

Vers des maillages plus généraux avec une discrétisation VEM-MPFA

Dans le chapitre précédent, un premier schéma couplé a été construit pour approcher le système de poroélasticité. L'utilisation de l'approximation à deux points pour le flux numérique constituait un bon choix pour construire, implémenter et étudier mathématiquement le schéma. Celui-ci a été illustré sur des cas analytiques et réalistes et a ouvert de nouvelles possibilités, par exemple celle de gérer des maillages de type Voronoï. L'objectif suivant, qui fait l'objet de ce chapitre, est de traiter des maillages plus généraux, par exemple constitués de polytopes quelconques ou bien issus de domaines souterrains réels. La première section de ce chapitre revient justement sur les limites du schéma précédent et décrit les caractéristiques spécifiques des maillages utilisés en géosciences. Dans la seconde section, un schéma volumes finis multipoints est introduit pour la discrétisation de l'équation de conservation de la masse. Le nouveau schéma couplé est adapté à l'utilisation de maillages polygonaux ou polyédriques. Cependant, pour pouvoir traiter les maillages utilisés en géosciences, la méthode des éléments virtuels doit être adaptée : les modifications qui y sont apportées sont décrites dans la troisième section. Finalement, une illustration réaliste inspirée d'un problème de géomécanique est présentée dans la quatrième section du chapitre.

Sommaire

5.1 Motivations	90
5.1.1 $\bar{\kappa}$ -orthogonalité	90
5.1.2 Maillages géosciences	92
5.2 Approximation multipoints pour le schéma volumes finis	93
5.2.1 Approximation MPFA pour les flux numériques	93
5.2.2 Implémentation et couplage avec les éléments virtuels	95
5.2.3 Illustrations numériques.	96
5.3 Modification des VEMs pour les faces non planes	98
5.3.1 Transformation en maillage polyédrique	98
5.3.2 Un espace d'approximation modifié pour les éléments virtuels.	101
5.3.3 Un mot sur les volumes finis	103

5.4	Illustration sur une application géosciences	104
5.4.1	Paramètres du cas	104
5.4.2	Résultats numériques	105

5.1 Motivations

Deux limites sur la compatibilité des maillages peuvent être opposées au schéma VEM-TPFA. La première, imputable aux volumes finis, est la condition d’orthogonalité qui doit être respectée par les maillages. La seconde, plutôt spécifique au contexte applicatif, provient des caractéristiques spécifiques des maillages utilisés en géosciences. Cette section présente ces deux incompatibilités qui poussent à modifier le schéma numérique.

5.1.1 $\bar{\kappa}$ -orthogonalité

L’approximation à deux points du flux numérique dans la méthode des volumes finis, décrite dans la section 4.1.2, n’est consistante que si la condition dite de $\bar{\kappa}$ -orthogonalité est respectée : pour toute face f séparant deux mailles K et L dans lesquelles la pression est approchée aux points \mathbf{x}_K et \mathbf{x}_L , la propriété

$$\bar{\kappa}^{-1}(\mathbf{x}_K \mathbf{x}_L) \perp f \quad (5.1)$$

doit être satisfaite pour que l’approximation soit consistante.

Même dans le cas le plus simple où $\bar{\kappa}$ est proportionnel à l’identité, seuls certains types de maillages vérifient cette condition. Sur les quatre familles de maillages discrétisant le carré unité présentées précédemment sur la figure 3.4, seuls les maillages carrés la satisfont. L’orthogonalité est proche d’être vérifiée sur les maillages de Lloyd, qui sont des maillages de Voronoï régularisés, ces derniers étant orthogonaux par construction. Pour illustrer les conséquences de l’absence de cette propriété, le cas test défini dans la section 4.3.3 est à nouveau considéré. Pour des coefficients physiques prenant respectivement les valeurs $E = 2.5$, $\nu = 0.25$, $\bar{\kappa} = \bar{I}_2$, $\alpha = 1$ et $c_0 = 0.5$, le problème dont la solution analytique est donné par

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 10^{-2} \exp(-t) \begin{pmatrix} x^2 y \\ -x y^2 \end{pmatrix}, \quad p(\mathbf{x}, t) = \exp(-t) \sin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)$$

est résolu pour $t \in [0, 1]$ en utilisant ces différentes familles de maillages. L’évolution de l’erreur d’approximation E^A définie par l’équation (4.35) est représentée sur la figure 5.1. À gauche, le pas de temps Δt est suffisamment faible pour que l’erreur soit due au pas d’espace h . À droite, le pas d’espace est suffisamment faible pour que l’erreur soit due au pas de temps. Dans les deux cas, on observe la non convergence du schéma VEM-TPFA et une erreur d’approximation élevée pour les maillages triangles et twisted, qui ne respectent pas la condition d’orthogonalité.

Dans le cas plus complexe où $\bar{\kappa}$ est anisotrope, construire des maillages satisfaisant la condition de $\bar{\kappa}$ -orthogonalité (5.1) est un sujet de recherche en soi [Rou16]. Inversement, lorsque le maillage est créé en amont et donné tel quel, il peut être très délicat de choisir des points de calcul de manière à ce que la $\bar{\kappa}$ -orthogonalité soit respectée. Ceci est illustré sur la figure 5.2 où différents tenseurs $\bar{\kappa}$ sont considérés. Dans les trois cas, on cherche à positionner les centres de calcul des trois cellules de manière à ce que la $\bar{\kappa}$ -orthogonalité soit satisfaite pour les trois arêtes f , f' et f'' . Ce cas est simplifié puisque sur un maillage de ce type, la condition devrait normalement être respectée par les six arêtes de chaque hexagone. Malgré cela, lorsque la matrice de mobilité n’est pas multiple de l’identité, le placement des points n’est pas trivial

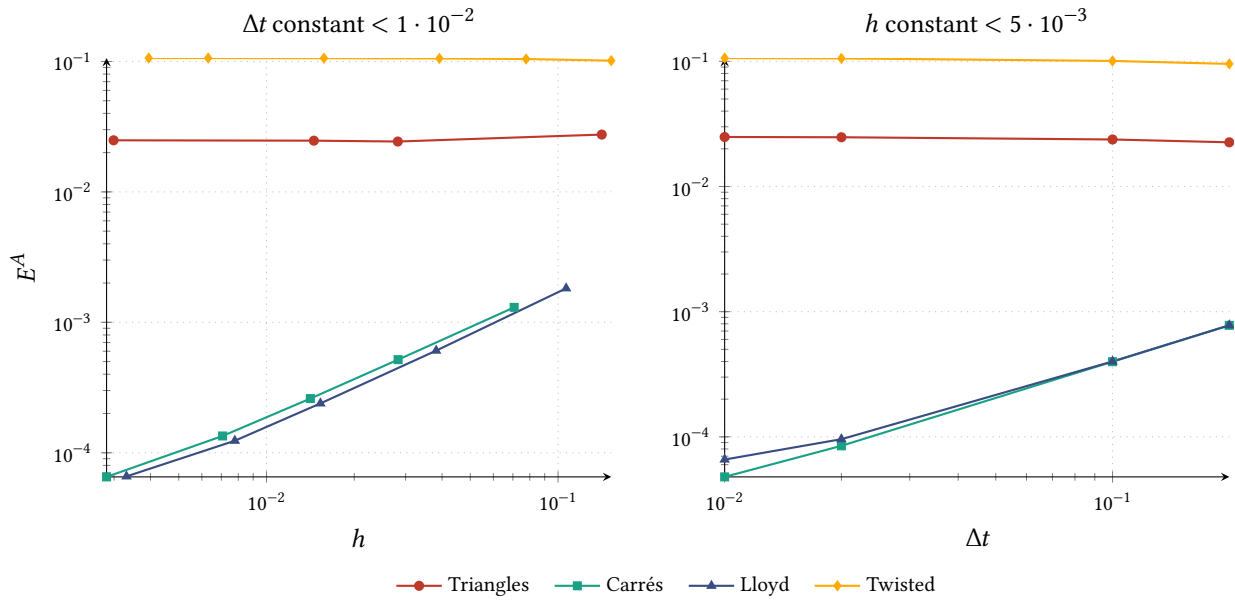


FIG. 5.1 : Évolution de l'erreur d'approximation pour 4 maillages en fonction du pas d'espace (gauche) ou du pas de temps (droite). Seuls les maillages satisfaisant la condition d'orthogonalité permettent la convergence.

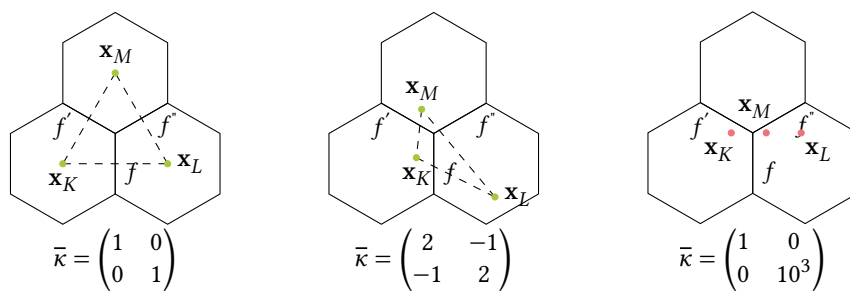


FIG. 5.2 : Positions possibles pour les centres de calculs des cellules K , L et M de manière à ce que la condition d'orthogonalité soit respectée pour différents tenseurs \bar{k} . Même sur ce cas simplifié où seulement trois conditions sont imposées (pour six coordonnées inconnues), il est parfois difficile de maintenir les centres de calcul à l'intérieur des cellules.

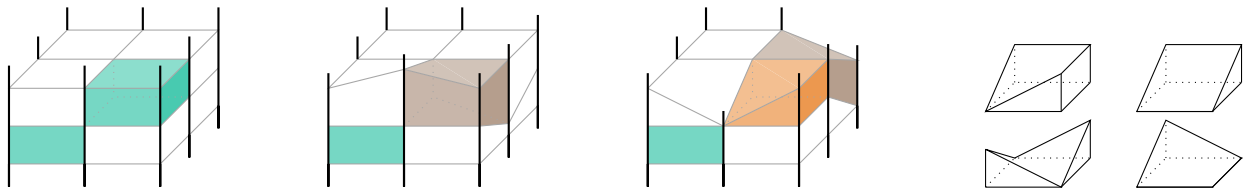


FIG. 5.3 : **Méthode des piliers utilisée pour mailler les domaines en géosciences.** En fonction de l'altitude des points, le maillage peut contenir des cellules **hexaédriques** classiques, des mailles à faces **non planes** ou bien des hexaèdres **dégénérés**. Certaines de ces mailles dégénérées sont représentées à droite.

(figure du milieu). Dans certains cas, il est même impossible de satisfaire la condition en maintenant les centres de calcul à l'intérieur de leurs cellules. C'est par exemple le cas sur la figure de droite. Il va sans dire que ce problème est encore plus complexe en trois dimensions ou lorsque les coefficients de $\bar{\kappa}$ dépendent de l'espace. Cette contrainte d'orthogonalité constitue donc une première restriction à l'usage du schéma VEM-TPFA.

5.1.2 Maillages géosciences

Une seconde restriction apparaît lorsque l'on souhaite utiliser les types de maillage standards dans le domaine des géosciences. En modélisation de bassin, mailler un domaine géologique est un processus complexe : à partir de la configuration actuelle du domaine, le temps est remonté pour reconstruire la configuration initiale du domaine. Cette restauration prend en compte les phénomènes physiques qui modifient le milieu tels que l'érosion, le dépôt de sédiments, la subsidence ou le compactage vertical. Pour décrire ces phénomènes, majoritairement verticaux, la grille tridimensionnelle est bâtie à partir de droites verticales appelées piliers. L'ensemble de ces piliers forme une structure bidimensionnelle cartésienne, chacun d'entre eux étant repéré par ses coordonnées (i, j) dans le plan horizontal. Sur chaque pilier se trouve un même nombre de points repérés par leur profondeur qui a été calculée lors de la reconstruction géométrique. Finalement, chaque région délimitée par les 4 piliers (i, j) , $(i + 1, j)$, $(i + 1, j + 1)$ et $(i, j + 1)$ et par les k -ième et $(k + 1)$ -ième points définit une maille du domaine, qui s'apparente donc à un hexaèdre à 8 sommets [Pon89]. D'ailleurs, si les profondeurs z_{ij}^k étaient équi-réparties le long du pilier (i, j) et identiques d'un pilier à l'autre, le maillage serait en réalité constitué de parallélépipèdes. La difficulté provient du fait que ces profondeurs varient d'un pilier à l'autre, puisque ce sont celles-ci qui permettent une représentation fine des strates géologiques, des érosions ou des failles. En particulier, rien n'assure que les 4 points $z_{i',j'}^k$ (avec $i' \in \{i, i + 1\}$ et $j' \in \{j, j + 1\}$) se trouvent dans le même plan horizontal. Dans ce cas, la maille n'étant définie que par ses huit sommets, elle décrit un "hexaèdre" à face(s) non plane(s). Pire encore, sur un pilier donné les points z_{ij}^k et z_{ij}^{k+1} peuvent être confondus, ce qui conduit à des hexaèdres dit dégénérés. Ces situations sont schématisées sur la figure 5.3. À droite de celle-ci, on représente les différentes mailles dégénérées pouvant être présentes dans le maillage selon si une, deux ou trois paires de sommets sont confondues. Pour compléter cette illustration, un maillage réel construit par cette méthode est représenté sur la figure 5.4. Sur 72500 cellules, plus de 3000 sont des hexaèdres dégénérés, extraits du maillage sur la figure 5.4b et colorés en fonction de leur catégorie. Le maillage comporte également un grand nombre de faces non planes : plus de 90% des faces "horizontales", soit quasiment un tiers des faces du maillage. Bien que la méthode des éléments virtuels soit définie pour des polyèdres quelconques, les maillages issus des géosciences sortent de son cadre d'application puisque les mailles ne sont même plus des polyèdres. Ce cas d'application spécifique constitue donc une seconde restriction à l'usage du schéma défini dans le chapitre

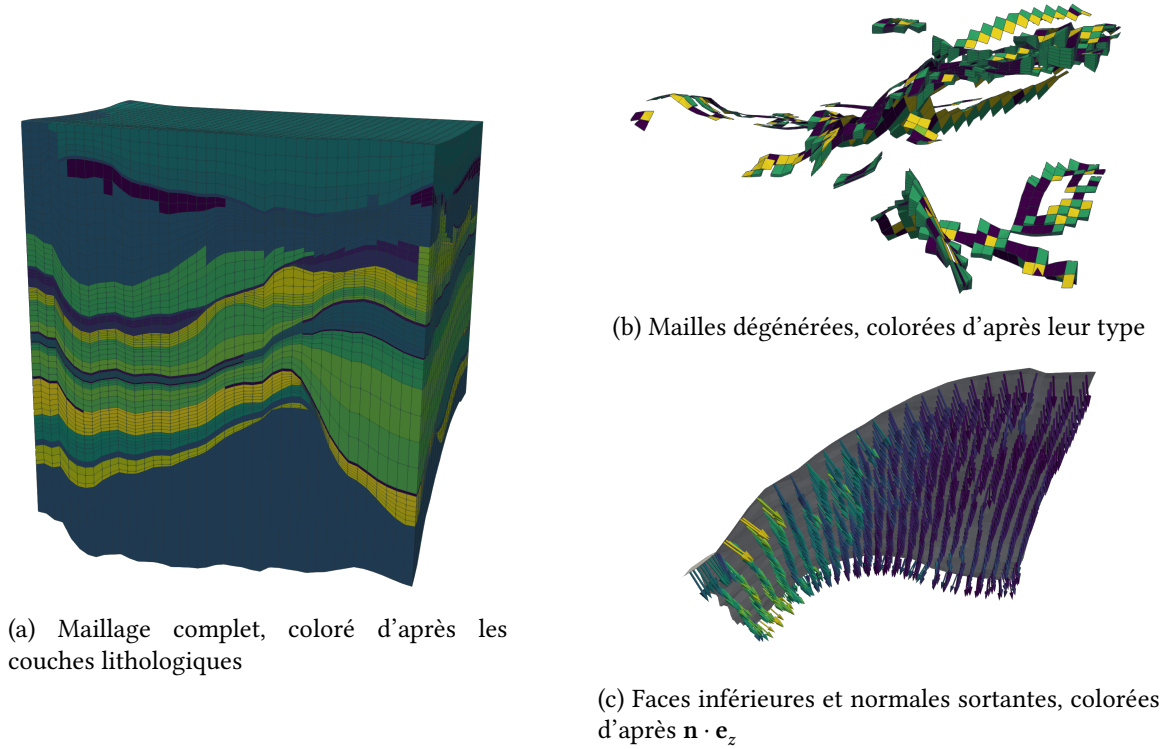


FIG. 5.4 : **Maillage issu des geosciences.** Le respect des propriétés géométriques (a) engendre des mailles dégénérées, extraites du domaine sur la figure (b). De plus, les bords du domaine ne sont pas tous plans (c).

précédent.

5.2 Approximation multipoints pour le schéma volumes finis

Dans cette section, on cherche à résoudre la première limite soulevée dans le paragraphe 5.1.1 en utilisant un schéma volumes finis insensible à la condition de $\bar{\kappa}$ -orthogonalité. En restant dans le formalisme générique de la discrétisation VEM-FV fourni par l'équation (4.7), on étudie une autre manière d'assembler les flux numériques \mathcal{F}_{Kf}^n . Même s'il serait à terme intéressant d'utiliser des schémas récents et prometteurs (schéma hybride, TPFA non linéaire), la classe étudiée ici est la plus standard après le schéma TPFA dans les codes d'écoulement en milieux poreux. En particulier, les changements par rapport à la méthode précédente restent limités et une implémentation de ces méthodes est déjà disponible dans la plateforme Arcane.

5.2.1 Approximation MPFA pour les flux numériques

Plus précisément, l'approximation considérée ici appartient à la famille des approximations multipoints, dénotées MPFA (multipoint flux approximation en anglais), qui sont également des méthodes *cell centered* utilisant des inconnues localisées dans les mailles. Ainsi, par rapport au schéma VEM-TPFA présenté dans le chapitre précédent, seule la définition du flux numérique est à revoir. De manière générale pour les méthodes d'approximation multipoints, ce flux est scindé en deux demi-flux qui sont calculés en utilisant

une interpolation linéaire de l'inconnue autour du sommet associé. En pratique, des inconnues supplémentaires sont introduites sur les faces du maillage pour approcher le gradient puis éliminées par continuité de la solution et conservativité des flux. Parmi les différentes variantes des méthodes multipoints, qui se distinguent par le choix de ces équations de continuité et de conservativité [Dro14], celle présentée ici est la version MPFA-O détaillée par exemple dans [Aavo2]. Pour simplifier les développements, on se limite à un maillage bidimensionnel en notant que les mêmes idées s'appliquent en trois dimensions. Certaines des quantités nécessaires et leurs notations sont schématisées sur la figure 5.5.

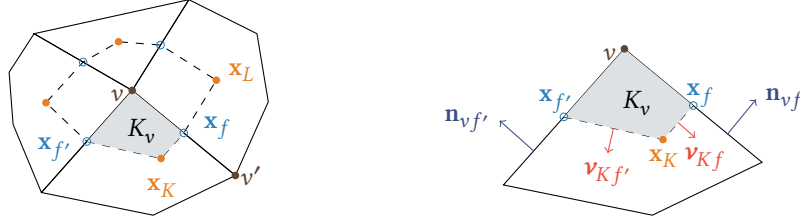


FIG. 5.5 : **Grandeurs et notations** nécessaires à la construction d'une approximation MPFA-O. Représentée ici en deux dimensions, la construction est similaire en trois dimensions.

Entre les mailles K et L séparées par la face f , le flux est divisé en deux demi-flux selon

$$\mathcal{F}_{Kf} = \mathcal{F}_{Kfv} + \mathcal{F}_{Kfv'} \quad (5.2)$$

où \mathbf{x}_f est le milieu de l'arête f qui relie deux sommets v et v' . Pour calculer le demi-flux \mathcal{F}_{Kfv} , une *zone d'interaction* est construite autour du sommet v en reliant les centres des mailles avec les milieux des arêtes connectées à v (en pointillés sur la figure). C'est à ce stade qu'une hypothèse de continuité est effectuée pour supposer que l'approximation de la pression, linéaire dans chaque sous-cellule, est continue au milieu des arêtes et donc définir les inconnues intermédiaires p_{h_f} . Grâce à ces inconnues supplémentaires, le gradient constant dans chaque sous-cellule se calcule selon

$$\nabla_{K_v} p_h = -\frac{1}{2A_{K_v}} \left(\mathbf{v}_{Kf'}(p_{h_f} - p_{h_K}) + \mathbf{v}_{Kf}(p_{h_{f'}} - p_{h_K}) \right) \quad (5.3)$$

où A_{K_v} désigne l'aire du triangle $\mathbf{x}_K \mathbf{x}_f \mathbf{x}_{f'}$, et \mathbf{v}_{Kf} (resp. $\mathbf{v}_{Kf'}$) le vecteur normal à l'arête $(\mathbf{x}_K \mathbf{x}_f)$ (resp. $(\mathbf{x}_K \mathbf{x}_{f'})$) orienté vers l'extérieur de ce triangle. Ces normales ne sont pas unitaires mais de norme $d(\mathbf{x}_K, \mathbf{x}_f)$ et $d(\mathbf{x}_K, \mathbf{x}_{f'})$. Pour cette sous-cellule, les demi-flux sortant des arêtes connectées au sommet v s'expriment donc selon

$$\begin{bmatrix} \mathcal{F}_{Kfv} \\ \mathcal{F}_{Kf'v} \end{bmatrix} = \bar{B}_{K_v} \begin{bmatrix} p_{h_f} - p_{h_K} \\ p_{h_{f'}} - p_{h_K} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \bar{B}_{K_v} = -\frac{1}{2A_{K_v}} \begin{bmatrix} |\mathbf{x}_v \mathbf{x}_f| \mathbf{n}_{v_f}^T \bar{\kappa}_K \mathbf{v}_{Kf'} & |\mathbf{x}_v \mathbf{x}_f| \mathbf{n}_{v_f}^T \bar{\kappa}_K \mathbf{v}_{Kf} \\ |\mathbf{x}_v \mathbf{x}_{f'}| \mathbf{n}_{v_{f'}}^T \bar{\kappa}_K \mathbf{v}_{Kf'} & |\mathbf{x}_v \mathbf{x}_{f'}| \mathbf{n}_{v_{f'}}^T \bar{\kappa}_K \mathbf{v}_{Kf} \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

les notations $\bar{\kappa}_K$ et $|\mathbf{x}_v \mathbf{x}_f|$ désignant respectivement la matrice $\bar{\kappa}$ évaluée au point \mathbf{x}_K et la longueur des demi-arêtes $(\mathbf{x}_v \mathbf{x}_f)$. La même méthode est appliquée à chaque sous-cellule de la zone d'interaction autour de v , puis la conservativité des flux $\mathcal{F}_{Kfv} + \mathcal{F}_{Lfv} = 0$ est imposée pour chaque demi-arête interne f séparant les mailles K et L . On aboutit ainsi à un système linéaire carré de taille $\text{card}(\tau_h(v))$ où $\tau_h(v)$ est l'ensemble des mailles partageant le sommet v . La résolution de ce système permet d'exprimer les inconnues de face en fonction des inconnues de centre et donc de réécrire les demi-flux dans (5.4) en ne faisant intervenir que les inconnues de centre. L'ensemble de la procédure étant répété autour du sommet v' , on peut au final

sommer suivant (5.2) les deux demi-flux \mathcal{F}_{Kfv} et $\mathcal{F}_{Kfv'}$ pour exprimer le flux numérique \mathcal{F}_{Kf} à travers la face f . Pour les mailles adjacentes à un bord du domaine, une telle élimination des inconnues de face est plus difficile : en particulier, lorsque des conditions aux limites de Neumann sont imposées, l'inconnue de face dépend de cette condition et n'est donc pas connue au moment de la construction des flux. Plutôt que de réévaluer les flux à chaque pas de temps (pour tenir compte de cette condition), une stratégie courante consiste à réemployer l'approximation à deux points pour calculer le flux à travers les faces de bord.

Avec cette méthode, l'inconnue p_{h_K} de la maille K est liée aux inconnues de toutes les mailles qui partagent un sommet avec une des arêtes de la maille K . Le stencil de la matrice \mathcal{F} résultante est donc plus large que celui obtenu avec l'approximation à deux points, et la résolution est en conséquence plus coûteuse. Lorsque les mailles sont très déformées, ce schéma rencontre des problèmes de stabilité : les matrices intermédiaires deviennent non inversibles, le principe du maximum n'est plus respecté ou la coercivité n'est plus assurée. En dehors de ces deux inconvénients, ce schéma a l'avantage de ne pas dépendre de la condition d'orthogonalité et d'être localement conservatif. Cette construction s'étend au cas tridimensionnel sur des maillages polyédriques quelconques, voir par exemple [AGM10].

5.2.2 Implémentation et couplage avec les éléments virtuels

Comme indiqué précédemment, le fait que les inconnues soient toujours (après élimination des inconnues temporaires de faces) *cell centered* rend l'implémentation de ce schéma VEM-MPFA très proche de celle du schéma VEM-TPFA détaillée dans la section 4.3. Pour réutiliser l'algorithme 2, seuls certains éléments internes doivent être adaptés.

Assemblage matrice et second membre volumes finis Comme dans le cas précédent, cet assemblage est réalisé par une boucle sur les faces du maillage durant laquelle sont calculées l'équivalent des transmissivités du schéma à deux points. En effet, en appliquant la méthodologie décrite dans le paragraphe précédent, le flux numérique s'écrit comme une combinaison linéaire des inconnues des mailles partageant l'un des sommets de la face : pour une face f interne,

$$\mathcal{F}_f^n = \sum_l T_f^l p_l^n \text{ avec } l \in \{\cup_v \tau_h(v) \text{ pour } v \text{ sommet de } f\}.$$

Pour une face f de bord, le flux s'exprime de la même manière que celui du schéma TPFA, voir l'équation (4.11). Ces coefficients T_f^l sont ensuite ajoutés dans la matrice dans chaque colonne correspondant à la maille d'indice l , et ce pour les deux lignes d'indices k_1 et k_2 si la face sépare les mailles K_1 et K_2 :

$$\mathcal{F}_{K_1L} += \Delta t T_f^l \quad \mathcal{F}_{K_2L} += \Delta t T_f^l$$

En particulier, les inconnues associées aux deux mailles K_1 et K_2 interviennent dans cette somme, ce qui ajoute une contribution aux termes diagonaux, mais ce ne sont pas les seules (contrairement au schéma deux points). L'autre contribution aux termes diagonaux provient, comme avec la méthode TPFA, du terme issu de la discrétisation en temps qui est ajouté au moyen d'une boucle sur les cellules : $\mathcal{F}_{KK} += c_0 |K|$.

Le calcul de la partie \mathcal{L}^p du second membre est identique à la méthode utilisée avec l'approximation à deux points puisque les flux de bord utilisent cette approximation.

Termes de couplage aux éléments virtuels La matrice de couplage \mathcal{B} ainsi que la seconde partie \mathcal{L}^c du second membre de l'équation de conservation sont assemblées exactement de la même manière que précédemment.

Calcul du gradient et de la norme H^1 Pour calculer le gradient, ou plus précisément le flux v_f^K sur chaque maille K , on utilise à nouveau la formule de reconstruction (4.39) :

$$v_f^K = \frac{1}{|K|} \sum_{f \in \partial K} \mathcal{F}_{Kf}^n (\mathbf{x}^f - \mathbf{x}^K).$$

Encore une fois, on procède au moyen d'une boucle sur les faces du maillage pour évaluer le flux numérique \mathcal{F}_{Kf}^n . La pression approchée ayant été calculée, il suffit pour chaque face de réappliquer la relation $\mathcal{F}_{Kf}^n = \sum_l T_f^l p_l^n$ en utilisant les informations déjà calculées sur la connectivité et les transmissivités. Une fois les flux connus sur chaque face, une boucle sur les cellules est effectuée pour appliquer la formule d'interpolation.

Si le schéma multipoints permet ainsi de reconstruire un gradient discret constant par maille, il n'admet en revanche pas de définition naturelle pour la semi-norme H^1 discrète qui avait été introduite avec l'approximation TPFA. Afin de pouvoir néanmoins comparer ce schéma au précédent, on construit une quantité similaire empruntant à nouveau la quantité définie par (4.13). Autrement dit, après résolution avec les flux numériques du schéma multipoints, les transmissivités définies par la méthode à deux points sont calculées de manière indépendante et utilisées pour calculer la semi-norme H^1 discrète sur la solution selon la relation (4.41).

5.2.3 Illustrations numériques

Le comportement de cette nouvelle combinaison pour le schéma couplé est illustré sur deux problèmes. En premier lieu, on revient sur le *patch test* qui n'était pas satisfait avec le schéma VEM-TPFA. En second lieu, on observe numériquement la vitesse de convergence de ce schéma.

Patch test pour le schéma couplé sur maillages polyédriques

Dans la section 4.3.2 du chapitre précédent, un maillage test de type Voronoï avait été utilisé pour souligner l'impact de la non coïncidence des centres de Voronoï, qui vérifient la condition d'orthogonalité et sont donc utilisés comme centres de calcul, et des barycentres qui peuvent être utilisés pour intégrer exactement les fonctions linéaires. Cette distinction posait un problème au schéma couplé VEM-TPFA, qui a besoin de la condition d'orthogonalité pour rester consistant mais qui requiert aussi le calcul d'intégrales pour assembler les termes de couplage.

Le schéma multipoints n'étant pas soumis à la condition d'orthogonalité, cette distinction n'a plus lieu d'être : les centres de masses peuvent être utilisés comme centres de calcul. On teste à nouveau la capacité du schéma à calculer exactement ou non lorsque la solution exacte est linéaire, en l'occurrence $\mathbf{u} = (3x - 2y, x + y)$ et $p = -x + 2y$. Les coefficients de couplage sont fixés de la manière suivante : $\alpha = 1, c_0 = 0.5, E = 2.5, \nu = 0.25$ et $\kappa = 1$. Le domaine de calcul est le carré unité sur lequel des conditions aux limites de Dirichlet sont imposées sur tous les bords pour le déplacement et la pression. Dans un premier temps, on travaille avec le maillage test de Voronoï illustré sur la figure 4.1. Cependant, les points de calcul utilisés pour la pression sont cette fois les centres de masse des cellules. Dans cette configuration, on a déjà vu que le schéma VEM-TPFA retourne des écarts non nuls en normes L^2 et H^1 pour \mathbf{u} et p . Utiliser le schéma VEM-MPFA ne donne pas non plus un résultat entièrement satisfaisant : les écarts E_{rel}^p et $E_{\text{rel}}^{\nabla p}$ obtenus sont nuls, ce qui démontre l'intérêt de cette nouvelle approximation pour le flux numérique, mais ce n'est pas le cas des écarts $E_{\text{rel}}^{\mathbf{u}}$ et E_{rel}^{σ} . En réalité, la faute incombe au traitement du second membre de l'équation d'élasticité. Pour ce problème analytique, on a

$$\mathbf{f} = -\text{div}(\overline{\overline{\mathbf{C}}}\overline{\overline{\boldsymbol{\epsilon}}_u}) + \alpha \text{div}(p\overline{\overline{\mathbf{I}}_2}) = \alpha \nabla p.$$

Maillage	Méthode de quadrature	Méthode du potentiel
Carré	Satisfait	Satisfait
Triangles	Satisfait	Satisfait
Voronoi	En échec	Satisfait
Twisted	En échec	Satisfait

TAB. 5.1 : Patch test pour le problème couplé sur différents maillages, en fonction de la méthode utilisée pour approcher le second membre de l'équation d'élasticité.

On rappelle qu'au moment d'intégrer ce second membre contre les fonctions de base, la méthode des éléments virtuels effectue une approximation : la contribution de la fonction de base φ_i^l sur la maille K se traduit par l'ajout du terme

$$\mathcal{L}_i^u += \sum_{j \in \mathcal{M}_K} \omega_j^K \mathbf{f}(V_j) \cdot \varphi_i^l(V_j) = \omega_i^K \mathbf{f}(V_i) \cdot \mathbf{e}_l \approx \int_K \mathbf{f} \cdot \varphi_i^l,$$

voir les équations (3.12) et (3.25). Autrement dit, dans le cas où \mathbf{f} est constante, on a réalisé l'approximation $\int_K \varphi_i \approx \omega_i^K$. Dans cette situation, mieux vaut employer une autre méthode suggérée par [ANR17] pour l'approximation du second membre. Celle-ci peut s'appliquer à chaque fois que la force \mathbf{f} dérive d'un potentiel, c'est-à-dire lorsqu'il existe F tel que $\mathbf{f} = \nabla F$, et se base sur le fait que

$$\forall \mathbf{v}_h \in V_{h,0}, \quad \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h = \int_{\Omega} \nabla F \cdot \mathbf{v}_h = - \int_{\Omega} F \operatorname{div}(\mathbf{v}_h)$$

car $\mathbf{v}_h = \mathbf{0}$ sur $\Gamma_{D_d} \equiv \partial\Omega$ pour ce test. Pour une fonction de base φ_i^l donnée, cette méthode propose l'approximation

$$\int_K \mathbf{f} \cdot \varphi_i^l = - \int_K F \operatorname{div}(\varphi_i^l) \approx -F(\mathbf{x}^K) \int_K \operatorname{div}(\varphi_i^l) = -F(\mathbf{x}^K) |K| \langle \nabla \varphi_i \rangle^K \cdot \mathbf{e}_l. \quad (5.5)$$

On a en effet déjà vu au paragraphe 4.3, lors de l'assemblage de la matrice de couplage \mathcal{B} , que l'intégrale de la divergence des fonctions de base est une quantité connue dans la méthode des éléments virtuels. Cette technique tire parti de la définition "naturelle" de l'opérateur de divergence discret. Avec cette approche, l'opérateur de discrétisation du second membre est compatible avec l'opérateur de discrétisation du gradient, utilisé pour traiter le terme $\alpha \nabla p$ lors de l'assemblage de la matrice de couplage. La conservation de cette notion de potentiel au niveau discret permet de ne pas introduire d'erreur lors de l'approximation du second membre.

En appliquant cette méthode pour discrétiser le second membre avec $F = \alpha p = -x + 2y$, on obtient en effet des écarts nuls en déplacement et en pression pour le problème linéaire. On note que sur certains maillages, le patch test est également satisfait sans la méthode potentielle pour l'intégration du second membre \mathbf{f} , comme indiqué dans le tableau 5.1. Quitte à adopter cette méthode pour approcher l'intégrale, le nouveau schéma couplé VEM-MPFA satisfait donc le patch test pour le système couplé sur les différents maillages dont on dispose. C'est également le cas en trois dimensions sur des maillages cubiques, tétraédriques et Voronoï.

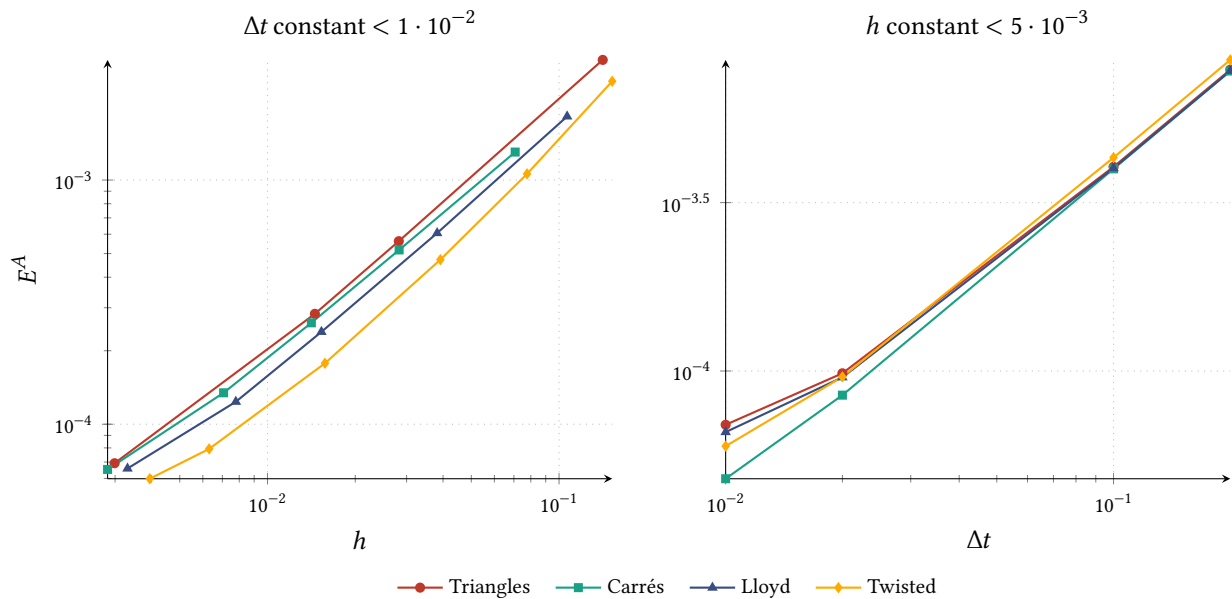


FIG. 5.6 : Évolution de l'erreur d'approximation pour 4 maillages en fonction du pas d'espace (gauche) ou du pas de temps (droite). Avec le schéma VEM-MPFA, l'erreur converge à l'ordre 1 sur les quatre catégories de maillages.

Ordre de convergence du schéma VEM-MPFA

Même si l'étude mathématique du schéma VEM-MPFA n'a pas été effectuée, il est tout de même possible d'illustrer numériquement la vitesse de convergence de celui-ci sur le cas présenté en début de chapitre. On conserve comme grandeur de travail l'erreur E^A définie par l'équation (4.35), la méthode utilisée pour calculer ses différentes composantes avec le schéma VEM-MPFA étant décrite dans le paragraphe 5.2.2. Son évolution est à nouveau représentée en fonction du pas d'espace pour un pas de temps suffisamment faible (à gauche) ou en fonction du pas de temps pour un pas spatial suffisamment faible (à droite) sur la figure 5.6. Avec le schéma multipoints pour l'approximation du flux des volumes finis, un résultat satisfaisant est obtenu sur tous les maillages, que la condition d'orthogonalité soit satisfaite ou non. De plus, on observe numériquement que l'ordre de convergence de ce schéma est de un en espace et un en temps, ce qui est identique au schéma utilisant l'approximation à deux points. Au prix de ses inconvénients précédemment mentionnés, ce schéma permet donc de conserver la même précision tout en admettant des maillages plus généraux.

5.3 Modification des VEMs pour les faces non planes

L'objectif de cette section est de résoudre la seconde limite soulevée dans le paragraphe 5.1.1 en adaptant la méthode des éléments virtuels aux mailles présentes dans les maillages utilisés en géosciences.

5.3.1 Transformation en maillage polyédrique

Pour retomber dans le cadre d'application de la méthode, la première étape consiste à se ramener à un maillage réellement polyédrique, et donc à éliminer les faces non planes. De manière assez classique, on

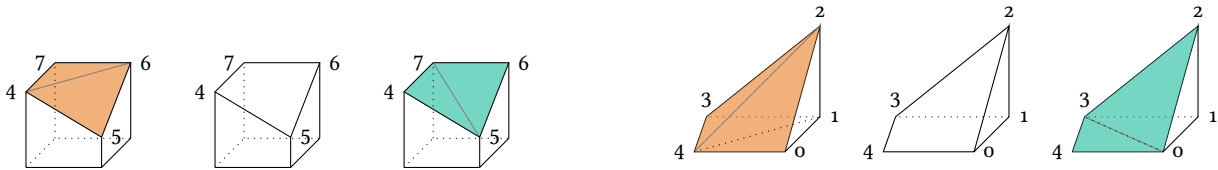


FIG. 5.7 : **Obtention de mailles polyédriques à partir d'éléments à faces non planes.** Pour chaque face non plane à 4 sommets, deux couples de sous-faces peuvent être obtenus. L'illustration est simplifiée en supposant que la face inférieure des cellules est déjà plane.

peut procéder à cette élimination en divisant les faces non planes en sous-faces planes. Se posent alors deux questions sur la manière de procéder, la première pratique, la seconde stratégique. Sur le plan pratique, un tel découpage, en admettant qu'il existe, peut s'insérer à différentes étapes de la chaîne de simulation. Une première solution serait, à partir d'un maillage d'entrée à faces non planes, de créer en amont et sauvegarder un maillage de sortie dans lequel les mailles sont polyédriques. Cette solution nécessite un format de maillage capable de décrire des polyèdres ayant un nombre de faces arbitraire ainsi qu'une manipulation des fichiers, mais elle permet ensuite d'appliquer la méthode numérique en l'état sur le nouveau maillage. Une seconde solution consisterait à travailler sur le maillage existant au cours de la simulation, en découpant à la volée les faces non planes et en adaptant la méthode numérique à ce découpage. Cette approche élimine le prétraitement et permet de s'affranchir d'éventuelles contraintes liées au format de maillage, mais déporte les difficultés techniques dans l'adaptation de la méthode.

Sur le plan stratégique, il existe différentes divisions possibles et il faut donc choisir la technique de découpage en sous-faces planes. Une première possibilité exploite le fait que les types de mailles sont connus *a priori* et que leur diversité est limitée. En effet, dans les maillages utilisés en géosciences, toutes les faces non planes sont définies par quatre sommets : il n'y a pas de faces à plus de 4 sommets dans le maillage et celles qui n'en ont que 3 (car appartenant à une maille dégénérée) sont forcément planes. On peut donc les découper en deux sous-faces triangulaires selon l'une ou l'autre des deux diagonales, comme illustré sur la figure 5.7. De plus, le fait que seules les faces supérieures et inférieures des hexaèdres soient potentiellement non planes couplé à la structure du maillage qui adopte la même numérotation locale des sommets d'une maille à l'autre facilite ce découpage. En particulier, on peut assez facilement s'assurer qu'une face donnée est divisée de la même manière du point de vue des deux cellules qu'elle sépare, condition qui doit bien sûr être respectée pour que la nouvelle géométrie soit correctement définie. Ce choix stratégique pour la division en sous-faces restreint le choix pratique décrit dans le paragraphe précédent. En effet, l'approche consistant à réécrire en amont le maillage n'est pas compatible avec ce choix. La raison provient du support limité des mailles polyédriques par le simulateur : les hexaèdres peuvent bien être redéfinis comme des polyèdres à 8 faces, en revanche le découpage vert de l'hexaèdre dégénéré représenté à droite de la figure 5.7 n'est pas autorisé par la structure de données. On ne peut en effet pas, au sein de la même maille, déclarer deux faces différentes par la même liste de sommets (ici formées par les sommets 0, 3 et 4 vus "de dessous" ou "de dessus"). Or, dans certaines situations, il faut découper suivant cet axe pour respecter la conformité du maillage. La seule possibilité est donc de modifier la méthode numérique pour tenir compte de ce découpage. En pratique, la partie à modifier dans la méthode des éléments virtuels est le calcul de la projection des fonctions de base, et plus spécifiquement celui du gradient moyen de ces fonctions de base dont l'expression est donnée par (3.18). Considérons par exemple le découpage vert de la maille hexaédrique de la figure 5.7. On note T_a le triangle formé par les nœuds 4, 5 et 7 et T_b celui formé par les nœuds 5, 6 et 7. La projection des fonctions de base associées aux nœuds de la face inférieure est inchangée puisque toutes

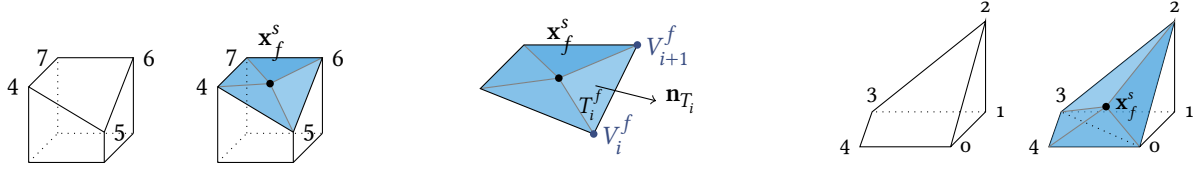


FIG. 5.8 : **Obtention de mailles polyédriques à partir d'éléments à faces non planes.** Chaque face non plane est triangulée par rapport à la moyenne arithmétique des sommets \mathbf{x}_f^s . L'illustration est simplifiée en supposant que seule la face supérieure des cellules n'est pas plane. Au centre, le schéma indique les notations utilisées dans la suite.

les faces auxquelles appartient ces nœuds sont planes. Pour le nœud 4, qui appartient à une des deux sous-faces, et pour le nœud 5, qui appartient aux deux sous-faces, on a respectivement

$$\frac{1}{|K|} \int_K \nabla \varphi_4 = \frac{1}{|K|} \sum_{f \in F_{4,K}^p} \left(\frac{|f|}{M_f} + \frac{1}{2} \left(|e_{f,4}^-| \mathbf{n}_{f,4}^- + |e_{f,4}^+| \mathbf{n}_{f,4}^+ \right) \cdot (\mathbf{x}^f - \bar{\mathbf{x}}^f) \right) \mathbf{n}_f + \frac{1}{|K|} \frac{|T_a|}{3} \mathbf{n}_{T_a}$$

$$\frac{1}{|K|} \int_K \nabla \varphi_5 = \frac{1}{|K|} \sum_{f \in F_{5,K}^p} \left(\frac{|f|}{M_f} + \frac{1}{2} \left(|e_{f,5}^-| \mathbf{n}_{f,5}^- + |e_{f,5}^+| \mathbf{n}_{f,5}^+ \right) \cdot (\mathbf{x}^f - \bar{\mathbf{x}}^f) \right) \mathbf{n}_f + \frac{1}{|K|} \frac{|T_a|}{3} \mathbf{n}_{T_a} + \frac{1}{|K|} \frac{|T_b|}{3} \mathbf{n}_{T_b}$$

où l'on a noté $F_{i,K}^p$ le sous-ensemble des faces de $F_{i,K}$ qui étaient déjà planes (sur cet exemple, il s'agit des faces latérales), et où on a utilisé le fait que $\mathbf{x}^f = \bar{\mathbf{x}}^f$ sur une face triangulaire pour simplifier l'expression. Il suffit donc de modifier le calcul des termes \mathbf{q}_i (cf équation (3.22)) dans l'assemblage des matrices locales. Le calcul des volumes $|K|$ est également adapté pour tenir compte de la nouvelle géométrie des mailles. Cette stratégie de division est donc utilisable lorsqu'elle est implémentée directement dans le code, en ne nécessitant de plus que peu d'ajustements. Cependant, si elle permet de s'affranchir de la limite technique posée par la structure de donnée, elle manipule implicitement des objets qui ne sont pas des polyèdres, ce qui peut conceptuellement être gênant. De plus, elle n'est pas directement généralisable à des faces non planes présentant plus de 4 sommets ou à des mailles dont les faces latérales seraient également non planes.

On introduit donc une deuxième stratégie de division en sous-mailles plus générale, qui triangule les faces non planes par rapport à un point \mathbf{x}_f^s . La définition de ce point étant relativement libre, on le calcule à partir de la moyenne arithmétique des sommets de la face non plane : $\mathbf{x}_f^s = \frac{1}{M_f} \sum_{j \in \mathcal{M}_f} \mathbf{x}(V_j)$. Chaque face non plane est donc divisée en M_f triangles T_i^f de normales sortantes \mathbf{n}_{T_i} . Cette triangulation est schématisée sur la figure 5.8 pour les mêmes éléments que précédemment, mais elle s'étend évidemment aux faces comportant un nombre quelconque de sommets. De plus, contrairement à l'approche précédente, celle-ci permettrait d'adopter la stratégie pratique consistant à réécrire le maillage en tant qu'éléments polyédriques (elle est du moins compatible avec les formats de maillages disponibles), ou la stratégie de modification du schéma numérique à la volée (en s'inspirant du paragraphe précédent). Dans les deux cas, la difficulté technique provient de l'introduction de sommets supplémentaires qui ajoutent des inconnues au système linéaire. Modifier le maillage demande l'introduction de ces sommets, et modifier la méthode demande l'indexation de ces sommets. Même si cette difficulté est surmontable, il n'empêche que rajouter des sommets a un coût très important en terme de nombre d'inconnues puisque chaque sommet génère trois inconnues en déplacement. Appliquer cette méthode sur le maillage d'exemple (figure 5.4) reviendrait à peu près à doubler le nombre d'inconnues en déplacement. Pour éviter cela, la section suivante

Méthode de division	Par modification du maillage	Par modification de la méthode	Commentaire
Diagonale	Impossible*	Réalisé	Généralisation à $M_f > 4$ délicate
Triangulation	Possible	Possible	Inconnues supplémentaires à éviter (cf 5.3.2)

(*) Avec les formats de maillage disponibles

TAB. 5.2 : Résumé de la faisabilité des combinaisons permettant la transformation en maillage polyédrique.

présente une modification de la méthode des éléments virtuels qui utilise cette triangulation mais n'ajoute pas d'inconnues au système.

5.3.2 Un espace d'approximation modifié pour les éléments virtuels

La méthode proposée pour éviter d'ajouter des inconnues aux points de triangulation provient de [CBP17], où des problèmes de déformations finies sont considérés. Pour ce genre de problèmes, même si les faces sont planes dans la configuration initiale, il est possible qu'elles ne le soient plus après application de la déformation ce qui justifie ce besoin de triangulation. L'idée est de modifier l'espace d'approximation de manière à pouvoir exprimer les déplacements aux centres de triangulations en fonction des déplacements des autres sommets de la face. Ainsi, l'espace d'approximation local $V_{h,scal}^K$ des éléments virtuels n'est plus défini par (3.3) mais est remplacé par

$$V_{h,scal}^K = \left\{ v_h \in H^1(K) \text{ tel que } v_h|_{\partial K} \in \mathcal{C}^0(\partial K), \quad v_h|_{T_j^f} \in \mathbb{P}_1 \quad \forall T_j^f \subset \partial K, \right. \\ \left. v_h(\mathbf{x}_s^f) = \frac{1}{M_f} \sum_{j \in \mathcal{M}_f} v_h(V_j^f) \quad \forall f \in \partial K \quad \text{et} \quad \Delta v_h = 0 \text{ dans } K \right\}. \quad (5.6)$$

Cet espace satisfait toujours les propriétés énoncées au début de la section 3.1.1 :

- Si q appartient à $\mathbb{P}_1(K)$, il est évident que $q|_{T_j^f} \in \mathbb{P}_1(K)$ et $\Delta q = 0$. De plus, par définition de \mathbf{x}_s^f et par linéarité, $q(\mathbf{x}_s^f) = q\left(\frac{1}{M_f} \sum_{j \in \mathcal{M}_f} V_j^f\right) = \frac{1}{M_f} \sum_{j \in \mathcal{M}_f} q(V_j^f)$ donc $q \in V_{h,scal}^K$.
- Si deux fonctions $v^a \in V_{h,scal}^K$ et $v^b \in V_{h,scal}^K$ partageant les mêmes valeurs sur les M_K sommets de K , alors $v^a(\mathbf{x}_s^f) = v^b(\mathbf{x}_s^f)$. Sur chaque face triangulaire, $v^- := v^a - v^b = 0$ car $v^- \in \mathbb{P}_1$ et s'annule en trois points distincts. Puisque $\Delta v^- = 0$ dans K , il s'ensuit que $v^- = 0$ et donc que $v^a = v^b$.
- Pour une face f donnée, la trace de v_h sur f ne dépend que des valeurs de v_h sur les sommets de f et en \mathbf{x}_s^f . Puisque cette dernière valeur est une combinaison linéaire des premières, la trace de v_h ne dépend finalement que des valeurs de v_h sur les sommets de f .

Une fois cette définition adoptée pour $V_{h,scal}^K$ l'espace global scalaire ainsi que les espaces vectoriels V_h^K et V_h sont construits de la même manière que dans le chapitre 3. En particulier, les degrés de liberté sont toujours les valeurs aux sommets originaux des faces et les fonctions de base (vectorielles) sont toujours définies par $\varphi_i^k = \varphi_i \mathbf{e}_k$ ($k = x, y, z$) avec $\varphi_i(V_j) = \delta_{i,j} \quad \forall j \in \mathcal{M}$.

La construction de la forme bilinéaire approchée, celle de la formulation variationnelle approchée ainsi que l'assemblage du système linéaire ne sont pas modifiés par rapport aux méthodes décrites dans la

section 3.1.2. En revanche, comme avec la stratégie de division précédente, le calcul de la projection des fonctions de base doit être adapté : en effet, le nouvel espace d'approximation défini par (5.6) ne contient plus explicitement la propriété $\int_f \pi^{f,0} v_h = \int_f v_h$, qui avait été ajoutée dans le but spécifique de pouvoir calculer les projections à partir des degrés de liberté. Plus précisément, le calcul des termes $\mathbf{q}_i = \frac{1}{|K|} \int_K \nabla \varphi_i$ doit être adapté en utilisant les informations contenues dans l'espace d'approximation. En l'occurrence, la formule de Stokes est cette fois appliquée sur les sous-faces triangulaires

$$\mathbf{q}_i = \frac{1}{|K|} \int_K \nabla \varphi_i = \frac{1}{|K|} \sum_f \sum_{j=1}^{M_f} \int_{T_j^f} \varphi_i \mathbf{n}_{T_j} = \frac{1}{|K|} \sum_f \sum_{j=1}^{M_f} \frac{|T_j^f|}{3} \left(\varphi_i(V_j) + \varphi_i(V_{j+1}) + \varphi_i(\mathbf{x}_s^f) \right) \mathbf{n}_{T_j}$$

sur lesquelles φ_i peut être intégrée exactement en tant que quantité linéaire. En utilisant l'autre propriété de l'espace d'approximation $\varphi_i(\mathbf{x}_s^f) = \frac{1}{M_f} \sum_{j \in \mathcal{M}_f} \varphi_i(V_j^f) = \frac{1}{M_f} \text{car } \varphi_i(V_j^f) = \delta_{ij}$, on obtient finalement

$$\mathbf{q}_i = \frac{1}{3|K|} \sum_{f \in \mathcal{F}_{i,K}} \left(|T_i^f| \mathbf{n}_{T_i^f} + |T_{i+1}^f| \mathbf{n}_{T_{i+1}^f} + \frac{1}{M_f} \sum_{j=1}^{M_f} |T_j^f| \mathbf{n}_{T_j} \right). \quad (5.7)$$

Remarque. Dans le cas où les faces originales sont déjà planes, les espaces définis par (3.3) et (5.6) sont équivalents au sens où ils partagent la même dimension et les mêmes degrés de liberté : un ensemble de valeurs aux sommets donné identifie de manière unique une fonction de l'espace original ou de l'espace modifié. La contribution de la face f au vecteur \mathbf{q}_i peut donc être calculée ou bien avec l'expression originale (3.18), ou bien avec la nouvelle expression (5.7). Dans l'implémentation effectuée, chaque face originale possède un attribut booléen permettant d'indiquer si elle est plane ou non. Seules les faces non planes sont triangulées et contribuent à \mathbf{q}_i via la technique développée dans ce paragraphe.

Les mailles à faces non planes amènent également une difficulté supplémentaire dans la prise en compte des coefficients aux limites de Neumann. D'une part parce que les faces de bord n'étant plus planes, le vecteur traction $\mathbf{t}_N = \overline{\sigma^e} \cdot \mathbf{n}$ ne peut plus être facilement calculé en amont puis imposé en tant que condition aux limites ; d'autre part parce que la formule d'approximation du second membre (3.25) avait été établie pour une face de bord plane. On propose donc une autre approximation des conditions de Neumann qui calcule le vecteur \mathbf{t}_N sur chaque sous-face et qui exploite l'appartenance de φ_i à \mathcal{P}_1 pour raisonner comme lors du calcul de \mathbf{q}_i : en utilisant la symétrie de $\overline{\sigma^e}$,

$$\begin{aligned} \int_f \overline{\sigma^e} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\varphi}_i^k &= \sum_{j=1}^{M_f} \int_{T_j^f} \overline{\sigma^e} \mathbf{n} \cdot \varphi_i \mathbf{e}_k \approx \sum_{j=1}^{M_f} \overline{\sigma^e}(V_j) \mathbf{e}_k \cdot \int_{T_j^f} \varphi_i \mathbf{n}_{T_j} \\ &= \overline{\sigma^e}(V_i) \mathbf{e}_k \cdot \left(|T_i^f| \mathbf{n}_{T_i^f} + |T_{i+1}^f| \mathbf{n}_{T_{i+1}^f} + \frac{1}{M_f} \sum_{j=1}^{M_f} |T_j^f| \mathbf{n}_{T_j} \right). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Pour mesurer l'amélioration apportée par ce nouvel espace et par les méthodes de calcul des projections et des conditions aux limites de Neumann qui y sont associées, on considère une fois encore un patch-test pour le problème de mécanique. La solution exacte à atteindre est $\mathbf{u} = 10^{-3} z \mathbf{e}_z$, avec des coefficients élastiques fixés à $E = 1$, $\nu = 0.25$. Le maillage considéré est toujours le maillage géosciences de test représenté sur la figure 5.4. Des conditions aux limites de Dirichlet sont imposées sur les faces latérales X_{\max} et Y_{\max} ainsi que sur la face supérieure, tandis que des conditions aux limites de Neumann, calculées

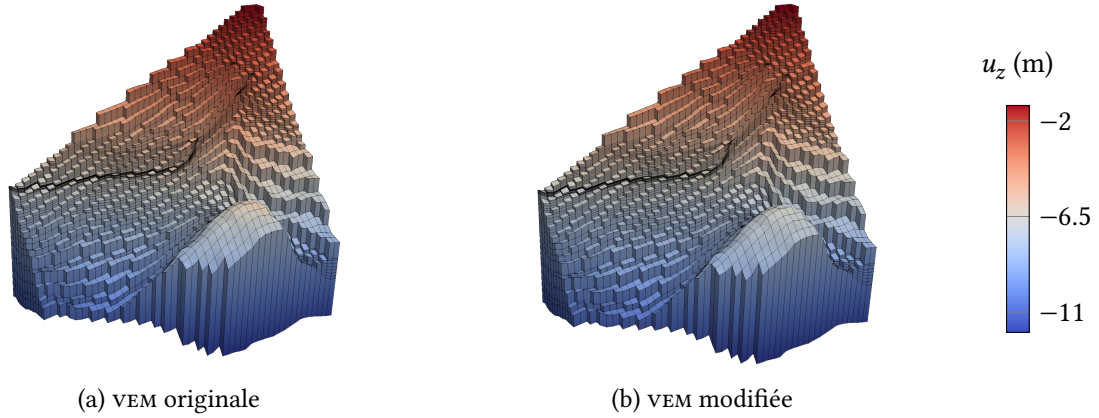


FIG. 5.9 : **Comparaison de la version modifiée des éléments virtuels à la version originale** sur un maillage typique des géosciences (vue en coupe). Ce problème patch test dont la solution exacte vaut $\mathbf{u} = 10^{-3}z\mathbf{e}_z$ est satisfait avec la version modifiée ($E_{\text{rel}}^{\mathbf{u}} = 10^{-12}$), mais pas avec la version originale ($E_{\text{rel}}^{\mathbf{u}} = 10^{-2}$), même si les deux solutions sont visuellement proches.

à partir de la solution exacte, sont imposées sur les autres faces. Dans la version dite originale, on prescrit le vecteur traction sur chacune des 3 autres faces du domaine :

$$\mathbf{t}_N = \begin{cases} -4 \cdot 10^{-4} \mathbf{e}_x & \text{sur } X = 0, \\ -4 \cdot 10^{-4} \mathbf{e}_y & \text{sur } Y = 0, \\ -1.2 \cdot 10^{-3} \mathbf{e}_z & \text{sur la face inférieure.} \end{cases}$$

On calcule ensuite les projections avec la méthode développée pour les faces planes dans le chapitre 3. Toutefois, les grandeurs géométriques telles que aires, volumes et normales ont été calculées en tenant compte des faces non planes et en les triangulant, ce qui explique que le résultat ne soit pas si éloigné de la solution attendue. Dans la version dite modifiée, la face inférieure n'étant pas plane (voir figure 5.4c), on adopte la technique développée dans l'équation (5.8) en fournissant pour cette face la matrice des contraintes $\hat{\sigma}^e = (4 \cdot 10^{-4}, 4 \cdot 10^{-4}, 1.2 \cdot 10^{-3}, 0, 0, 0)^T$. De même, le calcul des matrices locales est effectué en utilisant l'espace et la méthode détaillés dans ce paragraphe. Pour ces deux méthodes, le champ de déplacement u^z est représenté sur la figure 5.9, vue en coupe avec reconstruction des mailles traversées par le plan de coupe. La différence entre les deux approches est distinguable à l'œil nu même si les deux résultats semblent proches. C'est en calculant les écarts avec la solution exacte $E_{\text{rel}}^{\mathbf{u}}$ et E_{rel}^{σ} que l'on s'aperçoit que la version modifiée est bien plus précise : on obtient des écarts de l'ordre de 10^{-12} pour les déplacements et 10^{-12} pour les contraintes avec la méthode modifiée, qui satisfait donc le patch test, alors que la méthode originale produit des écarts de l'ordre de 10^{-2} pour déplacements et 10^{-1} pour les contraintes.

5.3.3 Un mot sur les volumes finis

Tout comme des modifications ont été apportées à la méthode des éléments virtuels dans le but de traiter les faces non planes, la méthode des volumes finis doit être adaptée à cette même fin pour conserver un schéma couplé performant. Sans proposer un traitement général comme pour la méthode des éléments virtuels, ni rentrer dans les détails, on relève dans [AEK06] une modification assez simple à apporter au schéma MPFA-O pour traiter les faces quadrilatères non planes : il suffit d'adopter une certaine expression

pour le calcul des vecteurs normaux aux faces. Ceci revient à transformer les quadrilatères non plans en des parallélogrammes plans. D'après cette même référence, avec une telle modification, le patch test est satisfait lorsque le tenseur $\bar{\kappa}$ est homogène ; dans le cas d'un tenseur hétérogène, la pression et le flux calculés convergent respectivement à l'ordre 2 et 1 en espace. En réutilisant l'implémentation des schémas volumes finis multipoints disponible dans la plateforme Arcane, on constate sur le maillage pris pour exemple, avec une solution linéaire $p = 10^{-3}z$ et un tenseur homogène $\bar{\kappa} = \bar{I}_3$, que le schéma multipoints ne retrouve pas la solution exacte. Néanmoins, on observe un gain de deux ordres de grandeur sur l'écart E_{rel}^p par rapport au schéma à deux points.

5.4 Illustration sur une application géosciences

Les différents ingrédients introduits dans ce chapitre ont permis de proposer un second schéma couplé conçu pour lever les limitations dont souffrait le schéma VEM-TPFA. Pour compléter les exemples synthétiques des sections précédentes, on propose une illustration sur une application réaliste de géosciences, à défaut de disposer d'une situation réelle. Il s'agit de simuler l'extraction, via un puits vertical, d'un fluide aqueux initialement piégé dans un milieu poreux souterrain stratifié.

5.4.1 Paramètres du cas

On réutilise pour ce cas le maillage précédent, mais en redéfinissant les matériaux rocheux présents dans le domaine : la répartition des strates ainsi que les caractéristiques des trois matériaux utilisés sont détaillées sur la figure 5.10. La porosité ϕ est utilisée pour calculer le coefficient de stockage c_0 selon la relation $c_0 = \phi c_f$, où $c_f = 4.5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ est le module de compressibilité de l'eau. La perméabilité varie fortement d'un matériau à l'autre : le réservoir et les grès, relativement perméables, sont séparés par des couches d'argile très peu perméables. Ceci implique plusieurs ordres de grandeur de différence entre les matériaux pour la matrice de mobilité, définie comme le rapport entre la perméabilité et la viscosité dynamique de l'eau $\mu_f = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$. En raison du poids exercé par les couches supérieures, le réservoir se compacte durant la production ce qui génère un phénomène de subsidence. Celui-ci devrait mécaniquement se modéliser par des déformations plastiques. Néanmoins, le modèle physique utilisé ici permettant uniquement la description de déformations élastiques linéaires, on procède autrement pour prendre en compte cet effet : le module de Young est abaissé à $E = 1 \text{ GPa}$ dans le réservoir contre $E = 5 \text{ GPa}$ dans le reste du domaine. Dans le but de simplifier cette étude, les coefficients de Poisson ν et de Biot α sont maintenus constants.

Pour ce genre de problème où la gravité intervient, il est d'usage de raisonner en terme de surpression $\tilde{p} = p - (P_0 - \rho_f)g|z|$ où $\rho_f = 1000 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ est la masse volumique de l'eau et $P_0 = 1 \text{ bar}$ la pression atmosphérique. Ceci permet d'isoler les effets liés aux sollicitations mécaniques de la pression hydrostatique due à la profondeur. De plus, avec ce point de vue, le schéma volumes finis pour la partie écoulement n'a pas à tenir compte du terme de gravité lors du calcul des flux. Au passage, pour une configuration physique de ce genre où le second membre de l'équation de mécanique est le terme de gravité $\mathbf{f} = \rho\mathbf{g} = (\phi\rho_f + (1-\phi)\rho_s)\mathbf{g}$, ρ désignant la masse volumique de l'ensemble et ρ_s celle du solide, le système (2.17) se réécrit en variables (\mathbf{u}, \tilde{p})

$$\begin{aligned} -\mathbf{div} \left(\bar{\mathbb{C}} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}_{\mathbf{u}} - \alpha \tilde{p} \bar{\mathbf{I}}_d \right) &= ((1-\phi)\rho_s - (\alpha - \phi)\rho_f)\mathbf{g} \\ \partial_t (c_0 \tilde{p}) + \alpha \mathbf{div}(\mathbf{u}) + \mathbf{div}(-\bar{\kappa}(\nabla \tilde{p})) &= q. \end{aligned}$$

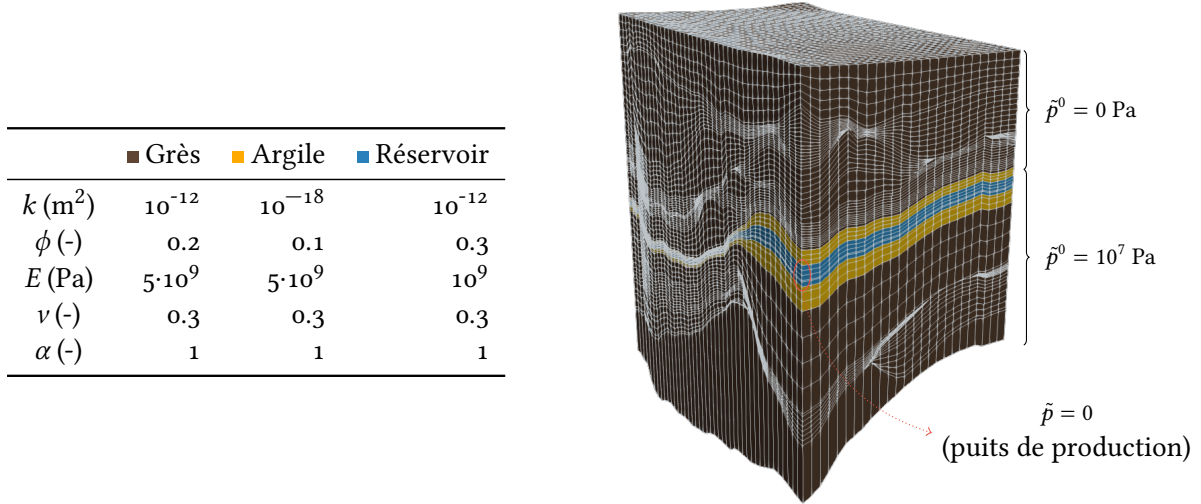


FIG. 5.10 : **Maillage et caractéristiques des strates géologiques** utilisées pour le cas de subsidence. Les conditions initiales en surpression et la position du puits de production sont détaillées à droite de la figure.

Pour ce problème, on prend $\rho_s = 2650 \text{ kg.m}^{-3}$ dans la couche réservoir et on choisit ρ_s dans les deux autres matériaux de façon à ce que le produit $(1 - \phi)\rho_s$ soit constant dans le domaine (soit $\rho_s \approx 2320 \text{ kg.m}^{-3}$ pour le grès et $\rho_s \approx 2060 \text{ kg.m}^{-3}$ pour l'argile). On signale pour clore cet aparté qu'une telle force \mathbf{f} dérive d'un potentiel : puisque $\mathbf{g} = -|g|\nabla z$, on a $\mathbf{f} = \nabla(-|g|((1 - \phi)\rho_s + (\alpha - \phi)\rho_f)z)$ qui peut donc être approchée selon l'équation (5.5). Dans ce formalisme, la pression initiale imposée est une surpression de 100 bars dans le réservoir et dans les couches inférieures d'argile et de grès. Dans les couches recouvrant le réservoir, la surpression initiale est nulle (en d'autres termes, la pression est égale à la pression hydrostatique). Cette surpression permet de calculer un champ de déplacement initial en résolvant le problème de mécanique. Une fois cet état initial déterminé, en notant \mathbf{n} la normale sortante unitaire aux faces, les conditions aux limites sont les suivantes :

- sur les bords latéraux, le déplacement dans la direction orthogonale à la face ainsi que le flux sont fixés à 0 : $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ et $\nabla \tilde{p} \cdot \mathbf{n} = 0$. Pour les autres composantes du déplacement, une condition de contrainte libre est adoptée ;
- sur la face inférieure, le déplacement vertical et le flux sont fixés à 0 : $u_z = 0$ et $\nabla \tilde{p} \cdot \mathbf{n} = 0$;
- sur la face supérieure, les tractions mécaniques et la surpression sont nulles : $\overline{\sigma^e} \mathbf{n} = \mathbf{0}$ et $\tilde{p} = 0$;
- dans un des coins du domaine et au niveau du réservoir, la surpression est fixée à zéro de manière à modéliser une connectivité hydraulique infinie avec la surface et donc la partie productive du puits. En pratique, la condition ($\tilde{p} = 0$) est imposée sur un petit groupe de 6 faces latérales appartenant au réservoir et ayant un sommet sur la ligne verticale (x_{\max}, y_{\max}) , voir figure 5.10.

La simulation couvre une période d'un an divisée en 20 pas de temps.

5.4.2 Résultats numériques

Dès que la condition de surpression nulle est imposée dans le coin du réservoir, le fluide piégé à l'intérieur de celui-ci commence à se déplacer vers le puits de production et est progressivement drainé au

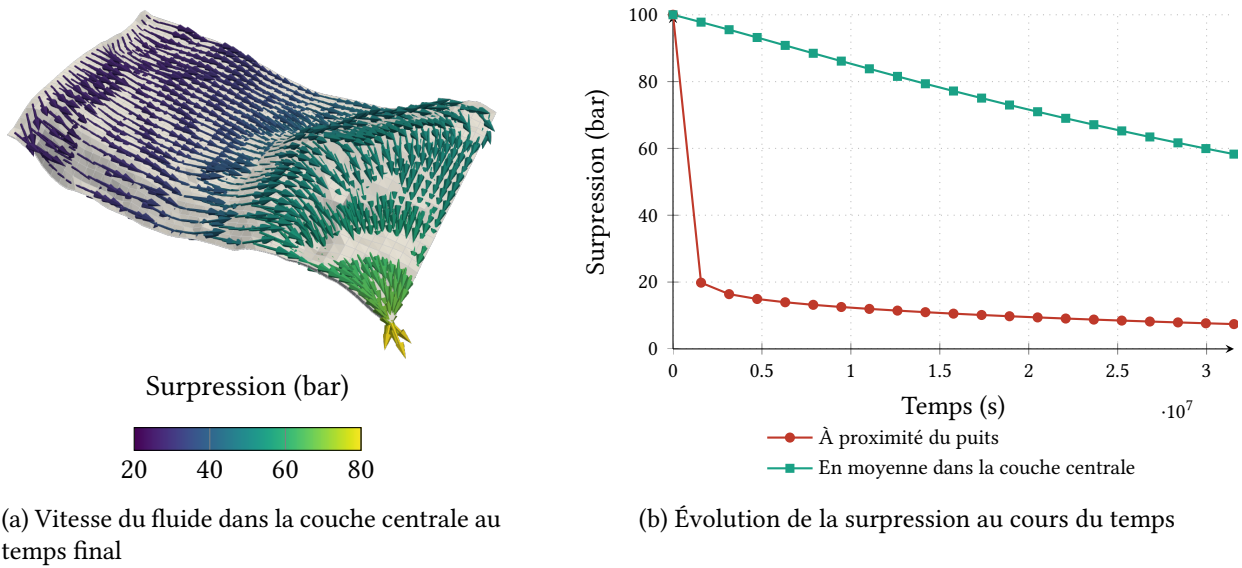


FIG. 5.11 : **Surpression et flux calculés dans la couche centrale du réservoir**, en fonction de l'espace au temps final (gauche), ou moyennés en espace et tracés en fonction du temps (droite).

fur et mesure que le temps s'écoule. Ce phénomène est représenté sur la figure 5.11. Au temps final de la simulation, les vecteurs flux \mathbf{v}_f colorés d'après la valeur de la surpression sont représentés dans la couche centrale du réservoir, en fonction de l'espace, sur la figure 5.11a. La surpression tend vers 0 à proximité du puits, alors qu'elle est toujours proche de sa valeur initiale de 100 bars à l'extrémité opposée du réservoir. Inversement, la surpression en une maille adjacente au puits ainsi que sa valeur moyenne dans toute la couche centrale du réservoir sont représentées en fonction du temps sur la figure 5.11b. On observe qu'à proximité du puits, la surpression se stabilise très rapidement (dès le premier pas de temps) autour de la valeur imposée. En revanche, la valeur moyenne dans la couche diminue de manière régulière durant l'extraction du fluide. Avec les paramètres choisis, cette valeur est à peine divisée par deux en fin de simulation. On note que dans les autres matériaux, en raison des barrières de perméabilité que constituent les couches d'argile, la surpression reste quasiment constante.

La conséquence de cette chute de pression est une diminution de la contrainte effective $\bar{\sigma}^e = \bar{\sigma} + \alpha p \bar{l}_3$. Cette chute est bien visible à proximité du puits, mais moins remarquable à distance de celui-ci puisque la surpression varie moins fortement au milieu du domaine. Ceci peut être observé sur la figure 5.12 où les contraintes totales (au signe près) sont tracées en fonction de la profondeur le long d'une ligne horizontale, située soit dans le coin productif, soit au centre du domaine. Sur ce graphe, la pression représentée est la pression absolue qui tient compte du terme hydrostatique et non la surpression. Les contraintes effectives peuvent donc être graphiquement retrouvées dans la différence entre les courbes de contraintes totales et la courbe de pression. À distance du réservoir, les contraintes horizontales σ_{xx} et σ_{yy} sont presque confondues dans la partie supérieure du domaine : la distinction apparaît dans la partie profonde du domaine, probablement en raison de la condition limite imposée sur la face inférieure : puisque seul le déplacement dans la direction \mathbf{e}_z est fixé, il peut y avoir un glissement dans les autres directions qui ne sont pas géométriquement équivalentes, la face inférieure n'étant pas un plan horizontal.

La diminution des contraintes effectives au niveau du puits implique les déformations et le compactage du réservoir. Pour observer les effets de l'extraction du fluide, on définit les déplacements relatifs $\Delta \mathbf{u}$ par

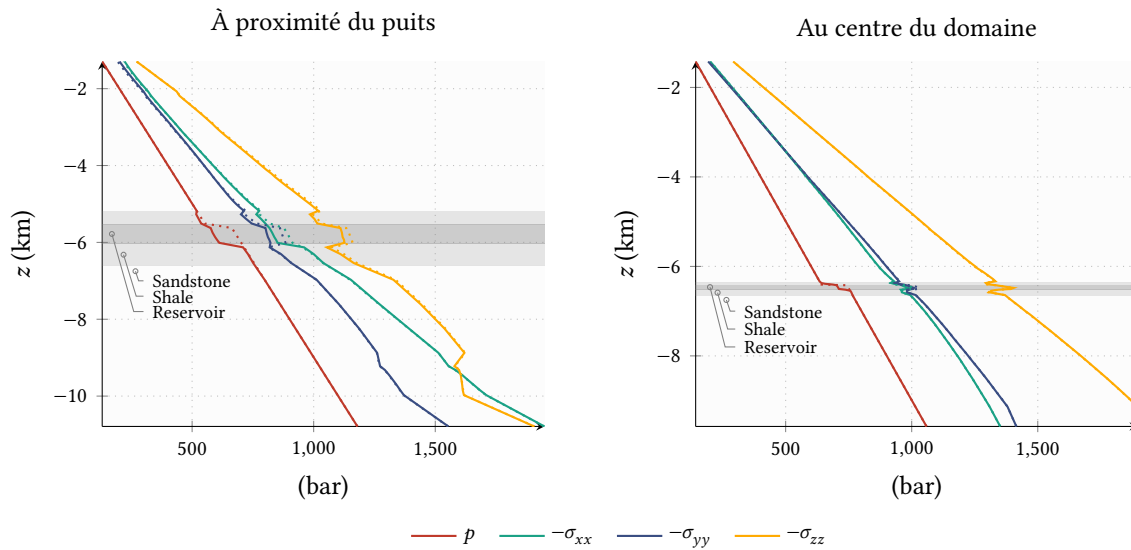


FIG. 5.12 : Évolution de la pression et des composantes diagonales du tenseur des contraintes le long d'une ligne verticale située à proximité du puits (gauche) ou au centre du domaine (droite). En pointillés, valeurs au temps initial ; en traits pleins, valeurs au temps final.

rapport à l'état initial en soustrayant le déplacement initial \mathbf{u}^0 (dû à la gravité) au champ de déplacement final. Au temps final, les déplacements relatifs dans les trois directions sont représentés sur la figure 5.13. L'effet prédominant s'observe sur le déplacement vertical Δu_z : en raison de l'extraction du fluide, la partie située au dessus du réservoir s'affaisse d'environ 1,5 mètres. C'est le phénomène de subsidence. En parallèle, la partie située en dessous du réservoir s'élève d'environ un demi-mètre. Cette légère décompaction est due au fait que la masse du réservoir est plus faible après extraction d'une partie du fluide. En plus de ce déplacement vertical, on observe que la subsidence entraîne la flexion de la partie supérieure du réservoir. Ce phénomène, dont l'intensité est tout de même moindre, est particulièrement visible sur les déplacements Δu_x .

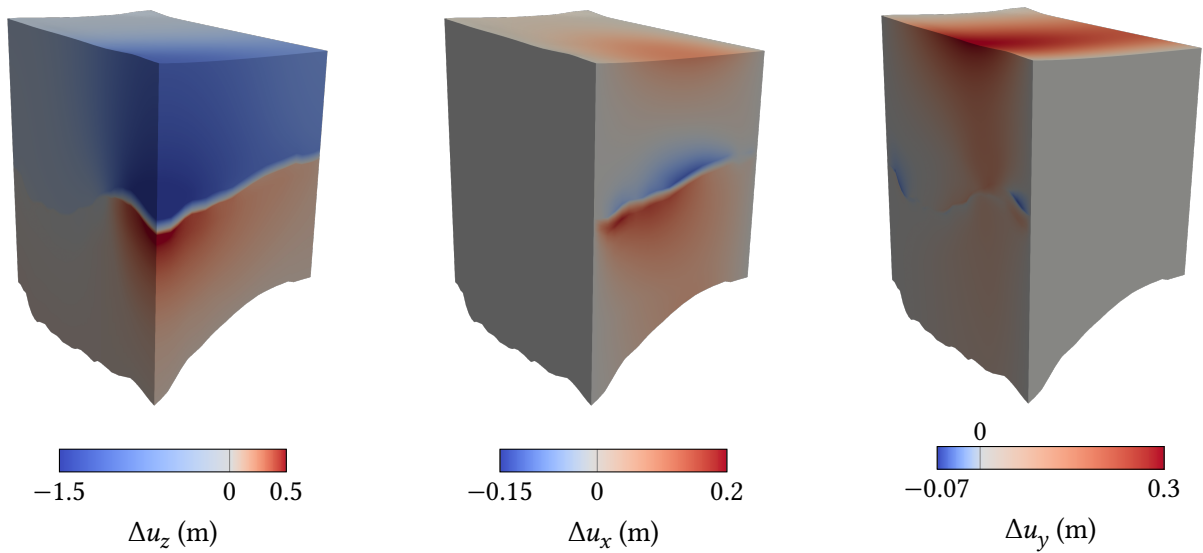


FIG. 5.13 : **Déplacements relatifs au temps final de la simulation.** Le phénomène dominant est la subsidence, affaissement de la partie supérieure du domaine.