

## Variations autour du mécanisme proposé

Le mécanisme étudié dans la partie 5.2.2 présentait une jambe passive permettant d'accomplir 2 DDL en rotation, et un parallélogramme permettant de déporter le centre de rotation [32] (Figure 4.36).

Mais cette architecture peut être mise en oeuvre de plusieurs manières. Selon le choix des actionneurs, pivots ou prismatiques, les propriétés cinématiques (comme les singularités, le nombre de solutions géométriques inverses ou les limites articulaires) changent beaucoup.

Le travail qui suit se limite aux actionneurs prismatiques afin de rendre l'analyse comparative plus simple. Mais, même en utilisant un actionneur prismatique, il faut ensuite choisir l'ordre des articulations, le type d'articulation et ses positionnements. Par exemple, la Figure 5.1 présente trois variations de l'architecture, selon un ordre et un placement différent des articulations, utilisant un actionneur prismatique.

La variation  $2\text{UPS-U}$  présente un actionneur prismatique liant le cardan et la rotule d'une jambe. La variation  $2\text{PUS-U}$  a une orientation fixe de l'articulation prismatique. L'avantage de cette variation est la possibilité d'utiliser des moteurs plus gros ou plus lourds. En effet, dans ce cas, nous n'avons pas à s'inquiéter de l'inertie de l'articulation prismatique ainsi qu'aux collisions entre deux actionneurs. Cependant, la variation  $2\text{UPS-U}$  présente de meilleures performances cinématiques que la variation  $2\text{PUS-U}$ , et offre un plus grand espace de travail en satisfaisant à toutes les contraintes nécessaires.

Une analyse comparative de ces différentes variations d'architecture est présentée dans les parties suivantes.

### 5.2.3.1 Modèle géométrique inverse

Le paramétrage général de la variation  $2\text{UPS-U}$  peut être réalisé à l'aide de 13 paramètres, comme présenté sur la Figure 5.14a ; la variation  $2\text{PUS-U}$  requiert également 13 paramètres, considérant l'orientation de l'articulation prismatique et assumant la coordonnée  $z$  de la base de l'actionneur comme égale à zéro. En utilisant les angles d'Euler  $(\alpha, \beta)$  pour représenter l'espace articulaire (détaillé en section 5.2.3.5.a), l'orientation de

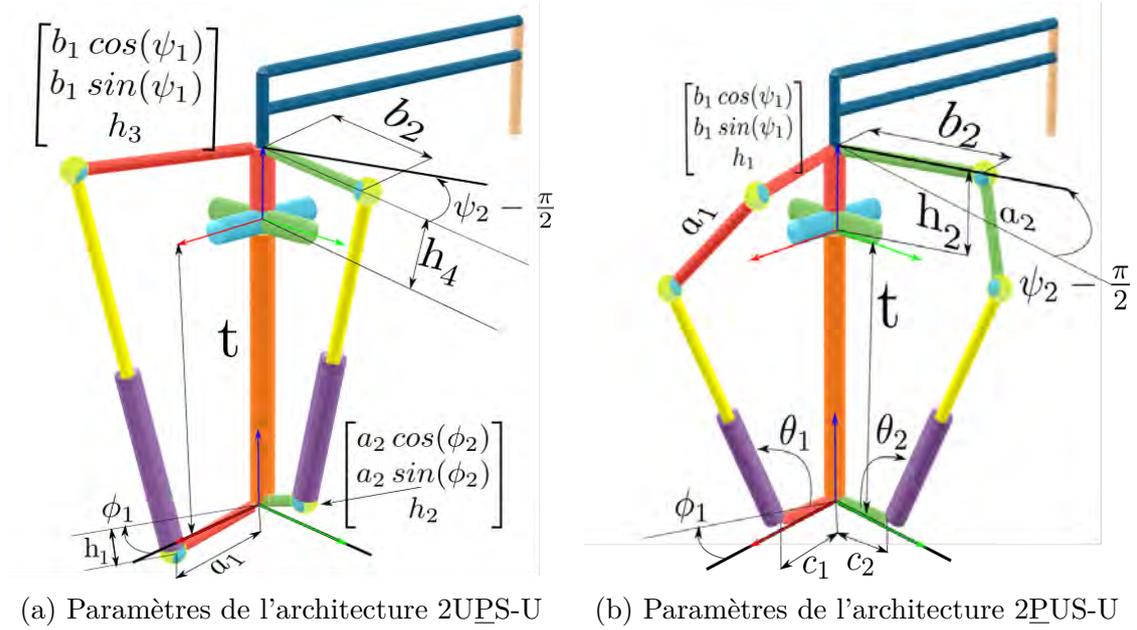


FIGURE 5.14 – Le paramétrage général des variations 2UPS-U et 2PUS-U.

l'effecteur terminal peut être donnée comme :

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\beta = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) & \cos(\alpha) & -\cos(\beta) \sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \sin(\beta) & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

### 5.2.3.1.a Modèle géométrique inverse : variation 2UPS-U

Si l'on considère l'origine du mécanisme au point d'intersection des trois jambes, comme représenté sur la Figure 5.14a, alors les coordonnées des centres de deux cardans par rapport à l'origine sont données par :

$$\mathbf{u}_{11} = \begin{bmatrix} a_1 \cos(\phi_1) \\ a_1 \sin(\phi_1) \\ h_1 \end{bmatrix}, \mathbf{u}_{21} = \begin{bmatrix} a_2 \cos(\phi_2) \\ a_2 \sin(\phi_2) \\ h_2 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

Le centre du cardan de la troisième jambe passive,  $\mathbf{u}_3$ , est donnée par  $[0, 0, t]^T$  et les centres des rotules de la plate-forme mobile sont représentées dans le repère mobile  $\mathbf{u}_3$

comme :

$$\mathbf{s}_{12} = \begin{bmatrix} b_1 \cos(\psi_1) \\ b_1 \sin(\psi_1) \\ h_3 \end{bmatrix}, \mathbf{s}_{22} = \begin{bmatrix} b_2 \cos(\psi_2) \\ b_2 \sin(\psi_2) \\ h_4 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

$a_1$  et  $a_2$  sont les longueurs des liaisons entre l'origine et le centre des cardans, et  $b_1$ ,  $b_2$  sont les longueurs des liaisons entre l'effecteur et les rotules, comme présenté sur la Figure 5.14a.

$\phi_{1,2}$  sont les angles qui déterminent l'orientation des articulations du cardan par rapport à l'axe x.  $\psi_{1,2}$  sont les angles déterminant le positionnement des rotules par rapport à l'axe x du repère de l'effecteur.

La matrice des transformations correspondant au repère de l'effecteur pour une position  $(\alpha, \beta)$  est :

$${}^0\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{t} = [0, 0, t]^T \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{s}_{12} &= {}^0\mathbf{T}_e \mathbf{s}_{12} \\ {}^0\mathbf{s}_{22} &= {}^0\mathbf{T}_e \mathbf{s}_{22} \end{aligned} \quad (5.15)$$

Comme toutes les articulations sont situées dans le plan d'origine, la distance entre les centres du cardans et les centres des rotules donne la longueur de l'actionneur requis :

$$\rho_1 = \left\| {}^0\mathbf{s}_{12} - \mathbf{u}_{11} \right\| = f(\alpha, \beta) \quad (5.16)$$

$$\rho_2 = \left\| {}^0\mathbf{s}_{22} - \mathbf{u}_{21} \right\| = g(\alpha, \beta) \quad (5.17)$$

en différenciant (5.16) et (5.17) par rapport au temps nous donne :

$$\begin{bmatrix} \dot{\rho}_1 \\ \dot{\rho}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \alpha} & \frac{\partial f}{\partial \beta} \\ \frac{\partial g}{\partial \alpha} & \frac{\partial g}{\partial \beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Nous définissons ainsi la matrice jacobienne parallèle  $\mathbf{A}$  définie par l'équation 5.7.

L'orientation des articulations passives est importante à considérer, car les limites articulaires sont une des contraintes les plus importantes lors de l'optimisation. Nous choisissons la représentation "azimuth-tilt-torsion" pour calculer les valeurs d'articulation passive [104], comme discuté en section 5.2.3.4. Les articulations sphériques sont alignées

pour que la position initiale de toutes les articulations soient en position par défaut sans rotation, comme représenté sur la Figure 5.15. Le repère initial pour le cardan peut être

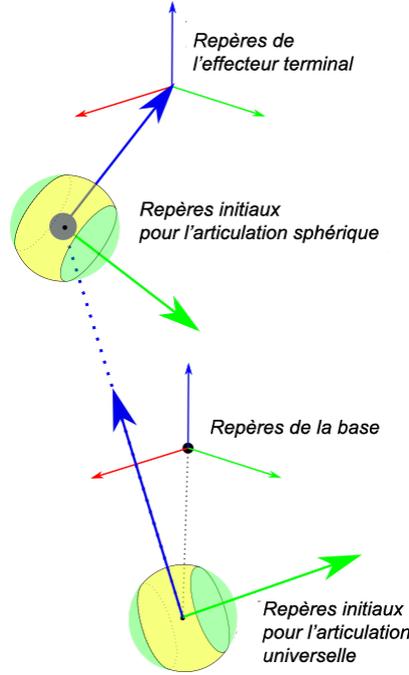


FIGURE 5.15 – Les repères initiaux des articulations d'une des jambes.

calculé ainsi :

$$\mathbf{z}_{u11} = \frac{{}^0\mathbf{s}_{12} - \mathbf{u}_{11}}{\|{}^0\mathbf{s}_{12} - \mathbf{u}_{11}\|}, \mathbf{y}_{u11} = \frac{-\mathbf{u}_{11} \times \mathbf{z}_{u11}}{\|\mathbf{u}_{11}\|}, \mathbf{x}_{u11} = \mathbf{y}_{u11} \times \mathbf{z}_{u11} \quad (5.19)$$

Le repère initial pour la rotule peut être calculé par :

$$\mathbf{z}_{s12} = \frac{-\mathbf{s}_{12}}{\|-\mathbf{s}_{12}\|}, \mathbf{y}_{s12} = \frac{-\mathbf{t} \times \mathbf{z}_{s12}}{\|\mathbf{t}\|}, \mathbf{x}_{s12} = \mathbf{y}_{s12} \times \mathbf{z}_{s12} \quad (5.20)$$

Les angles d'azimut et l'inclinaison du cardan sont utilisés pour représenter un axe équivalent à l'axe z du repère actuel de cette articulation.  $\theta_{au}$  est l'azimut alors que  $\theta_{tu}$  est l'angle d'inclinaison du cardan.

$$\begin{aligned} \omega &= {}^{u11}\mathbf{z}_{initial} \times {}^{u11}\mathbf{z}_{current} \\ \theta_{au} &= \text{atan2}(\omega(2), \omega(1)) \\ \theta_{tu} &= \text{acos}({}^{u11}\mathbf{z}_{current} \cdot {}^{u11}\mathbf{z}_{initial}) \end{aligned} \quad (5.21)$$

La matrice de rotation pour le cardan peut être donnée par la formule d'Euler-Rodrigues.  $\tilde{\omega}$  est la notation matricielle antisymétrique du vecteur  $\omega$

$$\mathbf{R}_{tu} = \mathbf{e}^{\tilde{\omega}\theta_{tu}} = \mathbf{I} + \tilde{\omega} \sin(\theta_{tu}) + \tilde{\omega}^2 (1 - \cos(\theta_{tu})) \quad (5.22)$$

$$\mathbf{R}_{ts} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{tu}) + \omega_x^2 (1 - \cos(\theta_{tu})) & \omega_x \omega_y (1 - \cos(\theta_{tu})) - \omega_z \sin(\theta_{tu}) & \omega_y \sin(\theta_{tu}) + \omega_x \omega_z (1 - \cos(\theta_{tu})) \\ \omega_z \sin(\theta_{tu}) + \omega_x \omega_y (1 - \cos(\theta_{tu})) & \cos(\theta_{tu}) + \omega_y^2 (1 - \cos(\theta_{tu})) & \omega_z \omega_y (1 - \cos(\theta_{tu})) - \omega_x \sin(\theta_{tu}) \\ \omega_x \omega_z (1 - \cos(\theta_{tu})) - \omega_y \sin(\theta_{tu}) & \omega_x \sin(\theta_{tu}) + \omega_y \omega_z (1 - \cos(\theta_{tu})) & \cos(\theta_{tu}) + \omega_z^2 (1 - \cos(\theta_{tu})) \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

La même méthode est utilisée pour calculer les angles d'azimut et d'inclinaison de la rotule. L'angle de torsion est calculé en utilisant la matrice  $\mathbf{R}_{ts}$  (voir équation 5.23) :

$${}^{s12}\mathbf{y}_{current} = \mathbf{R}_{ts} \mathbf{R}(z, \theta_{torsion}) {}^{s12}\mathbf{y}_{initial}$$

### 5.2.3.1.b Modèle géométrique inverse : variation 2PUS-U

La variation 2PUS-U peut être définie avec 13 paramètres, comme représenté sur la Figure 5.14b. On considère l'origine comme étant au point de jonction des trois jambes. La base des actionneurs dans le plan de l'origine est donnée par :

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} c_1 \cos(\phi_1) \\ c_1 \sin(\phi_1) \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} c_2 \cos(\phi_2) \\ c_2 \sin(\phi_2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

La ligne des actionneurs,  $\mathbf{l}_1$  et  $\mathbf{l}_2$ , le long de laquelle l'articulation prismatique agira, peut être donnée par :

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_1 &= \mathbf{c}_1 + \lambda_1 \mathbf{v}_1 \\ \text{avec } \mathbf{v}_1 &= [(c_1 - \cos(\theta_1)) \cos(\phi_1), (c_1 - \cos(\theta_1)) \sin(\phi_1), \sin(\theta_1)]^T \\ &\text{et } \lambda_1 \text{ est constant} \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{l}_2 &= \mathbf{c}_2 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 \\ \text{avec } \mathbf{v}_2 &= [(c_2 - \cos(\theta_2)) \cos(\phi_2), (c_2 - \cos(\theta_2)) \sin(\phi_2), \sin(\theta_2)]^T \\ &\text{et } \lambda_2 \text{ est constant.} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Les coordonnées du centre de la rotule dans le plan de l'effecteur terminal sont représen-

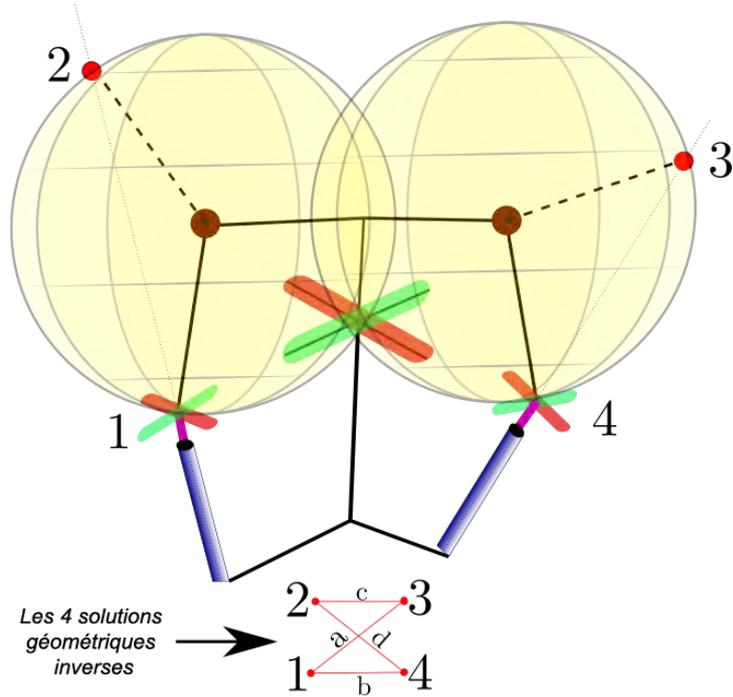


FIGURE 5.16 – Les 4 points d'intersections des solutions géométriques inverses possibles.

tées par :

$$\mathbf{s}_{12} = \begin{bmatrix} b_1 \cos(\psi_1) \\ b_1 \sin(\psi_1) \\ h_1 \end{bmatrix}, \mathbf{s}_{22} = \begin{bmatrix} b_2 \cos(\psi_2) \\ b_2 \sin(\psi_2) \\ h_2 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

Le centre du cardan se trouve à l'un des points d'intersection entre la sphère, centrée sur  $\mathbf{s}_{12}$  et  $\mathbf{s}_{22}$ , et la ligne d'action des actionneurs,  $\mathbf{l}_1$  et  $\mathbf{l}_2$ . Nous avons 4 solutions géométriques inverses, représentées sur la Figure 5.16, et nous vérifions toujours la faisabilité des solutions 1-4. Une fois que nous avons la position du centre du cardan dans le plan de l'origine, nous pouvons calculer la longueur des actionneurs,  $\rho_1$  et  $\rho_2$  :

$$\rho_1 = \|\mathbf{u}_{11} - \mathbf{c}_1\| = f(\alpha, \beta) \quad (5.28)$$

$$\rho_2 = \|\mathbf{u}_{21} - \mathbf{c}_2\| = g(\alpha, \beta) \quad (5.29)$$

La matrice jacobienne est dérivée en différenciant (5.28) et (5.29) par rapport au temps (Voir 5.18).

### 5.2.3.2 Analyse des singularités

Les courbes de singularités ont été analysées pour les trois variations représentées sur la Figure 5.1. La condition de singularité dans le mécanisme proposé est calculée à partir de la condition suivante :

$$\det(\mathbf{A}) = \mathbf{0} \quad (5.30)$$

Le mécanisme sphérique aura toujours 4 solutions au modèle géométrique inverse et n'aura jamais un degré de liberté instantané supérieur à 2. La jambe passive évite les cas de singularité d'actionnement dans la variation 2UPS-U, avec les principes de base en modélisation. Mais la variation 2PUS-U est sensible à la singularité d'actionnement si elle n'est pas correctement modélisée, les paramètres devant être choisis avec soin. Une de ces conditions est représentée sur la Figure 5.17, où le contrôle des actionneurs sur l'effecteur est perdu. Dans ce cas, l'effecteur aurait 2 DDL, la rotation autour des axes étant dans le plan des vis en rouge sur la Figure 5.17.

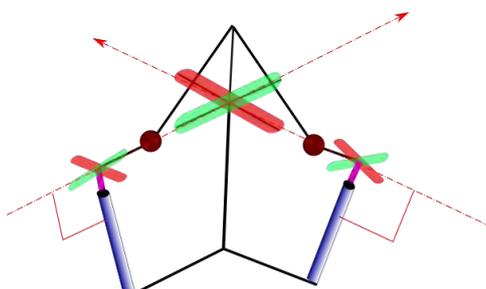


FIGURE 5.17 – Singularité d'actionnement dans la variation 2PUS-U.

Les courbes de singularités divisent l'espace de travail en aspects qui sont définis comme les domaines exempts de toute singularité dans l'espace opérationnel. A l'intérieur de ces domaines, il est donc possible d'effectuer des trajectoires continues. Un domaine de l'espace de travail sera dit T - parcourable si toute trajectoire continue de ce domaine est réalisable [105].

La Figure 5.18 montre un cas pour la variation 2UPS-U où les courbes de singularités divisent l'espace de travail en 4 aspects. Le problème d'optimisation est lié au choix des paramètres, tels que les courbes de singularités conduisent à un aspect suffisamment grand.

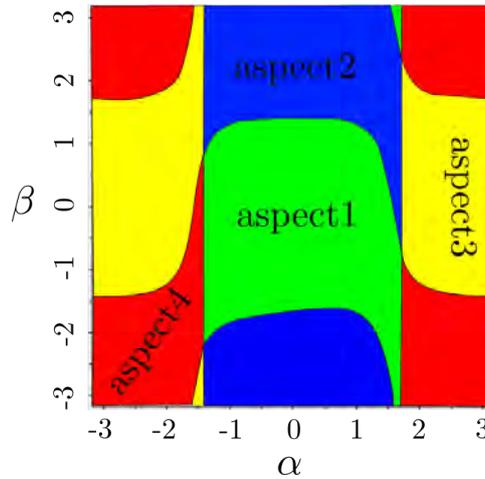


FIGURE 5.18 – Espace de travail divisé en 4 aspects. Nous ne pouvons utiliser qu'un des aspects pour un espace de travail T - parcourable.

### 5.2.3.3 Choix des articulations

Comme cela été vu dans les sections précédentes, les articulations pivots ou prismatiques peuvent être utilisées comme actionneurs. En dehors des articulations actives, les articulations passives de ce mécanisme peuvent être définies selon plusieurs façons également. Ainsi, nous avons un cardan et une rotule dans une jambe. De façon intéressante, deux rotules en série Spherical-Spherical (SS) peuvent remplacer une jambe avec en série un cardan et une rotule Universal-Spherical (US). Cela ajoute de la redondance dans cette jambe sans affecter les DDL du mécanisme, comme cela a déjà été étudié [106]. De la même manière, le cardan peut être remplacée par l'association de deux pivots en série Revolute-Revolute (RR), ce qui donnerait de meilleures performances cinématiques [107].

Il en résulte plusieurs défis, en particulier lors du calcul des limites articulaires passives. La question est alors : “comment définir des limites des articulations passives s'il n'y a pas d'ordre défini dans les rotations ?”

Par exemple, si nous utilisons 3 pivots en série pour faire une liaison équivalente à une rotule, alors nous connaissons l'ordre exact de rotation ainsi que les limites de chaque rotation. Cette hypothèse de l'ordre est invalide avec une rotule, sans que cela soit problématique (nous avons dans ce cas une limite constante dans toutes les directions). Mais il n'est pas aisé de définir des limites avec des rotules. Ces différentes dispositions des articulations sphériques sont illustrées sur la Figure 5.19 : à gauche, les limites articulaires dépendent de l'axe autour duquel l'articulation tourne. Autrement dit, si nous repré-

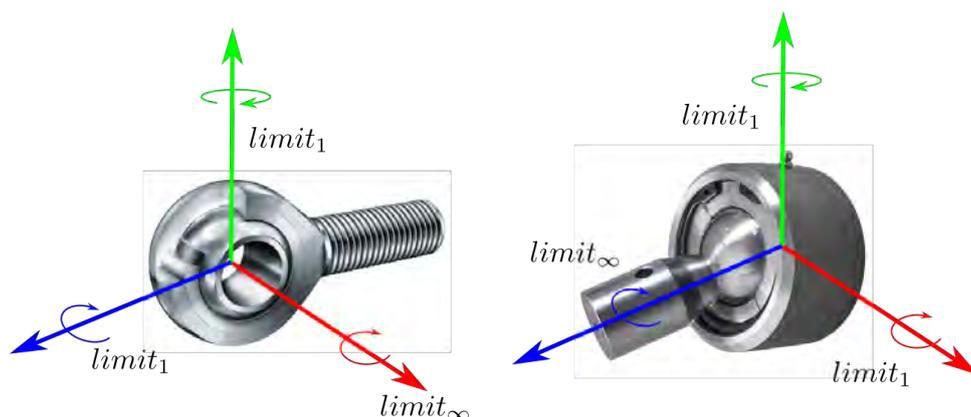


FIGURE 5.19 – Exemples de rotules

sentons l'orientation de l'articulation avec tilt-torsion [108], alors les limites articulaires passives sont exprimées en fonction de l'angle d'azimut. De ce fait, l'orientation de la rotule est un paramètre important à considérer ; mais il est également primordial de définir ce que nous entendons par limites articulaires passives.

#### 5.2.3.4 Limites articulaires d'une rotule

Le groupe spécial orthogonal de dimension 3 ( $SO(3)$ ) est un espace non-euclidien définissant toutes les orientations dans un espace tri-dimensionnel, et est un sous-espace de groupe spécial Euclidien de dimension 3 ( $SE(3)$ ). Dans l'espace translationnel ( $SE(3) \setminus SO(3)$ ), nous avons établi une définition unique de la distance (plus courte distance entre deux points), mais il est plus difficile de le définir de manière unique dans le  $SO(3)$ . La distance la plus courte entre deux orientations dépend uniquement de la représentation choisie. Ainsi, la distance la plus courte entre deux orientations différera selon la convention utilisée  $XZX$  ou  $YZY$ . Ce ne sont pas seulement les angles d'Euler mais aussi la représentation tilt-torsion et les quaternions qui ont leur propre définition de la distance la plus courte et du trajet parcouru pour passer d'une orientation à une autre. Ainsi, si le trajet est dépendant de la représentation, les limites ne sont-elles pas aussi dépendantes de la représentation ?

Par exemple, sur la Figure 5.19, nous pouvons représenter une orientation particulière  $\{25^\circ, 32^\circ, 45^\circ\}$  dans la convention  $XZX$ . Cette même orientation aura des valeurs différentes dans la convention  $XYX$ , ne permettant pas de valider les limites sur un axe individuel. Dans la représentation tilt-torsion, cela peut être contré en cas de torsion

nulle. En effet, sachant que l'azimut et l'angle d'inclinaison sont uniques pour une orientation, nous pouvons toujours implémenter les limites articulaires en utilisant une rotule à la place d'un cardan. Cela se complexifie lorsque l'angle de torsion est différent de zéro. Le chemin supposé parcouru dans le cas de torsion égale à zéro est représenté sur la Figure 5.20a. On peut voir que la limite dépend de l'orientation de l'azimut, et qu'une partie des directions ne présente pas de limites et peut tourner continuellement.

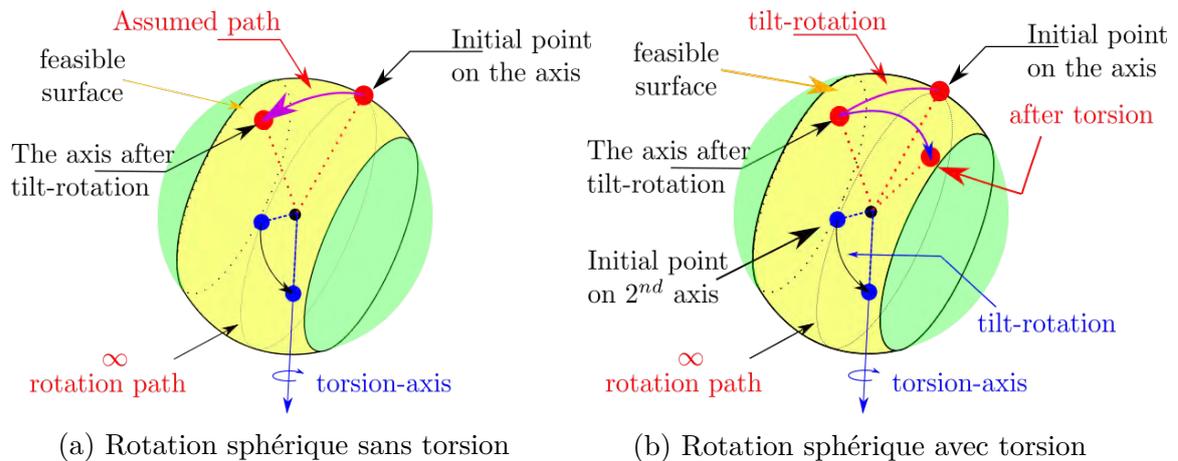


FIGURE 5.20 – Les différents trajets de déplacement d'un axe en représentation d'inclinaison-torsion.

Comme le montre la Figure 5.20b, nous avons atteint le trajet final en combinant deux trajets différents, représentant la rotation-inclinaison et la rotation-torsion. Il faut noter que cela se produit uniquement à cause de la représentation dans la convention d'inclinaison-torsion. Nous aurions 3 trajets individuels si nous avions utilisé les angles d'Euler. Nous pouvons alors nous demander si nous pouvons utiliser ce trajet, qui passe d'un point initial à une orientation finale, pour implémenter les limites articulaires.

Une solution peut être d'utiliser la représentation tilt-torsion dans le cas de torsion égale à zéro, ayant alors un trajet unique connectant les deux orientations. En cas de torsion, nous pouvons vérifier les limites pour l'orientation finale ainsi que les points intermédiaires, comme le montre la Figure 5.20a. Dans ce cas, nous aurons à considérer deux axes lorsque nous tournerons autour d'un axe dans un plan, comme par exemple le plan  $\mathbf{xy}$ , pour l'angle d'inclinaison puis la rotation autour d'un axe perpendiculaire au plan, l'axe  $\mathbf{z}$ , pour l'angle de torsion. Ainsi, si le trajet respecte les limites articulaires, nous savons qu'il existe au moins une façon d'atteindre l'orientation finale; mais si le trajet

ne respecte pas les limites passives, nous ne pouvons alors pas l'affirmer avec certitude. Ainsi, les limites par représentation tilt-torsion impliquent seulement de connaître les limites articulaires passives.

### 5.2.3.5 Représentation de l'espace de travail

Dans cette partie, la discussion de la partie précédente est poursuivie, mais pour une application différente. Cette représentation de l'espace de travail est cruciale en considérant les variables d'optimisation et pour visualiser l'espace de travail réalisable. Les différentes possibilités de représentation de l'espace de travail, avec leurs avantages et inconvénients, sont discutées dans ce chapitre.

#### 5.2.3.5.a Angles d'Euler

Comme le mécanisme proposé possède 2DDL, les angles d'Euler sont utilisables, en utilisant seulement les deux premières rotations. L'espace de travail est représenté sous deux angles,  $\alpha$  et  $\beta$ , qui représentent une rotation ordonnée autour de l'axe x et y respectivement du cardan. La valeur de  $\alpha$  peut être directement liée au mouvement de roulis du mécanisme, et  $\beta$  représente le mouvement d'inclinaison. L'espace de travail réalisable peut être représenté par un rectangle avec des limites indépendantes sur  $\alpha$  et  $\beta$ .

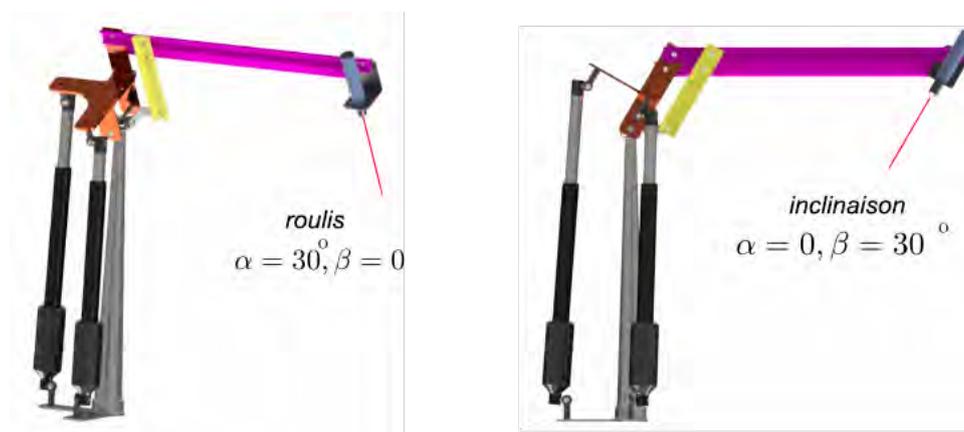


FIGURE 5.21 – Différentes positions du mécanisme dans la représentation d'Euler

Dans la Figure 5.21, différentes positions de l'effecteur sont présentées pour souligner les angles pré-cités dans la représentation d'Euler. Dans cette représentation, un point dans l'espace opérationnel peut être représenté comme la combinaison de la rotation ordonnée selon  $\alpha$  et  $\beta$  respectivement.

$$\mathbf{R}(\alpha, \beta) = \mathbf{R}_\alpha \mathbf{R}_\beta = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ \sin(\alpha) \sin(\beta) & \cos(\alpha) & -\cos(\beta) \sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \sin(\beta) & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \cos(\beta) \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

### 5.2.3.5.b Angles d'azimut et d'inclinaison

Nous pouvons utiliser la représentation d'inclinaison-torsion et traiter l'espace de travail comme un cas zéro torsion [108]. L'avantage de cette représentation est une visualisation plus facile de l'espace de travail réalisable, permettant une analyse plus aisée de l'espace souhaité, comme sur la Figure 3.12. Mais un inconvénient majeur lors de l'analyse du mécanisme dans cette représentation est la rencontre d'une singularité dans la position par défaut ( $\alpha = 0, \beta = 0$ ) du mécanisme. La raison peut être que lorsque l'angle d'inclinaison est égal à zéro, l'azimut a une infinité de solutions pour la même représentation. L'azimut dans la représentation d'inclinaison-torsion donne la direction dans laquelle l'endoscope va s'incliner, et l'angle d'inclinaison quantifie l'importance de cette inclinaison. Dans cette représentation, un point dans l'espace opérationnel peut être représenté comme la rotation d'un vecteur autour de l'axe  $\omega$  par  $\theta_t$ , comme indiqué dans 5.32.

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{e}^{\tilde{\omega} \theta_t} = \mathbf{I} + \tilde{\omega} \sin(\theta_t) + \tilde{\omega}^2 (1 - \cos(\theta_t)) \quad (5.32)$$

Le développement de cette équation est donnée dans 5.23. L'azimut est dérivé uniquement des composants du vecteur  $\omega$  et donné par :

$$\theta_a = \text{atan2}(\omega_y, \omega_x) \quad (5.33)$$

### 5.2.3.5.c Synthèse des différentes positions des articulations

Nous avons étudié 3 variations du type 2UPS-U, comme illustre la Figure 5.1.

Après différentes analyses cinématiques, c'est la variation 2PUS-U avec articulation prismatique en direction horizontale qui donnait les plus mauvais résultats. Les deux variations 2PUS-U avec articulation prismatique en direction verticale et 2UPS-U seraient à privilégier. Dans la partie suivante, nous allons désormais étudier comment optimiser ces mécanismes.

## 5.3 Optimisation des mécanismes

### 5.3.1 État de l'art en optimisation

Plusieurs algorithmes ont été élaborés par le passé pour optimiser la conception de mécanismes.

Dans les cas où la fonction objectif et les contraintes sont précisément formulées, les algorithmes exploitant la dérivée des fonctions objectif sont les plus adaptées [109]. Malheureusement, lors de la conception de mécanismes, il est plus commun d'avoir une fonction objectif non lisse avec des contraintes non linéaires. Dans ces cas, des algorithmes sans dérivée sont mis en œuvre. Nous sommes particulièrement intéressés par ce type d'optimisation.

La recherche d'un optimum dans la conception mécanique est un sujet difficile, et différents algorithmes évolutifs inspirés de la nature ont été étudiés par le passé [110]. Les algorithmes utilisés pour un objectif unique sont l'Evolution Différentielle (DE) [111] et les Algorithmes Génétiques (GA) [112]. Dans le repère de l'Optimisation Multi-Objectifs (MOO), l'algorithme le plus utilisé est l'Algorithme Génétique Elitiste et Non Dominé Evolué (NSGA-II) [113, 114, 115, 116], dans lequel la théorie de l'évolution génétique est intégrée. Il traite un point dans l'espace d'optimisation ( $\mathcal{O}$ ) comme un chromosome, et évalue la fitness, ou qualité, (stratégie de récompense) de la population (plusieurs chromosomes propagés dans l' $\mathcal{O}$ ) en une itération. Plus la fitness est élevée, plus il y a de chances de transmettre le génotype au sein de la population. Ainsi les opérations telles que la sélection, les croisements et les mutations sont pris en compte pour générer une nouvelle population, et le processus se poursuit. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet une recherche globale dans l' $\mathcal{O}$ . D'autres algorithmes évolutionnaires (ou évolutionnistes) ayant été étudiés sont l'Optimisation par Essaims Particulaires (PSO) [117] et l'Algorithme évolutionnaire multi-objectifs basé sur la décomposition (MOEA/D) ; ils sont revendiqués comme supérieurs à l'NSGA-II[118]. Néanmoins, tous ces algorithmes évoqués nécessitent des calculs informatiques lourds tandis que l'efficacité de l'algorithme dépend beaucoup de la taille de la population. Par ailleurs, seule une estimation des chromosomes requis est fournie pour une recherche globale efficiente de l' $\mathcal{O}$ . Cette dépendance les rend vulnérables dans les cas de fonctions objectif exigeantes, et limite la quantité et la nature des contraintes pouvant être étudiées.

Un travail récent en optimisation de conception mécanique s'intéressait à la co-optimisation avec les trajectoires de mouvement [119]. Dans cette étude, les paramètres de conception et les équations de mouvement sont représentés implicitement et pris en compte par différents algorithmes. Ce type de méthodologie peut offrir une meilleure compréhension de l'optimum global de l'espace d'optimisation. Ce travail met également en évidence l'importance du positionnement articulaire des actionneurs prismatiques dans le processus d'optimisation. En gardant en mémoire le coût informatique des mécanismes d'optimisation, diverses méthodes de recherche locale peuvent être mises en oeuvre. Afin d'éviter que la solution ne converge dans la zone locale, plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour combiner méthodes d'optimisation locales avec recherches globales [120, 121, 122, 123].

La majorité de la littérature présentée ci-dessus se concentre principalement sur la formulation du problème, et utilise une méthodologie existante en tant qu'outil d'optimisation. Mais approfondir la mise en oeuvre de l'algorithme d'optimisation pourrait fournir une meilleure flexibilité et une capacité à gérer plus efficacement différentes contraintes.

### 5.3.2 Éléments de l'optimisation

Avant de plonger au coeur de la méthodologie de l'optimisation, il est important de comprendre les motivations sous-jacentes. En conception mécanique, les différents choix à réaliser sont :

1. l'architecture du mécanisme : différentes variations sont présentées dans le chapitre 5.2
2. les types d'articulations : plusieurs combinaisons possibles pour atteindre les mêmes DDL
3. la position des articulations : où et comment placer le repère d'une articulation

Les choix réalisés ont des conséquences sur l'espace de travail, les solutions cinématiques et la taille du mécanisme. Un autre défi est qu'une même architecture peut être utilisée pour réaliser différentes tâches, avec des contraintes cinématiques devant être optimisées en conséquence. Ce chapitre présente une méthodologie d'optimisation adaptée aux mécanismes parallèles pour l'utilisation en chirurgie otologique.

Pour résoudre un problème d'optimisation, nous devons nous poser plusieurs questions :

- quel est l'objectif ?
- quelles sont les contraintes ?
- que peut-on modifier pour atteindre l'objectif ?

La réponse à ces questions forme les éléments du problème d'optimisation, qui seront détaillés dans les parties suivantes [92]. L'importance de chaque élément est qu'ils affectent l'objectif final, le coût de calcul ainsi que l'algorithme adapté au problème. La section suivante précise ces éléments afin de comprendre par la suite le choix de l'algorithme.

### 5.3.3 Fonction objectif

Le choix de la fonction objectif du mécanisme dépend entièrement de l'application du mécanisme. Certaines utilisations requièrent un bon comportement cinématique, par exemple pour la manipulation de caméra. D'autres nécessitent de bonnes caractéristiques dynamiques, lors de tâches d'usinage par exemple. Dans notre cas, nous sommes principalement préoccupés par les caractéristiques cinématiques du mécanisme, car notre application est similaire à celle d'une manipulation de caméra.

La propriété la plus importante d'un mécanisme est son espace de travail ; ainsi, maximiser l'espace de travail est un choix logique de fonction objectif. Une analyse détaillée du volume disponible pour la manipulation de l'endoscope lors de chirurgie otologique ou sinusienne a été présentée dans le chapitre 3. Ce travail, d'après scanners de patients, présentait une base solide pour l'exigence des plages d'orientation de l'endoscope dans leur volume de travail ; la Figure 3.3, présentant l'espace de travail de l'oreille, montrait un espace de travail de petite taille, avec une plage de mouvements de l'endoscope faible. La Figure 3.9 représentait un espace de travail du massif facial plus large, avec un centre de rotation du mécanisme pouvant être modifié et une course de l'endoscope de  $\pi/2$  radians.

#### 5.3.3.1 Objectifs multiples

Dans la conception d'un mécanisme, il est important d'évaluer la performance du mouvement réalisé. Il existe plusieurs indices de performance étudiés par le passé, dont une brève comparaison des principaux indices utilisés est présentée dans cette section.

En dehors de la performance du mouvement, il faut également s'intéresser aux limites articulaires passives du mécanisme. C'est pourquoi une stratégie de récompense liée au

maintien des articulations le plus loin possible de leurs limites a également été mise en oeuvre. L'espace de travail souhaité et la performance globale du mécanisme sont directement reliés dans notre cas, et peuvent ainsi être implémentées ensemble avec les pondérations appropriées. Les deux fonctions objectif, l'index de performance et la norme des limites articulaires passives, semblent contrastée par nature, d'où un compromis à définir pour choisir un mécanisme performant dans les deux fonctions objectif.

### 5.3.3.1.a Espace de travail du mécanisme

Dans cette section, on considère l'espace de travail souhaité comme étant un carré dans l'espace opérationnel, représenté par les angles d'Euler. Il est ainsi implicite que les mouvements de roulis et de tangage du mécanisme sont d'égale importance pour la manipulation de l'endoscope. Comme le mécanisme sera destiné à des types de chirurgies polyvalentes, l'espace de travail requis n'est pas traité comme une contrainte, mais il est plutôt essayé d'obtenir un espace de travail plus grand que nécessaire ( $\pm 1$  radian) pour tenir compte de la mobilité de la tête du patient. Cela nous autorise aussi à observer les effets des différentes contraintes si le mécanisme est utilisé dans d'autres applications.

L'ensemble réalisable  $\mathcal{F}$  se rapporte à l'ensemble de toutes les postures réalisables de l'espace opérationnel espace opérationnel ( $\mathcal{K}$ ) qui sont [124] :

1. sans configuration singulière,
2. respectant les limites articulaires passives et actives,
3. sans collision interne.

L'espace de travail souhaité ( $W_s$ ) dans notre contexte est :

$$W_s : \text{span}\{(\alpha, \beta) \mid \alpha, \beta \in [-1, 1]\}$$

### 5.3.3.1.b Indices de performance

Différents indices de performance comme l'ellipsoïde de limitation minimale ( $v_e$ ) [125] (*manipulability ellipsoid volume en anglais*) et le conditionnement ( $\kappa$ ) [126] ont été précédemment utilisés pour quantifier la qualité des mouvements d'un mécanisme. Plus tard, d'autres indices de performance ont été introduits pour pallier aux insuffisances de ces indices. L'un de ces indices est le facteur d'amplification de vitesse [127], qui a une in-

interprétation physique et représente l'efficacité de l'amplification du mouvement dans les actionneurs par rapport à celle des effecteurs terminaux.

### 5.3.3.1.c Indice de performance avec le déterminant du jacobien

L'objectif des indices de manipulabilité est de donner une mesure quantitative de la capacité à se déplacer et à appliquer des forces dans des directions arbitraires. Les indices de manipulabilité définis doivent également fournir des informations sur la proximité des configurations singulières. Il existe de multiples façons de définir la manipulabilité, ce qui donne lieu à de multiples indices de manipulabilité.

L'ellipsoïde de manipulabilité est l'interprétation géométrique des vecteurs propres mis à l'échelle résultant de la décomposition en valeur singulière du jacobien qui décrit le mouvement d'un robot. Dans certains cas, l'ellipsoïde est une sphère et le mécanisme peut ainsi aller dans toutes les directions avec la même agilité. Cette configuration est nommée la *configuration isotropique*, et est idéale pour uniformiser les performances du mécanisme. La méthode de l'ellipsoïde quantifie aussi bien une sphère et une ellipsoïde de même volume, bien que nous sachions qu'une *configuration isotropique* est préférable. La cartographie linéaire entre le vecteur articulaire ( $\mathbf{q}_i$ ) et le vecteur opérationnel ( $\mathbf{x}$ ) est donnée par la matrice jacobienne ( $\mathbf{J}$ ) comme :

$$\omega = -\mathbf{B}\mathbf{A}^{-1}\dot{\rho} = \mathbf{J}\dot{\rho} \quad (5.34)$$

$$v_e = \sqrt{\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)} \quad (5.35)$$

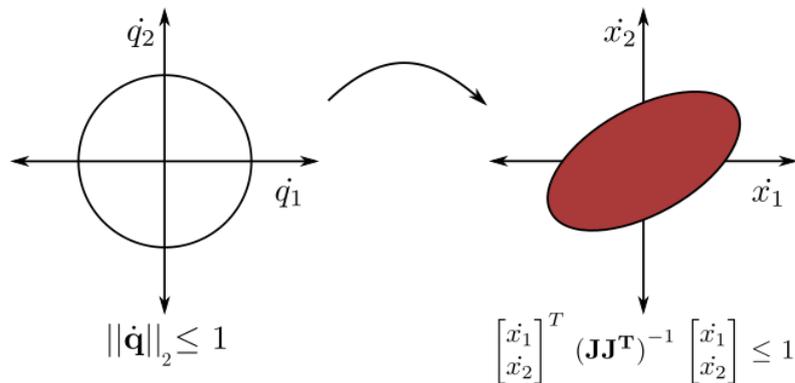


FIGURE 5.22 – Représentation géométrique de la correspondance induite par la matrice  $\mathbf{J}$ .

### 5.3.3.1.d Indice de performance avec le conditionnement

Pour contrer les lacunes de la méthode de l'ellipsoïde, le nombre de conditionnement ( $\kappa$ ) a été introduit par Gosselin [126] pour quantifier la qualité du mouvement. Il est utilisé pour mesurer la sensibilité d'une fonction aux changements dans l'espace articulaire. Géométriquement, il est interprété comme l'excentricité de l'ellipsoïde, et donne des informations sur la facilité de déplacement dans une direction par rapport aux autres. Lorsque le  $\kappa$  est égal à 1, nous obtenons une sphère, et sommes dans la *configuration isotropique*. Le nombre de conditionnement ( $\kappa$ ) peut aussi être interprété comme un index renseignant sur la distance séparant la configuration actuelle de la *configuration isotropique*. La valeur du  $\kappa$  varie de 1 à  $\infty$ , de sorte que son inverse est utilisé en tant qu'conditionnement inverse ( $\kappa^{-1}$ ) pour des valeurs limitées, et est calculé en (5.36), où  $\sigma$  est la valeur singulière de la matrice jacobienne,  $\mathbf{J}$ .

$$\kappa^{-1} = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}, \quad \text{avec } \kappa^{-1} \in [0, 1] \quad (5.36)$$

Les indices de performance, comme le déterminant du jacobien ou le nombre de conditionnement, souffrent de l'inhomogénéité dimensionnelle de la matrice jacobienne et ne sont pas appropriés aux mécanismes ayant à la fois des mouvements de translation et de rotation [128, 129]. Ce problème est important à considérer dans le choix de la méthodologie d'optimisation du mécanisme. Comme le mécanisme proposé ne présente que 2 DDL en rotations, nous avons décidé d'utiliser l'inverse du nombre de conditionnement comme index de performance. Comme nous voulions un index de conditionnement global ( $\kappa_g^{-1}$ ), la moyenne de la somme des valeurs du  $\kappa^{-1}$  sur le point d'espace de travail discrétisé a été utilisé.

$$\kappa_g^{-1} = \frac{\sum_{W_s} \kappa^{-1}}{W_s}, \quad W_s : \text{total des points de l'espace de travail souhaité} \quad (5.37)$$

### 5.3.3.1.e Indice de performance avec le facteur d'amplification de vitesse

Le facteur d'amplification de vitesse (*velocity amplification factor vaf*) a été introduit [127] et utilisé pour mesurer la qualité du mouvement [130, 131]. Le facteur d'amplification de vitesse nous permet d'analyser la relation entre la vitesse des actionneurs et celle de l'effecteur terminal dans une certaine configuration. Le facteur d'amplification de vitesse peut être limité dans la plage souhaitée en fonction des actionneurs choisis. Un

des principaux avantages de ce facteur, par rapport aux indices de performance précédents, est que les limites sont de nature très pratique et la performance du mécanisme peut être analysé avec une interprétation physique. Comme nous prévoyons d'utiliser des actionneurs prêts à l'emploi, il est primordial d'avoir des limites réalistes de la vitesse des actionneurs. Le facteur d'amplification de vitesse nous aide à mesurer la qualité du mouvement de l'effecteur terminal par rapport aux vitesses des différents actionneurs.

Dans de précédents travaux, le facteur d'amplification de vitesse  $vaf$  est calculé en supposant que la norme  $l_2$  du  $\mathbf{q}_i$  soit inférieure à 1. Cela nous permet d'avoir une matrice carrée  $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$  et nous pouvons ultérieurement analyser cette matrice avec divers outils mathématiques. Ce choix du vecteur articulaire peut paraître étrange, car la vitesse d'une articulation spécifique dépend des autres articulations [132]. Une condition préférable serait de mettre en oeuvre des contraintes indépendantes sur les vitesses de l'actionneur pour implémenter la norme  $\infty$ .

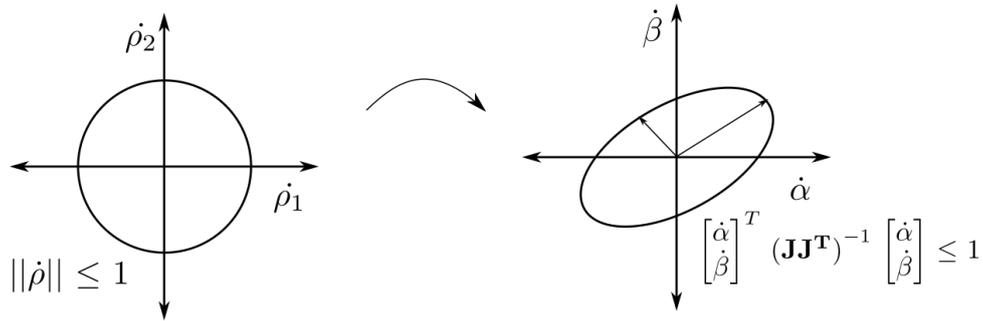


FIGURE 5.23 – Interprétation géométrique avec l'hypothèse de  $\|\dot{q}\| \leq 1$

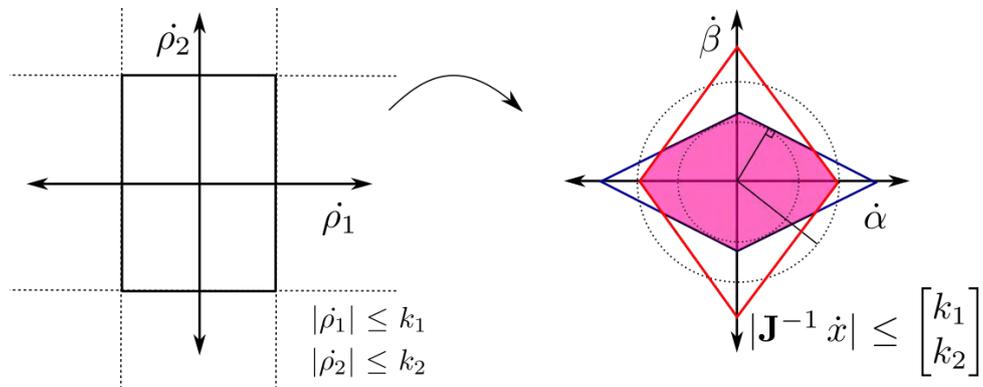


FIGURE 5.24 – Interprétation géométrique avec des contraintes indépendantes.

Soient  $k_1$  et  $k_2$  les vitesses maximales des différents actionneurs ; la formule du Facteur d'amplification de vitesse (vaf) est donnée par :

$$\begin{aligned} |\dot{\rho}| &\leq \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \\ |\mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{x}}| &\leq \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.38)$$

$$|J_{11}\dot{\alpha} + J_{12}\dot{\beta}| \leq k_1 \quad (5.39)$$

$$|J_{21}\dot{\alpha} + J_{22}\dot{\beta}| \leq k_2 \quad (5.40)$$

Nous obtenons quatre lignes de (5.39, 5.40) qui forment deux rectangles centrés à l'origine, comme représenté sur la Figure 5.24. L'intersection de ces deux rectangles (région en rose de la Figure 5.24) représente la région valide dans l'espace opérationnel qui respecte les limites des vitesses des actionneurs. En calculant le rayon du cercle ainsi que le périmètre de cette zone, nous obtenons l'amplification minimale et maximale des vitesses. Ces distances sont utilisées en tant que contraintes limitatives, et le conditionnement du mécanisme est le rapport du rayon du cercle inscrit par le rayon du cercle circonscrit.

Cependant, il a été observé que les rayons du cercle inscrit et du cercle circonscrit augmentent ou diminuent lors de la mise à l'échelle des dimensions du mécanisme, c'est-à-dire que si le mécanisme est redimensionné pour avoir une taille double et la vitesse d'amplification augmente également. Cela pose problème car ni l'espace de travail ni la qualité du mouvement ne devraient changer lors du dimensionnement des mécanismes qui ont des degrés de liberté en rotation uniquement. Ce problème apparaît si nous utilisons des limites constantes pour  $k_1$  et  $k_2$  car les plus gros actionneurs ont plus de longueur de course, mais nous pouvons limiter leur vitesse de déplacement maximale à la moitié de la longueur de course de l'actionneur. Dans notre cas, nous choisissons des actionneurs LA22 de LINAK (Figure 5.32). Leur vitesse maximum est de 37 mm/sec alors que la longueur de course est de 200 mm. Nous pouvons utiliser le même rapport pour notre problème d'optimisation : si l'échelle du mécanisme est telle que la course de l'actionneur est de  $s$  mm, alors les limites  $k_1$  et  $k_2$  sont attribuées comme :

$$k_1 = k_2 = k = s \frac{37}{200} \quad (5.41)$$