs. Soit un vecteur v tel que $v_i > v_{i+1}$ alors

$$K_{vs_i} = K_v \pi_i, \quad (3.72)$$

$$\hat{K}_{vs_i} = \hat{K}_v \hat{\pi}_i. \quad (3.73)$$

Les familles $(K_v)_{|v| \leq n}$ et $(\hat{K}_v)_{|v| \leq n}$ forment des bases des polynômes en n variables. Les polynômes K_v sont égaux aux polynômes de Schubert sur une large classe de vecteurs : ceux qui correspondent aux permutations dites *vexillaires*, c'est-à-dire évitant le motif 2143. La première permutation non vexillaire correspond au motif lui-même, donc au code de Lehmer $[1, 0, 1]$,

$$Y_{[1,0,1]} = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1^2, \quad (3.74)$$

$$K_{[1,0,1]} = x_1x_2 + x_1x_3. \quad (3.75)$$

Nous étudierons en détail le changement de base des K vers les \hat{K} dans le paragraphe 3.4. Il est lié à l'algèbre 0-Hecke et à l'ordre de Bruhat, nous l'utilisons de façon poussée dans le chapitre 4.

Les polynômes clés admettent aussi des définitions en types B , C et D . Les éléments sont indexés par des vecteurs $v \in \mathbb{Z}^n$. On dit que v est dominant pour les types B et C si $v = (v_1, \dots, v_n)$ et $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_n \geq 0$. Et on dit que v est dominant pour le type D si $v = (v_1, \dots, v_{n-1}, \pm v_n)$ avec $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_n \geq 0$. Alors pour v dominant pour le type $\diamond = B, C$ ou D , on pose

$$K_v^\diamond = \hat{K}_v^\diamond = x^v, \quad (3.76)$$

et pour $v \in \mathbb{Z}^n$ tel que $v_i > v_{i+1}$ et $i < n$,

$$K_{vs_i}^\diamond = K_v^\diamond \pi_i, \quad (3.77)$$

$$\hat{K}_{vs_i}^\diamond = K_v^\diamond \hat{\pi}_i. \quad (3.78)$$

Le cas $i = n$ est différent en fonction du type. Pour les types B et C , on a

$$K_{vs_n}^B = K_v^B \pi_n \quad \hat{K}_{vs_n}^B = \hat{K}_v^B \pi_n^B \quad (3.79)$$

$$K_{vs_n}^C = K_v^C \pi_n^C \quad \hat{K}_{vs_n}^C = \hat{K}_v^C \pi_n^C \quad (3.80)$$

si $v_n > 0$ et

$$K_{vs_n}^D = K_v^D \pi_n^D \quad \hat{K}_{vs_n}^D = \hat{K}_v^D \pi_n^D \quad (3.81)$$

si $v_{n-1} + v_n > 0$.

Par exemple, on calcule

$$K_{[2,-1,1]}^B = K_{[2,1,-1]}^B \pi_2 \quad (3.82)$$

$$= K_{[2,1,1]}^B \pi_3^B \pi_2 \quad (3.83)$$

$$= x_1^2 + x_1^2 x_2^{-1} x_3 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_2 x_3^{-1} + x_1^2 x_2 x_3 + x_1^2 x_3, \quad (3.84)$$

$$K_{[2,-1,1]}^C = K_{[2,1,1]}^C \pi_3^B \pi_2 \quad (3.85)$$

$$= x_1^2 + x_1^2 x_2^{-1} x_3 + x_1^2 x_2 x_3^{-1} + x_1^2 x_2 x_3, \quad (3.86)$$

$$K_{[2,-2,1]}^D = K_{[2,1,-2]}^D \pi_2 \quad (3.87)$$

$$= K_{[2,2,-1]}^D \pi_3^D \pi_2 \quad (3.88)$$

$$= x_1^2 x_2^2 x_3^{-1} + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_2 x_3^2 + x_1^2 x_3 + x_1^2 x_2 x_3^{-2} + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_2^{-2} x_3 + x_1^2 x_3^{-1}. \quad (3.89)$$

Les ensembles (K_v^B) , (\hat{K}_v^B) , (K_v^C) , (\hat{K}_v^C) , (K_v^D) et (\hat{K}_v^D) pour $v \in \mathbb{Z}^n$ forment chacun des bases des polynômes multivariés à exposants dans \mathbb{Z}^n , aussi appelés *polynômes de Laurent*.

3.4 Algèbre 0-Hecke et ordre de Bruhat

Les opérateurs π et $\hat{\pi}$ apparaissent dans un autre contexte, celui de l'algèbre de Hecke. Ils sont en effet les générateurs de ce qu'on appelle communément *l'algèbre de Hecke à $q = 0$* ou *0-Hecke*, cas dégénéré de l'algèbre de Hecke classique. Le changement de base entre les deux familles de générateurs fait intervenir l'ordre de Bruhat et nous intéresse plus particulièrement. Par ailleurs, en faisant agir l'algèbre de 0-Hecke sur les vecteurs, les opérateurs π et $\hat{\pi}$ s'interprètent simplement comme des opérateurs de réordonnement. De nombreuses questions liées aux polynômes peuvent alors s'interpréter formellement comme des opérations sur un espace vectoriel dont la base est indexée par les permutations.

3.4.1 Algèbre de 0-Hecke

L'algèbre de Hecke de \mathfrak{S}_n , notée $\mathcal{H}(t_1, t_2)$, est une déformation de l'algèbre du groupe symétrique en fonction de deux paramètres scalaires t_1 et t_2 . Elle est engendrée par une famille d'opérateurs $(T_i)_{1 \leq i < n}$ vérifiant les relations

$$T_i T_j = T_j T_i, \quad \text{si } |i - j| > 1, \quad (3.90)$$

$$T_{i+1} T_i T_{i+1} = T_i T_{i+1} T_i, \quad \text{si } 1 \leq i \leq n - 2, \quad (3.91)$$

$$(T_i - t_1)(T_i - t_2) = 0. \quad (3.92)$$

Elle conserve donc les mêmes relations de tresses que \mathfrak{S}_n : (2.7) et (2.8). Seule la relation quadratique est modifiée. Dans la littérature, on trouve souvent l'algèbre de Hecke paramétrée par un unique paramètre q , ce qui correspond à $t_2 = q$ et $t_1 = -1$ et donc à la relation quadratique

$$(T_i - q)(T_i + 1) = 0. \quad (3.93)$$

L'algèbre de Hecke est de dimension $n!$ et sa base est donnée par $(T_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}$ où pour $s_{i_1} \dots s_{i_m}$ une décomposition réduite de σ , on a

$$T_\sigma := T_{i_1} \dots T_{i_m}. \quad (3.94)$$

Nous étudions ici le cas où $q = 0$, qu'on appelle aussi l'algèbre de 0-Hecke. Si l'on pose $t_2 = 0$ et $t_1 = -1$, les T_i vérifient la relation quadratique (3.20) et correspondent donc aux opérateurs de différence divisée π_i . Si l'on pose à présent

$$\hat{\pi}_i = \pi_i - 1, \quad (3.95)$$

ces nouveaux opérateurs $\hat{\pi}_i$ correspondent aux opérateurs de même nom définis dans le paragraphe 3.1.2. De là, ils vérifient les relations de tresses (3.90) et (3.91). Leur relation quadratique est donnée par (3.21) et correspond à la relation quadratique de Hecke (3.92) pour $t_2 = 0$ et $t_1 = -1$. Si $t_2 = 0$, la spécialisation de t_1 en ± 1 n'a donc pas d'impact structurel sur l'algèbre. Dans les deux cas, on l'appelle algèbre de 0-Hecke et elle admet deux bases $\pi = (\pi_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}$ et $\hat{\pi} = (\hat{\pi}_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}$ dont la relation est donnée par (3.95).

3.4.2 Changement de base

Le changement de base entre les générateurs π_σ et $\hat{\pi}_\sigma$ est donné par l'ordre de Bruhat. Soit $s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_m}$ une décomposition réduite d'une permutation σ , alors

$$\hat{\pi}_\sigma = \hat{\pi}_{i_1} \hat{\pi}_{i_2} \dots \hat{\pi}_{i_m}, \quad (3.96)$$

$$= (\pi_{i_1} - 1)(\pi_{i_2} - 1) \dots (\pi_{i_m} - 1). \quad (3.97)$$

On prouve la proposition suivante.

Proposition 3.4.1. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, alors le développement de π_σ (resp. $\hat{\pi}_\sigma$) dans la base $\hat{\pi}$ (resp. π) est donnée par*

$$\hat{\pi}_\sigma = \sum_{\mu \leq \sigma} (-1)^{\ell(\mu) - \ell(\sigma)} \pi_\mu, \quad (3.98)$$

$$\pi_\sigma = \sum_{\mu \leq \sigma} \hat{\pi}_\mu, \quad (3.99)$$

où l'ordre $\mu \leq \sigma$ est l'ordre de Bruhat sur les permutations.

En développant (3.97), on obtient bien que $\hat{\pi}_\sigma$ est une somme de π_μ où une décomposition réduite de μ est un sous mot de la décomposition réduite de σ . C'est-à-dire qu'on a bien $\mu \leq \sigma$ pour l'ordre de Bruhat. Il reste à vérifier que les annulations dans le développement de (3.97) permettent bien d'obtenir chaque permutation avec coefficient ± 1 en fonction de sa longueur. On trouve ce résultat dans [Las90, Lemme 1.13], on peut le vérifier sur l'exemple suivant.

$$\hat{\pi}_{321} = \hat{\pi}_1 \hat{\pi}_2 \hat{\pi}_1 \quad (3.100)$$

$$= (1 - \pi_1)(1 - \pi_2)(1 - \pi_1) \quad (3.101)$$

$$= 1 - \pi_1 - \pi_2 + \pi_2 \pi_1 - \pi_1 + \pi_1^2 + \pi_1 \pi_2 - \pi_1 \pi_2 \pi_3 \quad (3.102)$$

$$= 1 - \pi_1 - \pi_2 + \pi_2 \pi_1 + \pi_1 \pi_2 - \pi_1 \pi_2 \pi_3 \quad (3.103)$$

3.4.3 Opérateurs de réordonnement

L'action des opérateurs π et $\hat{\pi}$ sur les permutations s'interprète comme une opération de réordonnement. On définit deux espaces vectoriels formels sur les permutations dont les bases respectives sont appelées $K = (K_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}$ et $\hat{K} = (\hat{K}_\sigma)_{\sigma \in \mathfrak{S}_n}$. L'action des ensembles π et $\hat{\pi}$ sur respectivement K et \hat{K} est donnée par

$$K_\sigma \pi_i = \begin{cases} K_{\sigma s_i} & \text{si } \sigma_i > \sigma_{i+1}, \\ K_\sigma & \text{sinon,} \end{cases} \quad (3.104)$$

$$\hat{K}_\sigma \hat{\pi}_i = \begin{cases} \hat{K}_{\sigma s_i} & \text{si } \sigma_i > \sigma_{i+1}, \\ -\hat{K}_\sigma & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.105)$$

Cette action est bien compatible avec la définition des opérateurs, on dit qu'elle *réordonne* la permutation. En effet, pour ω la permutation maximale, on a que $K_\omega \pi_\omega = K_{12\dots n}$. L'application d'un opérateur π_i (ou $\hat{\pi}_i$) revient à remonter d'une arête dans le graphe du permutoèdre. L'action de l'opérateur lorsque la permutation est déjà ordonnée est déterminée par les relations quadratiques des opérateurs π et $\hat{\pi}$. On pose à présent que

$$K_\omega = \hat{K}_\omega. \quad (3.106)$$

Les ensembles K et \hat{K} sont alors deux bases d'un même espace vectoriel et le changement de base est donné par la proposition 3.4.1,

$$\hat{K}_\sigma = \sum_{\mu \geq \sigma} (-1)^{\ell(\mu) - \ell(\sigma)} K_\mu, \quad (3.107)$$

$$K_\sigma = \sum_{\mu \geq \sigma} \hat{K}_\mu. \quad (3.108)$$

Nous avons utilisé ici la même terminologie que pour les polynômes clés du paragraphe 3.3.3. En effet, ces polynômes sont une des interprétations que l'on peut donner aux bases K et \hat{K} . Il suffit pour cela de poser

$$\hat{K}_\omega = K_\omega = x_1^n x_2^{n-1} \dots x_n. \quad (3.109)$$

On retrouve la définition des polynômes clés dominants (Définition 3.3.3). On s'est simplement restreint aux polynômes indexés par des vecteurs aux valeurs distinctes. Dans le cas général, il faut préciser l'action de π_i quand $v_i = v_{i+1}$: $K_v \pi_i = K_v$ et $\hat{K}_v \hat{\pi}_i = 0$.

Cependant, les polynômes clés ne sont pas la seule interprétation des bases formelles K et \hat{K} . Au lieu de (3.109), posons à présent

$$K_\omega = \prod_{i=1}^{n-1} \prod_{j=i}^{n-i} \left(1 - \frac{y_j}{x_i}\right). \quad (3.110)$$

D'après la Définition 3.3.2, le polynôme K_ω correspond alors au polynôme de Grothendieck dominant indexé par la partition $\lambda = n - 1, n - 2, \dots, 1, 0$, c'est-à-dire par le code de la permutation maximale ω . L'action des opérateurs formels π sur K est la même que celle des différences divisées π sur les polynômes de Grothendieck indexés par des permutations (3.69).

En fonction du sens donné à K_ω , les bases formelles K et \hat{K} peuvent donc être interprétées en termes de polynômes clés ou de polynômes de Grothendieck. Cela nous permet de prouver formellement des résultats qui s'appliqueront aux deux types de polynômes. Ce sera l'objet du chapitre 4.

