
Réseaux à composantes unicycliques avec contrainte sur la taille des cycles

L'objet de ce chapitre est l'étude du problème de synthèse des réseaux à composantes connexes unicycliques respectant une contrainte sur la taille des cycles. Le réseau ne doit pas contenir des cycles d'une taille inférieure ou égale à p . L'étude proposée est polyédrale. Nous présentons donc un ensemble d'inégalités valides dont nous étudions la dimension des faces induites ainsi que leurs algorithmes de séparation. Des résultats numériques montrent que l'approche permet de résoudre des problèmes pratiques de dimensions raisonnables.

2.1 Introduction

Étant donné un graphe pondéré et non orienté désigné par $G = (V, E)$, on souhaite calculer un sous-graphe de poids total minimum $G' = (V, E')$ ($E' \subset E$) dont les composantes sont toutes unicycliques. En outre, le nombre d'arêtes de chacun des cycles obtenus dans G' ne doit pas être strictement inférieur à $p + 1$.

Ce problème a des applications dans les réseaux de télécommunications. En effet, on souhaite en général construire un réseau de coût total minimum avec un certain niveau de résistance aux pannes. La structure du cycle (ou l'anneau dans le contexte des réseaux) est une bonne alternative pour apporter une certaine résistance aux pannes simples de liens. Les demandes en trafic entre des noeuds d'un même cycle sont protégées contre ces éventuelles pannes alors que les autres demandes peuvent être interrompues. Cependant, des cycles de petites tailles n'offrent qu'une protection limitée, d'où la considération d'une contrainte sur la taille des cycles. D'autres contraintes peuvent aussi être importantes à considérer (la taille des composantes connexes, le nombre des composantes connexes, des contraintes sur les degrés des noeuds, etc).

Dans ce chapitre, on considère uniquement la contrainte portant sur la tailles des cycles des composantes connexes unicycliques obtenues.

D'importants travaux ont été réalisés dans le domaine de synthèse des réseaux sécurisés. Les références [5, 34, 52, 55, 77] sont quelques exemples. Une vaste littérature porte également sur

les problèmes de cycles. [83] est une bonne référence qui présente un état de l'art des travaux de localisation des cycles dans les réseaux de télécommunications (et transports).

Ce nouveau problème possède plusieurs liens avec d'anciens problèmes. Par exemple si $p = |V| - 1$, on obtient le problème du voyageur de commerce. Ceci implique clairement que notre problème est aussi NP-Difficile [45]. Si les contraintes sur la taille des cycles ne sont plus imposées ($p = 2$), le problème devient alors facile. En effet, on sait que l'ensemble des sous-ensembles d'arêtes qui induisent un graphe dont les composantes contiennent au plus un cycle est un matroïde. Ce matroïde est connu sous le nom de matroïde bi-circulaire (voir [94]). Un simple algorithme glouton peut donc être appliqué pour calculer un réseau de coût total minimum dont les composantes connexes sont unicycliques (voir Chapitre 1).

Il est important de signaler qu'il est aussi facile de construire un réseau (graphe) unicyclique (graphe connexe qui contient exactement un seul cycle). Ceci provient du fait que l'ensemble des sous-ensembles d'arêtes qui induisent un graphe qui contient au plus un cycle est aussi un matroïde. Ce matroïde est inclus dans le matroïde bi-circulaire (voir Chapitre 1).

Si les contraintes d'unicyclicité (au plus un cycle) vont être remplacées par des contraintes dites de cyclicité (chaque composante est exactement un cycle) on obtient alors le problème du 2-Couplage (2-factor) qui est un problème facile (voir [117]). Si des contraintes sur la taille des cycles sont ajoutées (pas de cycles de taille inférieure à 5), le problème devient alors difficile (voir [22]).

Notre problème a aussi des liens avec le problème de l'étoile-anneau qui consiste à construire un réseau qui contient un seul cycle autour de quelques noeuds, alors que les autres noeuds sont directement liés à ceux qui forment le cycle. Ce problème et quelques variations sont étudiés dans [2, 82].

Si les contraintes d'unicyclicité sont relaxées, on obtient alors un autre problème connu consistant à trouver un graphe de poids minimum (ou maximum) qui ne contient pas de cycle de taille inférieure à $p + 1$. Ce problème est équivalent au problème de couverture dans lequel on cherche un ensemble d'arêtes de poids minimum (maximum) intersectant tout cycle dont la taille ne dépasse pas p . Quand $p = 3$, on sait déjà que le problème est facile si le graphe n'est pas contractible à $K_5 \setminus e$ (le graphe complet avec 5 noeuds moins une arête) [39]. Cependant, le problème est en général NP-Difficile [128].

Ce chapitre est organisé comme suit : les notations et une formulation mathématique sont introduites dans la section suivante. Quelques inégalités valides sont décrites dans la section 3.4. Les faces induites par ces inégalités valides sont étudiées dans la section 2.4. Dans la section 2.5, on présente un algorithme à plans coupants pour résoudre le problème du réseau à composantes connexes et unicycliques de coût total minimum avec la contrainte sur la taille des cycles. Les problèmes de séparation relatifs aux inégalités valides sont étudiés. La section 2.6 est dédiée aux résultats numériques. On cloture ce chapitre par une conclusion qu'on peut trouver en section 2.7.

2.2 Notations et Formulation Mathématique

Soit \mathcal{H}_p l'ensemble des graphes tels que chaque composante connexe contient exactement un cycle ayant au moins $p + 1$ arêtes. En d'autres termes, toutes les composantes connexes sont

des graphes unicycliques et il n'y a pas de cycle de taille inférieure ou égale à p .

Étant donné un graphe $G = (V, E)$, on considère tous les sous-graphes $G' = (V, E')$ ($E' \subset E$) qui appartiennent à \mathcal{H}_p . Un sous-graphe est représenté par un vecteur d'incidence $(x_e)_{e \in E'}$ où $x_e = 1$ si e appartient au sous-graphe et 0 sinon. L'enveloppe convexe des vecteurs d'incidence x de ces sous-graphes qui appartiennent à \mathcal{H}_p est notée par $P(G, p)$. Calculer un sous-graphe de poids minimum qui appartient à \mathcal{H}_p est ainsi équivalent à calculer un vecteur de coût minimum dans $P(G, p)$.

Dans ce chapitre, on suppose que $G = (V, E)$ est un graphe simple, connexe et non orienté (si G n'est pas connexe, on peut s'intéresser à chacune de ses composantes connexes). Le nombre de sommets est noté par $n = |V|$. On suppose aussi que $n \geq 3$ et $p \leq n - 1$. Un coût w_e est associé à chaque arête $e \in E$.

Une arête $e \in E$ est parfois notée par (i, j) où i et j sont les deux extrémités de e . Étant donné un vecteur $(\alpha_e)_{e \in E}$, α_e peut aussi être noté par α_{ij} . Si A est un sous-ensemble de sommets, alors $\delta(A)$ est l'ensemble des arêtes qui ont exactement une extrémité dans A . Si $A = \{v\}$ où $v \in V$, alors on peut écrire $\delta(v)$ au lieu de $\delta(\{v\})$.

Soient A et B deux sous-ensembles de sommets disjoints, $\delta(A) \setminus \delta(B)$ représente l'ensemble des arêtes qui ont une extrémité dans A et l'autre extrémité dans $V \setminus \{A \cup B\}$. Soit $(x_e)_{e \in E}$ un quelconque vecteur indexé par E , alors $x(A, B)$ est utilisé pour noter la somme des poids des arêtes qui ont une extrémité dans A et une extrémités dans B : $x(A, B) = \sum_{(i,j) \in E, i \in A, j \in B} x_{ij}$. Quand

$B = \{v\}$, on écrit $x(A, v)$ au lieu de $x(A, \{v\})$. On écrit aussi $x(A)$ pour noter la somme des poids des arêtes qui ont les deux extrémités dans A . $x(A) = \sum_{(i,j) \in E, i \in A, j \in A} x_{ij}$. Si C est un ensemble

d'arêtes $C \subset E$, alors $x(C)$ représente naturellement la somme des poids des éléments de C : $x(C) = \sum_{e \in C} x_e$.

Dans ce qui suit, on va donner la formulation mathématique pour notre problème de synthèse de réseaux.

Pour commencer, on sait que le matroïde bi-circulaire est un matroïde transversal [94]. Autrement dit, les ensembles indépendants du matroïde bi-circulaire peuvent être représentés par un couplage. Pour être plus précis, on pose H le graphe biparti dont l'ensemble des sommets est donné par $V \cup E$, et il existe une arête entre $v \in V$ et $e \in E$ si et seulement si v est une extrémité de e . Pour tout couplage de H , l'ensemble des arêtes de E incluses dans ce couplage est un indépendant du matroïde bi-circulaire. Les bases de ce matroïde sont données par des couplages de taille n (en effet, notre problème n'a pas de solution si le rang du matroïde bi-circulaire associé à G est inférieur à n).

Les observations données ci-dessus nous aident alors à construire une formulation mathématique des contraintes d'unicyclité. Pour toute arête $e = (i, j) \in E$, on a une variable x_e et deux variables y_{ie} et y_{je} où y_{ie} est égal à 1 si le sommet i est couvert par l'arête (i, j) . x_e est donné par $y_{ie} + y_{je}$. En utilisant la caractérisation polyédrale et classique des couplages bipartis (voir [117]), on déduit que notre problème peut être formulé ainsi (après relaxations des

contraintes sur la taille des cycles) :

$$\begin{aligned}
& \min \sum_{e \in E} w_e x_e \\
& x_e = y_{ie} + y_{je}, \forall e = (i, j) \in E \\
& \sum_{e=(i,j) \in E} y_{ie} = 1, \forall i \in V \\
& 0 \leq y_{ie}, \forall i \in V, e = (i, j) \in E \\
& x_e \leq 1, \forall e \in E.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Les contraintes sur la taille des cycles peuvent être intégrées comme suit. Il suffit d'écrire que le nombre d'arêtes dans tout ensemble de sommets A de cardinalité au plus p ne peut pas dépasser $|A| - 1$.

$$x(A) \leq |A| - 1, A \subset V, 2 \leq |A| \leq p \tag{2.2}$$

Ainsi, notre problème est bien formulé par (2.1), (2.2) avec les contraintes d'intégrité (2.3) :

$$x_e \in \{0, 1\}, \forall e \in E. \tag{2.3}$$

Quand les solutions extrêmes de (2.1) sont des vecteurs en 0-1, celles de (2.1)+(2.2) peuvent être fractionnaires. En outre, la séparation des inégalités (2.2) n'est pas facile. On essaiera alors de renforcer le système (2.1)+(2.2) en ajoutant quelques inégalités qui sont valides pour $P(G, p)$.

2.3 Inégalités Valides

Proposition 2.1: Soient A et B deux ensembles disjoints de V tel que $|A| \leq p - 1$. Alors l'inégalité suivante est valide pour l'enveloppe convexe $P(G, p)$:

$$2x(A) + x(A, B) \leq 2|A| + |B| - 2. \tag{2.4}$$

Preuve: Soit C l'ensemble complémentaire de $A \cup B$. Sachant que $n = x(A) + x(B) + x(C) + x(\delta(C)) + x(A, B)$, l'inégalité $2x(A) + x(A, B) \leq 2|A| + |B| - 2$ est équivalente à $x(A) \leq |A| - 2 + x(B) + x(C) + x(\delta(C)) - |C|$. On a alors à montrer la validité de cette dernière inégalité.

D'abord, on remarque qu'on a nécessairement $x(C) + x(\delta(C)) - |C| \geq 0$. Ceci provient du fait que chaque composante connexe de C qui ne contient pas de cycle est nécessairement connectée à au moins un sommet dans $A \cup B$.

On suppose ensuite que $x(C) + x(\delta(C)) - |C| \geq 1$. Du fait que $|A| \leq p - 1 \leq p$, on a alors $x(A) \leq |A| - 1 = |A| - 2 + 1 \leq |A| - 2 + x(B) + x(C) + x(\delta(C)) - |C|$.

On suppose maintenant que $x(C) + x(\delta(C)) - |C| = 0$. Si on a $x(B) \geq 1$ ou $x(A) \leq |A| - 2$, alors l'inégalité $x(A) \leq |A| - 2 + x(B) + x(C) + x(\delta(C)) - |C|$ est valide. Il reste à montrer qu'on ne peut pas avoir simultanément $x(B) = 0$, $x(A) = |A| - 1$ et $x(C) + x(\delta(C)) - |C| = 0$.

$x(C) + x(\delta(C)) - |C| = 0$ implique que chaque composante connexe de C et qui ne contient pas de cycle est connectée à $A \cup B$ par exactement une arête. Ceci implique aussi que toute composante unicyclique de C (composante qui contient un cycle) n'est pas connectée à $A \cup B$. Comme on sait que $|A| \leq p - 1$, alors il n'y a pas de sommet dans B qui est lié (connecté) à deux sommets de A . Mais, on a aussi $x(B) = 0$ qui implique qu'il n'est pas possible de construire

un cycle. Autrement dit, il n'existe aucune composante connexe unicyclique qui contient les sommets de A ou de B . La figure (2.1) illustre le fait qu'on ne peut pas avoir simultanément les cas $x(B) = 0$, $x(A) = |A| - 1$ et $x(C) + x(\delta(C)) - |C| = 0$. \square

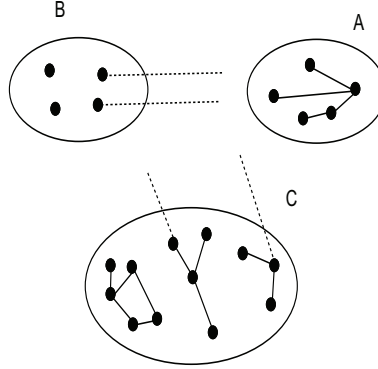


FIGURE 2.1 – Sur la validité de l'inégalité (2.4)

Proposition 2.2: Soient A et B deux ensembles disjoints de V . L'inégalité suivante est alors valide pour $P(G, p)$:

$$\sum_{v \in A} (2 - x(\delta(v))) + \sum_{v \in B} (x(\delta(v) \setminus \delta(A)) - 2) \leq n - (p + 1). \quad (2.5)$$

Preuve: Pour commencer, on s'intéresse au cas où $B = \emptyset$. Le nombre de sommets dont le degré est égal à 1 ne peut pas être supérieur à $n - (p + 1)$. En plus, $\sum_{v \in A} (2 - x(\delta(v)))$ est inférieur ou égal au nombre de sommets de A et dont le degré est de 1. Ceci implique alors que $\sum_{v \in A} (2 - x(\delta(v))) \leq n - (p + 1)$ pour tout sous-ensemble A .

Maintenant, et en utilisant le fait que $\sum_{v \in A} (2 - x(\delta(v))) + \sum_{v \in V \setminus A} (2 - x(\delta(v))) = 0$, on déduit que

$$\sum_{v \in V \setminus A} (x(\delta(v) - 2)) = \sum_{v \in A} (2 - x(\delta(v))) \leq n - (p + 1).$$

Autrement, si $A = \emptyset$ alors on a $\sum_{v \in B} (x(\delta(v) \setminus \delta(A)) - 2) \leq n - (p + 1)$ pour tout sous-ensemble B .

Intéressons nous maintenant au cas général dans lequel on a $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$. Il est clair que $\sum_{v \in A} (2 - x(\delta(v))) + \sum_{v \in B} (x(\delta(v) \setminus \delta(A)) - 2)$ ne peut pas décroître si on élimine de A tous les sommets pour lesquels $2 - x(\delta(v)) \leq 0$. On peut alors supposer que $2 - x(\delta(v)) = 1$ pour tout sommet $v \in A$. Considérons le graphe obtenu par la suppression de A . Comme la suppression d'un sommet de degré 1 ne casse pas la propriété d'unicyclicité (toutes les composantes connexes restent unicycliques, et pas de nouvelles composantes connexes créées), alors le nouveau graphe satisfait les contraintes $\sum_{v \in B} (x(\delta(v)) - 2) \leq (n - |A|) - (p + 1)$ (on sait que les inégalités (2.5) sont valides quand A est vide). Notons aussi que dans le nouveau graphe $\sum_{v \in B} (x(\delta(v)) - 2)$ est égale à $\sum_{v \in B} (x(\delta(v) \setminus \delta(A)) - 2)$ dans l'ancien graphe. En utilisant le fait

que $2 - x(\delta(v)) = 1$ pour tout sommet $v \in A$, on déduit que $\sum_{v \in A} (2 - x(\delta(v))) + \sum_{v \in B} (x(\delta(v) \setminus \delta(A)) - 2) \leq n - (p + 1)$. \square

On verra après que les inégalités (2.5) peuvent être séparées en temps polynomial soit en minimisant une fonction sous-modulaire, ou en résolvant un problème classique de coupe minimum dans un graphe approprié.

Il est intéressant de noter que lorsque $A = \emptyset$ et $B = \{v\}$, les inégalités (2.5) se réduisent à

$$x(\delta(v)) \leq n - (p - 1).$$

La famille d'inégalités suivante est basée sur le fait que le nombre de composantes connexes ne peut pas excéder $\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor$ (Il y a au moins $1 + p$ sommets dans chaque composante).

Soit $(\alpha_e)_{e \in E}$ un ensemble de nombres réels. Pour tout nombre $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor - 1$, γ_{n+i} est le coût minimum (au sens des $(\alpha_e)_{e \in E}$) d'un graphe connexe avec $n + i$ arêtes. Soit T_α un arbre couvrant de poids minimum et β_i est le coût maximum des i arêtes de T_α . Autrement dit, $\beta_i = \max_{E' \subseteq T_\alpha, |E'|=i} \sum_{e \in E'} \alpha_e$.

Dans la sous-section 2.5.4, on verra que des algorithmes gloutons peuvent être utilisés pour calculer γ_{n+i} ainsi que β_i pour tout nombre i .

Proposition 2.3: L'inégalité suivante est valide pour $P(G, p)$:

$$\sum_{e \in E} \alpha_e x_e \geq \min_{0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor - 1} (\gamma_{n+i} - \beta_i). \quad (2.6)$$

Preuve: Soit x un vecteur d'incidence représentant un graphe G de \mathcal{H}_p . Soit i le nombre de composantes connexes de G . On sait que $i \leq \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor$. Comme T_α est connexe, on peut alors ajouter à G quelques $i - 1$ arêtes de T_α pour le rendre connexe, et donc on obtient un graphe connexe avec $n + i - 1$ arêtes. Le coût de ce graphe n'est pas inférieur à γ_{n+i-1} . En outre, le coût de $i - 1$ arêtes ajoutées à G est clairement pas supérieur à β_{i-1} . En combinant ces deux observations, on en déduit alors que $\sum_{e \in E} \alpha_e x_e \geq \gamma_{n+i-1} - \beta_{i-1}$. En prenant le minimum de toutes les valeurs possibles de i , on trouve $\sum_{e \in E} \alpha_e x_e \geq \min_{0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor - 1} (\gamma_{n+i} - \beta_i)$. \square

Plus de détails sur la séparation de cette famille d'inégalités seront donnés plus tard.

La borne supérieure $\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor$ du nombre de composantes connexes peut être exploitée pour découvrir de nouvelles inégalités valides.

Soit S un sous-ensemble de sommets. Pour tous les sommets i et j de S , $\delta(A_{ij})$ représente une coupe séparant i et j .

Proposition 2.4: L'inégalité suivante est valide pour $P(G, p)$:

$$\sum_{i,j \in S, i < j} \sum_{e \in \delta(A_{ij})} x_e \geq \max \left(0, |S| - \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor, \left\lceil \left(|S| - \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor \right) \frac{|S|}{2 \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor} \right\rceil \right). \quad (2.7)$$

Preuve: Soit x un vecteur d'incidence d'un sous-graphe couvrant de G qui appartient à \mathcal{H}_p . Considérons un réseau où la capacité de chaque arête $e \in E$ est x_e . On note par f_{ij} le flot maximum qu'on peut écouler entre i et j . On a $\sum_{i,j \in S, i < j} \sum_{e \in \delta(A_{ij})} x_e \geq \sum_{i,j \in S, i < j} f_{ij}$.

Il est aussi facile de voir que $\sum_{i,j \in S, i < j} f_{ij} \geq |S| - \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor$. Il reste alors à montrer que $\sum_{i,j \in S, i < j} f_{ij} \geq$

$(|S| - \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor) \frac{|S|}{2 \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor}$. Soit z le nombre de composantes connexes (donc $z \leq \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor$). Soit S_k le sous-ensemble de sommets de S qui appartient à la k^{eme} composante connexe. Comme $f_{ij} \geq 1$ quand i et j sont sur la même composante, on en déduit que $\sum_{i,j \in S, i < j} f_{ij} \geq |S_1|(|S_1| - 1)/2 + \dots + |S_z|(|S_z| - 1)/2$. Par la convexité de la fonction $\frac{x(x-1)}{2}$ on obtient $\sum_{i,j \in S, i < j} f_{ij} \geq \frac{z}{2} \frac{|S|}{z} (\frac{|S|}{z} - 1) = \frac{|S|}{2} (\frac{|S|}{z} - 1)$. En combinant cette inégalité avec $z \leq \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor$ et $\sum_{i,j \in S, i < j} \sum_{e \in \delta(A_{ij})} x_e \geq \sum_{i,j \in S, i < j} f_{ij}$ on arrive alors au résultat souhaité. \square

Il est intéressant de noter que lorsque $\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor = 1$, les inégalités (2.7) se réduisent à

$$\sum_{i,j \in S, i < j} \sum_{e \in \delta(A_{ij})} x_e \geq |S|(|S| - 1)/2$$

qui est une combinaison des inégalités $\sum_{e \in \delta(A_{ij})} x_e \geq 1$. Cette dernière inégalité est évidemment valide quand on a qu'une seule composante connexe (ça correspond à $|S| = 2$).

Quand $S = V$, les inégalités (2.7) peuvent être facilement retrouvées en utilisant le fait qu'on doit avoir $f_{ij} = 2$ pour quelques paires de sommets (on utilise les notations introduites dans la preuve précédente). Il n'est pas difficile de voir que $\sum_{i,j \in V, i < j} f_{ij}$ est minimum si le graphe contient exactement $\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor$ composantes connexes avec un cycle de taille $p+1$ dans chaque composante et tel que les tailles des composantes sont à peu près égales. En d'autres termes, si on considère deux composantes différentes, le nombre de sommets dans une composante ne doit pas dépasser 1 plus le nombre des sommets de l'autre composante (autrement, on décroît $\sum_{i,j \in V, i < j} f_{ij}$ en permutant un sommet d'une composante avec une autre). Après quelques calculs, on aura la valeur de $\sum_{i,j \in V, i < j} f_{ij}$ de ce graphe donnée par

$$\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor \frac{(p+1)p}{2} + \frac{1}{2} \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor \left(2n - \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor - \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor \right)$$

Proposition 2.5: L'inégalité suivante est valide pour $P(G, p)$:

$$\sum_{i,j \in V, i < j} \sum_{e \in \delta(A_{ij})} x_e \geq \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor \frac{(p+1)p}{2} + \frac{1}{2} \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor \left(2n - \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor - \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor \right). \quad (2.8)$$

\square

Étant donné un graphe de \mathcal{H}_p , il est clair que $\sum_{(i,j) \in \delta(i)} x_{ij} f_{ij}$ est égale à $2 + \sum_{(i,j) \in \delta(i)} x_{ij}$ si i appartient à un cycle et est égale à $\sum_{(i,j) \in \delta(i)} x_{ij}$ sinon. Comme il existe au moins $p+1$ sommets appartenant à un cycle, on peut alors directement en déduire que $\sum_{(i,j) \in E} x_{ij} f_{ij} \geq n + p + 1$.

Cette inégalité peut être améliorée si on dispose d'une bonne borne inférieure du nombre de composantes connexes. On rappelle que dans la preuve de la Proposition (2.4), on a observé que $\sum_{i,j \in S, i < j} f_{ij} \geq |S| - z$ et $\sum_{i,j \in S, i < j} f_{ij} \geq \frac{|S|}{2} (\frac{|S|}{z} - 1)$ où z est le nombre de composantes connexes. La seconde inégalité paraît difficile à exploiter alors que la première nous conduit à

$z \geq |S| - \sum_{i,j \in S, i < j} f_{ij}$. Ainsi, on obtient $\sum_{(i,j) \in E} x_{ij} f_{ij} \geq n + (p+1) \left(|S| - \sum_{i,j \in S, i < j} f_{ij} \right)$ pour tout sous-ensemble S . Notons que $\sum_{i,j \in S, i < j} f_{ij} \geq \frac{|S|}{2} \left(\frac{|S|}{z} - 1 \right)$ peut être introduit par la programmation semi définie positive. Cependant, nous allons dans cette thèse nous focaliser sur les méthodes linéaires.

Soit $\delta(A_{ij})$ une coupe séparant i et j . Alors, on a $\sum_{(i,j) \in E} x_{ij} f_{ij} \leq \sum_{(i,j) \in E} \sum_{e \in \delta(A_{ij})} x_{ij} x_e$. Pour toutes paires de sommets i et j de S , on considère toute coupe $\delta(A'_{ij})$ séparant i et j (on peut avoir $A_{ij} = A'_{ij}$). On a clairement $n + (p+1) \left(|S| - \sum_{i,j \in S, i < j} f_{ij} \right) \geq n + (p+1) \left(|S| - \sum_{i,j \in S, i < j} \sum_{e \in \delta(A'_{ij})} x_e \right)$. Par conséquent, l'inégalité suivante est valide

$$\sum_{(i,j) \in E} \sum_{e \in \delta(A_{ij})} x_{ij} x_e \geq n + (p+1) \left(|S| - \sum_{i,j \in S, i < j} \sum_{e \in \delta(A'_{ij})} x_e \right)$$

Le produit $x_{ij} x_e$ est bien sur inférieur à x_{ij} et à x_e . En remplaçant ce produit par soit x_{ij} ou x_e , on obtient une inégalité valide linéaire de $P(G, p)$. En effet, on verra plus loin dans la sous-section 2.5.5 que si on a un vecteur fractionnaire x , le produit est remplacé par le minimum de x_{ij} et x_e . L'inégalité valide est clairement établie ci-dessous.

Proposition 2.6: L'inégalité suivante est valide pour $P(G, p)$:

$$\sum_{(i,j) \in E} \sum_{e \in \delta(A_{ij})} x_{ij,e} \geq n + (p+1) \left(|S| - \sum_{i,j \in S, i < j} \sum_{e \in \delta(A'_{ij})} x_e \right) \quad (2.9)$$

où $x_{ij,e}$ note différemment x_{ij} ou x_e .

□

Il est important de bien comprendre que la notation $x_{ij,e}$ n'est pas liée à de nouvelles variables.

2.4 Sur la structure faciale de $P(G, p)$

On étudie la dimension de $P(G, p)$ et les inégalités valides définies dans la section précédente. Pour simplifier cette étude, on supposera dans cette section que $G = (V, E)$ est un graphe complet. On pose $m = \frac{n(n-1)}{2}$.

Proposition 2.7: La dimension de $P(G, p)$ est $m - 1$ si $2 \leq p \leq n - 2$, et $m - n$ si $p = n - 1$.

Preuve: : La dimension de $P(G, p)$ ne peut pas être supérieure à $m - 1$ puisque l'égalité $\sum_{e \in E} x_e = n$ est vérifiée. Si $p = n - 1$, alors $P(G, p)$ est l'enveloppe convexe des tournées Hamiltoniennes. Sa dimension est $m - n$ [95].

Supposons maintenant que $2 \leq p \leq n - 2$. On suppose aussi que $\alpha x = \beta$ pour tout vecteur x de $P(G, p)$. Soient u, v, w trois sommets. On considère aussi un graphe unicyclique basé sur un cycle de taille $n - 1$ plus une arête de plus. On suppose que : u est l'unique sommet pendant (de degré égal à 1), u est connecté à v , et w est l'un des deux voisins de v sur le cycle.

Ce graphe appartient à \mathcal{H}_p . Maintenant, en supprimant l'arête (w, v) et en ajoutant (w, u) , on obtient un autre graphe dans \mathcal{H}_p . Les deux graphes satisfont $\alpha x = \beta$. Par conséquent, on doit avoir $\alpha_{uw} = \alpha_{vw}$. Comme cela est valide pour trois sommets quelconques u, v, w , on en déduit alors que toutes les composantes de α sont égales. Cela implique que la contrainte $\alpha x = \beta$ est proportionnelle à $\sum_{e \in E} x_e = n$. Alors la dimension de $P(G, p)$ est $m - 1$. \square

Proposition 2.8: L'inégalité $x_e \geq 0$ définit une facette de $P(G, p)$ si et seulement si $n \geq 5$

Preuve: Si $p = n - 1$, le résultat est déjà connu [58, 95]. Dans ce qui suit, on s'intéressera au cas où $2 \leq p \leq n - 2$. En utilisant le fait que $x_e \geq 0$ est une facette du polytope de voyageur de commerce symétrique, on peut alors construire $m - n$ vecteurs z_1, z_2, \dots, z_{m-n} affinement indépendants qui représentent des tournées Hamiltoniennes qui ne traversent pas e . Tous ces vecteurs appartiennent à $P(G, p)$. Soient u et v les deux extrémités de e . On construit $n - 1$ autres vecteurs de $P(G, p)$ qui satisfont $x_e = 0$. On considère une tournée de taille $n - 1$ qui passe par tous les sommets sauf u . On obtient $n - 2$ nouveaux vecteurs $z_{m-n+1}, \dots, z_{m-2}$ de $P(G, p)$ en choisissant un sommet quelconque w de cette tournée (w différent de v) et en ajoutant une arête (u, w) . Pour tout sommet w , le graphe obtenu par cette méthode appartient à \mathcal{H}_p . Un dernier vecteur z_{m-1} peut être obtenu en considérant une tournée quelconque de longueur $n - 1$ qui contient u et non pas v avec une arête liant v avec un sommet $w \neq u$ dans le cycle.

D'abord, tous les vecteurs $(z_i)_{1 \leq i \leq m-1}$ satisfont $x_e = 0$. Supposons qu'il existe des nombres $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq m-1}$ tels que $\sum_{i=1}^{i=m-1} \alpha_i z_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{i=m-1} \alpha_i = 0$. Le degré de v est égal à 2 dans tous les graphes pris auparavant pour construire $(z_i)_{1 \leq i \leq m-2}$. Dans le dernier cas ($i = m - 1$), le degré de v est de 1. Ceci implique que $\alpha_{m-1} = 0$. Maintenant, on s'intéresse aux $m - 2$ vecteurs. Le degré de chaque sommet w est toujours égal à 2 sauf dans un cas (quand l'arête (w, u) est ajoutée). Par conséquent on a $\alpha_i = 0$ quand $m - n + 1 \leq i \leq m - 2$. En utilisant le fait que les $m - n$ premiers vecteurs sont affinement indépendants, on en déduit que $\alpha_i = 0$ quand $i \leq m - n$. Observons que la face induite par $x_e = 0$ ne contient pas tout le polytope. Il est aussi évident que $x_e \geq 0$ n'induit pas une facette quand $n \leq 4$. Ceci est alors suffisant pour finir la preuve. \square

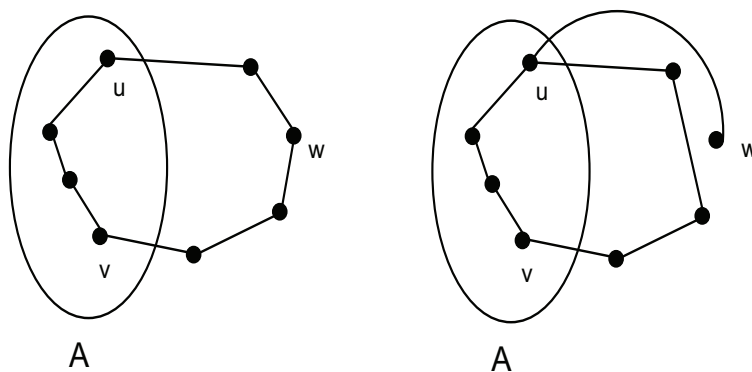


FIGURE 2.2 – Sur la preuve de la Proposition (2.9)

Proposition 2.9: L'inégalité (2.2) définit une facette de $P(G, p)$ si et seulement si $n \geq 4$ et $2 \leq |A| \leq \min(n - 2, p)$.

Preuve: Si $p = n - 1$, le résultat est une conséquence de la structure faciale du polytope de voyageur de commerce symétrique [59].

On considère le cas où $p \leq n - 2$. Soit A tout sous-ensemble de V tel que $2 \leq |A| \leq p \leq n - 2$. On peut construire $m - n$ vecteurs affinement indépendants z_1, z_2, \dots, z_{m-n} qui représentent les tournées Hamiltoniennes tel que $z_i(A) = |A| - 1$. Ceci est possible car on sait que $x(A) \leq |A| - 1$ induit une facette du polytope du voyageur de commerce symétrique. Considérons une de ces tournées. Elle contient un chemin de longueur $|A| - 1$ traversant les sommets de A . Soient u et v les deux extrémités de ce chemin. Pour tout sommet $w \in V \setminus \{u, v\}$, on construit un nouveau graphe dans \mathcal{H}_p en supprimant les deux arêtes incidentes qui joignent ses deux voisins et en ajoutant l'arête (u, w) (Figure (2.2)). Dans ce cas, on obtient $n - 2$ nouveaux vecteurs $z_{m-n+1}, \dots, z_{m-2}$ de $P(G, p)$ qui satisfont $x(A) = |A| - 1$. On construit un vecteur en plus en prenant $w = v$ et répéter les mêmes opérations.

Supposons qu'il existe des nombres $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq m-1}$ tel que $\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i z_i = 0$ et $\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i = 0$. Il est clair que le degré de $w \in V \setminus \{u, v\}$ est toujours égal à 2 sauf dans un cas. Ceci implique que $\alpha_i = 0$ quand $m - n + 1 \leq i \leq m - 2$. Maintenant et en utilisant le fait que le degré de v est égal à 2 dans les premiers $m - n$ cas et égal à 1 dans le dernier cas $i = m - 1$, on en déduit que $\alpha_{m-1} = 0$. Comme les $m - n$ tournées Hamiltoniennes sont affinement indépendantes, ceci alors termine la preuve. \square

Notons que les inégalités $x_e \leq 1$ représentent un cas spécial des inégalités (2.2).

D'autres facettes de $P(G, p)$ sont induites par la formulation introduite dans la Section 3.2. Considérons l'inégalité

$$x(A) \leq |A|, A \subseteq V. \quad (2.10)$$

Il est clair que cette inégalité est valide pour $P(G, p)$ pour toute valeur de p . Comme $P(G, p = 2)$ est la projection de la formulation du couplage introduite auparavant, on n'a pas besoin de générer les inégalités (2.10). Et comme on est intéressé par la structure faciale de $P(G, p)$, on donne alors ci-dessous un résultat sur la face induite par l'inégalité (2.10).

Proposition 2.10: L'inégalité (2.10) induit une facette de $P(G, p)$ si et seulement si $p + 2 \leq |A| \leq n - 1$.

Preuve: Si $|A| \leq p$, alors l'inégalité (2.10) est dominée par l'inégalité (2.2). Il est aussi clair que le cas où $|A| = n$ n'induit pas une facette comme tous les vecteurs de $P(G, p)$ satisfont $x(V) = n$. En outre, si $|A| = p + 1$, alors tout vecteur x de la face induite par l'inégalité (2.10) satisfait $x(v, A) = 2$ où $v \in A$.

Concentrons nous maintenant sur le cas $p + 2 \leq |A| \leq n - 1$. Soit $\alpha x = \beta$ une égalité satisfaite par tous les vecteurs de $P(G, p)$ pour laquelle $x(A) = |A|$. Considérons un sous-graphe de G contenant un cycle de taille $|A| - 1$ passant par $|A| - 1$ sommets de A et supposons que tous les autres vecteurs de V sont liés à ce cycle par une arête. Le vecteur d'incidence de ce graphe appartient à la face induite par $x(A) = |A|$. Soit u l'unique sommet de A qui n'appartient pas au cycle et soit v son voisin sur le cycle. Soit w l'un des deux voisins de v sur le cycle. Il est clair qu'on peut supprimer l'arête (w, v) et ajouter l'arête (w, u) pour obtenir un nouveau vecteur d'incidence qui satisfait toutes les contraintes. Ceci implique alors que $\alpha_{wv} = \alpha_{wu}$. Comme u, v et w sont trois sommets arbitraires de A , on en déduit alors que α_{uv} est égal à une constante α_A pour tous deux sommets u et v de A . Considérons maintenant un sommet quelconque $b \in V \setminus A$. b peut être arbitrairement lié à un sommet quelconque de A . Ceci implique que α_{ba} est égal à une constante α_{bA} pour tout sommet $b \in V \setminus A$ et $a \in A$. Si $|A| = n - 1$, ceci est alors suffisant de déduire que l'égalité $\alpha x = \beta$ est une combinaison de $x(V) = n$ et $x(A) = |A|$. Quand $|A| \leq n - 2$, on peut considérer un autre sommet $c \in V \setminus A$. Supposons que c est lié à $a \in A$. Il est clair qu'on obtient un graphe qui satisfait toutes les contraintes si on supprime (c, a) et on ajoute (c, b) où

b est un quelconque autre sommet de $V \setminus A$. Par conséquent, $\alpha_{cb} = \alpha_{ca} = \alpha_{cA}$. Comme b et c sont arbitraires, on obtient que les deux termes α_{cb} et α_{ca} sont égaux à une constante α_{BA} . Autrement dit, $\alpha x = \beta$ est encore une combinaison linéaire de $x(V) = n$ et $x(A) = |A|$. \square

Les inégalités (2.10) avec les inégalités triviales $x_e \geq 0$ et $x_e \leq 1$ décrivent complètement $P(G, p = 2)$.

Proposition 2.11:

$$P(G, 2) = \{x \in \mathbb{R}^E; 0 \leq x_e \leq 1, \forall e \in E; x(A) \leq |A|, \forall A \subset V, 4 \leq |A| \leq n - 1; x(V) = n\}.$$

Preuve: On a déjà mentionné que les graphes de $G = (V, E)$ tels que chaque composante connexe contient au plus un cycle est un matroïde. Ceci implique que $P(G, 2)$ est défini par les contraintes de positivité, les contraintes $x(V) = n$, ainsi que les contraintes générales $x(B) \leq r(B)$ où $B \subseteq E$ et r est la fonction rang associée au matroïde. Soit $B' \subseteq B$ tel que $|B'| = r(B)$ et B' appartient au matroïde. Le graphe $G' = (V, B')$ induit par B' doit avoir quelques composantes connexes avec exactement un cycle, et d'autres sans cycle. Soit C l'union de toutes les composantes de B' qui contiennent un cycle. Par la maximisation de B' , toutes les arêtes de $B \setminus B'$ ont les deux extrémités dans C . Soit A l'ensemble des sommets de C . Il est clair que par l'ajout des contraintes $x(A) \leq |A|$ et les contraintes $x_e \leq 1, e \in B' \setminus C$ on obtient une contrainte qui est au moins meilleure que $x(B) \leq r(B)$. \square

Étudions maintenant les inégalités (2.4). Il est clair que si on pose $|A| = 1$, alors l'inégalité (2.4) est une combinaison des inégalités triviales $x_e \leq 1$. Le cas où $|B| = 0$ est aussi inclus dans les inégalités (2.2). Alors, on supposera que $|A| \geq 2$ et $|B| \geq 1$. Ceci implique directement que $p \geq 3$ (comme $|A| \leq p - 1$) et $n \geq 4$.

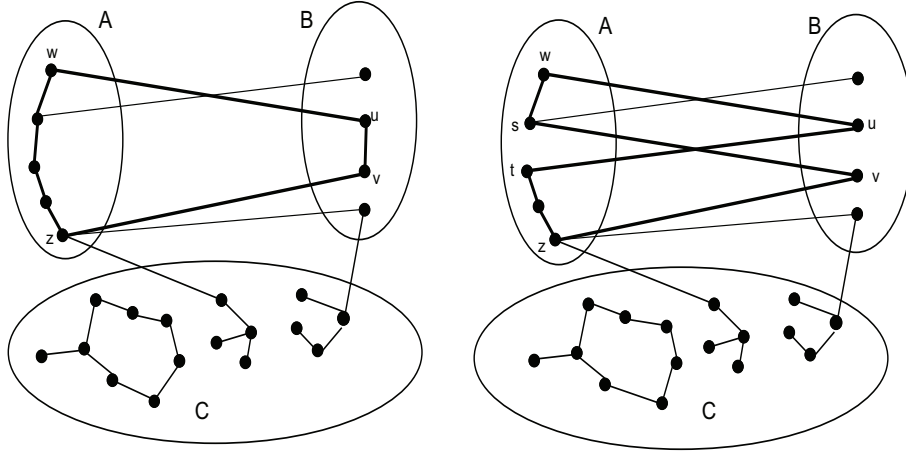


FIGURE 2.3 – Saturation de l'inégalité (2.4) : cas 1 et 2

Proposition 2.12: L'inégalité (2.4) définit une facette de $P(G, p)$ si et seulement si $|A| = p - 1, 3 \leq p \leq n - 2$ et $|B| \geq 3$.

Preuve: On utilise ici la notation introduite dans la preuve de la Proposition (2.1). On rappelle que l'inégalité (2.4) est équivalente à $x(A) \leq |A| - 2 + x(B) + x(C) + x(\delta(C)) - |C|$. Pour avoir l'égalité, Il y a seulement trois cas possibles :

- 1. $x(A) = |A| - 1, x(B) = 1$ et $x(C) + x(\delta(C)) - |C| = 0$
- 2. $x(A) = |A| - 2, x(B) = 0$ et $x(C) + x(\delta(C)) - |C| = 0$

– 3. $x(A) = |A| - 1$, $x(B) = 0$ et $x(C) + x(\delta(C)) - |C| = 1$.

Dans les deux premiers cas, on a $x(C) + x(\delta(C)) - |C| = 0$. Ceci implique que chaque composante connexe de C qui ne contient pas de cycle est nécessairement connectée à $A \cup B$ par exactement une arête. Si la composante contenait déjà un cycle, alors il n'y a pas d'arêtes entre $A \cup B$ et cette composante connexe. Ceci implique que le graphe induit par $A \cup B$ contient au moins un cycle. En utilisant le fait que $|A| \leq p - 1$, il est alors facile de voir que dans les deux cas 1 et 2, la cardinalité de A doit être égale à $p - 1$. Dans le cas 1, A contient un chemin élémentaire de longueur $p - 2$. Un cycle de longueur $p + 1$ contient ce chemin avec deux arêtes liant A et B (voir Figure (2.3)).

Dans le cas 2, A contient deux chemins disjoints (au sens des sommets) et de longueur totale $p - 3$. Un cycle de longueur $p + 1$ contient ces deux chemins avec 4 arêtes liant A et B (voir Figure (2.3)).

Maintenant, on observe que si $|B| = 1$, alors les cas 1 et 2 ne peuvent pas se réaliser. Ceci veut dire qu'on a $x(A) = |A| - 1$, $x(B) = 0$ et $x(C) + x(\delta(C)) - |C| = 1$. Comme $x(A) \leq |A| - 1$ définit une facette (Proposition (2.9)) et qui est saturée ici, l'inégalité (2.4) ne définit pas une facette quand $|B| = 1$. En utilisant le même argument on déduit que l'inégalité (2.4) ne définit pas une facette si $|A| < p - 1$ (dans les cas 1 et 2, on doit avoir $|A| = p - 1$).

Supposons alors que $|B| \geq 2$ et $|A| = p - 1$. Si $p = n - 1$, alors on obtient $|A| = n - 2$, $|B| = 2$ et $|C| = 0$. L'inégalité (2.4) est alors dominée par les inégalités $x(\delta(v)) \leq 2$ pour tout $v \in A$ (valide pour $p = n - 1$). Autrement dit, quand $p = n - 1$ notre inégalité ne définit pas une facette. Le cas $p = 2$ (avec $|A| = p - 1$) peut aussi être éliminé car l'inégalité (2.4) est dominée par les inégalités triviales $x_e \leq 1$.

Concentrons nous alors sur le cas $|B| \geq 2$, $|A| = p - 1$ et $3 \leq p \leq n - 2$. On étudie d'abord le cas élémentaire où $|B| = 2$. On suppose que u et v sont les deux sommets de B . Il n'est pas difficile de voir que dans les trois cas énumérés dans le début de la preuve, on a $x(u, A) - x(v, A) = 0$. Ceci veut dire que tous les vecteurs appartenant à la face induite par l'inégalité (2.4) sont aussi contenus dans un autre hyperplan. Comme l'hyper-plan $x(u, A) - x(v, A) = 0$ est linéairement indépendant avec l'hyper-plan $x(E) = n$ et $2x(A) + x(A, B) = 2|A| + |B| - 2$, on en déduit alors que l'inégalité (2.4) ne définit pas une facette de $P(G, p)$ quand $|B| = 2$.

Dans ce qui va suivre, on montre qu'on obtient une facette quand $|B| \geq 3$, $|A| = p - 1$ et $3 \leq p \leq n - 2$. Soit $\alpha x = \beta$ une égalité satisfaite par tous les vecteurs de $P(G, p)$ pour lesquels $2x(A) + x(A, B) = 2|A| + |B| - 2$.

D'abord, on suppose que $|C| = 0$. Ceci implique qu'uniquement les cas 1 et 2 peuvent se réaliser. Considérons un graphe de \mathcal{H}_p qui correspond au cas 1. Soit (u, v) l'unique arête du graphe qui a les deux extrémités dans B et soient w et z les deux extrémités du chemin contenant A (Figure (2.3)). On peut supposer que tous les autres sommets de B (sauf u) sont connectés à z . Maintenant, si on supprime l'arête (u, v) et on la remplace par une autre arête (u, v') ($v' \in B$), on obtient un autre graphe qui satisfait toutes les conditions requises avant. Ceci implique que $\alpha_{uv} = \alpha_{uv'}$. Comme u , v et v' sont des sommets choisis arbitrairement, on en déduit alors que α_{uv} est égal à une constante α_B pour toute paire de sommets u et v de B .

Considérons un sommet quelconque $v' \in B \setminus \{u, v\}$. Il est clair que v' peut être connecté à un sommet quelconque y de A . Ceci veut dire que $\alpha_{v'y}$ dépend uniquement de v' . Comme u , v et v' sont choisis arbitrairement, on déduit alors que pour tout sommet $v' \in B$ et pour tout $y \in A$, $\alpha_{v'y}$ est égal à une constante $\alpha_{v'A}$.

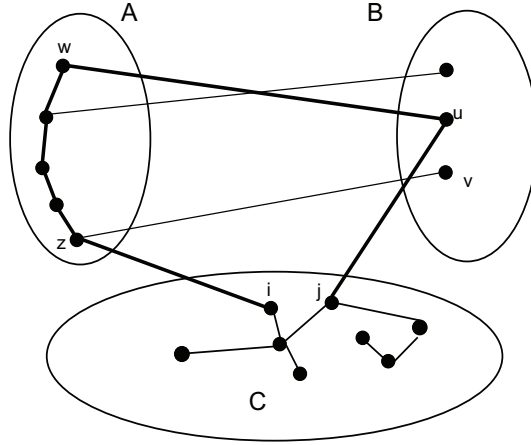


FIGURE 2.4 – Saturation de l'inégalité (2.4) : cas 3

Considérons un graphe de \mathcal{H}_p qui correspond au cas 2. On définit u, v, w, z, s et t comme le montre la Figure (2.3) (certains parmi eux peuvent être identiques). Il est clair que si on ajoute l'arête (s, t) , on supprime une quelconque autre arête de A et connecter u et v aux nouveaux sommets s et t , on obtient un autre graphe qui satisfait toutes les conditions requises auparavant. En utilisant le fait que α_{ut} et α_{vs} ne dépendent pas de s et t , on déduit que α_{st} est aussi une constante : $\alpha_{st} = \alpha_A$. Notons que la transformation de graphe décrite ici suppose implicitement que $|A| \geq 3$. Toutefois, si $|A| = 2$ on peut toujours dire que $\alpha_{st} = \alpha_A$ comme il y a qu'une seule arête induite par A .

En comparant les deux graphes introduits ci-dessus (cas 1 et cas 2), on déduit directement que $\alpha_A + \alpha_B = \alpha_{uA} + \alpha_{vA}$. Comme ceci se réalise pour tous u et v de B et $|B| \geq 3$, on obtient que α_{uA} est aussi égal à une constante α_{AB} qui ne dépend pas de u . On a aussi $\alpha_A + \alpha_B = 2\alpha_{AB}$. Par conséquent, l'égalité $\alpha x = \beta$ est équivalente à $\alpha_A x(A) + \alpha_B x(B) + \alpha_{AB} x(A, B) = \beta$. Elle peut s'écrire ainsi : $\alpha_B (x(B) + x(A) + x(A, B)) + (\alpha_{AB} - \alpha_B)(2x(A) + x(A, B)) = \beta$. Ceci met alors fin à la première partie de la preuve.

Étudions maintenant le cas $|C| \geq 1$. On a toujours $|B| \geq 3$, $|A| = p - 1$ et $3 \leq p \leq n - 2$. On montre exactement par la même façon que $\alpha_{uv} = \alpha_B$ ($u \in B$ et $v \in B$) et $\alpha_{st} = \alpha_A$ ($s \in A$ et $t \in A$). On obtient aussi facilement que α_{iy} est égal à une constante α_{AB} pour tous $u \in B$ et $y \in A$. L'égalité $\alpha_A + \alpha_B = 2\alpha_{AB}$ est réalisée.

Pour terminer la preuve, on doit introduire un troisième graphe. On considère un graphe qui correspond au cas 3. Il est défini ainsi : le graphe induit par C est un arbre, il existe une arête (z, i) qui relie A et C , une arête (j, u) liant B et C , le graphe induit par A est un chemin dont les extrémités sont w et z , u est connecté à w , chaque sommet de B est connecté à exactement un sommet de A (Figure (2.4)).

Comme i est un sommet arbitraire de C , α_{zi} ne dépend pas de i . En plus, z est aussi quelconque (on peut considérer un autre chemin de A avec d'autres extrémités). Par conséquent, α_{zi} est égal à une constante α_{AC} .

En utilisant le fait que l'arbre induit par C est quelconque, on peut facilement déduire que les coefficients α_{kl} sont égaux à une constante α_C pour tous sommets k et l de C .

Considérons maintenant un sommet $v \in B$ et supposons que v est connecté à z (Figure (2.4)).

On peut supprimer l'arête (j, u) et ajouter l'arête (u, v) pour obtenir un nouveau graphe (dont le type correspond au cas 1). En comparant ces deux graphes, on déduit que $\alpha_{ju} = \alpha_{uv} = \alpha_B$. Autrement dit, α_{ju} est égal à une constante $\alpha_{CB} = \alpha_B$ pour tous sommets $j \in C$ et $u \in B$. Au lieu d'éliminer l'arête (j, u) , on élimine (i, z) (on ajoute (u, v)). Ceci implique que $\alpha_{AC} = \alpha_B$. Observons que si $|C| \geq 2$, alors on peut supprimer une arête (séparant i et j) dont les deux extrémités sont dans C pour obtenir deux composantes connexes, et on ajoute l'arête (u, v) . Le nouveau graphe satisfait toujours toutes les conditions requises avant. Ceci implique clairement que $\alpha_{ij} = \alpha_C = \alpha_B$ pour tous sommets $i \in C$ et $j \in C$.

En combinant tous ces résultats, on trouve $\alpha x = \beta$ est équivalent à $(\alpha_{AB} - \alpha_B)(2x(A) + x(A, B)) + \alpha_B(x(B) + x(C) + x(\delta(C) + x(A) + x(A, B))) = \beta$. L'inégalité (2.4) définit une facette de $P(G, p)$. \square

Proposition 2.13: Soient A et B deux sous-ensembles disjoints de V et soit $C = V \setminus \{A \cup B\}$. L'inégalité (2.5) définit une facette de $P(G, p)$ si et seulement si $3 \leq p \leq n - 2$ et un des cas suivants se réalise :

- $|B| = 0, 1 \leq |C| \leq p - 1$
- $1 \leq |B| \leq p - 4, |C| \geq 3$
- $|B| = p - 3, |C| \geq 4, p \geq 4$
- $|B| = p - 2, |A| \leq 1, |C| \geq 4$
- $|B| = p - 1, |A| = 0$.

Preuve: Il est clair que lorsque $p = n - 1$, l'inégalité (2.5) est dominée par les égalités triviales $x(\delta(v)) = 2$. On supposera alors que $p \leq n - 2$.

Soit G un graphe de \mathcal{H}_p pour lequel l'égalité suivante est vérifiée :

$$\sum_{v \in A} (2 - x(\delta(v))) + \sum_{v \in B} (x(\delta(v) \setminus \delta(A)) - 2) = n - (p + 1). \quad (2.11)$$

Si un tel graphe n'existe pas, alors l'inégalité (2.5) ne définit pas une facette de $P(G, p)$. Soit $A_1 \subseteq A$ l'ensemble des sommets v de A pour lesquels $x(\delta(v)) = 1$. Tous les sommets de $A_2 = A \setminus A_1$ ont un degré égal à 2 (sinon les membres gauches de l'équation (2.11) peuvent être augmentés en éliminant des sommets dont le degré est supérieur à 2). L'égalité (2.11) devient $\sum_{v \in B} (x(\delta(v) \setminus \delta(A)) - 2) = n - |A_1| - (p + 1)$. En outre, le graphe obtenu en éliminant tous les sommets de A_1 reste toujours dans \mathcal{H}_p . Alors écrire l'inégalité (2.5) pour ce nouveau sous-graphe nous donne $\sum_{v \in B} (x(\delta(v) \setminus \delta(A_1)) - 2) \leq n - |A_1| - (p + 1)$. Ceci implique directement que $x(\delta(v) \setminus \delta(A_1)) = x(\delta(v) \setminus \delta(A))$ pour tout $v \in B$. Ceci dit, on a $x(v, A_2) = 0$ pour tous les autres sommets de B . On peut aussi déduire que $x(\delta(v) \setminus \delta(A_1)) - 2 \leq 0$ pour tout $v \in C$ (sinon la somme $\sum_{v \in B} (x(\delta(v) \setminus \delta(A_1)) - 2)$ peut être augmentée en mettant v dans B). L'égalité précédente devient $\sum_{v \in B} (x(\delta(v) \setminus \delta(A_1)) - 2) = n - |A_1| - (p + 1)$. En utilisant le fait que $\sum_{v \in B} (x(\delta(v) \setminus \delta(A_1)) - 2) + \sum_{v \in A_2 \cup C} (x(\delta(v) \setminus \delta(A_1)) - 2) = 0$, on déduit que

$$\sum_{v \in A_2 \cup C} (2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1))) = n - |A_1| - (p + 1).$$

En utilisant le fait que les sommets de A_2 qui ont le degré 2 et tous les sommets de C sont tels que $x(\delta(v) \setminus \delta(A_1)) - 2 \leq 0$, l'égalité précédente implique que $A_2 \cup C$ contient exactement $n - |A_1| - (p + 1)$ sommets de degré 1 alors que le reste des sommets ont un degré de 2 dans

$G \setminus A_1$. De plus, on sait que $G \setminus A_1$ contient au moins $p + 1$ sommets de degré au moins 2. Ceci implique que les sommets de B sont un unique cycle de longueur $p + 1$. Chaque sommet de $A_2 \cup C$ dont le degré est 1 dans $G \setminus A_1$ est nécessairement lié à un sommet de B . Par conséquent, tous les sommets de A_2 sont aussi sur le cycle (on rappelle que $x(v, A_2) = 0$ si $v \in B$). La Figure (2.5) synthétise la situation.

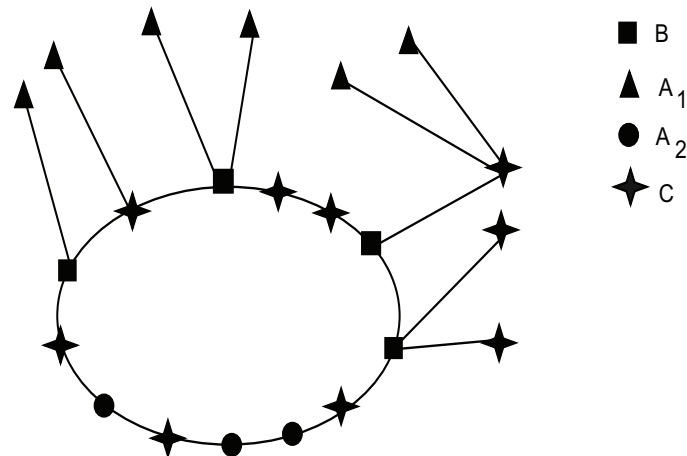


FIGURE 2.5 – Saturation de l'inégalité (2.5)

Il n'est pas difficile de voir que ce qui a été établi dans la Proposition (2.13) est équivalent à ce qui suit : l'inégalité (2.5) définit une facette de $P(G, p)$ si et seulement si : $3 \leq p \leq n - 2$ et une des conditions suivante soit vérifiée :

- $|B| = 0, 1 \leq |C| \leq p - 1$
- $|A| = 0, 1 \leq |B| \leq p - 1$
- $|A| = 1, 1 \leq |B| \leq p - 2, |C| \geq 4$
- $|A| \geq 2, 1 \leq |B| = p - 3, |C| \geq 4$
- $|A| \geq 2, 1 \leq |B| \leq p - 4, |C| \geq 3$.

Le reste de la preuve est relatif à ces cas.

Supposons que $|B| = 0$, alors tous les sommets de C sont sur le cycle et $|A_1| = n - (p + 1)$ (i.e, $|A_2| + |C| = p + 1$).

Si $|A_2| \leq 1$ (i.e, $n - (p + 1) \leq |A| \leq n - (p + 1) + 1$), alors l'égalité $x(A) = 0$ est toujours vérifiée. Cependant, $x(A) = 0$ n'est pas une combinaison linéaire de l'égalité $x(E) = n$ et de l'égalité (2.11). Par conséquent, l'inégalité (2.5) ne définit pas une facette dans ce cas ($|B| = 0, n - (p + 1) \leq |A| \leq n - (p + 1) + 1$).

Il est aussi clair que tout graphe qui sature l'égalité (2.11) ne peut pas avoir $|A_2| = p + 1$ car A_1 et lié seulement aux sommets de $B \cup C$. Donc on doit avoir $|A| \leq n - 1$.

Si on suppose que $|A_2| = 2$ et $|C| = 1$ (ce qui implique que $p = 2$), alors le nombre de graphes qui saturent l'égalité (2.11) est égal à $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ qui est inférieur à la dimension de $P(G, p)$. Ceci conduit à dire que l'inégalité (2.5) ne définit pas une facette dans ce cas.

Supposons maintenant que $|C| = 1$ et $|A_2| \geq 3$ (i.e, $|A| = n - 1$ et $p \geq 3$). Soit $\alpha x = \beta$ une égalité quelconque saturée par tous les points de la face induite par l'égalité (2.11). D'une façon similaire à la preuve de la précédente Proposition, on peut facilement montrer que α_{uv} est égal à une constante α_A pour toute paire de sommets u et v appartenant à A . On peut aussi

montrer que α_{uv} est une constante si v est l'unique sommet de C et u est quelconque de A . Autrement dit, $\alpha x = \beta$ est une combinaison de l'égalité $x(E) = n$ (qui se réduit dans ce cas à $x(A) + x(A, C) = n$) et de l'égalité (2.11) (qui se réduit ici à $2x(A) + x(A, C) = n + p - 1$). Par conséquent, l'inégalité (2.5) définit une facette dans ce cas.

On garde ci-dessous $|B| = 0$. Il existe un autre sous-cas à étudier : $2 \leq |A_2| \leq p - 1$ (i.e, $|C| \geq 2$ et $|A_2| \geq 2$). On considère aussi une égalité $\alpha x = \beta$ saturée par tous les graphes de cette face. Comme $|C| \geq 2$, on peut considérer un graphe de \mathcal{H}_p tel que tous les sommets de A_1 soient reliés à $u_1 \in C$ ou à $u_2 \in C$. On suppose aussi qu'il existe un sommet $v \in A_2$ relié à u_1 et à u_2 . Si on supprime l'arête (u_2, v) et on la remplace par une arête (u_2, u) où $u \in A_1$ est un sommet quelconque non relié à u_2 , on obtient un nouveau graphe qui sature l'inégalité (2.5). Ceci implique que $\alpha_{u_2v} = \alpha_{u_2u}$ pour tous sommets $u_2 \in C$, $u \in A$ et $v \in A$. De plus, un sommet de A_1 peut être relié à tout sommet quelconque de C qui implique que α_{u_2v} ne dépend pas de u_2 . Ceci dit, $\alpha_{uw} = \alpha_{AC}$ pour tous sommets $u \in A$ et $w \in C$. Il est aussi facile de voir que lorsque $|C| \geq 3$, alors $\alpha_{uw} = \alpha_C$ pour tous sommets $u \in C$ et $w \in C$ (on considère trois sommets u_1, u_2 et u_3 dans C où u_1 est relié à u_2 et u_2 est à son tour relié à u_3 et on change l'ordre des sommets pour obtenir un nouveau graphe).

Comme $|A_2| \geq 2$ et $|C| \geq 2$, on peut considérer un graphe de \mathcal{H}_p qui sature l'inégalité (2.5) avec deux sommets $v_1 \in A_2$ et $v_2 \in A_2$ tel que v_1 est relié à v_2 . On suppose aussi qu'il existe deux sommets $u_1 \in C$ et $u_2 \in C$ qui sont reliés. Si on change la position de v_2 sur le cycle en l'insérant entre u_1 et u_2 , on obtient un nouveau graphe qui satisfait toutes les conditions requises avant. Ceci implique que $\alpha_{uv} = \alpha_A$ pour tous sommets $u \in A$ et $v \in A$ et conclue aussi que $\alpha_A + \alpha_C = 2\alpha_{AC}$. Ceci est suffisant pour dire que $\alpha x = \beta$ est une combinaison de l'égalité $x(E) = n$ et de l'égalité (2.11).

En combinant les résultats ci-dessus, on obtient : si $|B| = 0$, alors l'inégalité (2.5) définit une facette de $P(G, p)$ si et seulement si $3 \leq p \leq n - 2$, et $n - (p - 1) \leq |A| \leq n - 1$.

En utilisant le fait que $\sum_{v \in B} (x(\delta(v)) - 2) = \sum_{v \in V \setminus B} (2 - x(\delta(v)))$, le résultat obtenu pour $|B| = 0$ nous conduit directement à une caractérisation similaire de facette que pour le cas $|A| = 0$. Si $|A| = 0$, alors l'inégalité (2.5) définit une facette de $P(G, p)$ si et seulement si $3 \leq p \leq n - 2$, et $1 \leq |B| \leq p - 1$.

On suppose maintenant que $|A| \geq 1$ et $|B| \geq 1$.

On rappelle que les sommets de B sont sur l'unique cycle de taille $p + 1$. Ceci implique que $|B| \leq p + 1$. Il est aussi clair que $|B| \geq p - 1$, alors en utilisant $x(B, A_2) = 0$ on obtient que tout graphe qui sature l'inégalité (2.5) doit avoir $|A_2| = 0$. Ce qui implique qu'on a $x(\delta(v)) = 1$ pour tout sommet v de A . Par conséquent, l'inégalité (2.5) ne définit pas une facette dans ce cas. On note que ceci implique aussi qu'on n'a pas de facette dans le cas où $p = 2$.

On se concentre alors sur le cas où $3 \leq p \leq n - 2$, $|A| \geq 1$ et $1 \leq |B| \leq p - 2$.

Comme $|B| \leq p - 2$, le cycle de taille $p + 1$ doit contenir au moins 3 sommets de C si $A_2 = \emptyset$, et au moins 2 sommets de C si $A_2 \neq \emptyset$ (parce que $x(B, A_2) = 0$). De plus, si $|C| = 2$, alors on a $x(C) = 0$ pour tout vecteur appartenant à la face induite par l'inégalité (2.5)). Comme cette égalité n'est pas une combinaison linéaire de l'égalité $x(E) = n$ et de l'égalité (2.11), on en déduit que la face n'est pas une facette. On supposera alors que $|C| \geq 3$.

Étudions le cas où $|A| = 1$ (avec $3 \leq p \leq n - 2$, $1 \leq |B| \leq p - 2$ et $|C| \geq 3$). On commencera avec le sous-cas $|C| \geq 4$. Considérons un graphe de \mathcal{H}_p qui sature l'inégalité (2.5). Soit a l'unique sommet de A . Comme les sommets de A peuvent être reliés à n'importe quel sommet

de $B \cup C$, on déduit que α_{av} est égal à une constante $\alpha_{AB} = \alpha_{AC}$ pour tout sommet v appartenant soit à B ou à C . Le même genre d'arguments implique que $\alpha_{uv} = \alpha_{uB}$ pour tout sommet $u \in C$ et $v \in B$.

Comme $p \leq n - 2$, on peut supposer que a appartient au cycle. Soit $u \in C$ et $v \in C$ son voisin et soit $w \in C$ un autre sommet qui n'est pas sur le cycle. En permutant a et w , on déduit que $\alpha_{AC} + \alpha_{wB} = \alpha_{wu} + \alpha_{wv}$. Maintenant, en utilisant le fait que $|C| \geq 4$ (v peut être remplacé par un autre sommet de C) on déduit que $\alpha_{vu} = \alpha_C$ pour tous sommets $u \in C$ et $v \in C$. Combiné avec l'égalité précédente, ceci nous conduit à $\alpha_{wB} = \alpha_{CB}$ pour tout $w \in C$. En d'autres mots, on a montré que $\alpha_{AC} + \alpha_{CB} = 2\alpha_C$. Si $|B| = 1$, alors les égalités $\alpha_{AB} = \alpha_{AC}$ et $\alpha_{AC} + \alpha_{CB} = 2\alpha_C$ sont suffisantes pour montrer que $\alpha x = \beta$ est une combinaison linéaire de l'égalité $x(E) = n$ ainsi que de l'égalité (2.11). Par conséquent, on obtient une facette si $|A| = 1$, $3 \leq p \leq n - 2$, $1 = |B| \leq p - 2$ et $|C| \geq 4$.

En outre, si $|B| \geq 2$, alors on considère un graphe de \mathcal{H}_p qui sature l'inégalité (2.5) où le cycle contient des sommets adjacents de C (u et v) et deux autres sommets adjacents de B (i et j) et on suppose que i et u sont aussi adjacents. En supprimant les arêtes (u, v) et (i, j) et en ajoutant les arêtes (u, j) et (i, v) on obtient un nouveau graphe qui satisfait toutes les conditions initiales. Ceci implique que $\alpha_C + \alpha_{ij} = 2\alpha_{CB}$. Comme i et j sont quelconques, on obtient α_{ij} qui est égal à une constante α_B pour tout sommet de B . On obtient aussi $\alpha_C + \alpha_B = 2\alpha_{CB}$. En combinant cette égalité avec les égalités $\alpha_{AB} = \alpha_{AC}$ et $\alpha_{AC} + \alpha_{CB} = 2\alpha_C$, on déduit que $\alpha x = \beta$ est une combinaison linéaire de l'égalité $x(E) = n$ et l'égalité (2.11). Par conséquent, on obtient une facette si $|A| = 1$, $3 \leq p \leq n - 2$, $1 \leq |B| \leq p - 2$ et $|C| \geq 4$.

Le second cas est donné par $|A| = 1$, $3 \leq p \leq n - 2$, $1 \leq |B| \leq p - 2$ et $|C| = 3$. On a $p = n - 2$, et $C = \{u, v, w\}$. En considérant tous les cas possibles, il est facile de vérifier qu'on a toujours $x(A, B) + x(A, C) + x(B) + x(u, w) + \frac{1}{2}x(u, v) + \frac{3}{2}x(w, v) + \frac{1}{2}x(u, B) + x(v, B) + \frac{3}{2}x(w, B) = |B| + 4$. Ceci veut dire que l'inégalité (2.5) ne déduit pas une facette de $P(G, p)$ quand $|A| = 1$, $3 \leq p \leq n - 2$, $2 \leq |B| \leq p - 2$ et $|C| = 3$. Le cas $|A| = 1$ est maintenant complètement étudié.

On s'intéresse maintenant au cas $|A| \geq 2$ (avec $3 \leq p \leq n - 2$, $1 \leq |B| \leq p - 2$ et $|C| \geq 3$). Si on considère le sous-cas $|B| = p - 2$, alors tout graphe de \mathcal{H}_p qui sature l'inégalité (2.5) satisfait $x(A) = 0$. Comme cette égalité n'est pas une combinaison linéaire de $x(E) = n$ et de l'égalité (2.11), on déduit alors qu'on n'a pas de facette dans ce sous-cas.

Le deuxième sous-cas est donné par $|A| \geq 2$, $3 \leq p \leq n - 2$, $1 \leq |B| \leq p - 3$ et $|C| \geq 3$. Comme tout sommet de A_1 peut être relié à tout sommet de $B \cup C$, on obtient que α_{ax} est égal à une constante α_{aB} pour tous les sommets $x \in B \cup C$ et $a \in A$. On obtient aussi par la même façon que $\alpha_{cx} = \alpha_{cB}$ pour tous les sommets $c \in C$ et $x \in B$.

Considérons un graphe de \mathcal{H}_p qui sature l'inégalité (2.5) où il existe deux sommets adjacents $u \in A$ et $v \in A$ appartenant au cycle et un sommet $j \in C$ adjacent à v et appartenant au cycle. On peut aussi supposer qu'il existe au moins un sommet $i \in C$ qui n'appartient pas au cycle. Par la suppression de l'arête (u, v) et l'arête qui relie i à B , et en ajoutant les arêtes (u, i) et (i, j) , on obtient un nouveau graphe qui satisfait toutes les conditions requises initialement. Ceci implique que $\alpha_{iB} + \alpha_{uv} = \alpha_{uC} + \alpha_{ij}$. Comme $|C| \geq 3$ et j est quelconque, on déduit de l'égalité précédente que α_{ij} est aussi égal à une constante α_C . On déduit aussi que $\alpha_{uv} = \alpha_A$, $\alpha_{iB} = \alpha_{CB}$ et $\alpha_{uC} = \alpha_{AC}$. Les égalités ci-dessus deviennent $\alpha_{BC} + \alpha_A = \alpha_{AC} + \alpha_C$ et $\alpha_{AB} = \alpha_{AC}$.

Considérons maintenant le sous-cas $|B| = p - 3$. Il est facile de vérifier que si $|C| = 3$ (et $|A| \geq 2$), alors on a $x(A) + x(A, B) + x(A, C) = |A| + 1$ impliquant que la face n'est pas une

facette.

En outre, si $|C| \geq 4$ (avec $1 \leq |B| = p - 3$ et $|A| \geq 2$), alors on peut considérer un graphe de \mathcal{H}_p qui sature l'inégalité (2.5) contenant 4 sommets de C sur le cycle $(u, v, w$ et $t)$. On suppose que u est adjacent à un sommet de B et à v . On suppose aussi que les arêtes (v, w) et (w, t) existent et il existe un sommet $a \in A$ relié à u . On modifie le graphe comme suit : on supprime les arêtes (v, u) et (v, w) , et on ajoute l'arête (a, w) et on connecte v à B . Ceci nous conduit à $\alpha_{BC} + \alpha_{AC} = 2\alpha_C$. Si $|B| = 1$, cette égalité combinée avec les égalités ci-dessus ($\alpha_{BC} + \alpha_A = \alpha_{AC} + \alpha_C$ et $\alpha_{AB} = \alpha_{AC}$) est suffisante pour déduire que $\alpha x = \beta$ est une combinaison linéaire de $x(E) = n$ et de l'égalité (2.11).

Il est aussi facile de voir que si $|B| \geq 2$ alors on considère un graphe de \mathcal{H}_p tel que le cycle contient dans cet ordre b_1, c_1, b_2 et c_2 où b_1 et b_2 appartiennent à B , c_1 et c_2 appartiennent à C et les arêtes suivantes existent : $(b_1, c_1), (c_1, b_2), (b_2, c_2)$. En permutant c_1 et b_2 on déduit que $\alpha_{b_1 b_2} + \alpha_C = 2\alpha_{BC}$. Comme b_1 et b_2 sont quelconques, on déduit que $\alpha_{b_1 b_2}$ est égal à une certaine constante α_B tel que $\alpha_B + \alpha_C = 2\alpha_{BC}$. En combinant cette égalité avec les inégalités précédentes, on trouve qu'on a une facette.

En d'autres termes, on a montré que si $1 \leq |B| = p - 3, |C| \geq 4$ et $|A| \geq 2$, l'inégalité (2.5) induit une facette de $P(G, p)$.

Il y a un dernier cas à étudier : $|A| \geq 2, 3 \leq p \leq n - 2, 1 \leq |B| \leq p - 4$ et $|C| \geq 3$. Le graphe des transformations défini auparavant pour montrer que $\alpha_{BC} + \alpha_A = \alpha_{AC} + \alpha_C$ et $\alpha_{AB} = \alpha_{AC}$ reste valide. Mais l'autre transformation pour montrer que $\alpha_B + \alpha_C = 2\alpha_{BC}$ n'est pas valide comme on peut avoir $|C| = 3$. Toutefois, comme $1 \leq |B| \leq p - 4$, on peut considérer un graphe de \mathcal{H}_p où le cycle contient dans cet ordre les sommets a_1, c_1, a_2 et c_2 ($a_1 \in A, a_2 \in A, c_1 \in C$ et $c_2 \in C$, et les arêtes $(a_1, c_1), (c_1, a_2), (a_2, c_2)$ existent). En permutant c_1 et a_2 , on obtient que $\alpha_A + \alpha_C = 2\alpha_{AC}$. En considérant les cas $|B| = 1$ et $|B| \geq 2$ comme on a déjà fait avant, on conclut que dans tous les cas on obtient une facette. En d'autres mots, quand $|A| \geq 2, 3 \leq p \leq n - 2, 1 \leq |B| \leq p - 4$ et $|C| \geq 3$, l'inégalité (2.5) induit une facette de $P(G, p)$. \square

Finalement, notons que les inégalités (2.6), (2.7), (2.8), et (2.9) ne définissent pas une facette en général. Une étude profonde des dimensions des facettes induites par ces inégalités semble être très compliquée.

2.5 Un Algorithme à Plans Coupants

Un algorithme à plans coupants est implémenté sur la base des inégalités valides de la section précédente. Nous présentons dans la suite les détails des algorithmes de séparation. Plus de détails et des résultats numériques suivront dans la section 2.6.

2.5.1 Séparation des inégalités (2.5)

On montre d'abord que les inégalités (2.5) peuvent être séparées en temps polynomial en minimisant une fonction sous-modulaire. Après, on donne une deuxième procédure de séparation pratique basée sur un algorithme de coupe minimum.

Étant donné un ensemble A , il est clair qu'un ensemble B qui maximise $\sum_{v \in A} (2 - x(\delta(v))) + \sum_{v \in B} (x(\delta(v) \setminus \delta(A)) - 2)$ contiendra que les sommets v tels que $x(\delta(v) \setminus \delta(A)) - 2 \geq 0$. En d'autres mots, maximiser $\sum_{v \in A} (2 - x(\delta(v))) + \sum_{v \in B} (x(\delta(v) \setminus \delta(A)) - 2)$ est équivalent à maximiser

ser $\sum_{v \in A} (x(\delta(v)) - 2) + \sum_{v \in V \setminus A} \min(2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A)), 0)$. On définit une fonction $f : 2^V \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(A) = \sum_{v \in A} (x(\delta(v)) - 2) + \sum_{v \in V \setminus A} \min(2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A)), 0).$$

On montre que f est une fonction sous-modulaire. Ceci est clairement suffisant pour déduire que le problème de séparation peut être résolu en temps polynomial, en utilisant par exemple, les algorithmes de [75, 116].

Proposition 2.14: f est sous-modulaire.

Preuve: Soient A_1 et A_2 deux sous-ensembles de V . Il est clair qu'on a :

$$\sum_{v \in A_1 \cup A_2} (x(\delta(v)) - 2) + \sum_{v \in A_1 \cap A_2} (x(\delta(v)) - 2) = \sum_{v \in A_1} (x(\delta(v)) - 2) + \sum_{v \in A_2} (x(\delta(v)) - 2).$$

Alors, on a juste à montrer que :

$$\sum_{v \in V \setminus A_1 \cup A_2} \min(2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1 \cup A_2)), 0) + \sum_{v \in V \setminus A_1 \cap A_2} \min(2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1 \cap A_2)), 0) \leq \sum_{v \in V \setminus A_1} \min(2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1)), 0) + \sum_{v \in V \setminus A_2} \min(2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_2)), 0).$$

On montrera que pour tout sommet v , le membre de gauche de l'inégalité ci-dessus est inférieur au membre de droite.

D'abord, on considère un sommet $v \in V \setminus A_1 \cup A_2$. Alors, v appartient à $V \setminus A_1 \cap A_2$, $V \setminus A_2$ et $V \setminus A_1$. On doit montrer alors que

$$\min(2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1 \cup A_2)), 0) + \min(2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1 \cap A_2)), 0) \leq \min(2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1)), 0) + \min(2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_2)), 0).$$

Si $2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1 \cup A_2)) \leq 0$, alors $2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1 \cap A_2)) \leq 0$, $2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1)) \leq 0$ et $2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_2)) \leq 0$. Le membre de gauche devient $2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1 \cup A_2)) + 2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1 \cap A_2))$ et le membre de droite est $2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1)) + 2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_2))$. Ils sont égaux.

Maintenant, on suppose que $2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1 \cup A_2)) > 0$. Si $2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1 \cap A_2))$ est positif alors les autres termes sont aussi positifs : $2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1)) > 0$ et $2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_2)) > 0$. Dans ce cas les deux membres de gauche et de droite sont égaux à 0.

Si $2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1 \cup A_2)) > 0$, $2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1 \cap A_2)) < 0$, $2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1)) \geq 0$ et $2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_2)) \geq 0$, alors le membre de gauche est $2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1 \cap A_2))$ alors que celui de droite est 0. L'inégalité est vérifiée.

Un autre sous-cas correspond à $2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1 \cup A_2)) > 0$, $2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1 \cap A_2)) < 0$, $2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1)) < 0$ et $2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_2)) < 0$. Le membre de gauche est $2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1 \cap A_2))$ et le membre de droite est $2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1)) + 2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_2))$. La différence entre eux (le membre de droite moins le membre de gauche) est égale à $2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1 \cup A_2))$ qui est encore positif.

Le dernier sous-cas est donné par $2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1 \cup A_2)) > 0$, $2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1 \cap A_2)) < 0$, $2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1)) < 0$ et $2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_2)) > 0$. Alors, le membre de gauche est $2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1 \cap A_2))$ et le membre de droite est $2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1))$. Il est clair que le premier terme est inférieur au second.

On suppose maintenant que $v \in A_1 \setminus A_2$ (le cas $v \in A_1 \cap A_2$ n'est pas vérifié, et le cas $v \in A_2 \setminus A_1$ est symétrique au premier). Dans ce cas, on a juste à montrer que $\min(2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_1 \cap A_2)), 0) \leq \min(2 - x(\delta(v) \setminus \delta(A_2)), 0)$. Ceci est clairement valide.

La sous-modularité de f est donc montrée, ce qui termine la preuve. \square

Les inégalités (2.5) peuvent aussi être séparées par un algorithme de flot maximum. Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et un vecteur fractionnaire x , on construit un réseau (un graphe orienté avec capacités sur les arcs) comme suit. Chaque sommet u_i de V est remplacé par deux sommets v_i et w_i . Chaque arête $e = (u_i, u_j) \in E$ est remplacée par deux arcs (w_i, v_j) et (w_j, v_i) . La capacité de chaque arc est x_e . On considère aussi deux nouveaux sommets s et t . Il existe des arcs de s à v_i et w_i avec une capacité de 2. Il y a aussi des arcs de v_i et w_i à t avec une capacité $x(\delta(u_i))$ (voir Figure (2.6)). En calculant un flot maximum de s à t , on obtient une coupe minimum séparant s et t . Les sommets u_i tels que leurs propres v_i et w_i sont du même côté que s vont constituer l'ensemble A . D'une façon similaire, B contient tous les sommets u_i tels que leurs propres v_i et w_i sont du même côté que t . Les autres sommets u_i (pour lesquels leurs w_i et v_i ne sont pas du même côté) vont constituer l'ensemble $C = V \setminus \{A \cup B\}$ (voir Figure (2.6)).

Dans un premier temps, il est clair que tous les sommets $u_i \in C$ sont tels que v_i est du même côté que s et w_i est de l'autre côté. Autrement dit, en permutant v_i et w_i , la capacité de la coupe ne peut pas diminuer. On peut aussi voir que si $u_i \in C$, alors la capacité des arêtes reliées soit à v_i ou à w_i et appartenant à la coupe est exactement $2 + x(\delta(u_i))$. En outre, si $u_i \in B$, alors la capacité des arêtes reliées soit à v_i ou à w_i et appartenant à la coupe est $x(u_i, A) + 4$.

La capacité de la coupe est alors donnée par $\sum_{u_i \in A} 2x(\delta(u_i)) + \sum_{u_i \in C} 2 + x(\delta(u_i)) + \sum_{u_i \in B} 4 + x(u_i, A)$. Comme la capacité de la coupe est minimale, si u_i appartient à C alors $2 + x(\delta(u_i)) \leq x(u_i, A) + 4$ (autrement la capacité peut diminuer en mettant u_i dans B). D'une façon similaire, si $u_i \in B$ alors $x(u_i, A) + 4 \leq 2 + x(\delta(u_i))$. Par conséquent, la capacité de la coupe est égale à $\sum_{u_i \in A} 2x(\delta(u_i)) + \sum_{u_i \in V \setminus A} \min(2 + x(\delta(u_i)), 4 + x(u_i, A))$. Après des calculs algébriques la capacité de la coupe devient $\sum_{u_i \in A} (x(\delta(u_i)) - 2) + 2|A| + \sum_{u_i \in A} x(\delta(u_i)) + \sum_{u_i \in V \setminus A} \min(0, 2 - x(\delta(u_i)) \setminus \delta(A)) + 2|V \setminus A| + \sum_{u_i \in V \setminus A} x(\delta(u_i))$. Donc, la capacité de la coupe est égale à $f(A)$ plus une constante ($4n$).

2.5.2 Séparation des inégalités (2.2)

Considérons le problème de décider s'il existe un ensemble A tel que $|A| \leq p$ et $x(A) - |A| \geq z$ où z et p sont deux nombres donnés. Dans un premier temps, on va prouver que ce problème est NP-Complet. On note que ce problème est plus général que le problème de séparation des inégalités (2.2).

Dans un deuxième temps, on donnera une heuristique de séparation basée sur un algorithme de plus court chemin et une relaxation Lagrangienne où le sous-problème Lagrangien est un problème de coupe minimum.

Considérons le problème de la clique de poids maximum avec contrainte de taille. Il se définit ainsi : étant donné un graphe complet avec des poids associés aux arêtes et deux nombres z et k , décider s'il existe une clique de taille inférieure ou égale à k tel que la somme des poids des arêtes de la clique est supérieure ou égale à z . Ce problème connu dans la littérature est NP-Complet. Il est aussi facile de voir que ce problème reste NP-Complet si on ajoute la contrainte suivante : la clique doit contenir une arête donnée (v_0, v_1) .

En plus, étant donnée une instance de ce problème (clique de poids maximum, de taille inférieure à p , contenant une arête donnée (v_0, v_1)) où $(y_e)_{e \in E}$ sont les poids des arêtes), on

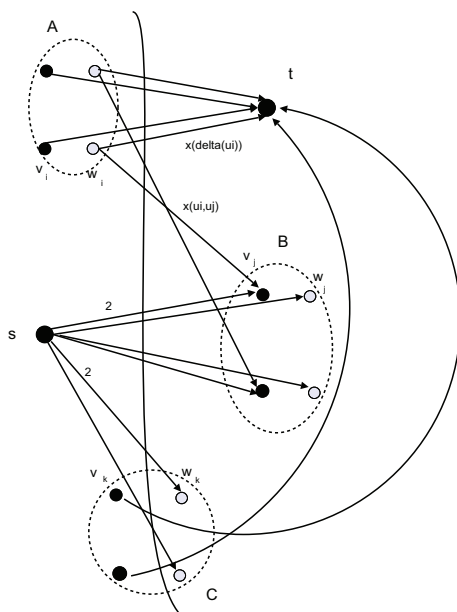


FIGURE 2.6 – Un algorithme de flot maximum pour séparer les inégalités (2.5)

peut construire une instance du problème de séparation comme suit : $x_e = y_e$ si e ne contient pas ni v_0 ni v_1 , $x_e = y_e + 1$ si e contient v_0 (et non v_1), et $x_e = y_e + M + 1$ si $e = (v_0, v_1)$ où M est un grand nombre. Ceci implique que $y(A) + M = x(A) - |A|$ pour tout ensemble A contenant (v_0, v_1) . Si M est suffisamment large, l'existence de A tel que $x(A) - |A| \geq M + z$ et $|A| \leq p$ est équivalente à l'existence d'une clique contenant (v_0, v_1) dont le poids est au moins z .

Toutefois, si p est inférieur à une constante, alors la séparation peut se faire en temps polynomial par simple énumération.

La séparation des inégalités (2.2) est liée au problème de séparation bien connu des inégalités $x(A) \leq |A| - 1$ (sans les contraintes de cardinalité) dans le contexte du polytope de l'arbre couvrant (voir [117]). Une technique simple est utilisée pour séparer ces contraintes en calculant une coupe minimum dans un graphe approprié. En effet, on peut facilement voir que $2|A| - 2x(A) = -\sum_{v \in V} x(\delta(v)) + 2|A| + x(A, V \setminus A) + \sum_{v \in V \setminus A} x(\delta(v))$. Considérons une version pondérée de $G = (V, E)$ où le poids de chaque arête e est x_e . On ajoute à G deux sommets s et t . On connecte s (resp. t) à chaque sommet de V par une arête de poids $x(\delta(v))$ (resp. 2). Alors, minimiser $|A| - x(A)$ est équivalent à calculer une coupe minimum séparant s et t (voir [117]).

Comme x appartient à $P(G, 2)$, on a $|V| - x(V) = 0$ et $|A| - x(A) \geq 0$ pour tout $A \subset V$. Autrement dit, si on minimise $|A| - x(A)$, on peut soit avoir $|A| = n$ ou $|A| = 0$. On rappelle qu'on est intéressé par les sous-ensembles A tels que $2 \leq |A| \leq p$ et $|A| - x(A)$ est inférieur à 1. On peut aussi inclure les ensembles A tels que $|A| = 1$ (dans ce cas $|A| - x(A) = 1$). Pour garantir que $|A| \geq 1$, on peut identifier le sommet s avec un sommet de V (ceci donne n problèmes différents).

Si $p \geq n - q$ où q est une constante, la séparation est alors facile. Ceci vient du fait que $|V \setminus A| \geq n - p$ qui nous conduit à un algorithme trivial d'énumération : pour tout sous-ensemble de sommets de V de cardinalité $n - p \leq q$, on identifie cet ensemble avec t et on calcule une

coupe minimum séparant s et t (rappelons que s est aussi identifié avec un sommet de V).

Retournons maintenant au dernier cas. Soit $e = (i, j)$ une arête quelconque. Soit P_{ij} un plus court chemin entre i et j au sens de $1 - x$ en utilisant au plus $p - 1$ arêtes non contenant e . P_{ij} peut être calculé en temps polynomial par une version modifiée de l'algorithme de Bellman-Ford appliqué sur un graphe pondéré où le poids de l'arête e est infini et le poids de toute autre arête e' est $1 - x_{e'}$. $P_{ij} \cup (i, j)$ est un cycle C avec moins de p arêtes contenant e tel que $x(E(C)) - |V(C)|$ est maximum ($V(C)$ est l'ensemble des sommets de C et $E(C)$ est l'ensemble d'arêtes). Alors, on prend $A = V(C)$ et on vérifie quand l'inégalité $x(A) \leq |A| - 1$ est violée. Cette procédure est répétée pour toutes les arêtes $e = (i, j)$.

Étant donné un vecteur fractionnaire x , si la procédure qu'on vient de décrire ne permet pas de détecter des contraintes violées, une relaxation Lagrangienne est alors proposée.

On relaxe alors la contrainte $|A| \leq p$. La fonction objectif devient alors $|A| - x(A) + u(|A| - p)$ où u est le multiplicateur Lagrangien correspondant. Il est alors facile de calculer

$$f(u) = \min_{A \neq \emptyset} |A| - x(A) + u(|A| - p). \quad (2.12)$$

Ceci peut être fait en changeant les poids des arêtes reliées à t : les poids deviennent $2 + u$ au lieu de 2. Alors pour tout sommet $v \in V$, on identifie s avec v et on calcule la nouvelle coupe minimum séparant s et t . Le minimum parmi toutes les identifications possibles nous donne la valeur de $f(u)$. La théorie classique de la relaxation Lagrangienne implique que f est concave. f est aussi linéaire par morceaux avec moins de n morceaux. Soit A_u l'ensemble qu'on obtient quand on minimise $|A| - x(A) + u(|A| - p)$. $|A_u| - p$ est la tangente de la courbe. La Figure (2.7) montre la situation. Notons que si $|A| \leq |A_u|$ pour une valeur donnée de u , alors on a nécessairement $|A| - x(A) \geq |A_u| - x(A_u)$.

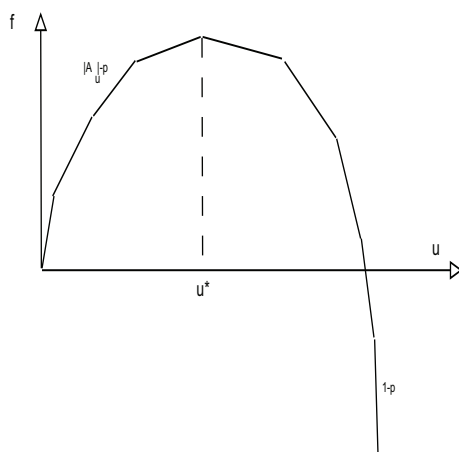


FIGURE 2.7 – Sur la fonction Lagrangienne

Si u est assez large (par exemple $u = n$), alors $|A_u| = 1$. On souhaite obtenir u^* tel que $|A_u| \geq p$ si $u < u^*$ et $|A_u| \leq p$ si $u > u^*$. Notons que u^* n'est pas nécessairement unique. L'heuristique qu'on utilise pour séparer les inégalités (2.2) est définie ainsi : on calcule approximativement u^* par une simple dichotomie dans l'intervalle $[0, n]$.

Si on obtient $f(u) \geq 1$ pour quelques valeurs de u , alors il n'y a aucune inégalité violée du type (2.2). En plus, si on obtient u , $|A_u| \leq p$ et $|A_u| - x(A_u) < 1$, alors on ajoute la contrainte $x(A_u) \leq |A_u| - 1$. Il existe une mauvaise situation dans laquelle on est incapable de décider si on a ou pas une violation de cette contrainte. Cette situation correspond au cas dans lequel la procédure de dichotomie a fini avec un certain u^* (avec une précision ε) tel que $|A_{u^*-\varepsilon}| > p$, $|A_{u^*+\varepsilon}| < p$, $f(u^* - \varepsilon) < 1$ et $|A_{u^*+\varepsilon}| - x(A_{u^*+\varepsilon}) \geq 1$. Cette situation apparaît de temps à autre.

2.5.3 Séparation des inégalités (2.4)

On montre que la séparation des inégalités (2.4) est NP-Difficile. On utilise une réduction à partir du problème de bi-clique maximum. Une bi-clique (S, T) est un graphe complet biparti où S et T sont deux ensembles disjoints de sommets qui définissent la partition. Étant donné un graphe biparti, on sait que calculer une bi-clique de taille maximum (i.e., $|S||T|$) est NP-Difficile [45, 113]. Il est aussi évident que le problème reste NP-Difficile si on ajoute une contrainte de cardinalité sur S ($|S| = k$ pour un nombre k donné).

Considérons une instance du problème de bi-clique maximum avec la contrainte de cardinalité ($|S| = p - 1$) définie par un graphe non orienté $G = (V, E)$. On définit un graphe pondéré $G' = (V', E', x)$ comme suit (x représente ici les poids) :

- Il existe deux sommets v_1 et v_2 qui correspondent à tout sommet $v \in V$;
- Il existe une arête reliant v_1 et v_2 pour tout $v \in V$; son poids est égal à 1 ;
- Si l'arête (v, w) n'existe pas dans G , alors les arêtes (v_1, w_2) et (v_2, w_1) existent dans G' et possèdent un poids égal à 1 ;
- Le graphe induit par $\{v_1, v \in V\}$ est complet et le poids de chaque arête du type (v_1, w_1) est un nombre large (par exemple $x_{v_1 w_1} = n^2$ où $n = |V|$) ;
- On ajoute un nouveau sommet z qui est connecté à tout sommet v_1 ; le poids de l'arête (v_1, z) est choisi tel que $x(\delta(v_1)) = n^2(n - 1) + n + 1$.

La Figure (2.8) nous montre bien cette situation.

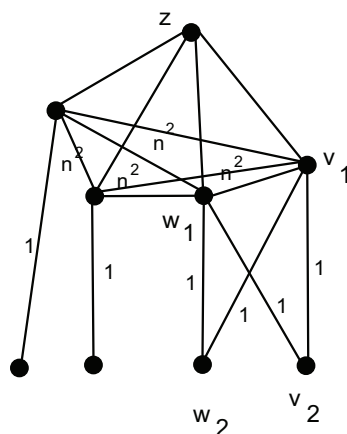


FIGURE 2.8 – Une réduction à partir du problème de bi-clique maximum

On montre que le calcul des ensembles A et B de V' maximisant $2x(A) + x(A, B) - 2|A| - |B|$ où $|A| \leq p - 1$ nous conduit à une solution du problème de bi-clique maximum avec la

contrainte $|S| = p - 1$.

Soit $C = V' \setminus \{A \cup B\}$. Alors $2x(A) + x(A, B) - 2|A| - |B|$ peut être réécrit ainsi : $2x(A) + x(A, B) - 2|A| - |B| = \sum_{v \in A} (x(\delta(v)) - 1) + |C| - |V'| - x(A, C)$. Autrement dit, maximiser $2x(A) + x(A, B) - 2|A| - |B|$ est équivalent à maximiser $\sum_{v \in A} (x(\delta(v)) - 1) + |C| - x(A, C)$. Comme les sommets du type v_1 possèdent un $x(\delta(v_1))$ large, A va contenir que les sommets du type v_1 et la cardinalité de A doit être exactement égale à $p - 1$. Comme on a $x(\delta(v_1)) = n^2(n - 1) + n + 1$ pour tout v_1 , la maximisation de la violation est en effet équivalente à trouver $p - 1$ sommets du type v_1 tel que $|C| - x(A, C)$ est maximum. En plus, étant donné un ensemble A , C contient les sommets v pour lesquels $x(A, v) = 0$ (tous les autres sommets peuvent être dans B). C'est à dire que C doit contenir que les sommets de type v_2 et il n'existe pas d'arêtes entre C et A . Il est aussi évident qu'on ne peut pas avoir $v_1 \in A$ et $v_2 \in C$. Maintenant en utilisant le fait qu'une arête (v_1, w_2) existe si et seulement si (v, w) n'existe pas dans G , on déduit alors qu'on obtient une bi-clique en mettant $S = \{v \in V, v_1 \in A\}$ et $T = \{v \in V, v_2 \in C\}$. Cette bi-clique a la taille maximum et satisfait la contrainte de cardinalité.

Comme la transformation précédente est polynomiale, la séparation des inégalités (2.4) est NP-Difficile. Observons ici que pour simplifier, on a considéré ci-dessus des problèmes d'optimisation au lieu des problèmes de décision.

Il est facile de voir que la séparation peut se faire en temps polynomial si $p \leq q$ où q est un nombre constant positif (par simple énumération).

Notons qu'on sait à partir de la Proposition (2.12) qu'on peut se focaliser sur $|A| = p - 1$. Dans ce cas, la séparation est aussi facile si $p \geq n - q$.

Proposition 2.15: Les inégalités (2.4) sont en générale NP-Difficile à séparer. Si $p \leq q$ où q est une constante positive quelconque, alors elles peuvent être séparées en temps polynomial. Les inégalités qui induisent des facettes (i.e, $|A| = p - 1$) peuvent aussi se séparer facilement quand $p \geq n - q$.

A partir du fait que $2x(A) + x(A, B) - 2|A| - |B| = \sum_{v \in A} (x(\delta(v) \setminus \delta(C)) - 1) + |C| - |V|$, il en découle que la séparation est facile quand $C = V \setminus \{A, B\}$ est fixé. Ceci va être utilisé pour séparer les inégalités (2.4) pour des valeurs intermédiaires de p .

La séparation se fait par une heuristique en utilisant la relaxation Lagrangienne de la section précédente. Si on obtient pour un certain u (le multiplicateur Lagrangien) $|A_u| > p - 1$, alors on prend $C = V \setminus A_u$ et on résout le problème de séparation d'une façon exacte.

Si $|A_u| \leq p - 1$ pour un certain u , on commence avec $A = A_u$ et on essaye d'augmenter la taille de A d'une manière gloutonne en ajoutant les sommets v pour lesquels $x(A, v) - 1$ est maximum. Si la taille de A atteint $p - 1$, on augmente alors la taille de B en utilisant encore une fois le même algorithme glouton.

2.5.4 Séparation des inégalités (2.6)

Étant donné un ensemble de nombres $(\alpha_e)_{e \in E}$ (sans restriction de signe) et un nombre $0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor - 1$, γ_{n+i} peut être calculé par un simple algorithme glouton : calculer un arbre couvrant de poids minimum et ajouter $i + 1$ arêtes de poids minimum. β_i peut aussi être calculé de la même façon.

Rappelons que β_i est défini selon un arbre couvrant de coût minimum T_α . Mais il est facile de voir que l'inégalité (2.6) est aussi valide si on considère tout arbre couvrant T au lieu de T_α (la preuve de la Proposition (2.3) est basée uniquement sur la connectivité de T_α). Toutefois, β_i

est clairement minimum si on considère un arbre couvrant de coût minimum. En d'autres mots, on obtient toujours une inégalité valide meilleure si on considère un arbre couvrant minimum. De ce fait, pour simplifier la séparation, on considérera d'abord un arbre fixé T et on résout le programme linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{e \in E} \alpha_e x_e - Z \\ Z \leq \gamma_{n+i} - i\beta; \forall 0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor - 1 \\ \beta \geq \alpha_e; \forall e \in T \\ \gamma_{n+i} \leq \sum_{e \in H} \alpha_e; \forall 0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor - 1, \forall H \text{ sousgraphe connexe avec } n+i \text{ arêtes} \\ -1 \leq \alpha_e \leq 1; \forall e \in E \\ \gamma_{n+i} \in \mathbb{R}; \forall 0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor - 1 \\ Z \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Dans la formulation précédente, la variable β représente une borne supérieure de tout α_e . Au lieu d'utiliser β_i , on considère le produit $i\beta$ qui donne une borne supérieure du coût de tout ensemble de i arêtes de T . Une variable Z est aussi ajoutée pour noter $\min_{0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor - 1} (\gamma_{n+i} - i\beta)$.

Le troisième ensemble de contraintes définit γ_{n+i} : pour tout graphe connexe H avec $n+i$ contraintes, on écrit le coût de H est plus grand que γ_{n+i} . Comme le nombre de graphes H peut être très large, on les ajoute d'une manière itérative par une génération de contraintes. Étant donné un vecteur courant α , on calcule par l'algorithme glouton un graphe connexe de coût minimum avec $n+i$ arêtes et on ajoute les contraintes correspondantes si le coût est inférieur à la valeur courante de γ_{n+i} .

Après la résolution du programme linéaire, on obtient un vecteur α qui maximise la violation. La contrainte peut être améliorée en remplaçant l'arbre T par T_α et on calcule les nombres β_i . Alors la contrainte ajoutée à notre relaxation linéaire doit être $\sum_{e \in E} \alpha_e x_e \geq \min_{0 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor - 1} (\gamma_{n+i} - \beta_i)$ s'il y a bien une violation.

Notons aussi que si x est le vecteur d'incidence d'un graphe avec plus de $\lfloor \frac{n}{p+1} \rfloor$ composantes connexes alors les inégalités données par le programme linéaire doivent être violées par x . En d'autres mots, ces inégalités constituent une formulation exacte du problème de design des réseaux avec une borne supérieure sur le nombre de composantes connexes.

2.5.5 Séparation des inégalités (2.7), (2.8) et (2.9)

Les inégalités (2.7) sont séparées avec une heuristique en utilisant un simple algorithme glouton. D'abord, on calcule le flot maximum f_{ij} entre chaque paire de sommets i et j (la capacité du lien e est x_e). Alors on construit un ensemble S par un glouton en ajoutant à chaque itération un sommet i qui minimise $\sum_{j \in S} f_{ij}$. Si on obtient une violation à une quelconque itération, on ajoute alors la contrainte.

Les inégalités (2.8) peuvent se séparer d'une manière exacte et en un temps polynomial. Après avoir calculé les flots maximums (et coupes minimums), on a juste à vérifier quand $\sum_{i,j \in V, i < j} f_{ij}$ serait inférieur au second membre de (2.8).

La séparation des inégalités (2.9) est aussi basée sur les techniques de flot. Pour toute arête $e = (i, j) \in E$, on calcule un flot maximum f'_{ij} entre i et j dans le graphe G où les capacités de chaque lien e' est le minimum de $x_{e'}$ et x_e . Ceci nous donne une coupe $\delta(A_{ij})$ tel que

$\sum_{e' \in \delta(A_{ij})} x_{ij,e'} = f'_{ij}$ où $x_{ij,e'} = x_{ij}$ si $x_e \leq x_{e'}$ et $x_{ij,e'} = x_{e'}$ sinon. En faisant cela pour toute arête $e = (i, j)$, on minimise le membre de gauche de l'inégalité (2.9). Maintenant, on peut d'une manière heuristique maximiser le membre de droite de l'inégalité (2.9) avec une méthode gloutonne. D'abord, on calcule deux sommets i et j qui minimisent f_{ij} . Si $f_{ij} \geq 1$, alors le meilleur membre de droite est simplement $n + p + 1$. Dans l'autre cas, on met i et j dans S et on essaye d'augmenter la taille de S en y ajoutant des sommets k pour lesquels $\sum_{i \in S} f_{ik} < 1$. On ajoute toujours à S le sommet $k \notin S$ qui minimise $\sum_{i \in S} f_{ik}$.

Ces inégalités ont été implémentées. Cependant, elles semblent être dans la plupart des cas dominées par les inégalités décrites auparavant dans ce chapitre. Ceci nous a amené à ne pas les inclure dans les expérimentations numériques présentées dans la section suivante.

2.6 Résultats Expérimentaux

Un algorithme à plans coupants est implémenté pour résoudre ce problème. On a utilisé la formulation (2.1) avec les inégalités (2.2), (2.4) et (2.5). Ces dernières sont considérées dans l'ordre suivant : (2.2), ensuite (2.4) et finalement (2.5). On rappelle que les inégalités (2.2) et (2.4) sont simultanément séparées. Les inégalités $x(\delta(v)) \leq n - p + 1$ sont directement incluses dans le programme linéaire.

Après l'algorithme à plans coupants, un algorithme de Branch&Cut est ensuite entamé en utilisant les fonctions de callback de [74]. Toutes ces expérimentations ont été réalisées sur un Pentium 4, de 3.25 Go de RAM, et de 2.39 GHz.

L'ensemble des 3 familles d'inégalités citées ci-dessus est généré dans la phase de l'algorithme des plans coupants (au niveau de la racine de l'arborescence), alors qu'on ne sépare que les inégalités (2.2) au niveau des autres noeuds de l'arbre du Branch&Cut. Ce choix a été pris pour deux raisons. La première est que la séparation des inégalités (2.5) est relativement lente. La seconde raison, est qu'on sait que toute solution entière satisfaisant les inégalités (2.2) est une solution réalisable, donc l'algorithme de Branch&Cut se termine nécessairement par une solution optimale (lorsque on ne limite pas le temps et l'espace mémoire). Notons que toute solution entière non réalisable peut être séparée en un temps polynomial grâce à l'algorithme (modifié) de Bellman-Ford (pour vérifier s'il existe des cycles de taille inférieure à p).

Une stratégie de recherche en profondeur d'abord est utilisée dans l'algorithme de Branch&Cut. Une borne supérieure est calculée par la recherche d'un cycle Hamiltonien de coût minimum.

Chaque fois qu'un calcul de flot maximum est nécessaire pour séparer des inégalités, nous utilisons l'algorithme de [50].

Nous avons considéré trois types d'instances générées aléatoirement et selon différents modes, et deux instances réelles fournies par Orange Labs contenant 32 et 23 sommets. Le premier ensemble relatif à la Table 2.1 est basé sur des graphes complets, aléatoires et Euclidiens. Les coordonnées de chaque sommet sont choisies d'une manière aléatoire et uniforme entre 0 et 1. Le poids d'une arête est proportionnel à la distance entre les extrémités de cette arête.

Le deuxième ensemble d'instances (Table 2.2) est relatif aux graphes complets aléatoires dont les poids des arêtes sont des nombres positifs choisis d'une manière aléatoire et uniforme

TABLE 2.1 – Graphes Complets aléatoires et Euclidiens

| n | p | temps sep | temps relax | temps tot | gap(%) | gap2(%) (2.2) | (2.4) | (2.5) | Nb coupes | Nb noeuds |
|-----|----|--------------|----------------|--------------|--------|------------------|-------|-------|--------------|--------------|
| 20 | 6 | 0.33 | 0 | 0.33 | 0 | 10.4 | 10 | 9.6 | 0 | 1 |
| | 10 | 1.3 | 0 | 1.3 | 0 | 11.7 | 15.6 | 12.6 | 0 | 1 |
| | 16 | 5.6 | 0.3 | 6 | 0 | 15.1 | 28.3 | 14.6 | 11.3 | 1 |
| 35 | 7 | 2.3 | 0.3 | 2.6 | 0 | 8.8 | 21.3 | 27.6 | 0 | 4.6 |
| | 16 | 12.3 | 0.3 | 15.3 | 0 | 10.1 | 37.3 | 20.3 | 0 | 36 |
| | 30 | 186.6 | 5 | 238.6 | 0 | 17.7 | 56.6 | 15 | 62.6 | 1 |
| 50 | 12 | 11 | 0 | 11.3 | 0 | 8.8 | 32.6 | 23.6 | 0 | 6.3 |
| | 25 | 36 | 0 | 104 | 0 | 9.9 | 47.3 | 16.3 | 0 | 330.3 |
| | 45 | 2540.3 | 272.7 | 6812.7 | 3.7 | 16.2 | 76.7 | 16.3 | 236.3 | 913.7 |
| 65 | 15 | 62 | 0.6 | 86.3 | 0 | 10.5 | 55.6 | 36.3 | 0 | 148 |
| | 30 | 233 | 2.3 | 394.6 | 0 | 10.1 | 79.3 | 27.6 | 0 | 340.3 |
| | 60 | 6213.3 | 303.3 | 7200 | 4.3 | 18.7 | 95.7 | 21 | 213.7 | 78 |
| 100 | 25 | 326.3 | 0.6 | 349 | 0 | 6.7 | 64.3 | 36.3 | 0 | 39.6 |
| | 50 | 1288 | 2.7 | 7200 | 6.8 | 14.2 | 81.3 | 22 | 0 | 998.7 |
| | 90 | 7160.3 | 39.7 | 7200 | 8.1 | 18.7 | 137 | 15.7 | 31 | 1 |

entre 0 et 1000. Le poids moyen est alors de 500, et l'écart type est de 288.7.

Le troisième ensemble d'instances (Table 2.3) est similaire au précédent. La seule différence, est qu'on a réduit l'écart type qui est à nouveau égal à 223.8. En d'autres mots, les poids de ce troisième ensemble d'instances sont assez proches de leur moyenne.

Différentes valeurs de n et de p ont été prises. Trois instances sont alors générées pour toute valeur de n et de p . Les résultats présentés dans des tables 2.1, 2.2 et 2.3 sont obtenus en calculant les moyennes des trois instances générées.

Dans ces tables, on note par "temps sep" le temps en secondes de séparation de toutes les coupes dans la phase de l'algorithme à plans coupants (avant le Branch&Cut), et par "temps relax", on note le temps mis pour la résolution de la relaxation (avant le Branch&Cut). "temps tot" note le temps total mis pour résoudre le problème, l'algorithme de Branch&Cut compris. Les nombres de contraintes générées par l'algorithme à plans coupants (avant le Branch&Cut) sont aussi donnés : ils sont notés par (2.2), (2.4) et (2.5). Le nombre de contraintes générées dans l'arbre du Branch&Cut est noté par "Nb coupes". On rappelle que dans le Branch&Cut, on a considéré que les inégalités (2.2). On donne finalement le nombre de noeuds de l'arbre construit, on le note par "Nb noeuds".

Le gap final, qui est la différence entre la borne supérieure et la meilleure solution trouvée, le tout divisé par la borne supérieure, est donné et noté par "gap". Si ce gap est égal à 0, alors le problème est résolu jusqu'à l'optimum. On donne aussi la valeur de "gap 2", qui représente la différence entre la meilleure borne supérieure et le coût obtenu avec $p = 2$, le tout étant divisé par la borne supérieure. Comme le coût obtenu lorsque $p = 2$ est une borne inférieure, on a

$\text{gap} \leq \text{gap } 2$.

Pendant les simulations, on a limité le temps total à 2 heures.

On remarque aussi que les contraintes (2.5) sont plus efficaces pour des valeurs de p assez larges. Seulement, leur séparation est relativement lente, ce qui fait que la phase de l'algorithme à plans coupants peut devenir très lente pour des valeurs de n et p assez grandes. Par exemple, lorsque $n = 100$ et $p = 90$, le temps limite est atteint avant d'entamer la phase de Branch&Cut, alors la borne supérieure est simplement donnée par le coût minimum d'un cycle Hamiltonien, et que la borne inférieure est donnée par l'optimum de la dernière relaxation linéaire.

On peut aussi remarquer que le problème devient plus facile à résoudre lorsque l'écart type des poids des arêtes est petite. "gap 2" a aussi tendance à diminuer avec la diminution de l'écart type.

TABLE 2.2 – Graphes complets aléatoire avec un écart type élevé

| n | p | temps sep | temps relax | temps tot | gap(%) | gap2(%) | (2.2) | (2.4) | (2.5) | Nb coupes | Nb noeuds |
|-----|----|--------------|----------------|--------------|--------|---------|-------|-------|-------|--------------|--------------|
| 20 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2.3 | 1.7 | 2.7 | 0 | 0 | 1 |
| | 10 | 0 | 1.3 | 3 | 0 | 8.5 | 7.3 | 11.7 | 3.3 | 42.7 | 134 |
| | 16 | 9 | 0.7 | 10.7 | 0 | 26.2 | 21 | 24.7 | 24 | 1.3 | 1 |
| 35 | 7 | 0.7 | 0 | 1 | 0 | 0.6 | 1.3 | 1.3 | 0 | 0 | 1 |
| | 16 | 11.7 | 0 | 106.7 | 0 | 5.9 | 8.3 | 16 | 0 | 333.3 | 929.7 |
| | 30 | 399.7 | 62.7 | 2914.7 | 6.3 | 29.9 | 41.3 | 21 | 147.3 | 1854 | 24414.3 |
| 50 | 12 | 0 | 10.3 | 23.7 | 0 | 0.61 | 5.3 | 12.7 | 0 | 6.3 | 3.3 |
| | 25 | 145 | 2.3 | 7200 | 25.1 | 27.5 | 14.3 | 17 | 12.7 | 4934.7 | 20551 |
| | 45 | 3876.3 | 960.7 | 5399.3 | 12.1 | 38.4 | 57.3 | 33.3 | 373 | 127 | 1588.7 |
| 65 | 15 | 60.7 | 0.3 | 121.7 | 0 | 1.7 | 8.3 | 16.7 | 0 | 39.7 | 127.7 |
| | 30 | 529.3 | 6 | 7200 | 28.2 | 29.9 | 30 | 24 | 16.7 | 1819.3 | 6785.3 |
| | 60 | 6742 | 458 | 7200 | 12.3 | 36.2 | 87 | 37.7 | 221 | 0 | 1 |
| 100 | 25 | 479.3 | 2 | 5142 | 4.9 | 5.6 | 8.6 | 17.7 | 0 | 422.3 | 1123.7 |
| | 50 | 5628 | 38 | 7200 | 39.3 | 40.4 | 21.7 | 42.7 | 37 | 203.3 | 190 |
| | 90 | 7154.7 | 42.3 | 7200 | 22.5 | 41.3 | 77.3 | 48.3 | 20.7 | 0 | 1 |

Finalement, les figures (2.9) et (2.10) représentent le coût minimum (plus précisément "gap 2") en fonction de p . On présente alors ci-dessous deux instances réelles avec respectivement 32 et 23 sommets. Le problème est résolu jusqu'à l'optimum pour toute valeur de p entre 2 et 31 (respectivement 2 et 22). On observe alors sur ces figures un important saut du coût quand les valeurs de p sont proches de $|V| - 1$. Ceci est aussi observé pour d'autres instances.

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté un algorithme à plans coupants suivi d'un Branch&Cut efficace pour résoudre le problème de synthèse d'un réseau avec composantes connexes unicycliques respectant une contrainte sur la taille des cycles. Plusieurs extensions de ces travaux

TABLE 2.3 – Graphes complets aléatoires avec faible écart type

| n | p | temps sep | temps relax | temps tot | gap(%) | gap2(%) (2.2) | (2.4) | (2.5) | Nb coupes | Nb noeuds |
|-----|----|--------------|----------------|--------------|--------|------------------|-------|-------|--------------|--------------|
| 20 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0.3 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| | 10 | 0.7 | 0 | 1.3 | 0 | 1.3 | 5.7 | 11 | 1 | 27.7 |
| | 16 | 16.3 | 0.7 | 74.3 | 0 | 3.9 | 20.3 | 22 | 43.3 | 411 |
| 35 | 7 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0.1 | 2.7 | 0 | 0 | 1 |
| | 16 | 7 | 0.3 | 114 | 0 | 0.3 | 6.7 | 8.7 | 0 | 342.7 |
| | 30 | 226.3 | 9 | 2678 | 0 | 6.4 | 47.3 | 24 | 76 | 2756 |
| 50 | 12 | 7 | 0 | 28 | 0 | 0.1 | 5.3 | 11 | 0 | 1.7 |
| | 25 | 116.3 | 0.7 | 7200 | 5 | 5.5 | 14 | 14.3 | 8.7 | 4502.3 |
| | 45 | 2298.3 | 225.7 | 5536.7 | 2.3 | 7.7 | 55.3 | 30.7 | 218 | 19953.3 |
| 65 | 15 | 54.7 | 0 | 178 | 0 | 0.1 | 8 | 15.7 | 0 | 52.3 |
| | 30 | 450.3 | 2 | 7200 | 3.2 | 3.4 | 26.3 | 25.3 | 14 | 2083.7 |
| | 60 | 6883 | 317 | 7200 | 2.3 | 6.7 | 81.7 | 28.7 | 222 | 6330 |
| 100 | 25 | 501.3 | 1.7 | 6550 | 0 | 0.1 | 11.7 | 29.7 | 0 | 625 |
| | 50 | 3956 | 22.7 | 7200 | 4.7 | 4.8 | 25.7 | 36.3 | 40.3 | 594.7 |
| | 90 | 7123.3 | 76.7 | 7200 | 2.4 | 4.8 | 72.3 | 56 | 19 | 2164.3 |

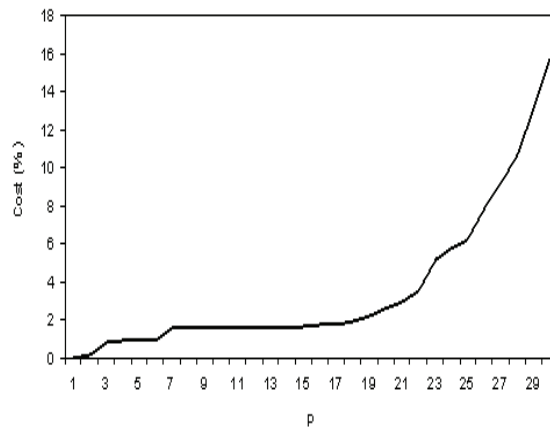


FIGURE 2.9 – Évolution du coût du réseau en fonction de p pour l'instance à 32 noeuds.

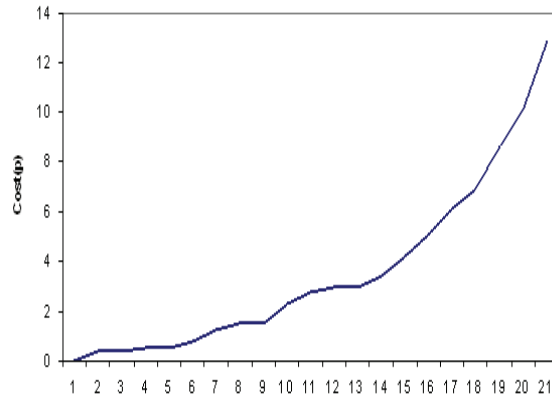


FIGURE 2.10 – Évolution du coût du réseau en fonction de p pour l’instance de 23 noeuds.

sont à envisager. À commencer par voir d’autres inégalités valides pour pouvoir résoudre le problème pour des instances plus larges. On a aussi mentionné dans ce chapitre que le problème traité est NP-Difficile lorsque p est une donnée. La complexité reste un sujet ouvert lorsque p est une constante.

Une autre perspective est liée à l’approximation du problème pour des classes particulières de graphes et aussi pour des petites valeurs de p . On peut également voir que la technique d’approximation primale-duale développée par [49] pour les problèmes de synthèse des forêts peut être facilement utilisée lorsque les poids des arêtes satisfont les inégalités triangulaires. La technique de [49] permet notamment de calculer en temps polynomial une forêt où le nombre de sommets par composante connexe est au moins $p + 1$ et dont le coût est inférieur au coût double d’une forêt optimale satisfaisant les mêmes contraintes.

En considérant cette forêt et en dédoublant les arêtes, on obtient un graphe eulérien par composante connexe. Ce graphe Eulérien peut être transformé en cycle de taille au moins $p + 1$ (à la manière de l’algorithme de Christofides). Le rapport d’approximation final est donc 4. Une question se pose : peut-t-on faire mieux ?

Finalement, il est probable que le travail présenté dans ce chapitre soit le premier où le matroïde bi-circulaire est utilisé dans le contexte de l’optimisation combinatoire. On pense que quelques problèmes d’optimisation combinatoire faisant intervenir des cycles peuvent être modélisés en utilisant la formulation compacte relative au matroïde bi-circulaire avec intégration d’autres contraintes.