

APPLICATION AU PROBLÈME DE TRANSMISSION INTÉRIEUR

Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet des publications :

- [22] A.-S. BONNET-BEN DHIA, L. CHESNEL et H. HADDAR : On the use of T -coercivity to study the Interior Transmission Eigenvalue Problem. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 340(11-12):647–651, 2011.
- [48] L. CHESNEL : Interior transmission eigenvalue problem for Maxwell's equations : the T -coercivity as an alternative approach. *Inverse Problems*, 28(6):065005, 2012.

Sommaire

Introduction	239
10.1 Étude du problème de Transmission Intérieur scalaire	241
10.1.1 La T -coercivité pour le problème de transmission intérieur	242
10.1.2 Cas $A \leq A^* \text{Id} < \text{Id}$ dans un voisinage de $\partial\Omega$	243
10.1.3 Cas $\text{Id} < A_* \text{Id} \leq A$ dans un voisinage de $\partial\Omega$	245
10.2 Étude du problème de Transmission Intérieur vectoriel	245
10.2.1 Définitions et présentation du problème	246
10.2.2 Propriétés pour le problème scalaire	247
10.2.3 Une condition suffisante pour le caractère discret des valeurs propres de transmission	248
10.2.4 Étude de l'espace \mathbf{X}_0	248
10.2.5 Cas $A \leq A^* \text{Id}$, avec $A^* < 1$, dans un voisinage de la frontière	251
10.2.6 Caractère Fredholm de l'opérateur \mathcal{A}_k^T	251
10.2.7 Caractère discret des valeurs propres de transmission	252
10.2.8 Localisation des valeurs propres de transmission	253
10.2.9 Une estimation pour la première valeur propre de transmission	253
10.2.10 Cas $A_* \text{Id} \leq A$, avec $1 < A_*$, dans un voisinage de la frontière	254
10.3 Quelques questions ouvertes	254

Introduction

Jusqu'à présent, dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés au problème de transmission en électromagnétisme entre un matériau positif (vide, diélectrique,...) et un matériau négatif (métal, métamatériau,...). Dans les Parties I et II, nous nous sommes concentrés sur la version scalaire de ce problème, permettant notamment d'étudier les équations de Maxwell dans une géométrie 3D invariante dans une direction. Dans la Partie III, nous avons travaillé sur

le cas vectoriel. Dans cette dernière partie, nous souhaitons examiner un problème *a priori* assez éloigné de notre centre d'intérêt principal. Nous travaillerons sur le problème de transmission intérieur que l'on rencontre dans la théorie des problèmes inverses de diffraction.

En réalité, l'appellation « problème de transmission intérieur » recouvre toute une famille de problèmes spectraux. On les rencontre notamment lorsqu'on cherche à reconstruire le support d'une inclusion noyée dans un milieu de référence à partir de la mesure de champs lointains à fréquence donnée. Décrivons brièvement la problématique. Imaginons que l'on dispose d'un milieu de référence (corps humains, câble, mer,...) comportant un défaut localisé, *i.e.* à support borné (caillot, fissure, sous-marin,...). En envoyant des ondes dans toutes les directions à fréquence fixée et en mesurant le champ diffracté, nous voulons déterminer la position de l'inclusion et si possible, obtenir des informations concernant les propriétés physiques des matériaux la constituant. Pour mettre en place de telles techniques, il est important de savoir montrer qu'à fréquence fixée, *i.e.* à nombre d'onde fixé, il n'existe pas d'onde incidente qui ne rayonne pas.

À partir de cette question relativement simple, formulons un problème spectral. Nous allons nous concentrer sur l'étude du problème de transmission intérieur en électromagnétisme mais indiquons qu'il apparaît également en élasticité (cf. [9, 89, 10]). Le milieu de référence, caractérisé par les constantes physiques ε_0 et μ_0 , occupe tout l'espace \mathbb{R}^3 . Pour simplifier la présentation, nous supposons $\varepsilon_0 = 1$ et $\mu_0 = 1$. Travaillons dans une configuration pour laquelle l'inclusion (le défaut) Ω est pénétrable. Introduisons les coefficients $A, N \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ tels que $\varepsilon = \varepsilon_0 N$, $\mu = \mu_0 A^{-1}$ dans Ω . Notons u^i le *champ incident* (les ondes envoyées), u^s le *champ diffracté* (les ondes réfléchies dont on mesure l'amplitude) et $u := u^i + u^s$ le champ total. Pour fixer les idées, considérons le problème pour les modes TE-TM en 2D. Pour ce problème scalaire, nous supposons que $N = n\text{Id}$ où n est une fonction à valeurs dans \mathbb{R} . Dans le milieu de référence \mathbb{R}^2 , le champ incident vérifie l'équation $\Delta u^i + k^2 u^i = 0$. Ici, k désigne le nombre d'onde. Le champ total satisfait l'équation $\text{div}(A \nabla u) + k^2 n u = 0$ dans \mathbb{R}^2 avec $A = \text{Id}$, $n = 1$ en dehors de l'inclusion et $A \neq \text{Id}$ et/ou $n \neq 1$ dans Ω . Enfin, le champ diffracté obéit à une condition d'onde sortante, aussi appelée condition de radiation, de la forme $\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r}(\partial u^s / \partial r - i k u^s) = 0$. À présent, écrivons ce qui se passe lorsqu'il existe une onde u^i qui ne rayonne pas. Dans Ω , on a $\text{div}(A \nabla u) + k^2 n u = 0$ et $\Delta u^i + k^2 u^i = 0$. Le champ total, cherché dans $H_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$ avec $\text{div}(A \nabla u) \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^2)$ vérifie les conditions de transmission $[u]_{\partial\Omega} = [\nu \cdot A \nabla u]_{\partial\Omega} = 0$ où $[\cdot]_{\partial\Omega}$ désigne le saut sur $\partial\Omega$. Puisque $u^s = 0$ dans $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ (nous cherchons un champ incident qui ne diffracte pas), on déduit $u = u^i$ et $\nu \cdot A \nabla u = \nu \cdot \nabla u^i$ sur $\partial\Omega$. Ici, ν désigne la normale unitaire à $\partial\Omega$ dirigée vers l'extérieur de Ω . Pour ne pas avoir à écrire l'indice i , notons w la restriction à Ω du champ incident qui ne rayonne pas. Le couple (u, w) vérifie alors le problème de transmission intérieur

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, w) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \text{div}(A \nabla u) + k^2 n u = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \Delta w + k^2 w = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u - w = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \nu \cdot A \nabla u - \nu \cdot \nabla w = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right.$$

En suivant la même démarche, on peut formuler un problème de transmission intérieur pour les équations de Maxwell qui s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}, \mathbf{w}) \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) \text{ tel que :} \\ \mathbf{rot}(A \mathbf{rot} \mathbf{u}) - k^2 N \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{w} - k^2 \mathbf{w} = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \nu \times (\mathbf{u} - \mathbf{w}) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \nu \times (A \mathbf{rot} \mathbf{u} - \mathbf{rot} \mathbf{w}) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

avec, pour le champ électrique, $\varepsilon = \varepsilon_0 N$ et $\mu = \mu_0 A^{-1}$. Notons bien que dans ce problème, les conditions de transmission sont écrites sur toute la frontière du domaine.

Les premières recherches, pour des raisons techniques ou physiques, ça ne semble pas clair, ont porté sur le cas où l'inclusion est caractérisée par un seul paramètre : $A \neq Id, N = Id$ ou $A = Id, N \neq Id$. Les problèmes scalaires [58, 139, 59, 60] et vectoriels [90, 39, 35] associés ont été largement étudiés. Il reste néanmoins de nombreuses questions ouvertes que nous évoquerons au fil de ce chapitre (pour un aperçu récent des techniques utilisées, voir également [38]). En pratique, il est restrictif de modéliser le matériau de l'inclusion par un seul coefficient. C'est pourquoi certains auteurs se sont mis à étudier le problème de transmission intérieur avec $A \neq Id$ et $N \neq Id$ [34, 99, 40]. D'un point de vue mathématique, comme nous allons nous en rendre compte dans la suite, la forme sesquilinéaire associée à ce problème présente un changement de signe dans sa partie principale. Par conséquent, l'opérateur associé n'est pas fortement elliptique et son étude n'est pas standard. Mais pour faire face à ce genre de problèmes, nous pouvons utiliser la technique de la T-coercivité. Rappelons que l'idée consiste à tester dans les formulations variationnelles, non pas directement contre le champ, mais contre une transformation simple du champ de façon à retrouver une certaine positivité. Dans ce chapitre, nous allons voir comment développer cette méthode pour étudier le problème de transmission intérieur. Nous renvoyons également le lecteur à [36] pour une application à un problème de transmission intérieur différent de celui traité ici.

Nous travaillons sur le problème scalaire dans la Section 10.1 et sur le problème vectoriel dans la Section 10.2, complétant ainsi les résultats de [34, 40]. Nous prouvons que le problème de transmission intérieur est bien posé au sens de Fredholm et que les valeurs propres de transmission forment au plus un ensemble discret dans des configurations pour lesquelles $A - Id$ et $N - Id$ sont positifs ou négatifs dans un voisinage de la frontière mais peuvent changer de signe à l'intérieur du domaine. C'est là un apport de la technique de la T-coercivité par rapport aux approches existantes dans la littérature. Sous des conditions un peu plus restrictives sur les paramètres A et N , nous fournissons également des estimations pour la première valeur propre.

10.1 Étude du problème de Transmission Intérieur scalaire

Dans cette section, Ω désigne un domaine borné connexe de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$, à frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne. Notons ν le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur de Ω . Considérons $A \in L^\infty(\Omega, \mathbb{C}^{d \times d})$ une fonction à valeurs matricielles telle que $A(\mathbf{x})$ soit hermitienne pour presque tout $\mathbf{x} \in \Omega$. Introduisons également $n \in L^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ une fonction à valeurs réelles scalaires. Nous supposons

$$\begin{aligned} A_- &:= \inf_{\mathbf{x} \in \Omega} \inf_{\xi \in \mathbb{C}^2, |\xi|=1} (\xi \cdot A(\mathbf{x})\bar{\xi}) > 0 \quad ; \quad A_+ := \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{\xi \in \mathbb{C}^2, |\xi|=1} (\xi \cdot A(\mathbf{x})\bar{\xi}) < \infty \quad ; \\ n_- &:= \inf_{\mathbf{x} \in \Omega} n(\mathbf{x}) > 0 \quad \quad \quad \text{et} \quad n_+ := \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} n(\mathbf{x}) < \infty. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Si \mathcal{O} est un ouvert de \mathbb{R}^d , nous notons $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{O}}$ les produits scalaires de $L^2(\mathcal{O})$, $(L^2(\mathcal{O}))^d$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{O}}$ les normes associées. Nous nous intéressons au problème de transmission intérieur :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, w) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \text{div}(A\nabla u) + k^2 nu = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \Delta w + k^2 w = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ u - w = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \nu \cdot A\nabla u - \nu \cdot \nabla w = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{10.2}$$

Définition 10.1.1 *Les valeurs de $k \in \mathbb{C}$ pour lesquelles le problème (10.2) possède une solution non-nulle (u, w) sont appelées valeurs propres de transmission.*

Le couple (u, w) vérifie le problème fort (10.2) si et seulement si (u, w) vérifie le problème variationnel

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, w) \in X \text{ tel que, pour tout } (u', w') \in X, \\ a_k((u, w), (u', w')) := (A\nabla u, \nabla u')_\Omega - (\nabla w, \nabla w')_\Omega - k^2((nu, u')_\Omega - (w, w')_\Omega) = 0, \end{array} \right. \quad (10.3)$$

avec $X := \{(u, w) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \mid u - w \in H_0^1(\Omega)\}$. À l'aide du théorème de représentation de Riesz, définissons l'opérateur $\mathcal{A}_k : X \rightarrow X$ tel que

$$(\mathcal{A}_k(u, w), (u', w'))_{H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)} = a_k((u, w), (u', w')), \quad \forall (u, w), (u', w') \in X \times X$$

Notons que a_k n'est ni coercive sur $X \times X$ ni même de la forme « coercive+compacte ».

10.1.1 La T-coercivité pour le problème de transmission intérieur

Pour présenter la technique de la T-coercivité dans le cadre de l'étude du problème de transmission intérieur, travaillons sur le cas $A_+ < 1$ et $n_+ < 1$. L'idée consiste à considérer une formulation équivalente à (10.3) où a_k est remplacée par a_k^T définie par

$$a_k^T((u, w), (u', w')) := a_k((u, w), T(u', w')), \quad \forall (u, w), (u', w') \in X \times X, \quad (10.4)$$

T étant un isomorphisme *ad hoc* de X. Le couple $(u, w) \in X$ satisfait $a_k((u, w), (u', w')) = 0$ pour tout $(u', w') \in X$ si et seulement s'il vérifie $a_k^T((u, w), (u', w')) = 0$ pour tout $(u', w') \in X$. Prenons T tel que $T(u, w) := (u - 2w, -w)$. Notons que T constitue bien un isomorphisme car $T \circ T = \text{Id}$. En utilisant l'inégalité de Young, on trouve pour $k = i\kappa$ avec $\kappa \in \mathbb{R}^*$, pour $\alpha, \beta > 0$ et pour tout $(u, w) \in X$,

$$\begin{aligned} & |a_k^T((u, w), (u, w))| \\ &= |(A\nabla u, \nabla u)_\Omega + (\nabla w, \nabla w)_\Omega - 2(A\nabla u, \nabla w)_\Omega + \kappa^2((nu, u)_\Omega + (w, w)_\Omega - 2(nu, w)_\Omega)| \\ &\geq (A\nabla u, \nabla u)_\Omega + (\nabla w, \nabla w)_\Omega + \kappa^2((nu, u)_\Omega + (w, w)_\Omega) - 2|(A\nabla u, \nabla w)_\Omega| - 2\kappa^2|(nu, w)_\Omega| \\ &\geq ((1 - \alpha)A\nabla u, \nabla u)_\Omega + ((1 - \alpha^{-1}A_+)\nabla w, \nabla w)_\Omega + \kappa^2(((1 - \beta)nu, u)_\Omega + ((1 - \beta^{-1}n_+)w, w)_\Omega). \end{aligned}$$

En choisissant α et β tels que $A_+ < \alpha < 1$ et $n_+ < \beta < 1$, cette estimation prouve que a_k^T est coercive sur $X \times X$. En utilisant le théorème de Lax-Milgram et puisque T est un isomorphisme de X, on déduit que \mathcal{A}_k définit un isomorphisme de X pour $k = i\kappa$ avec $\kappa \in \mathbb{R}^*$. Or pour tout $k \in \mathbb{C}$, l'injection de X dans $L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ étant compacte, l'opérateur \mathcal{A}_k diffère de l'isomorphisme \mathcal{A}_i d'une perturbation compacte. Par conséquent, d'après le théorème de Fredholm analytique, lorsque $A_+ < 1$ et $n_+ < 1$, l'ensemble des valeurs propres de transmission est discret et dénombrable dans \mathbb{C} .

Remarque 10.1.2 *Pour ce problème de transmission intérieur, les deux fonctions mises en jeu « vivent » sur le même domaine. Il n'est donc pas nécessaire d'utiliser les opérateurs de transfert géométriques introduits dans le Chapitre 1 pour étudier le problème de transmission entre un matériau positif et un matériau négatif.*

Dans la suite de cette première section, nous allons chercher à affaiblir les hypothèses portant sur A et n . Dans le Chapitre 1, nous avons prouvé que le problème de transmission entre un matériau positif et un matériau négatif est bien posé au sens de Fredholm lorsque le contraste est plus grand ou plus petit que -1 au voisinage de l'interface. Dans le problème de transmission intérieur, c'est la frontière du domaine qui joue le rôle d'interface. Assez naturellement, nous allons montrer que le problème de transmission intérieur est bien posé au sens de Fredholm lorsque A est plus grand ou plus petit que l'identité, au sens des matrices hermitiennes, dans un voisinage de $\partial\Omega$.

10.1.2 Cas $A \leq A^* \text{Id} < \text{Id}$ dans un voisinage de $\partial\Omega$

Supposons dans ce paragraphe qu'il existe un voisinage \mathcal{V} de $\partial\Omega$, *i.e.* un ouvert de \mathbb{R}^d tel que $\partial\Omega \subset \mathcal{V}$, et une constante A^* tels que, au sens des matrices hermitiennes (cf. (10.1)), $A(\mathbf{x}) \leq A^* \text{Id} < \text{Id}$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$.

Lemme 10.1.3 *Supposons $A(\mathbf{x}) \leq A^* \text{Id} < \text{Id}$ et $n(\mathbf{x}) \leq n^* < 1$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$. Alors il existe $k = i\kappa$, avec $\kappa \in \mathbb{R}$, tel que l'opérateur $\mathcal{A}_k : X \rightarrow X$ définisse un isomorphisme.*

Remarque 10.1.4 *Dans ce lemme, nous n'effectuons pas d'hypothèse quant au signe de $A - \text{Id}$ et $n - 1$ sur $\Omega \setminus \bar{\mathcal{V}}$.*

Preuve. Introduisons $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}, [0; 1])$ une fonction de troncature égale à 1 dans un voisinage de $\partial\Omega$ et à support dans $\mathcal{V} \cap \Omega$. Considérons l'opérateur $T : X \rightarrow X$ tel que $T(u, w) = (u - 2\chi w, -w)$. De nouveau, on calcule $T \circ T = \text{Id}$ ce qui montre que T constitue un isomorphisme. Prouvons que $a_{i\kappa}^T$ défini en (10.4) est coercive pour un certain $\kappa \in \mathbb{R}$. Pour tout $(u, w) \in X$, on a,

$$\begin{aligned} |a_{i\kappa}^T((u, w), (u, w))| &= |(A\nabla u, \nabla u)_\Omega + (\nabla w, \nabla w)_\Omega - 2(A\nabla u, \nabla(\chi w))_\Omega \\ &\quad + \kappa^2((nu, u)_\Omega + (w, w)_\Omega - 2(nu, \chi w)_\Omega)|. \end{aligned} \quad (10.5)$$

En utilisant l'inégalité de Young, nous pouvons écrire, pour tout $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\eta > 0$,

$$\begin{aligned} 2|(A\nabla u, \nabla(\chi w))_\Omega| &\leq 2|(\chi A\nabla u, \nabla w)_\mathcal{V}| + 2|(A\nabla u, \nabla(\chi)w)_\mathcal{V}| \\ &\leq \eta(A\nabla u, \nabla u)_\mathcal{V} + \eta^{-1}(A\nabla w, \nabla w)_\mathcal{V} \\ &\quad + \alpha(A\nabla u, \nabla u)_\mathcal{V} + \alpha^{-1}(A\nabla(\chi)w, \nabla(\chi)w)_\mathcal{V} \end{aligned} \quad (10.6)$$

$$\text{et} \quad 2|(nu, \chi w)_\Omega| \leq \beta(nu, u)_\mathcal{V} + \beta^{-1}(nw, w)_\mathcal{V}.$$

En injectant (10.6) dans (10.5), on obtient

$$\begin{aligned} |a_{i\kappa}^T((u, w), (u, w))| &\geq (A\nabla u, \nabla u)_{\Omega \setminus \bar{\mathcal{V}}} + (\nabla w, \nabla w)_{\Omega \setminus \bar{\mathcal{V}}} + \kappa^2((nu, u)_{\Omega \setminus \bar{\mathcal{V}}} + (w, w)_{\Omega \setminus \bar{\mathcal{V}}}) \\ &\quad + ((1 - \eta - \alpha)A\nabla u, \nabla u)_\mathcal{V} + ((\text{Id} - \eta^{-1}A)\nabla w, \nabla w)_\mathcal{V} \\ &\quad + \kappa^2((1 - \beta)nu, u)_\mathcal{V} + ((\kappa^2(1 - \beta^{-1}n) - \sup_{\mathcal{V}} |\nabla \chi|^2 A^* \alpha^{-1})w, w)_\mathcal{V}. \end{aligned}$$

En prenant η , β et α tels que $A^* < \eta < 1$, $n^* < \beta < 1$ et $0 < \alpha < 1 - \eta$, nous obtenons la coercivité de $a_{i\kappa}^T$ pour κ suffisamment grand. \blacksquare

Considérons $\kappa_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{A}_{i\kappa_0} : X \rightarrow X$ définisse un isomorphisme. Puisque $\mathcal{A}_k - \mathcal{A}_{i\kappa_0}$ constitue un opérateur compact de X pour tout $k \in \mathbb{C}$, en utilisant le théorème de Fredholm analytique, nous déduisons le théorème suivant.

Théorème 10.1.5 *Supposons $A(\mathbf{x}) \leq A^* \text{Id} < \text{Id}$ et $n(\mathbf{x}) \leq n^* < 1$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$. Alors l'ensemble des valeurs propres de transmission est discret dans \mathbb{C} .*

Du Lemme 10.1.3, on déduit également directement la proposition suivante.

Proposition 10.1.6 *Supposons seulement $A(\mathbf{x}) \leq A^* \text{Id} < \text{Id}$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$. Alors pour tout $k \in \mathbb{C}$, l'opérateur $\mathcal{A}_k : X \rightarrow X$ est un opérateur Fredholm d'indice zéro.*

À présent, énonçons un théorème de localisation des valeurs propres de transmission. Dans [94], les auteurs donnent un résultat plus précis pour la formulation en bilaplacien (voir le Chapitre 11) du problème de transmission intérieur.

Théorème 10.1.7 *Supposons $A(\mathbf{x}) \leq A^* \text{Id} < \text{Id}$ et $n(\mathbf{x}) \leq n^* < 1$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$. Il existe deux constantes positives ρ et δ telles que si $k \in \mathbb{C}$ vérifie $|k| > \rho$ et $|\Re k| < \delta |\Im k|$, alors k n'est pas une valeur propre de transmission.*

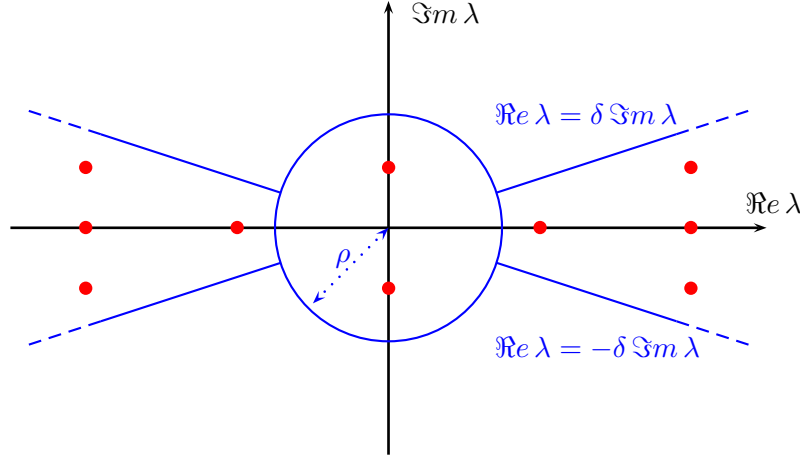


FIGURE 10.1 – Position des valeurs propres dans le plan complexe lorsque $A(\mathbf{x}) \leq A^* \text{Id} < \text{Id}$ et $n(\mathbf{x}) \leq n^* < 1$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$.

Preuve. Considérons de nouveau l'isomorphisme \mathbf{T} défini par $\mathbf{T}(u, w) = (u - 2\chi w, -w)$. le Lemme 10.1.3 prouve que pour $\kappa \in \mathbb{R}$ avec $|\kappa|$ suffisamment grand, on a l'estimation

$$|a_{i\kappa}^{\mathbf{T}}((u, w), (u, w))| \geq C_1(\|u\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|w\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2) + C_2\kappa^2(\|u\|_{\Omega}^2 + \|w\|_{\Omega}^2), \quad (10.7)$$

où les constantes $C_1, C_2 > 0$ sont indépendantes de κ . Prenons maintenant $k = i\kappa e^{i\theta}$ avec $\theta \in [-\pi/2; \pi/2]$. On a

$$|a_k^{\mathbf{T}}((u, w), (u, w)) - a_{i\kappa}^{\mathbf{T}}((u, w), (u, w))| \leq C_3 |1 - e^{2i\theta}| \kappa^2(\|u\|_{\Omega}^2 + \|w\|_{\Omega}^2), \quad (10.8)$$

avec $C_3 > 0$ indépendant de κ . En combinant (10.7) et (10.8), on trouve

$$\begin{aligned} |a_k^{\mathbf{T}}((u, w), (u, w))| &\geq |a_{i\kappa}^{\mathbf{T}}((u, w), (u, w))| - C_3\kappa^2 |1 - e^{2i\theta}| (\|u\|_{\Omega}^2 + \|w\|_{\Omega}^2) \\ &\geq C_1(\|u\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2 + \|w\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)}^2) + (C_2 - C_3 |1 - e^{2i\theta}|) \kappa^2(\|u\|_{\Omega}^2 + \|w\|_{\Omega}^2). \end{aligned}$$

En choisissant θ assez petit pour avoir, par exemple, $C_3 |1 - e^{2i\theta}| \leq C_2/2$, on obtient le résultat désiré. ■

Avec une hypothèse plus forte sur A , on peut affaiblir la condition sur n . En prenant $u' = w' = 1$ dans (10.3), nous remarquons d'abord que les vecteurs propres de transmission (u, w) (i.e. les vecteurs propres du problème (10.2)) vérifient $k^2 \int_{\Omega} nu - w = 0$. Ceci nous conduit à introduire l'espace $Y := \{(u, w) \in X \mid \int_{\Omega} nu - w = 0\}$. Maintenant, supposons $\int_{\Omega} (n - 1) \neq 0$. En procédant par contradiction, on prouve l'existence d'une constante $C_P > 0$ (qui dépend de Ω et aussi de n par l'intermédiaire de Y) telle que

$$\|u\|_{\Omega}^2 + \|w\|_{\Omega}^2 \leq C_P(\|\nabla u\|_{\Omega}^2 + \|\nabla w\|_{\Omega}^2), \quad \forall (u, w) \in Y. \quad (10.9)$$

De plus, on peut vérifier que $k \neq 0$ est une valeur propre de transmission si, et seulement si il existe un élément non nul $(u, w) \in Y$ tel que $a_k((u, w), (u', w')) = 0$ pour tout $(u', w') \in Y$.

Théorème 10.1.8 *Supposons $\int_{\Omega} (n - 1) \neq 0$ et $A_+ < 1$. Alors l'ensemble des valeurs propres de transmission est discret dénombrable dans \mathbb{C} . En outre, si $k \in \mathbb{C}^*$ vérifie l'estimation $|k|^2 < (A_-(1 - \sqrt{A_+})) / (C_P \max(n_+, 1) (1 + \sqrt{n_+}))$, avec C_P définie en (10.9), alors k n'est pas une valeur propre de transmission.*

Preuve. Notons $\lambda(w) := 2 \int_{\Omega} (n-1)w / \int_{\Omega} (n-1)$ et considérons l'isomorphisme de Y défini par $T(u, w) = (u - 2w + \lambda(w), -w + \lambda(w))$ (en remarquant que $\lambda(\lambda(w)) = 2\lambda(w)$, on prouve $T \circ T = \text{Id}$). Pour tout $(u, w) \in Y$, on a

$$\begin{aligned} & |a_k^T((u, w), (u, w))| \\ &= |(A\nabla u, \nabla u)_{\Omega} + (\nabla w, \nabla w)_{\Omega} - 2(A\nabla u, \nabla w)_{\Omega} - k^2((nu, u)_{\Omega} + (w, w)_{\Omega} - 2(nu, w)_{\Omega})| \\ &\geq (A\nabla u, \nabla u)_{\Omega} + (\nabla w, \nabla w)_{\Omega} - 2|(A\nabla u, \nabla w)_{\Omega}| - |k|^2((nu, u)_{\Omega} + (w, w)_{\Omega} + 2|(nu, w)_{\Omega}|) \\ &\geq (1 - \sqrt{A_+})(A\nabla u, \nabla u)_{\Omega} + (\nabla w, \nabla w)_{\Omega} - |k|^2(1 + \sqrt{n_+})((nu, u)_{\Omega} + (w, w)_{\Omega}). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour $k \in \mathbb{C}$ tel que $|k|^2 < (A_-(1 - \sqrt{A_+})) / (C_P \max(n_+, 1)(1 + \sqrt{n_+}))$, a_k^T est coercive sur $Y \times Y$. On peut alors conclure grâce au théorème de Fredholm analytique. ■

Remarque 10.1.9 *En particulier, si $n_+ < 1$ ou si $1 < n_-$, alors $\int_{\Omega} (n-1) \neq 0$ et le Théorème 10.1.8 prouve que l'ensemble des valeurs propres de transmission est discret. De plus, si $1 < n_-$, en observant que pour $k^2 \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} & \Re a_k^T((u, w), (u, w)) \\ &= (A\nabla(u-w), \nabla(u-w))_{\Omega} + ((\text{Id} - A)\nabla w, \nabla w)_{\Omega} - k^2((n(u-w), (u-w))_{\Omega} + ((1-n)w, w)_{\Omega}), \end{aligned}$$

on peut vérifier que la première valeur propre de transmission réelle k_1 non nulle vérifie $|k_1|^2 \geq (A_- \Lambda_1(\Omega) / n_+)$ où $\Lambda_1(\Omega)$ est la première valeur propre de l'opérateur $-\Delta$ avec condition de Dirichlet homogène sur Ω . C'est l'un des résultats de [40].

Résumons maintenant les résultats lorsque A est plus grand que l'identité dans un voisinage de la frontière.

10.1.3 Cas $\text{Id} < A_* \text{Id} \leq A$ dans un voisinage de $\partial\Omega$

Supposons $\text{Id} < A_* \text{Id} \leq A(\mathbf{x})$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$. En travaillant comme dans la section précédente, avec cette fois-ci un isomorphisme $T : X \rightarrow X$ défini par $T(u, w) = (u, -w + 2\chi u)$, on obtient le résultat suivant.

Théorème 10.1.10 *Supposons $\text{Id} < A_* \text{Id} \leq A(\mathbf{x})$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$. Alors pour tout $k \in \mathbb{C}$, l'opérateur $A_k : X \rightarrow X$ est de type Fredholm.*

Supposons $\text{Id} < A_ \text{Id} \leq A(\mathbf{x})$ et $1 < n_* \leq n(\mathbf{x})$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$. Alors l'ensemble des valeurs propres de transmission est discret dénombrable dans \mathbb{C} . De plus, il existe deux constantes positives ρ et δ telles que si $k \in \mathbb{C}$ vérifie $|k| > \rho$ et $|\Re k| < \delta |\Im k|$, alors k n'est pas une valeur propre de transmission.*

Notons $\tilde{\lambda}(u) := -2 \int_{\Omega} (n-1)u / \int_{\Omega} (n-1)$. Avec l'isomorphisme $T : Y \rightarrow Y$ défini par $T(u, w) = (u + \tilde{\lambda}(u), -w + 2u + \tilde{\lambda}(u))$, on peut prouver le théorème suivant.

Théorème 10.1.11 *Supposons $\int_{\Omega} (n-1) \neq 0$ et $1 < A_-$. Alors l'ensemble des valeurs propres de transmission est discret dénombrable dans \mathbb{C} . En outre, si $k \in \mathbb{C}^*$ vérifie l'estimation $|k|^2 < (1 - 1/\sqrt{A_-}) / (C_P \max(n_+, 1)(1 + 1/\sqrt{n_-}))$, avec C_P définie en (10.9), alors k n'est pas une valeur propre de transmission.*

10.2 Étude du problème de Transmission Intérieur vectoriel

Nous allons passer à l'étude du problème de transmission intérieur pour les équations de Maxwell. Dans toute cette section, $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ désigne un domaine borné simplement connexe à frontière $\partial\Omega$ lipschitzienne connexe. Le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$, dirigé vers l'extérieur de Ω , est noté ν .

10.2.1 Définitions et présentation du problème

Nous travaillerons sur le problème de diffraction du champ électrique par une inclusion dont la perméabilité et la permittivité sont données par $\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 N(\mathbf{x})$ et $\mu(\mathbf{x}) = \mu_0 A(\mathbf{x})^{-1}$. Pour simplifier la présentation, nous supposons ε_0 et μ_0 constantes en espace. Ici, $A, N \in L^\infty(\Omega, \mathbb{C}^{3 \times 3})$ sont des fonctions à valeurs matricielles telle que $A(\mathbf{x}), N(\mathbf{x})$ sont hermitiennes pour presque tout $\mathbf{x} \in \Omega$. Nous faisons l'hypothèse que A^{-1}, N^{-1} appartiennent à $L^\infty(\Omega, \mathbb{C}^{3 \times 3})$. Nous notons

$$\begin{aligned} A_- &:= \inf_{\mathbf{x} \in \Omega} \inf_{\xi \in \mathbb{C}^3, |\xi|=1} (\xi \cdot A(\mathbf{x})\bar{\xi}) > 0 \quad ; \quad A_+ := \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{\xi \in \mathbb{C}^3, |\xi|=1} (\xi \cdot A(\mathbf{x})\bar{\xi}) < \infty \quad ; \\ N_- &:= \inf_{\mathbf{x} \in \Omega} \inf_{\xi \in \mathbb{C}^3, |\xi|=1} (\xi \cdot N(\mathbf{x})\bar{\xi}) > 0 \quad \text{et} \quad N_+ := \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{\xi \in \mathbb{C}^3, |\xi|=1} (\xi \cdot N(\mathbf{x})\bar{\xi}) < \infty. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Dans l'étude qui va suivre, $A_* > 1, A^* < 1, N_* > 1$ et $N^* < 1$ seront des constantes qui permettent de formuler des hypothèses sur les valeurs de A et N dans un voisinage de la frontière. Par ailleurs, \mathcal{V} désignera toujours un voisinage de $\partial\Omega$, *i.e.* un ouvert de \mathbb{R}^3 tel que $\partial\Omega \subset \mathcal{V}$.

Si \mathcal{O} est un ouvert de \mathbb{R}^3 , nous notons $\mathbf{L}^2(\mathcal{O}) := L^2(\mathcal{O}, \mathbb{C}^3)$. L'espace $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$ est défini comme la fermeture de $\mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}, \mathbb{C}^3)$ pour la norme

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)} := (\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)}^{1/2} \quad \text{avec} \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)} := (\mathbf{u}, \mathbf{v})_\Omega + (\mathbf{rot} \mathbf{u}, \mathbf{rot} \mathbf{v})_\Omega.$$

Le sous-ensemble des éléments de $\mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega)$ dont la trace tangentielle s'annule sur $\partial\Omega$ est notée $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)$.

$$\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega) := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) \mid \mathbf{v} \times \nu = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}.$$

Définissons la notion de valeur propre de transmission pour les équations de Maxwell.

Définition 10.2.1 *Les éléments $k \in \mathbb{C}$ pour lesquels il existe un couple $(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \neq (0, 0)$ vérifiant*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } (\mathbf{u}, \mathbf{w}) \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) \text{ tel que :} \\ \mathbf{rot} (A \mathbf{rot} \mathbf{u}) - k^2 N \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{w} - k^2 \mathbf{w} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \nu \times (\mathbf{u} - \mathbf{w}) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \nu \times (A \mathbf{rot} \mathbf{u} - \mathbf{rot} \mathbf{w}) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (10.11)$$

sont appelés valeurs propres de transmission.

Rappelons que \mathbf{w} et \mathbf{u} correspondent respectivement au champ incident qui ne rayonne pas et au champ total à l'intérieur de l'inclusion. Le couple (\mathbf{u}, \mathbf{w}) vérifie (10.11) si et seulement si (\mathbf{u}, \mathbf{w}) satisfait le problème variationnel

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}, \mathbf{w}) \in \mathbf{X} \text{ tel que, pour tout } (\mathbf{u}', \mathbf{w}') \in \mathbf{X}, \\ \int_{\Omega} A \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{u}' - \mathbf{rot} \mathbf{w} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{w}' = k^2 \int_{\Omega} N \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' - \mathbf{w} \cdot \mathbf{w}', \end{array} \right. \quad (10.12)$$

avec $\mathbf{X} := \{(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) \times \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) \mid \mathbf{u} - \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0(\mathbf{rot}; \Omega)\}$. Introduisons la forme sesquilinéaire sur $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$

$$a_k((\mathbf{u}, \mathbf{w}), (\mathbf{u}', \mathbf{w}')) := (A \mathbf{rot} \mathbf{u}, \mathbf{rot} \mathbf{u}')_\Omega - (\mathbf{rot} \mathbf{w}, \mathbf{rot} \mathbf{w}')_\Omega - k^2 ((N \mathbf{u}, \mathbf{u}')_\Omega - (\mathbf{w}, \mathbf{w}')_\Omega).$$

Nous remarquons que si (\mathbf{u}, \mathbf{w}) vérifie le problème (10.12), alors pour tout $(\varphi, \psi) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega)$ tel que $\varphi - \psi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ (dans ce cas, $(\nabla \varphi, \nabla \psi) \in \mathbf{X}$ car $(\nabla \varphi - \nabla \psi) \times \nu = 0$ sur $\partial\Omega$), on a

$$k^2 ((N \mathbf{u}, \nabla \varphi)_\Omega - (\mathbf{w}, \nabla \psi)_\Omega) = 0. \quad (10.13)$$

Ceci nous conduit à introduire les espaces

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &:= \{(\varphi, \psi) \in \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega) \mid \varphi - \psi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \text{ et } (\varphi, 1)_{\partial\Omega} = (\psi, 1)_{\partial\Omega} = 0\}; \\ \mathbf{X}_0 &:= \{(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \in \mathbf{X} \mid (N \mathbf{u}, \nabla \varphi)_\Omega - (\mathbf{w}, \nabla \psi)_\Omega = 0, \quad \forall (\varphi, \psi) \in \mathbf{S}\}. \end{aligned} \quad (10.14)$$

Ici, $(\cdot, \cdot)_{\partial\Omega}$ désigne le produit scalaire de $L^2(\partial\Omega)$. La condition $(\varphi, 1)_{\partial\Omega} = (\psi, 1)_{\partial\Omega} = 0$ pour les éléments (φ, ψ) de S est imposée pour éliminer les constantes : si $(C_1, C_2) \in S \cap \mathbb{C}^2$ alors $C_1 = C_2 = 0$. On peut vérifier que $((\varphi, \psi), (\varphi', \psi')) \mapsto ((\varphi, \psi), (\varphi', \psi'))_S := (\nabla\varphi, \nabla\varphi')_{\Omega} + (\nabla\psi, \nabla\psi')_{\Omega}$ définit un produit scalaire sur S . Énonçons un lemme caractérisant les éléments de \mathbf{X}_0 .

Lemme 10.2.2 *Soit (\mathbf{u}, \mathbf{w}) un élément de \mathbf{X} . Le couple (\mathbf{u}, \mathbf{w}) appartient à \mathbf{X}_0 si et seulement si $\operatorname{div}(N\mathbf{u}) = \operatorname{div} \mathbf{w} = 0$ dans Ω et $\nu \cdot (N\mathbf{u} - \mathbf{w}) = 0$ sur $\partial\Omega$.*

Preuve. Considérons (\mathbf{u}, \mathbf{w}) un élément de \mathbf{X}_0 . Par définition, on a

$$(N\mathbf{u}, \nabla\varphi)_{\Omega} - (\mathbf{w}, \nabla\psi)_{\Omega} = 0, \quad \forall (\varphi, \psi) \in S.$$

En prenant, $(\varphi, \psi) = (\zeta, 0)$ (resp. $(\varphi, \psi) = (0, \zeta)$) pour $\zeta \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\Omega)$, on trouve $\operatorname{div}(N\mathbf{u}) = 0$ (resp. $\operatorname{div} \mathbf{w} = 0$). Maintenant, si $\zeta \in H^1(\Omega)$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \langle \nu \cdot (N\mathbf{u} - \mathbf{w}), \zeta \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)} &= (\operatorname{div}(N\mathbf{u} - \mathbf{w}), \zeta)_{\Omega} + (N\mathbf{u} - \mathbf{w}, \nabla\zeta)_{\Omega} \\ &= (N\mathbf{u}, \nabla(\zeta - \lambda_{\zeta}))_{\Omega} - (\mathbf{w}, \nabla(\zeta - \lambda_{\zeta}))_{\Omega} = 0. \end{aligned}$$

Ci-dessus, λ_{ζ} désigne le nombre $(\zeta, 1)_{\partial\Omega} / (1, 1)_{\partial\Omega}$.

Réciproquement, si $(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \in \mathbf{X}$ vérifie $\operatorname{div}(N\mathbf{u}) = \operatorname{div} \mathbf{w} = 0$ dans Ω et $\nu \cdot (N\mathbf{u} - \mathbf{w}) = 0$, alors pour $(\varphi, \psi) \in S$, on a

$$\begin{aligned} (N\mathbf{u}, \nabla\varphi)_{\Omega} - (\mathbf{w}, \nabla\psi)_{\Omega} &= \langle \nu \cdot N\mathbf{u}, \varphi \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)} - \langle \nu \cdot \mathbf{w}, \psi \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)} \\ &= \langle \nu \cdot (N\mathbf{u} - \mathbf{w}), \varphi \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega), H^{1/2}(\partial\Omega)} = 0. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve. ■

Maintenant considérons le problème scalaire,

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (\varphi, \psi) \in S \text{ tel que, pour tout } (\varphi', \psi') \in S, \\ \int_{\Omega} N\nabla\varphi \cdot \overline{\nabla\varphi'} - \nabla\psi \cdot \overline{\nabla\psi'} = f((\varphi', \psi')), \end{array} \right. \quad (10.15)$$

où $f \in S^*$ (le dual topologique de S). Dans la suite, nous aurons besoin d'informations concernant $\mathbf{X}_0 \cap \nabla S$, espace précisément égal à l'ensemble des gradients des éléments du noyau de (10.15). Nous allons donc énoncer dans le paragraphe suivant quelques résultats pour ce problème qui seront utiles dans la suite de l'analyse. Nous renvoyons le lecteur à la Section 10.1 pour les démonstrations.

10.2.2 Propriétés pour le problème scalaire

Avec le théorème de représentation de Riesz, définissons l'opérateur $\mathcal{B} : S \rightarrow S$ tel que

$$(\mathcal{B}(\varphi, \psi), (\varphi', \psi'))_S = \int_{\Omega} N\nabla\varphi \cdot \overline{\nabla\varphi'} - \nabla\psi \cdot \overline{\nabla\psi'}, \quad \forall ((\varphi, \psi), (\varphi', \psi')) \in S \times S.$$

En travaillant comme dans les preuves du Lemme 10.1.3 et du Théorème 10.1.10, on montre les deux résultats suivants.

Proposition 10.2.3 *Supposons $N_+ < 1$ ou $1 < N_-$. Alors l'opérateur $\mathcal{B} : S \rightarrow S$ associé au problème scalaire (10.15) définit un isomorphisme.*

Proposition 10.2.4 *Supposons qu'il existe un voisinage \mathcal{V} de $\partial\Omega$ tel que la fonction N satisfasse $N \leq N^* \operatorname{Id} < \operatorname{Id}$ ou $\operatorname{Id} < N_* \operatorname{Id} \leq N$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$. Alors l'opérateur $\mathcal{B} : S \rightarrow S$ associé au problème scalaire (10.15) vérifie l'égalité $\mathcal{B} = \mathcal{I} + \mathcal{K}$ où $\mathcal{I} : S \rightarrow S$ est un isomorphisme et $\mathcal{K} : S \rightarrow S$ un opérateur compact.*

Remarque 10.2.5 *Sous les hypothèses de la Proposition 10.2.4, on a classiquement l'alternative de Fredholm :*

- ou bien $\mathcal{B} : S \rightarrow S$ est injectif et dans ce cas \mathcal{B} constitue un isomorphisme ;
- ou bien $\mathcal{B} : S \rightarrow S$ possède un noyau non réduit à zéro $\ker \mathcal{B} = \text{vect}((\varphi_1, \psi_1), \dots, (\varphi_M, \psi_M))$ et dans ce cas le problème (10.15) possède une solution, définie à une combinaison linéaire des éléments de $\ker \mathcal{B}$ près, si et seulement si f vérifie la condition de compatibilité $f((\varphi_k, \psi_k)) = 0$ pour $k = 1 \dots M$.

10.2.3 Une condition suffisante pour le caractère discret des valeurs propres de transmission

Revenons à l'étude du problème (10.12). Si \mathbf{T} est un isomorphisme de \mathbf{X} , alors (\mathbf{u}, \mathbf{w}) est une solution de (10.12) si et seulement si (\mathbf{u}, \mathbf{w}) vérifie

$$a_k^{\mathbf{T}}((\mathbf{u}, \mathbf{w}), (\mathbf{u}', \mathbf{w}')) := a_k((\mathbf{u}, \mathbf{w}), \mathbf{T}(\mathbf{u}', \mathbf{w}')) = 0, \quad \forall (\mathbf{u}', \mathbf{w}') \in \mathbf{X}. \quad (10.16)$$

Comme pour le problème scalaire, l'idée consiste à trouver le bon isomorphisme $\mathbf{T} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ qui permet de recouvrir une propriété de positivité pour la partie principale de $a_k^{\mathbf{T}}$. Cependant, ce n'est pas suffisant pour appliquer le théorème de Fredholm analytique car l'injection de \mathbf{X} dans $\mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$ n'est pas compacte. Classiquement pour les équations de Maxwell, la compacité sera obtenue en prenant en compte la condition de divergence nulle en travaillant dans l'espace \mathbf{X}_0 . Si k est une valeur propre de transmission non nulle, nous savons, d'après (10.13), que le couple de vecteurs propres associé appartient à \mathbf{X}_0 . Ceci conduit à introduire le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } (\mathbf{u}, \mathbf{w}) \in \mathbf{X}_0 \text{ tel que, pour tout } (\mathbf{u}', \mathbf{w}') \in \mathbf{X}_0, \\ a_k^{\mathbf{T}}((\mathbf{u}, \mathbf{w}), (\mathbf{u}', \mathbf{w}')) = l((\mathbf{u}', \mathbf{w}')), \end{array} \right. \quad (10.17)$$

où $l \in \mathbf{X}_0^*$ (le dual topologique de \mathbf{X}_0). Définissons l'opérateur $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}} : \mathbf{X}_0 \rightarrow \mathbf{X}_0$ tel que, pour tout $((\mathbf{u}, \mathbf{w}), (\mathbf{u}', \mathbf{w}')) \in \mathbf{X}_0 \times \mathbf{X}_0$,

$$(\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}), (\mathbf{u}', \mathbf{w}'))_{\mathbf{H}(\text{rot}; \Omega)^2} = a_k^{\mathbf{T}}((\mathbf{u}, \mathbf{w}), (\mathbf{u}', \mathbf{w}')). \quad (10.18)$$

Si (\mathbf{u}, \mathbf{w}) est un couple de vecteurs propres associé à la valeur propre de transmission $k \neq 0$, alors on a $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = 0$. Par conséquent, pour montrer que l'ensemble des valeurs propres de transmission est discret dénombrable, il est suffisant de prouver que $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}}$ est injectif pour tout $k \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$ où \mathcal{S} est un ensemble discret dénombrable du plan complexe. Dans la prochaine section, nous prouvons un résultat d'injection compacte de \mathbf{X}_0 dans $\mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$ qui permettra, comme nous l'avons annoncé, d'utiliser le théorème de Fredholm analytique.

Remarque 10.2.6 *Supposons l'opérateur scalaire $\mathcal{B} : S \rightarrow S$ inversible (il suffit pour cela de faire l'hypothèse $N_+ < 1$ ou $1 < N_-$). Alors on vérifie aisément que si $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}}$ n'est pas injectif, alors k constitue une valeur propre de transmission. Dans ce cas, $k \neq 0$ est une valeur propre de transmission si et seulement si $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}}$ n'est pas injectif.*

10.2.4 Étude de l'espace \mathbf{X}_0

Dans ce paragraphe, nous nous proposons d'étudier les propriétés de l'espace \mathbf{X}_0 .

Résultat de compacité

Commençons par démontrer un résultat de compacité de l'injection de \mathbf{X}_0 dans $\mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$.

Théorème 10.2.7 *Supposons qu'il existe un voisinage \mathcal{V} de $\partial\Omega$ tel que la fonction N satisfasse $N \leq N^* \text{Id} < \text{Id}$ ou $\text{Id} < N_* \text{Id} \leq N$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$. Alors \mathbf{X}_0 s'injecte de façon compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$.*

Preuve. Définissons les espaces classiques, pour $\xi \in L^\infty(\Omega, \mathbb{C})$,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_N(\xi; \Omega) &:= \{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) \mid \operatorname{div}(\xi \mathbf{u}) = 0 \text{ dans } \Omega, \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}, \\ \mathbf{V}_T(\xi; \Omega) &:= \{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}; \Omega) \mid \operatorname{div}(\xi \mathbf{u}) = 0 \text{ dans } \Omega, \xi \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}. \end{aligned}$$

Considérons une suite bornée $(\mathbf{u}_m, \mathbf{w}_m)$ d'éléments de \mathbf{X}_0 . D'après le Lemme 10.2.2, on a $\operatorname{div}(N\mathbf{u}_m + \mathbf{w}_m) = 0$ dans Ω qui possède une frontière connexe. Par conséquent, d'après [2, théorème 3.12], il existe un élément $\mathbf{s}_m \in \mathbf{V}_T(1; \Omega)$ tel que $N\mathbf{u}_m + \mathbf{w}_m = \mathbf{rot} \mathbf{s}_m$. D'autre part, puisque $\operatorname{div}(N\mathbf{u}_m - \mathbf{w}_m) = 0$ dans le domaine simplement connexe Ω et puisque $\nu \cdot (N\mathbf{u}_m - \mathbf{w}_m) = 0$ sur $\partial\Omega$ (de nouveau, d'après le Lemme 10.2.2), il existe en vertu de [2, théorème 3.17] un élément $\mathbf{d}_m \in \mathbf{V}_N(1; \Omega)$ tel que $N\mathbf{u}_m - \mathbf{w}_m = \mathbf{rot} \mathbf{d}_m$. Définissons alors $\boldsymbol{\varphi}_m := (\mathbf{s}_m + \mathbf{d}_m)/2$ et $\boldsymbol{\psi}_m := (\mathbf{s}_m - \mathbf{d}_m)/2$. On a $\mathbf{u}_m = N^{-1} \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_m$ et $\mathbf{w}_m = \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_m$.

Montrons qu'on peut extraire de $(\mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_m)$ et $(\mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_m)$ des sous-suites qui convergent dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Définissons l'espace

$$\tilde{\mathbf{X}}_0 := \{ (\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}) \in \mathbf{X} \mid \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = 0 \text{ dans } \Omega, \nu \cdot (\boldsymbol{\varphi} + \boldsymbol{\psi}) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}. \quad (10.19)$$

Dans le Lemme 10.2.8 ci-dessous, nous prouvons que $\tilde{\mathbf{X}}_0$ s'injecte de façon compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$ et que l'application $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}) \mapsto (\|\mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}\|_\Omega^2 + \|\mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}\|_\Omega^2)^{1/2}$ définit sur cet espace une norme équivalente à la norme canonique. Par conséquent, la suite $(\boldsymbol{\varphi}_m, \boldsymbol{\psi}_m)$ est bornée dans $\tilde{\mathbf{X}}_0$, et il existe une sous-suite (notée également $(\boldsymbol{\varphi}_m, \boldsymbol{\psi}_m)$) qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$. Définissons $\boldsymbol{\varphi}_{lm} := \boldsymbol{\varphi}_l - \boldsymbol{\varphi}_m$, $\boldsymbol{\psi}_{lm} := \boldsymbol{\psi}_l - \boldsymbol{\psi}_m$, $\mathbf{u}_{lm} := \mathbf{u}_l - \mathbf{u}_m$ et $\mathbf{w}_{lm} := \mathbf{w}_l - \mathbf{w}_m$. Alors, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \mathbf{rot} N^{-1} \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{lm} &= \mathbf{rot} \mathbf{u}_{lm} \\ \mathbf{rot} \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_{lm} &= \mathbf{rot} \mathbf{w}_{lm}. \end{aligned} \quad (10.20)$$

Considérons, comme lors de l'étude du problème scalaire, une fonction de troncature $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{\Omega}, [0; 1])$ à support dans $\mathcal{V} \cap \bar{\Omega}$ et égale à 1 dans un voisinage de $\partial\Omega$. Étudions le cas $\operatorname{Id} < N_* \operatorname{Id} \leq N$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$. Multiplions les équations (10.20) respectivement par $\boldsymbol{\varphi}_{lm} - 2\chi\boldsymbol{\psi}_{lm}$ et $\boldsymbol{\psi}_{lm}$ (pour traiter le cas $N \leq N_* \operatorname{Id} < \operatorname{Id}$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$, il suffit de multiplier par $\boldsymbol{\varphi}_{lm}$ et $\boldsymbol{\psi}_{lm} - 2\chi\boldsymbol{\psi}_{lm}$). En intégrant par parties, on trouve

$$\begin{aligned} & (N^{-1} \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{lm}, \mathbf{rot}(\boldsymbol{\varphi}_{lm} - 2\chi\boldsymbol{\psi}_{lm}))_\Omega + \langle \nu \times (N^{-1} \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{lm}), (\nu \times (\boldsymbol{\varphi}_{lm} - 2\chi\boldsymbol{\psi}_{lm})) \times \nu \rangle_{\partial\Omega} \\ &= (\mathbf{rot} \mathbf{u}_{lm}, \boldsymbol{\varphi}_{lm} - 2\chi\boldsymbol{\psi}_{lm})_\Omega \end{aligned} \quad (10.21)$$

et

$$(\mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_{lm}, \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_{lm})_\Omega + \langle \nu \times \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_{lm}, (\nu \times \boldsymbol{\psi}_{lm}) \times \nu \rangle_{\partial\Omega} = (\mathbf{rot} \mathbf{w}_{lm}, \boldsymbol{\psi}_{lm})_\Omega. \quad (10.22)$$

Puisque $N^{-1} \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{lm} - \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_{lm} = \mathbf{u}_{lm} - \mathbf{w}_{lm}$, la fonction $N^{-1} \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{lm} - \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_{lm}$ appartient à $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, D)$. En se souvenant que $\boldsymbol{\varphi}_{lm} - \boldsymbol{\psi}_{lm}$ constitue un élément de $\mathbf{H}_0(\mathbf{rot}, D)$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} & \langle \nu \times (N^{-1} \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{lm}), (\nu \times (\boldsymbol{\varphi}_{lm} - 2\chi\boldsymbol{\psi}_{lm})) \times \nu \rangle_{\partial D} + \langle \nu \times \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_{lm}, (\nu \times \boldsymbol{\psi}_{lm}) \times \nu \rangle_{\partial D} \\ &= \langle \nu \times \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_{lm}, (\nu \times (-\boldsymbol{\varphi}_{lm})) \times \nu \rangle_{\partial D} + \langle \nu \times \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_{lm}, (\nu \times \boldsymbol{\varphi}_{lm}) \times \nu \rangle_{\partial D} = 0. \end{aligned}$$

En additionnant (10.21) et (10.22), on obtient alors

$$\begin{aligned} & (N^{-1} \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{lm}, \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{lm})_\Omega + (\mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_{lm}, \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_{lm})_\Omega - 2|(\mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_{lm}, \mathbf{rot}(\chi\boldsymbol{\psi}_{lm}))_\Omega| \\ &\leq C(\|\mathbf{rot} \mathbf{u}_{lm}\|_\Omega \|\boldsymbol{\varphi}_{lm}\|_\Omega + \|\mathbf{rot} \mathbf{u}_{lm}\|_\Omega \|\boldsymbol{\psi}_{lm}\|_\Omega + \|\mathbf{rot} \mathbf{w}_{lm}\|_\Omega \|\boldsymbol{\psi}_{lm}\|_\Omega). \end{aligned} \quad (10.23)$$

Mais, pour tout $\alpha > 0$, $\beta > 0$, nous avons, d'après l'inégalité de Young,

$$\begin{aligned}
& 2 |(N^{-1} \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{lm}, \mathbf{rot} (\chi \boldsymbol{\psi}_{lm}))_{\Omega}| \\
& \leq 2 |(\chi N^{-1} \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{lm}, \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_{lm})_{\Omega}| + 2 |(N^{-1} \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{lm}, \nabla \chi \times \boldsymbol{\psi}_{lm})_{\Omega}| \\
& \leq \alpha (N^{-1} \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{lm}, \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{lm})_{\mathcal{V}} + \alpha^{-1} (N^{-1} \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_{lm}, \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_{lm})_{\mathcal{V}} \\
& \quad + \beta (N^{-1} \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{lm}, \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{lm})_{\mathcal{V}} + \beta^{-1} (N^{-1} (\nabla \chi \times \boldsymbol{\psi}_{lm}), \nabla \chi \times \boldsymbol{\psi}_{lm})_{\mathcal{V}} \\
& \leq \alpha (N^{-1} \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{lm}, \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{lm})_{\mathcal{V}} + \alpha^{-1} N_{\star}^{-1} (\mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_{lm}, \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_{lm})_{\mathcal{V}} \\
& \quad + \beta (N^{-1} \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{lm}, \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{lm})_{\mathcal{V}} + C \beta^{-1} (\boldsymbol{\psi}_{lm}, \boldsymbol{\psi}_{lm})_{\mathcal{V}}
\end{aligned} \tag{10.24}$$

avec $C > 0$ qui dépend seulement de χ et N . En injectant (10.24) dans (10.23), nous obtenons

$$\begin{aligned}
& (N^{-1} \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{lm}, \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{lm})_{\Omega \setminus \bar{\mathcal{V}}} + (\mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_{lm}, \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_{lm})_{\Omega \setminus \bar{\mathcal{V}}} \\
& + (1 - \alpha - \beta) (N^{-1} \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{lm}, \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{lm})_{\mathcal{V}} + (1 - \alpha^{-1} N_{\star}^{-1}) (\mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_{lm}, \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_{lm})_{\mathcal{V}} \\
& \leq C (\|\mathbf{rot} \boldsymbol{u}_{lm}\|_{\Omega} \|\boldsymbol{\varphi}_{lm}\|_{\Omega} + \|\mathbf{rot} \boldsymbol{w}_{lm}\|_{\Omega} \|\boldsymbol{\psi}_{lm}\|_{\Omega} + \|\mathbf{rot} \boldsymbol{u}_{lm}\|_{\Omega} \|\boldsymbol{\psi}_{lm}\|_{\Omega} + \beta^{-1} \|\boldsymbol{\psi}_{lm}\|_{\Omega}^2).
\end{aligned} \tag{10.25}$$

Puisque $1 < N_{\star}$, nous pouvons choisir $\alpha < 1$ tel que $(1 - \alpha^{-1} N_{\star}^{-1}) > 0$. En prenant $0 < \beta < 1 - \alpha$, nous obtenons l'estimation

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_{lm}\|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_{lm}\|_{\Omega}^2 & \leq C (\|\mathbf{rot} \boldsymbol{u}_{lm}\|_{\Omega} \|\boldsymbol{\varphi}_{lm}\|_{\Omega} + \|\mathbf{rot} \boldsymbol{u}_{lm}\|_{\Omega} \|\boldsymbol{\psi}_{lm}\|_{\Omega} \\
& \quad + \|\mathbf{rot} \boldsymbol{w}_{lm}\|_{\Omega} \|\boldsymbol{\psi}_{lm}\|_{\Omega} + \|\boldsymbol{\psi}_{lm}\|_{\Omega}^2).
\end{aligned}$$

Ainsi, les suites $(\mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_m)$ et $(\mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_m)$ sont de Cauchy dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Ceci prouve que $(\boldsymbol{u}_m, \boldsymbol{w}_m) = (N^{-1} \mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}_m, \mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}_m)$ converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$. ■

Lemme 10.2.8 *L'espace $\tilde{\mathbf{X}}_0$ défini en (10.19) s'injecte de façon compacte dans $\mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$. De plus, l'application $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi}) \mapsto (\|\mathbf{rot} \boldsymbol{\varphi}\|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{rot} \boldsymbol{\psi}\|_{\Omega}^2)^{1/2}$ définit sur $\tilde{\mathbf{X}}_0$ une norme équivalente à la norme canonique.*

Preuve. Soit $(\boldsymbol{\varphi}_m, \boldsymbol{\psi}_m)$ une suite bornée d'éléments de $\tilde{\mathbf{X}}_0$. Les suites $(\boldsymbol{\varphi}_m - \boldsymbol{\psi}_m)$ et $(\boldsymbol{\varphi}_m + \boldsymbol{\psi}_m)$ sont respectivement bornées dans $\mathbf{V}_N(1; \Omega)$ et $\mathbf{V}_T(1; \Omega)$. D'après le théorème de Weber [150], nous pouvons extraire de $(\boldsymbol{\varphi}_m - \boldsymbol{\psi}_m)$ et $(\boldsymbol{\varphi}_m + \boldsymbol{\psi}_m)$ des sous-suites qui convergent dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. En écrivant, $\boldsymbol{\varphi}_m = (\boldsymbol{\varphi}_m + \boldsymbol{\psi}_m)/2 + (\boldsymbol{\varphi}_m - \boldsymbol{\psi}_m)/2$ et $\boldsymbol{\psi}_m = (\boldsymbol{\varphi}_m + \boldsymbol{\psi}_m)/2 - (\boldsymbol{\varphi}_m - \boldsymbol{\psi}_m)/2$, ceci prouve qu'on peut extraire de $(\boldsymbol{\varphi}_m, \boldsymbol{\psi}_m)$ une sous-suite qui converge dans $\mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$. De plus, puisque l'application $\boldsymbol{v} \mapsto \|\mathbf{rot} \boldsymbol{v}\|_{\Omega}$ définit une norme sur $\mathbf{V}_N(1; \Omega)$ et $\mathbf{V}_T(1; \Omega)$, nous obtenons la seconde partie de ce lemme. ■

Normes équivalentes sur \mathbf{X}_0

Dans ce paragraphe, nous donnons une condition suffisante pour que l'application $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) \mapsto (\|\mathbf{rot} \boldsymbol{u}\|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{rot} \boldsymbol{w}\|_{\Omega}^2)^{1/2}$ définisse sur \mathbf{X}_0 une norme équivalente à la norme canonique.

Proposition 10.2.9 *Supposons qu'il existe un voisinage \mathcal{V} de $\partial\Omega$ tel que la fonction N satisfasse $N \leq N_{\star} \text{Id} < \text{Id}$ ou $\text{Id} < N_{\star} \text{Id} \leq N$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$. Supposons également que l'opérateur \mathcal{B} associé au problème scalaire (10.15) soit injectif ($\nabla \ker \mathcal{B} = \mathbf{X}_0 \cap \nabla \mathcal{S} = \{0\}$). Alors l'application $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) \mapsto (\|\mathbf{rot} \boldsymbol{u}\|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{rot} \boldsymbol{w}\|_{\Omega}^2)^{1/2}$ définit sur \mathbf{X}_0 une norme équivalente à la norme canonique.*

Définition 10.2.10 *Sous les hypothèses de la Proposition 10.2.9, nous notons $C_P > 0$ la plus petite constante telle que*

$$\|\boldsymbol{u}\|_{\Omega}^2 + \|\boldsymbol{w}\|_{\Omega}^2 \leq C_P (\|\mathbf{rot} \boldsymbol{u}\|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{rot} \boldsymbol{w}\|_{\Omega}^2), \quad \forall (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) \in \mathbf{X}_0. \tag{10.26}$$

Preuve de la Proposition 10.2.9

Il suffit de prouver que (10.26) est vraie pour un certain $C_P > 0$. Supposons qu'il existe une suite $(\mathbf{u}_m, \mathbf{w}_m)$ d'éléments de \mathbf{X}_0 telle que

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \|\mathbf{u}_m\|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{w}_m\|_{\Omega}^2 = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \|\mathbf{rot} \mathbf{u}_m\|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{w}_m\|_{\Omega}^2 = 0.$$

En vertu du Théorème 10.2.7, nous pouvons extraire de $(\mathbf{u}_m, \mathbf{w}_m)$ une suite (toujours notée $(\mathbf{u}_m, \mathbf{w}_m)$) qui converge vers $(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \in \mathbf{X}_0$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$. Par construction, on a $\|\mathbf{u}\|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{w}\|_{\Omega}^2 = 1$ et $\mathbf{rot} \mathbf{u} = \mathbf{rot} \mathbf{w} = 0$. Puisque $\partial\Omega$ est simplement connexe, on déduit (voir [45, théorème 8]) qu'il existe un couple $(\varphi, \psi) \in \mathbf{S}$ tel que $(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = (\nabla\varphi, \nabla\psi)$. Nous remarquons alors que $\mathcal{B}(\nabla\varphi, \nabla\psi) = (0, 0)$. Puisque nous avons supposé \mathcal{B} injectif, nous déduisons $(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = (0, 0)$. Ceci conduit à une contradiction car nous devons avoir $\|\mathbf{u}\|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{w}\|_{\Omega}^2 = 1$. ■

10.2.5 Cas $A \leq A^* \text{Id}$, avec $A^* < 1$, dans un voisinage de la frontière

Revenons à l'étude de l'opérateur $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}}$ défini en (10.18), où, pour le moment, \mathbf{T} est un isomorphisme abstrait de \mathbf{X} . Dans ce paragraphe, nous supposons qu'il existe un voisinage \mathcal{V} de $\partial\Omega$ tel que $A \leq A^* \text{Id}$ p.p. dans \mathcal{V} , avec $A^* < 1$. De nouveau, $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}, [0; 1])$ désigne une fonction de troncature à support dans $\mathcal{V} \cap \overline{\Omega}$ et égale à 1 dans un voisinage de $\partial\Omega$. Définissons l'opérateur $\mathbf{T} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ tel que

$$\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u} - 2\chi\mathbf{w}, -\mathbf{w}). \quad (10.27)$$

C'est un isomorphisme car $\mathbf{T} \circ \mathbf{T} = \text{Id}$.

10.2.6 Caractère Fredholm de l'opérateur $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}}$

Lemme 10.2.11 *Supposons $A \leq A^* \text{Id} < \text{Id}$ et $N \leq N^* \text{Id} < \text{Id}$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$. Alors il existe $k = i\kappa$, avec $\kappa \in \mathbb{R}$, tel que l'opérateur $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}} : \mathbf{X}_0 \rightarrow \mathbf{X}_0$ soit un isomorphisme.*

Preuve. Montrons que la forme sesquilinéaire $a_{i\kappa}^{\mathbf{T}}$ est coercive pour un certain $\kappa \in \mathbb{R}$. Pour tout $(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \in \mathbf{X}_0$, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} & |a_{i\kappa}^{\mathbf{T}}((\mathbf{u}, \mathbf{w}), (\mathbf{u}, \mathbf{w}))| \\ = & |(A \mathbf{rot} \mathbf{u}, \mathbf{rot} \mathbf{u})_{\Omega} + (\mathbf{rot} \mathbf{w}, \mathbf{rot} \mathbf{w})_{\Omega} - 2(A \mathbf{rot} \mathbf{u}, \mathbf{rot} (\chi\mathbf{w}))_{\Omega} \\ & + \kappa^2 ((N\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\Omega} + (\mathbf{w}, \mathbf{w})_{\Omega} - 2(N\mathbf{u}, \chi\mathbf{w})_{\Omega})| \\ \geq & (A \mathbf{rot} \mathbf{u}, \mathbf{rot} \mathbf{u})_{\Omega} + (\mathbf{rot} \mathbf{w}, \mathbf{rot} \mathbf{w})_{\Omega} + \kappa^2 ((N\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\Omega} + (\mathbf{w}, \mathbf{w})_{\Omega}) \\ & - 2 |(A \mathbf{rot} \mathbf{u}, \mathbf{rot} (\chi\mathbf{w}))_{\Omega}| - 2\kappa^2 |(N\mathbf{u}, \chi\mathbf{w})_{\Omega}|. \end{aligned} \quad (10.28)$$

Mais, pour tout $\eta > 0$, $\alpha > 0$, on a, d'après l'inégalité de Young,

$$\begin{aligned} & 2 |(A \mathbf{rot} \mathbf{u}, \mathbf{rot} (\chi\mathbf{w}))_{\Omega}| \\ \leq & 2 |(\chi A \mathbf{rot} \mathbf{u}, \mathbf{rot} \mathbf{w})_{\Omega}| + 2 |(A \mathbf{rot} \mathbf{u}, \nabla\chi \times \mathbf{w})_{\Omega}| \\ \leq & \eta (A \mathbf{rot} \mathbf{u}, \mathbf{rot} \mathbf{u})_{\mathcal{V}} + \eta^{-1} (A \mathbf{rot} \mathbf{w}, \mathbf{rot} \mathbf{w})_{\mathcal{V}} \\ & + \alpha (A \mathbf{rot} \mathbf{u}, \mathbf{rot} \mathbf{u})_{\mathcal{V}} + \alpha^{-1} (A(\nabla\chi \times \mathbf{w}), \nabla\chi \times \mathbf{w})_{\mathcal{V}} \\ \leq & \eta (A \mathbf{rot} \mathbf{u}, \mathbf{rot} \mathbf{u})_{\mathcal{V}} + \eta^{-1} A^* (\mathbf{rot} \mathbf{w}, \mathbf{rot} \mathbf{w})_{\mathcal{V}} \\ & + \alpha (A \mathbf{rot} \mathbf{u}, \mathbf{rot} \mathbf{u})_{\mathcal{V}} + C \alpha^{-1} (\mathbf{w}, \mathbf{w})_{\mathcal{V}} \end{aligned} \quad (10.29)$$

avec $C > 0$ qui dépend uniquement de χ et de A . De même, pour tout $\beta > 0$, on a

$$\begin{aligned} 2 |(N\mathbf{u}, \chi\mathbf{w})_{\Omega}| & \leq \beta (N\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathcal{V}} + \beta^{-1} (N\mathbf{w}, \mathbf{w})_{\mathcal{V}} \\ & \leq \beta (N\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathcal{V}} + \beta^{-1} N^* (\mathbf{w}, \mathbf{w})_{\mathcal{V}}. \end{aligned} \quad (10.30)$$

Ainsi, en injectant (10.29) et (10.30) dans (10.28), on obtient, pour tout $\eta > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$,

$$\begin{aligned} |a_{i\kappa}^{\mathbf{T}}((\mathbf{u}, \mathbf{w}), (\mathbf{u}, \mathbf{w}))| &\geq (A \operatorname{rot} \mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{u})_{\Omega \setminus \bar{\mathcal{V}}} + (\operatorname{rot} \mathbf{w}, \operatorname{rot} \mathbf{w})_{\Omega \setminus \bar{\mathcal{V}}} \\ &\quad + \kappa^2 \left((N \mathbf{u}, \mathbf{u})_{\Omega \setminus \bar{\mathcal{V}}} + (\mathbf{w}, \mathbf{w})_{\Omega \setminus \bar{\mathcal{V}}} \right) \\ &\quad + (1 - \eta - \alpha)(A \operatorname{rot} \mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{u})_{\mathcal{V}} + (1 - \eta^{-1} A^*)(\operatorname{rot} \mathbf{w}, \operatorname{rot} \mathbf{w})_{\mathcal{V}} \\ &\quad + \kappa^2(1 - \beta)(N \mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathcal{V}} + (\kappa^2(1 - \beta^{-1} N^*) - C \alpha^{-1})(\mathbf{w}, \mathbf{w})_{\mathcal{V}}. \end{aligned} \quad (10.31)$$

Choisissons d'abord $\eta > 0$ de sorte qu'on ait à la fois $(1 - \eta) > 0$ et $(1 - \eta^{-1} A^*) > 0$ (rappelons que $A^* < 1$). Puis, prenons $\alpha > 0$ tel que $(1 - \eta - \alpha) > 0$. Enfin, fixons $\beta > 0$ tel que $(1 - \beta) > 0$ et $(1 - \beta^{-1} N^*) > 0$ (rappelons que $N^* < 1$). Il ne reste plus qu'à prendre un κ suffisamment grand (en valeur absolue) pour obtenir

$$\left| a_{i\kappa}^{\mathbf{T}}((\mathbf{u}, \mathbf{w}), (\mathbf{u}, \mathbf{w})) \right| \geq c (\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\operatorname{rot}; \Omega)}^2 + \|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}(\operatorname{rot}; \Omega)}^2)$$

où c est une constante indépendante de $(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \in \mathbf{X}_0$. Ainsi, pour une valeur de κ assez grande, $a_{i\kappa}^{\mathbf{T}}$ est coercive. Avec le théorème de Lax-Milgram, on peut alors conclure que $\mathcal{A}_{i\kappa}^{\mathbf{T}}$ constitue un isomorphisme de \mathbf{X}_0 pour un tel κ . ■

Nous déduisons le

Théorème 10.2.12 *Supposons $A \leq A^* \operatorname{Id} < \operatorname{Id}$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$. Supposons également $N \leq N^* \operatorname{Id} < \operatorname{Id}$ ou $\operatorname{Id} < N_* \operatorname{Id} \leq N$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$. Alors pour tout $k \in \mathbb{C}$, l'opérateur $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}}$ vérifie l'égalité $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}} = \mathcal{I} + \mathcal{K}_k$ où \mathcal{I} est un isomorphisme de \mathbf{X}_0 indépendant de k , et \mathcal{K}_k est un opérateur compact de \mathbf{X}_0 .*

Preuve. Définissons $\mathcal{I} : \mathbf{X}_0 \rightarrow \mathbf{X}_0$ l'opérateur satisfaisant, pour tout $((\mathbf{u}, \mathbf{w}), (\mathbf{u}', \mathbf{w}')) \in \mathbf{X}_0 \times \mathbf{X}_0$,

$$(\mathcal{I}(\mathbf{u}, \mathbf{w}), (\mathbf{u}', \mathbf{w}'))_{\mathbf{H}(\operatorname{rot}; \Omega)^2} = a_{i\kappa, 1/2}((\mathbf{u}, \mathbf{w}), \mathbf{T}(\mathbf{u}', \mathbf{w}')),$$

avec \mathbf{T} défini en (10.27) et

$$a_{i\kappa, 1/2}((\mathbf{u}, \mathbf{w}), (\mathbf{u}', \mathbf{w}')) = (A \operatorname{rot} \mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{u}')_{\Omega} - (\operatorname{rot} \mathbf{w}, \operatorname{rot} \mathbf{w}')_{\Omega} + \kappa^2 \left((2^{-1} \mathbf{u}, \mathbf{u}')_{\Omega} - (\mathbf{w}, \mathbf{w}')_{\Omega} \right).$$

D'après le Lemme 10.2.11 (remarquer que $2^{-1} \operatorname{Id} < \operatorname{Id}$), nous pouvons choisir $\kappa \in \mathbb{R}$ tel que \mathcal{I} soit un isomorphisme de \mathbf{X}_0 . Puisque, par hypothèse, $N \leq N^* \operatorname{Id} < \operatorname{Id}$ ou $\operatorname{Id} < N_* \operatorname{Id} \leq N$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$, le Théorème 10.2.7 indique que l'injection de \mathbf{X}_0 dans $\mathbf{L}^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte. Ceci prouve que $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}} - \mathcal{I}$ constitue un opérateur compact de \mathbf{X}_0 . ■

10.2.7 Caractère discret des valeurs propres de transmission

Sous les hypothèses du Théorème 10.2.12, grâce au théorème de Fredholm analytique, on distingue deux possibilités pour la famille d'opérateurs $\{\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}}\}_{k \in \mathbb{C}}$. Ou bien, pour tout $k \in \mathbb{C}$, $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}}$ n'est pas injectif (cette situation peut se présenter, cf. exemple de la fin du Chapitre 9). Ou bien il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}}$ soit injectif et alors $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}}$ est injectif pour tout $k \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$ où \mathcal{S} est un ensemble discret dénombrable du plan complexe.

Théorème 10.2.13 *Supposons $A \leq A^* \operatorname{Id} < \operatorname{Id}$ et $N \leq N^* \operatorname{Id} < \operatorname{Id}$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$. Alors l'ensemble des valeurs propres de transmission est discret dans \mathbb{C} .*

Preuve. Le Lemme 10.2.11 assure qu'il existe $\kappa \in \mathbb{R}$ tel que $\mathcal{A}_{i\kappa}^{\mathbf{T}}$ soit un isomorphisme de \mathbf{X}_0 . Ainsi, $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}}$ est injectif pour tout $k \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$ où \mathcal{S} est un ensemble discret du plan complexe. Pour $k \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{S}$, ceci implique que l'unique solution du problème (10.16) (et par conséquent des problèmes (10.11) et (10.12)) est la solution nulle. ■

Théorème 10.2.14 *Supposons $A_+ < 1$. Supposons également l'opérateur \mathcal{B} associé au problème scalaire (10.15) injectif (il suffit pour cela de faire l'hypothèse $N_+ < 1$ ou $1 < N_-$). Alors l'ensemble des valeurs propres de transmission est discret dans \mathbb{C} .*

Preuve. En utilisant la preuve du Lemme 10.2.11 avec $\chi = 1$, on obtient l'existence de deux constantes $C_1, C_2 > 0$ indépendantes de k telles que, pour tout $(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \in \mathbf{X}_0$,

$$\left| a_k^{\mathbf{T}}((\mathbf{u}, \mathbf{w}), (\mathbf{u}, \mathbf{w})) \right| \geq C_1(\|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{w}\|_{\Omega}^2) - C_2|k|^2(\|\mathbf{u}\|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{w}\|_{\Omega}^2).$$

En utilisant la Proposition 10.2.9 d'équivalence de normes sur \mathbf{X}_0 , on déduit que $a_k^{\mathbf{T}}$ est coercive sur $\mathbf{X}_0 \times \mathbf{X}_0$ pour $|k|^2 < C_1/(C_2 C_P)$, où C_P est définie en (10.26). Ainsi, l'opérateur $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}}$ est un isomorphisme de \mathbf{X}_0 pour de petites valeurs (en module) de k . On peut alors conclure avec le théorème de Fredholm analytique. ■

10.2.8 Localisation des valeurs propres de transmission

Réutilisons une nouvelle fois l'astuce de la preuve du théorème 3.6.1 de [102] pour montrer un résultat de localisation des valeurs propres de transmission.

Théorème 10.2.15 *Supposons $A \leq A^* \text{Id} < \text{Id}$ et $N \leq N^* \text{Id} < \text{Id}$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$. Il existe deux constantes positives ρ et δ telles que si $k \in \mathbb{C}$ vérifie $|k| > \rho$ et $|\Re k| < \delta |\Im k|$, alors k n'est pas une valeur propre de transmission.*

Preuve. Soit $k = i\kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$. Le Lemme 10.2.11 montre que, pour $|\kappa|$ suffisamment grand, on a l'estimation, pour tout $(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \in \mathbf{X}_0$,

$$\left| a_k^{\mathbf{T}}((\mathbf{u}, \mathbf{w}), (\mathbf{u}, \mathbf{w})) \right| \geq C_1(\|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{w}\|_{\Omega}^2) + C_2 \kappa^2(\|\mathbf{u}\|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{w}\|_{\Omega}^2), \quad (10.32)$$

où les constantes $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ sont indépendantes de κ .

Considérons maintenant $k = i\kappa e^{i\theta}$ avec $\theta \in [-\pi/2; \pi/2]$. On vérifie que

$$\left| a_k^{\mathbf{T}}((\mathbf{u}, \mathbf{w}), (\mathbf{u}, \mathbf{w})) - a_{i\kappa}^{\mathbf{T}}((\mathbf{u}, \mathbf{w}), (\mathbf{u}, \mathbf{w})) \right| \leq C_3 \kappa^2 \left| 1 - e^{2i\theta} \right| (\|\mathbf{u}\|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{w}\|_{\Omega}^2), \quad (10.33)$$

avec $C_3 > 0$ indépendante de κ . En combinant (10.32) et (10.33), on trouve

$$\begin{aligned} \left| a_k^{\mathbf{T}}((\mathbf{u}, \mathbf{w}), (\mathbf{u}, \mathbf{w})) \right| &\geq \left| a_{i\kappa}^{\mathbf{T}}((\mathbf{u}, \mathbf{w}), (\mathbf{u}, \mathbf{w})) \right| - C_3 \kappa^2 \left| 1 - e^{2i\theta} \right| (\|\mathbf{u}\|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{w}\|_{\Omega}^2) \\ &\geq C_1(\|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{w}\|_{\Omega}^2) + (C_2 - C_3 \left| 1 - e^{2i\theta} \right|) \kappa^2 (\|\mathbf{u}\|_{\Omega}^2 + \|\mathbf{w}\|_{\Omega}^2). \end{aligned}$$

En prenant θ assez petit pour avoir, par exemple, $C_3 \left| 1 - e^{2i\theta} \right| \leq C_2/2$, on déduit le résultat. ■

10.2.9 Une estimation pour la première valeur propre de transmission

Comme pour le problème scalaire, nous pouvons fournir une estimation pour la première valeur propre de transmission. Précisons que ce genre de résultats peut servir à obtenir des informations concernant les caractéristiques physiques de l'inclusion lorsqu'on dispose des valeurs propres de transmission.

Théorème 10.2.16 *Supposons $A_+ < 1$. Supposons également l'opérateur \mathcal{B} associé au problème (10.15) injectif (il suffit pour cela de faire l'hypothèse $N_+ < 1$ ou $1 < N_-$). Alors si $k \in \mathbb{C}^*$ vérifie l'estimation $|k|^2 < (A_-(1 - \sqrt{A_+}))/ (C_P \max(N_+, 1)(1 + \sqrt{N_+}))$, avec C_P définie en (10.26), alors k n'est pas une valeur propre de transmission.*

Preuve. En reprenant la preuve du Lemme 10.2.11 avec $\chi = 1$, on peut écrire, pour tout $(\mathbf{u}, \mathbf{w}) \in \mathbf{X}_0$,

$$\begin{aligned} |a_k^{\mathbf{T}}((\mathbf{u}, \mathbf{w}), (\mathbf{u}, \mathbf{w}))| &= |(A \operatorname{rot} \mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{u})_{\Omega} + (\operatorname{rot} \mathbf{w}, \operatorname{rot} \mathbf{w})_{\Omega} - 2(A \operatorname{rot} \mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{w})_{\Omega} \\ &\quad - k^2 ((N \mathbf{u}, \mathbf{u})_{\Omega} + (\mathbf{w}, \mathbf{w})_{\Omega} - 2(N \mathbf{u}, \mathbf{w})_{\Omega})| \\ &\geq (A \operatorname{rot} \mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{u})_{\Omega} + (\operatorname{rot} \mathbf{w}, \operatorname{rot} \mathbf{w})_{\Omega} - 2|(A \operatorname{rot} \mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{w})_{\Omega}| \\ &\quad - |k|^2 ((N \mathbf{u}, \mathbf{u})_{\Omega} + (\mathbf{w}, \mathbf{w})_{\Omega} + 2|(N \mathbf{u}, \mathbf{w})_{\Omega}|) \\ &\geq (1 - \sqrt{A_+})((A \operatorname{rot} \mathbf{u}, \operatorname{rot} \mathbf{u})_{\Omega} + (\operatorname{rot} \mathbf{w}, \operatorname{rot} \mathbf{w})_{\Omega}) \\ &\quad - |k|^2 (1 + \sqrt{N_+})((N \mathbf{u}, \mathbf{u})_{\Omega} + (\mathbf{w}, \mathbf{w})_{\Omega}). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour $k \in \mathbb{C}$ tel que $|k|^2 < (A_-(1 - \sqrt{A_+})) / (C_P \max(N_+, 1)(1 + \sqrt{N_+}))$, la forme $a_k^{\mathbf{T}}$ est coercive. ■

10.2.10 Cas $A_* \operatorname{Id} \leq A$, avec $1 < A_*$, dans un voisinage de la frontière

Dans ce paragraphe, nous supposons qu'il existe un voisinage \mathcal{V} de $\partial\Omega$ tel que $A_* \operatorname{Id} \leq A$ p.p. dans \mathcal{V} , avec $1 < A_*$. De nouveau, $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}, [0; 1])$ désigne une fonction de troncature à support dans $\mathcal{V} \cap \overline{\Omega}$ égale à 1 dans un voisinage de $\partial\Omega$. Définissons l'opérateur $\mathbf{T} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ tel que $\mathbf{T}(\mathbf{u}, \mathbf{w}) = (\mathbf{u}, -\mathbf{w} + 2\chi\mathbf{u})$. C'est un isomorphisme car $\mathbf{T} \circ \mathbf{T} = \operatorname{Id}$. Comme dans la section précédente, on prouve successivement les résultats suivants.

Théorème 10.2.17 *Supposons $\operatorname{Id} < A_* \operatorname{Id} \leq A$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$. Supposons aussi $N \leq N_* \operatorname{Id} < \operatorname{Id}$ ou $\operatorname{Id} < N_* \operatorname{Id} \leq N$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$. Alors pour tout $k \in \mathbb{C}$, l'opérateur $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}}$ vérifie l'égalité $\mathcal{A}_k^{\mathbf{T}} = \mathcal{I} + \mathcal{K}_k$ où \mathcal{I} est un isomorphisme de \mathbf{X}_0 indépendant de k , et \mathcal{K}_k est un opérateur compact de \mathbf{X}_0 .*

Théorème 10.2.18 *Supposons $\operatorname{Id} < A_* \operatorname{Id} \leq A$ et $\operatorname{Id} < N_* \operatorname{Id} \leq N$ p.p. sur $\Omega \cap \mathcal{V}$. Alors l'ensemble des valeurs propres de transmission est discret et dénombrable dans \mathbb{C} . De plus, il existe deux constantes positives ρ et δ telles que si $k \in \mathbb{C}$ vérifie $|k| > \rho$ et $|\Re k| < \delta |\Im k|$, alors k n'est pas une valeur propre de transmission.*

Théorème 10.2.19 *Supposons $1 < A_-$. Supposons également l'opérateur \mathcal{B} associé au problème (10.15) injectif (il suffit pour cela de faire l'hypothèse $N_+ < 1$ ou $1 < N_-$). De plus si $k \in \mathbb{C}^*$ vérifie l'estimation $|k|^2 < (1 - 1/\sqrt{A_-}) / (C_P \max(N_+, 1)(1 + 1/\sqrt{N_-}))$, avec C_P définie en (10.26), alors k n'est pas une valeur propre de transmission.*

10.3 Quelques questions ouvertes pour le problème de transmission intérieur

Tout au long de ce chapitre, nous avons dû supposer $A - \operatorname{Id}$ et $N - \operatorname{Id}$ positifs ou négatifs dans un voisinage de la frontière pour utiliser la technique de T-coercivité. Naturellement, on peut se poser la question suivante : qu'advient-il lorsque $A - \operatorname{Id}$ et/ou $N - \operatorname{Id}$ changent de signe ou s'annulent dans un voisinage de la frontière ? Pour répondre à cette question, nous allons nous servir de l'analogie entre le problème de transmission intérieur (\mathcal{P}_{TI}) et le problème de transmission matériau positif/matériau négatif (\mathcal{P}_{TPN}). Rappelons que la frontière du domaine $\partial\Omega$ pour (\mathcal{P}_{TI}) joue le rôle d'interface Σ pour (\mathcal{P}_{TPN}).

Tout d'abord, la situation dans laquelle $A - \operatorname{Id}$ s'annule dans un voisinage de $\partial\Omega$ pour (\mathcal{P}_{TI}) correspond à un cas de contraste égal à -1 au voisinage de Σ pour (\mathcal{P}_{TPN}). Dans cette configuration, nous savons d'après les résultats du Chapitre 1 que H^1 ne constitue pas un « bon » cadre fonctionnel pour poser les problèmes, les opérateurs associés n'étant pas de type Fredholm en

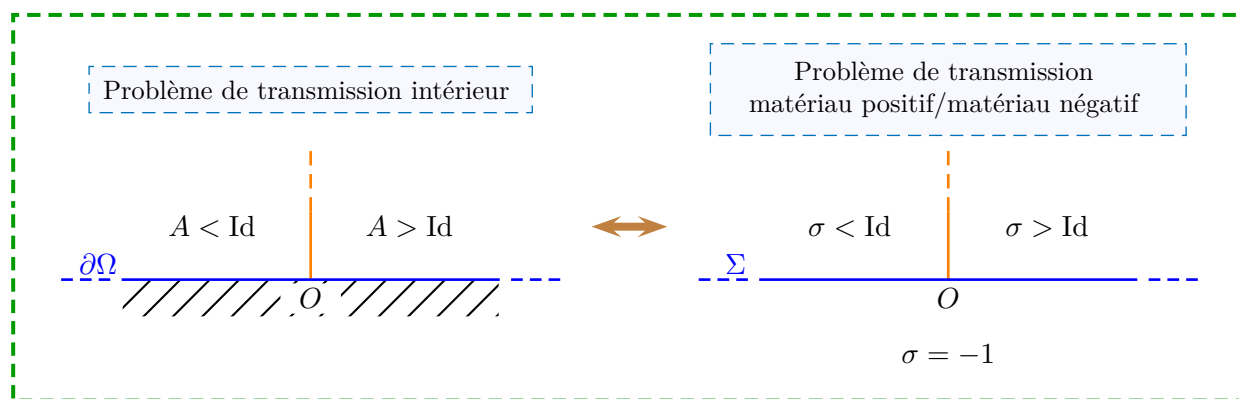


FIGURE 10.2 – Le problème de transmission intérieur présente de fortes analogies avec le problème de transmission entre un matériau positif et un matériau négatif.

raison de l'existence de singularités localisées sur la frontière/interface. Dans le prochain chapitre, nous verrons comment l'on peut définir un nouveau cadre fonctionnel pour retrouver le caractère Fredholm pour le problème de transmission intérieur lorsque A est identiquement égale à l'identité. Cette démarche, connue depuis fort longtemps pour $(\mathcal{P}_{\text{TI}})$, devrait permettre d'étudier $(\mathcal{P}_{\text{TPN}})$ dans le cas d'un contraste égal à -1 . Cependant, l'adaptation n'est pas si directe. Mais laissons ce cas de côté et supposons dans la suite de la discussion $A \neq \text{Id}$. La détermination d'un cadre fonctionnel pour étudier le problème de transmission intérieur scalaire lorsque $A - \text{Id}$ s'annule sur une partie non vide de la frontière mais pas sur tout $\partial\Omega$ constitue pour le moment un problème ouvert.

Intéressons-nous maintenant à la configuration où $A - \text{Id}$ et/ou $N - \text{Id}$ s'annulent ou « passent par zéro » en un point de la frontière (voir un exemple sur la Figure 10.2). Dans [106], en utilisant le critère de Shapiro-Lopatinskii, les auteurs fournissent une condition nécessaire et suffisante pour garantir l'ellipticité du problème de transmission scalaire associé à (10.2) dans le cas où A et N sont régulières. La situation où $A - \text{Id}$ change de signe au voisinage de $\partial\Omega$ pour $(\mathcal{P}_{\text{TI}})$ est analogue au cas d'un contraste « passant » par -1 pour $(\mathcal{P}_{\text{TPN}})$. Il peut alors apparaître les singularités propagatives rencontrées dans les Chapitres 5 et 6. Pour obtenir un problème bien posé au sens de Fredholm, nous savons qu'il est nécessaire de modifier le cadre fonctionnel en ajoutant à l'espace une des singularités propagatives. Cette fois-ci, on peut imaginer utiliser les résultats obtenus lors de l'étude de $(\mathcal{P}_{\text{TPN}})$ pour traiter $(\mathcal{P}_{\text{TI}})$. Malheureusement, la question de l'injectivité pour une fréquence, essentielle pour appliquer le théorème de Fredholm analytique, semble difficile à résoudre dans le cas du problème de transmission intérieur.

Pour le problème de transmission intérieur pour les équations de Maxwell, les questions ouvertes semblent encore plus nombreuses. En effet, le coefficient N importe également dans le caractère Fredholm car il détermine si oui ou non la perturbation de l'opérateur principal est compacte. La détermination d'un cadre fonctionnel adapté à l'étude du problème de transmission intérieur vectoriel lorsque $A - \text{Id}$ et/ou $N - \text{Id}$ changent de signe ou s'annulent dans un voisinage de la frontière est loin d'être claire. Néanmoins, l'analogie entre $(\mathcal{P}_{\text{TPN}})$ et $(\mathcal{P}_{\text{TI}})$ demeure vraie pour les équations de Maxwell.

Terminons par quelques mots concernant la question de l'existence de valeurs propres de transmission réelles, question qui revêt une grande importance pour les applications. Le constat est aussi simple qu'accablant : nous ne sommes pas en mesure d'y répondre par la méthode de la T-coercivité. Cette technique permet de retrouver une certaine positivité mais elle présente l'inconvénient majeur de conduire à une perte de symétrie de la forme sesquilinéaire. Ceci empêche d'utiliser les jolis

arguments basés sur le principe du *min-max* (cf. [60, 37]) pour démontrer l'existence de valeurs propres de transmission. À l'heure actuelle, il n'existe pas de tel résultat d'existence lorsque $A - \text{Id}$ et/ou $N - \text{Id}$ changent de signe ou s'annulent dans un voisinage de la frontière.