

Réseaux à composantes unicycliques avec de nouvelles contraintes techniques

L'objet de ce chapitre est d'intégrer d'autres types de contraintes. Nous souhaitons toujours obtenir un réseau à composantes connexes unicycliques. Nous considérons dans un premier temps des contraintes de degré. Ensuite, on intègre une contrainte sur le nombre de composantes connexes. Enfin, nous décrivons comment on peut intégrer des contraintes d'appartenance de sommets à une même composante connexe ainsi que des contraintes de séparation de certains sommets. Quelques résultats expérimentaux seront également présentés. Signalons que l'étude faite dans ce chapitre est très préliminaire.

4.1 Introduction

Les travaux exposés dans les deux précédents chapitres ont permis d'intégrer des contraintes techniques importantes en plus de la contrainte d'unicyclicité : taille minimale des cycles, et contraintes de type Steiner. Nous continuons sur la même lancée en intégrant d'autres contraintes. Signalons cependant que l'étude faite dans ce chapitre reste superficielle puisque nous n'avons pas pu faire une étude polyédrale poussée. Nous espérons pouvoir approfondir ce travail ultérieurement.

Notre ingrédient de base est encore la formulation mathématique issue de la transversalité du matroïde bi-circulaire.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{e \in E} w_e x_e \\ x_e = & y_{ie} + y_{je}, \forall e = (i, j) \in E \\ \sum_{e=(i,j) \in E} & y_{ie} = 1, \forall i \in V \\ 0 \leq & y_{ie}, \forall i \in V, e = (i, j) \in E \\ x_e \leq & 1, \forall e \in E. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Nous allons dans la suite présenter quelques contraintes techniques et montrer comment elles sont intégrées. Quelques résultats numériques seront également exposés.

Notons qu'en ce qui concerne les résultats expérimentaux qui vont suivre pour chaque cas, nous avons implémenté un algorithme à plans coupants suivi d'un algorithme de Branch&Cut basé sur les fonctions callbacks de [74]. Toutes les expérimentations ont été réalisées sur un Pentium 4, de 3.25 Go de RAM, et de 2.39 GHz de fréquence. On note aussi qu'une stratégie de recherche en profondeur d'abord a été choisie dans l'algorithme de Branch&Cut. Dans certains cas, une borne supérieure est calculée lorsque c'est possible.

4.2 Contraintes portant sur les degrés des sommets

Les noeuds du réseau peuvent avoir des rôles différents. Certains peuvent être des noeuds d'interconnexion avec de multiples voisins alors que d'autres doivent avoir un nombre très limité de voisins. Ce type de contraintes est évidemment très simple à intégrer.

Pour borner alors le degré du sommet a , il suffit d'écrire que

$$\underline{d}_a \leq \sum_i (y_{ai} + y_{ia}) \leq \overline{d}_a \quad (4.2)$$

où \underline{d}_a et \overline{d}_a représentent les bornes inférieures et supérieures du degré du sommet a respectivement.

Ces contraintes peuvent être renforcées à l'aide des inégalités classiques de type Blossom (provenant du b -couplage).

Signalons que nous ne connaissons toujours pas la complexité du problème de synthèse d'un réseau à composantes connexes unicycliques avec contraintes de degré.

4.3 Contrainte portant sur le nombre de composantes unicycliques

Lorsque on partitionne un réseau (graphe) donné par $G = (V, E)$ en composantes connexes et unicycliques, on peut retrouver un nombre de composantes relativement élevé. Ceci pourrait être gênant dans un contexte pratique.

Dans le chapitre 2, on a vu une manière pour y remédier en imposant une certaine contrainte sur la taille des cycles ce qui implique immédiatement une borne inférieure du nombre de noeuds par composante connexe.

Dans ce paragraphe, nous allons directement limiter le nombre de composantes unicycliques.

Pour ce faire, nous utilisons une variante des contraintes valides (2.6) présentées au chapitre 2.

Supposons que z représente le nombre maximal de composantes unicycliques connexes à ne pas dépasser. Soit $(\alpha_e)_{e \in E}$ un ensemble de nombres réels. Pour tout nombre $0 \leq i \leq z - 1$, γ_{n+i} est le coût minimum (au sens des $(\alpha_e)_{e \in E}$) d'un graphe connexe avec $n + i$ arêtes. Soit T_α un arbre couvrant de poids minimum et β_i est le coût maximum des i arêtes de T_α . Autrement dit,

$$\beta_i = \max_{E' \subseteq T_\alpha, |E'|=i} \sum_{e \in E'} \alpha_e.$$

Notons aussi que γ_{n+i} ainsi que β_i peuvent être calculés d'une manière gloutonne comme on peut le voir dans la section (2.5.4), et cela pour tout nombre i (voir chapitre 2).

Proposition 4.1: L'inégalité suivante est alors valide pour le problème posé ci-dessus :

$$\sum_{e \in E} \alpha_e x_e \geq \min_{0 \leq i \leq z-1} (\gamma_{n+i} - \beta_i). \quad (4.3)$$

Plus de détails sur la séparation de cette famille d'inégalités ont été donnés au chapitre 2.

Remarque : Si z est fixé à l'avance à 1, on retrouve alors le cas de la recherche d'un graphe connexe et unicyclique.

Notons également que lorsque la solution est entière, les inégalités (4.3) sont suffisantes pour garantir que le nombre de composantes connexes est au plus z . Cependant, les inégalités sont insuffisantes pour décrire l'enveloppe convexe des réseaux respectant la contrainte.

Le Tableau (4.1) résume quelques résultats numériques obtenus. Le contenu du tableau est similaire à celui des chapitres précédents.

On a limité le temps total d'exécution à 7200 secondes. Le nombre maximum de composantes unicycliques à obtenir varie de 1 à 3 (sauf pour $n = 20$, cette instance donne un partitionnement initial limité à 2 composantes unicycliques au plus). Si ce nombre est de 1, alors on utilise la résolution de l'algorithme glouton donné dans le chapitre 1, ce qui explique les temps de calcul nuls dans ce cas. Les instances traitées relèvent de graphes aléatoires et Euclidiens générés 3 fois. Les résultats présentés sont des moyennes sur les 3 instances.

On voit que malgré la pauvreté de notre modèle polyédral, on arrive à traiter des instances de tailles moyennes. Pour les instances de tailles importantes, nous avons besoin d'améliorer la relaxation linéaire.

TABLE 4.1 – Graphes aléatoires complets Euclidiens - Nombre Max de Composantes

n	Nb Max	sep	relax	temps tot	gap(%)	gap 2(%)	(4.3)	Nb coupes	Nb noeuds
20	1	0	0	0	0	3.7	0	0	1
	2	4.7	0	5.7	0	1.8	14.7	0	1
35	1	0	0	0	0	7.9	0	0	1
	2	403.3	8.3	414	0	5.06	103	0	1
	3	383.7	4.3	389.3	0	2.6	73.7	0	1
45	1	0	0	0	0	7.8	0	0	1
	2	2782	37	2825	0.9	6.3	135.7	0	1
	3	1491.3	12.7	1507.3	0	3.7	94	0	1
60	1	0	0	0	0	6.1	0	0	1
	2	7141	59	7200	2.8	6.1	222	0	1
	3	4945.7	74.3	5029.3	3	5.2	75.7	0	1
100	1	0	0	0	0	5.3	0	0	1
	2	7187	13	7200	3.4	5.3	37.7	0	1
	3	7192.7	7.3	7200	3.8	5.3	32.7	0	1

4.4 Séparation de certains couples de sommets

On peut exiger que certains sommets soient dans des composantes connexes différentes.

Supposons par exemple qu'on cherche à séparer a et b . Le vecteur d'incidence doit donc vérifier l'inégalité suivante :

$$\sum_{e \in P_{ab}} (1 - x_e) \geq 1, \quad (4.4)$$

où P_{ab} est un chemin reliant a et b .

Ces inégalités se séparent simplement. Il suffit en effet de calculer un plus court chemin entre a et b au sens des poids $1 - x_e$ et de rajouter l'inégalité si le poids du chemin est strictement inférieur à 1.

Signalons que les inégalités (4.4) sont suffisantes pour garantir la séparation de a et b lorsque la solution est entière.

Pour tester l'efficacité de ces inégalités, on a réalisé quelques expérimentations numériques. Pour plusieurs valeurs de n (nombre de noeuds), on génère des instances Euclidiennes aléatoires où on cherche à séparer certains couples de sommets. Pour chaque valeur de n et chaque valeur du nombre de couples à séparer, nous générons 3 instances. Les résultats présentés sont donc les moyennes des résultats des 3 instances.

Il est important de mentionner que les couples de sommets choisis étaient bien sur la même composante unicyclique au départ (lorsqu'on résout le problème non contraint).

Les résultats présentés dans le tableau 4.2 semblent montrer que les inégalités (4.4) permettent de résoudre des instances de grandes tailles. Notons cependant que le nombre de noeuds dans l'arbre de recherche peut devenir assez élevé. La difficulté du problème semble augmenter avec le nombre de couples à séparer.

4.5 Joindre certains couples de sommets

Dans certains cas, on peut exiger que certains sommets soient sur une même composante connexe afin de faciliter la communication entre ces noeuds.

Supposons par exemple que a et b doivent être sur la même composante. Il est alors clair que toutes les coupes $\delta(S)$ qui séparent a et b ($a \in S$ et $b \notin S$) doivent vérifier :

$$x(\delta(S)) \geq 1 \quad (4.5)$$

La séparation de ces inégalités se fait évidemment par le calcul d'une coupe minimum séparant a et b . Pour ce faire, nous utilisons l'algorithme de Goldberg et Tarjan ([50]).

Notons que les inégalités (4.5) sont suffisantes pour garantir que a et b soient dans la même composante.

Il est facile de prouver que le problème de synthèse d'un réseau à composantes connexes unicycliques respectant des contraintes d'appartenance de certains sommets à une même composante connexe est un problème NP-dur. Une réduction à partir de l'arbre de Steiner est quasi-immédiate.

Quelques résultats numériques sont résumés dans le tableau 4.3. Les expériences ont été conduites d'une manière similaire à ce qui a été fait précédemment : instances Euclidiennes, plusieurs valeurs pour le nombre de couples à séparer, 3 instances pour chaque variante, un algorithme à plans coupants suivi d'un Branch&Cut.

TABLE 4.2 – Graphes aléatoires complets Euclidiens, Séparer a et b

n	Nb cpl	sep	relax	temps tot	gap(%)	gap 2(%)	(4.4)	Nb coupes	Nb noeuds
10	1	0	0	0	0	10.1	2.7	17.7	19.3
	2	0	0	0	0	22.8	9.3	27.7	19
35	1	0	0	0	0	4.4	4.3	2	1
	2	0	0	0.3	0	9.1	6.7	8.3	8.3
	3	0	0	0	0	11.7	10.3	8.3	8.7
	10	1	0	2.7	0	25.5	38	25.7	26
	33	2.7	0	228	0	32.3	60.7	284.3	2288.7
45	1	0	0	0.3	0	1.2	2.3	16.3	32
	2	0	0	0	0	5.3	5	1	1.3
	3	0.7	0	0.7	0	3	5.7	0.7	1
	10	1	0	31.7	0	16.5	27	72	510.7
	33	4.7	0.3	960	0	35.4	85.3	350	5745
50	1	0.3	0	0.3	0	1.6	3.7	1.7	2.7
	2	0	0	0	0	2.9	3.7	0	1
	3	0	0	0	0	4.4	5	0.7	1
	10	1	0	2.7	0	11.7	20.3	12.3	3.7
	33	6.3	0	230	0	30.9	90.7	167.7	908.3
65	1	0	0	0.3	0	0.96	2.3	3	3.3
	2	0	0	0.7	0	3.4	4.3	6	2.7
	3	1	0	3.3	0	3.8	8.7	18	22.3
	10	2.3	0	196	0	10.02	24.3	68	1493.7
	33	11.7	0	820.7	0	26.7	98.3	185.7	2024.3
80	1	0.3	0	2	0	1.1	3.3	13.3	17
	2	0.7	0	1.3	0	1.9	6.7	4.3	1
	3	0.6	1	8.3	0	4.7	12	23.3	80
	10	5.3	0	280.7	0	10.2	35.3	72.3	1637.7
	33	17	1	221.7	0	26.12	97.7	62.3	308.3
100	1	0.3	0	1	0	0.6	2	1	1
	2	1.3	0	7	0	2	7.3	16.7	22.3
	3	2	0	8	0	1.8	8	21	21.3
	10	5.3	0	43	0	4.6	20.3	29.3	81.7
	33	26.3	0.3	3131	0.9	23.5	112.7	219	3337.3

On constate que joindre des sommets semble être plus difficile que séparer des sommets. Les temps de calcul et le nombre de noeuds visités dans l'arbre de recherche sont loins d'être négligeables.

TABLE 4.3 – Graphes aléatoires complets Euclidiens-Joindre a et b

n	Nb cpl	sep	relax	temps	gap(%)	gap 2(%)	(4.5)	Nb coupes	Nb noeuds
20	1	0	0	0	0	2.3	2.7	0	1
	2	0	0	0	0	2.6	3.7	5	1.7
	3	0	0	0	0	3.7	4.3	6	7.3
	4	0	0	0	0	3.7	4.7	7.7	7.3
35	1	0	0	0.7	0	3.8	6.7	10	10
	2	0	0	2.3	0	4.6	7	39.7	97
	3	0.6	0	3	0	6.9	10.7	26.3	85.3
	4	0.3	0	7.7	0	7.7	8.3	51.3	242
45	1	0.3	0	2.3	0	2	8.3	14.3	19.3
	2	1	0	18.3	0	4.3	11	47.7	869.7
	3	1.3	0	40	0	5	14.3	142	746.7
	4	1.3	0	86.7	0	6	14.3	153	1778.3
50	1	0.7	0	10.3	0	2.5	7.7	78	181
	2	1.3	0	4.7	0	2.1	9.3	25.7	34
	3	1.7	0	247.3	0	5.1	9.3	307	5996.7
	4	1.3	0	81	0	4.6	11.3	164.3	1099.3
65	1	4	0	4	0	0.7	11.3	0	1
	2	4.7	0	72	0	2.9	15	136.3	559
	3	6	0	270.7	0	4.1	18.7	366.3	1910
	4	5	0	3406.7	1.2	5.1	19.3	594.3	43553.3
80	1	5.3	0	15.3	0	1	9.3	2.7	3.7
	2	15.3	0	330.3	0	3.1	23.7	160	1870.3
	3	13.3	0	689.3	0	2.8	19.3	238.3	4738.7
	4	11	0	2605	1.1	3.3	18.7	233.3	6025.3
100	1	13.3	0	18	0	0.7	11	3.7	2.3
	2	21.7	0	375.3	0	1.5	16.3	196	712
	3	56.7	0	1225.7	0	3.5	36.7	406	2035.7
	4	39	0	5516.3	1.28	4.2	31.7	611.3	14368

4.6 Conclusion et perspectives

Bien que les inégalités introduites dans ce chapitre permettent d'intégrer certaines contraintes techniques, il est nécessaire d'approfondir l'étude polyédrale.

On peut également essayer d'intégrer plusieurs combinaisons des contraintes décrites dans ce chapitre. Ceci est déjà possible dans le logiciel réalisé dans cette thèse. Cependant, plus de travail est nécessaire pour réduire les temps de calcul.

Rappelons enfin que la complexité du problème de synthèse d'un réseau à composantes connexes unicycliques avec contraintes de degré reste encore à étudier.

Spectre de quelques graphes unicycliques

Après avoir étudié plusieurs variantes du problème de synthèse de réseaux à composantes connexes unicycliques, nous allons considérer deux classes particulières de graphes unicycliques. Nous étudions le spectre des matrices d'adjacence et des Laplaciens associés à ces graphes. Outre l'intérêt théorique de ces résultats, la connaissance des valeurs propres extrémales pourrait renforcer les relaxations linéaires utilisées dans la synthèse de ce type de réseaux.

5.1 Introduction

L'étude du spectre des matrices associées à un graphe permet d'avoir des éclairages intéressants sur la structure du graphe. Elle peut même être à l'origine d'algorithmes combinatoires. Rappelons par exemple que la programmation semi-définie positive est équivalente à optimiser dans l'ensemble des matrices dont toutes les valeurs propres sont positives.

L'objectif dans ce chapitre est d'étudier les valeurs propres extrémales des matrices associées à certaines classes de graphes unicycliques. Rappelons que G est un graphe d'ordre n , et de taille m . On note par $A(G)$ ou simplement par A la matrice d'adjacence de G , et par L la matrice obtenue de la différence entre la matrice d'adjacence et la matrice diagonale des degrés D . L est connue sous le nom de la *matrice d'admittance*, ou en général *la matrice du Laplacien*. On note aussi par d_1, d_2, \dots, d_n les degrés des sommets de G , ordonnés dans un ordre décroissant $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ en posant $d_1 = \Delta$ et $d_n = \delta$ qui sont les degrés maximum et minimum respectivement.

On note en général les valeurs propres associées à la matrice d'adjacence par $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ qui sont alors ordonnées dans un ordre décroissant, et par $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \mu_{n-1} \geq \mu_n = 0$ les valeurs propres associées à la matrice L ordonnées dans le même ordre. Notez qu'on sait que G est connexe si et seulement si la multiplicité de μ_n vaut 1 (i.e., $\mu_{n-1} \neq \mu_n$).

Ce chapitre se découpe en trois sections principales. Nous rappellerons quelques résultats connus dans la section qui suit. Ensuite nous présenterons nos propres résultats.

5.2 Rappels sur les bornes des valeurs propres extrêmes des matrices A et L

5.2.1 Bornes de λ_1 et de λ_n

Rappelons tout d'abord que la fonction $f(x) = x^t Ax$, où A est une matrice symétrique réelle et x est un vecteur de norme 1, atteint son maximum (resp. minimum) au niveau du vecteur propre associé à la plus grande (petite) valeur propre.

Cette propriété est à l'origine de la plupart des résultats liés au spectre.

Proposition 5.1: [23] Soit G un graphe d'ordre n et de taille m . Notons $\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^n d_i}{n}$. Alors

$$\Delta \geq \lambda_1 \geq \bar{d} \quad (5.1)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \quad (5.2)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 = 2m \quad (5.3)$$

$$\lambda_1 \geq 2\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \quad (5.4)$$

En 2003, une nouvelle borne de λ_1 a été établie :

Proposition 5.2: [121] Soit λ_1 la plus grande valeur propre de la matrice d'adjacence du graphe G . Alors

$$\lambda_1 \geq \sqrt{\Delta} \quad (5.5)$$

Proposition 5.3: [73] G est un graphe unicyclique alors :

$$\lambda_1 \leq 2\sqrt{\Delta-1} \quad (5.6)$$

Proposition 5.4: [27] Soit G un graphe connexe d'ordre n et de taille m , la borne suivante est valide :

$$\lambda_1 \leq \sqrt{2m - (n-1)\delta + (\delta-1)m_{max}} \quad (5.7)$$

où $m_{max} = \max_{i=1,n} m_i$ avec $m_i = \frac{1}{d_i} \sum_{j \sim i} d_j$

Proposition 5.5: [23] Pour le spectre d'un graphe G , on constate ce qui suit :

1. $1 \leq \lambda_1 \leq n-1$

2. $-\lambda_1 \leq \lambda_n \leq -1$

Par la suite, plusieurs résultats ont été proposés afin d'améliorer ces bornes. Citons par exemple une borne due à [30].

Proposition 5.6: [30] Soit G un graphe simple et connexe, d'ordre n et de taille m . Alors

$$\lambda_n \geq -\sqrt{2m - (n-1)\delta + (\delta-1)\Delta}.$$

5.2.2 Bornes de μ_1 et de μ_{n-1}

Proposition 5.7: [40] Soit G un graphe connexe, d'ordre n et de taille m . On note par $e(G)$ le nombre d'arêtes qu'il faut supprimer pour déconnecter le graphe. Alors :

$$\mu_{n-1} \geq 2e(G)\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)\right) \quad (5.8)$$

Un autre résultat donné par [40] donne une expression de la connectivité algébrique.

Proposition 5.8: [40] Si G est un graphe d'ordre n , alors :

$$\mu_{n-1} = 2n \min_{x \neq 0} \frac{\sum_{uv \in E} a_{uv}(x_u - x_v)^2}{\sum_{u \in V} \sum_{v \in V} (x_u - x_v)^2} \quad (5.9)$$

Puis, on trouve aussi ce résultat qui ordonne les deux valeurs propres extrêmes μ_1 et μ_{n-1} par rapport aux degrés maximum et minimum du graphe :

Proposition 5.9: [102]

$$\mu_{n-1} \leq \frac{n}{n-1} \delta \leq \frac{n}{n-1} \Delta \leq \mu_1 \leq 2\Delta.$$

Si G est un graphe unicyclique, on a alors

$$\Delta + 1 \leq \mu_1 \leq \Delta + 2\sqrt{\Delta - 1}$$

Proposition 5.10: [19] Soit G un graphe de diamètre $D \geq 4$.

$$\mu_{n-1} \leq 1 - \frac{2\sqrt{\Delta - 1}}{\Delta} \left(1 - \frac{2}{D}\right) + \frac{2}{D}$$

Plus de détails et de références pourront être trouvés dans [24], [25], [68], [69] et [102].

5.3 Spectre des graphes unicycliques $G(q, n_1, 0)$

Nous définissons la classe des graphes unicycliques $G(q, n_1, n_2)$ comme suit : ce sont des graphes connexes unicycliques où la taille du cycle est q ; chaque sommet du cycle est relié à n_1 sommets qui sont eux même reliés à n_2 sommets pendants (voir Figure (5.3)).

Dans cette section, nous allons considérer le cas $n_2 = 0$ (Figure 5.1).

Proposition 5.11: Soit G un graphe unicyclique du type $G(q, n_1 = \Delta - 2, 0)$, alors

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{\Delta - 1} \quad (5.10)$$

Preuve:

Considérons un vecteur propre x associé à λ_1 . Le vecteur x a une composante par sommet.

Les sommets du cycle sont notés c_1, \dots, c_q . Pour chaque sommet c_i du cycle, il y a $\Delta - 2$ feuilles reliées à c_i qu'on note f_i^j avec $1 \leq j \leq \Delta - 2$.

En écrivant que x est un vecteur propre, on obtient les deux types d'égalités qui suivent ($\forall j = 1, \dots, (\Delta - 2)$ et $i = 1, \dots, q$) :

$$\lambda_1 x_{f_i^j} = x_{c_i} \quad (5.11)$$

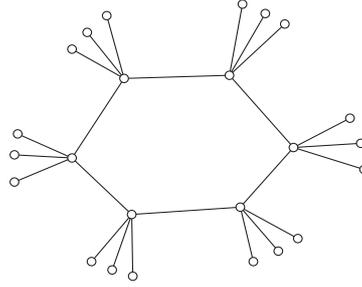


FIGURE 5.1 – Graphe unicyclique $G(6,3,0)$

$$\lambda_1 x_{c_i} = x_{c_{i+1}} + x_{c_{i-1}} + \sum_{j=1}^{\Delta-2} x_{f_i^j} \quad (5.12)$$

En combinant les deux types d'égalités, nous obtenons :

$$\left(\lambda_1 - \frac{\Delta-2}{\lambda_1}\right)x_{c_i} = x_{c_{i+1}} + x_{c_{i-1}} \quad (5.13)$$

En sommant les deux cotés de l'égalité précédente sur tous les sommets du cycle, on trouve

$$\left(\lambda_1 - \frac{\Delta-2}{\lambda_1} - 2\right) * \sum_i x_{c_i} = 0 \quad (5.14)$$

Par ailleurs, on sait que $\sum_i x_{c_i} \neq 0$ en vertu du théorème de Perron-Frobenius.

Théorème 5.1: [47] Soit A une matrice $n * n$ réelle et non négative d'un graphe G connexe. Alors sa plus grande valeur propre est simple. Le vecteur propre x associé à cette valeur propre a toutes ses composantes non nulles et de même signe.

De l'égalité (5.14) on déduit :

$$\lambda_1 - \frac{\Delta-2}{\lambda_1} = 2.$$

En multipliant par λ_1 , on obtient :

$$\lambda_1^2 - (\Delta-2) = 2\lambda_1.$$

Le discriminant est donné par $Disc = 1 + \Delta - 2 = \Delta - 1 > 0$ ($\Delta \geq 3$)

d'où les deux racines suivantes :

$$\lambda_1^{(1)} = 1 - \sqrt{\Delta-1}$$

$$\lambda_1^{(2)} = 1 + \sqrt{\Delta-1}.$$

Sachant que le rayon spectral de la matrice d'adjacence A est tel que $\lambda_1 \geq 1$, et comme $\Delta \geq 3$, alors $\lambda_1^{(1)}$ sera rejetée, ce qui nous permet de conclure que

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{\Delta-1}.$$

Proposition 5.12: Soit G un graphe unicyclique du type $G(q, n_1, 0)$. On a alors

$$\lambda_n = -1 - \sqrt{\Delta - 1}, \text{ si } q \text{ est pair.} \quad (5.15)$$

$$\lambda_n = -\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) - \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right) + \Delta - 2}, \text{ si } q \text{ est impair.} \quad (5.16)$$

Preuve: De la même façon que dans la preuve de la proposition (5.11), on trouve ($\forall j = 1, \dots, (\Delta - 2)$ et $i = 1, \dots, q$) :

$$\lambda_n x_{f_i^j} = x_{c_i} \quad (5.17)$$

$$\lambda_n x_{c_i} = x_{c_{i+1}} + x_{c_{i-1}} + \sum_{j=1}^{\Delta-2} x_{f_i^j} \quad (5.18)$$

On obtient :

$$\left(\lambda_n - \frac{\Delta - 2}{\lambda_n}\right)x_{c_i} = x_{c_{i+1}} + x_{c_{i-1}}$$

Rappelons que $\lambda_n \leq -1$, donc $\lambda_n \neq 0$.

On obtient ainsi un système de q équations associé à une matrice circulante [54]

$$C = \begin{pmatrix} \gamma & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \gamma & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \gamma & -1 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & -1 & \gamma & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \gamma & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & \gamma \end{pmatrix}$$

avec $\gamma = \lambda_n - \frac{\Delta - 2}{\lambda_n}$, et qui admet $\gamma - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right) \forall k = 1, \dots, q$ comme valeur propre. Il est clair que 0 doit être une valeur propre de C , qui équivaut à l'existence de k , tel que $\gamma - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right) = 0$ (voir [23], [24], [54]).

Finalement, on résout l'équation

$$\lambda_n - \frac{\Delta - 2}{\lambda_n} = 2\cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right)$$

qui est une équation de deuxième degré qui s'écrit sous la forme :

$$\lambda_n^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right)\lambda_n - (\Delta - 2) = 0$$

dont le discriminant est

$$Disc = \cos^2\left(\frac{2k\pi}{q}\right) + \Delta - 2 > 0, \quad \forall k = 0, \dots, q$$

la solution de cette équation est donnée par les deux racines suivantes, et cela $\forall k = 0, \dots, q-1$

$$\lambda_n^{(1)} = \cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right) - \sqrt{\cos^2\left(\frac{2k\pi}{q}\right) + \Delta - 2}$$

$$\lambda_n^{(2)} = \cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right) + \sqrt{\cos^2\left(\frac{2k\pi}{q}\right) + \Delta - 2}$$

Comme $\Delta \geq 3$ alors $\sqrt{\cos^2\left(\frac{2k\pi}{q}\right) + \Delta - 2} \geq 1$ et il est facile de déduire que

$$\sqrt{\cos^2\left(\frac{2k\pi}{q}\right) + \Delta - 2} + \cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right) \geq 0$$

Ceci est en contradiction avec $\lambda_n < 0$ (voir [23]). Notre solution est donnée par :

$$\lambda_n^{(1)} = \cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right) - \sqrt{\cos^2\left(\frac{2k\pi}{q}\right) + \Delta - 2}$$

Maintenant, on pose $f(k) = \cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right) - \sqrt{\cos^2\left(\frac{2k\pi}{q}\right) + \Delta - 2}$. Le calcul de sa dérivée est donné par :

$$f'(k) = \sin\left(\frac{2k\pi}{q}\right) \left[\frac{\cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right)}{\sqrt{\cos^2\left(\frac{2k\pi}{q}\right) + \Delta - 2}} - 1 \right]$$

le terme entre crochets est strictement négatif, car

$$\cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right) < \sqrt{\cos^2\left(\frac{2k\pi}{q}\right) + \Delta - 2}$$

la dérivée est nulle pour les valeurs de $k = 0$, et $\frac{q}{2}$. D'après [23], on sait que λ_n est bornée. La fonction $f(k)$ est alors :

- décroissante : pour $k \in [0, \frac{q}{2}]$.
- croissante : pour $k \in [\frac{q}{2}, q]$

et atteint son minimum pour $k = \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$. Ce qui nous donne :

- **q pair :**

$$\lambda_n^{(1)} = -1 - \sqrt{\Delta - 1}$$

- **q impair :**

$$\lambda_n^{(1)} = -\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) - \sqrt{\cos^2\left(\frac{\pi}{q}\right) + \Delta - 2}$$

Étant données ces valeurs de λ_n , on sait que 0 est valeur propre de C . On dispose alors d'un vecteur x_C qui est le vecteur propre de C . Il est simple de reconstituer le reste du vecteur en utilisant les relations (5.17) et (5.18).

□.

Proposition 5.13: Soit G un graphe unicyclique du type $G(q, n_1, 0)$. La valeur exacte de la

connectivité algébrique est donnée par

$$\mu_{n-1} = \frac{1}{2} \left(\Delta - 1 + 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right) - \sqrt{[\Delta - 1 + 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)]^2 - 16 \sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)} \right)$$

Preuve: À partir de la définition de la valeur propre du Laplacien, on a ($\forall j = 1, \dots, \Delta - 2$ et $\forall i = 1, \dots, q$) :

$$1. i \notin C_q : (1 - \mu_{n-1})x_{f_i^j} = x_{c_i}$$

$$2. i \in C_q : (\Delta - \mu_{n-1})x_{c_i} = x_{c_{i+1}} + x_{c_{i-1}} + \sum_{j=1}^{\Delta-2} x_{f_i^j}$$

en remplaçant la valeur de $x_{f_i^j}$ dans le deuxième cas, on obtient

$$\left(\Delta - \mu_{n-1} - \frac{\Delta - 2}{1 - \mu_{n-1}} \right) x_{c_i} = x_{c_{i+1}} + x_{c_{i-1}}$$

qui représente un système de q équations, et q inconnues. Pour le résoudre on pose $\gamma = \Delta - \mu_{n-1} - \frac{\Delta-2}{1-\mu_{n-1}}$, et on remarque que la matrice associée à ce système d'équations est aussi une matrice circulante :

$$C = \begin{pmatrix} \gamma & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \gamma & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \gamma & -1 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & -1 & \gamma & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \gamma & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & \gamma \end{pmatrix}$$

et qui admet $\gamma - 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right) \forall k = 1, \dots, q$ comme valeur propre, tel que $\exists k, \gamma - 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right) = 0$. D'après la Proposition 5.10, on constate que $\mu_{n-1} \neq 1$.

On résout alors

$$\Delta - \mu_{n-1} - \frac{\Delta - 2}{1 - \mu_{n-1}} = 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right)$$

C'est une équation de deuxième degré, qu'on peut écrire sous la forme suivante

$$\Delta - \left(\frac{\mu_{n-1} - \mu_{n-1}^2 + \Delta - 2}{1 - \mu_{n-1}} \right) = 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right)$$

$$\Rightarrow \Delta - \Delta \mu_{n-1} + \mu_{n-1}^2 - \mu_{n-1} - \Delta + 2 = 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right) - 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right) \mu_{n-1}$$

avec

$$\mu_{n-1} \neq 1$$

d'où

$$\mu_{n-1}^2 - (\Delta + 1 - 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right)) \mu_{n-1} + 2(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right)) = 0$$

Le calcul du discriminant de l'équation trouvée, est donné par

$$Disc = (\Delta + 1 - 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right))^2 - 8 + 8 \cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right)$$

$$Disc = [\Delta + 1 - 2 \cos(\frac{2k\pi}{q})]^2 - 16 \sin^2(\frac{k\pi}{q})$$

on montre dans ce qui suit que le discriminant est positif :

$$Disc = [\Delta + 1 - 2 + 4 \sin^2(\frac{k\pi}{q})]^2 - 16 \sin^2(\frac{k\pi}{q})$$

$$Disc = (\Delta - 1)^2 + 16 \sin^4(\frac{k\pi}{q}) + 8(\Delta - 1) \sin^2(\frac{k\pi}{q}) - 16 \sin^2(\frac{k\pi}{q})$$

$$Disc = (\Delta - 1)^2 + 16 \sin^4(\frac{k\pi}{q}) + 8(\Delta - 3) \sin^2(\frac{k\pi}{q}) > 0$$

On obtient deux solutions :

$$\mu_{n-1}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\Delta + 1 - 2(1 - 2 \sin^2(\frac{k\pi}{q})) - \sqrt{[\Delta + 1 - 2(1 - 2 \sin^2(\frac{k\pi}{q}))]^2 - 16 \sin^2(\frac{k\pi}{q})} \right)$$

$$\mu_{n-1}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\Delta + 1 - 2(1 - 2 \sin^2(\frac{k\pi}{q})) + \sqrt{[\Delta + 1 - 2(1 - 2 \sin^2(\frac{k\pi}{q}))]^2 - 16 \sin^2(\frac{k\pi}{q})} \right)$$

après simplifications, on obtient :

$$\mu_{n-1}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\Delta - 1 + 4 \sin^2(\frac{k\pi}{q}) - \sqrt{[\Delta - 1 + 4 \sin^2(\frac{k\pi}{q})]^2 - 16 \sin^2(\frac{k\pi}{q})} \right)$$

$$\mu_{n-1}^{(2)} = \frac{1}{2} \left(\Delta - 1 + 4 \sin^2(\frac{k\pi}{q}) + \sqrt{[\Delta - 1 + 4 \sin^2(\frac{k\pi}{q})]^2 - 16 \sin^2(\frac{k\pi}{q})} \right)$$

Comme $\Delta \geq 3$, alors $\Delta - 1 + 4 \sin^2(\frac{k\pi}{q}) \geq 2$, ceci dit

$$\mu_{n-1}^{(2)} \geq 1 + \frac{\sqrt{[\Delta - 1 + 4 \sin^2(\frac{k\pi}{q})]^2 - 16 \sin^2(\frac{k\pi}{q})}}{2} > 1$$

sachant que $\mu_{n-1} < 1$, ceci nous aide à rejeter $\mu_{n-1}^{(2)}$ qui est supérieur à 1, et de ne prendre que

$$\mu_{n-1} = \mu_{n-1}^{(1)} = \frac{1}{2} \left(\Delta - 1 + 4 \sin^2(\frac{k\pi}{q}) - \sqrt{[\Delta - 1 + 4 \sin^2(\frac{k\pi}{q})]^2 - 16 \sin^2(\frac{k\pi}{q})} \right)$$

On fait l'étude de la fonction $\mu_{n-1}(k)$, avec $k = 0, \dots, q$, pour trouver la valeur de k qui minimise μ_{n-1} . On remarque alors que si $k = 0$, ou $k = q$, on trouve $\mu_{n-1} = 0$, qui est absurde. On s'intéresse qu'aux valeurs entières $k \in [1, q - 1]$.

Le calcul de la dérivée est donné par

$$\mu'_{n-1} = \frac{8\pi}{q} \sin(\frac{k\pi}{q}) \cos(\frac{k\pi}{q}) \left[1 - \frac{4 \sin^2(\frac{k\pi}{q}) + \Delta - 3}{\sqrt{(\Delta - 1)^2 + 16 \sin^4(\frac{k\pi}{q}) + 8(\Delta - 3) \sin^2(\frac{k\pi}{q})}} \right]$$

Le terme entre crochets est strictement positif, car

$$\sqrt{(\Delta-1)^2 + 16 \sin^4\left(\frac{k\pi}{q}\right) + 8(\Delta-3) \sin^2\left(\frac{k\pi}{q}\right)} > 4 \sin^2\left(\frac{k\pi}{q}\right) + \Delta - 3 \quad (\Delta \geq 3)$$

car en posant (avec $\Delta \geq 3$) :

$$\begin{aligned} & (\Delta-1)^2 > (\Delta-3)^2 \\ \Rightarrow & (\Delta-1)^2 + 16 \sin^4\left(\frac{k\pi}{q}\right) > (\Delta-3)^2 + 16 \sin^4\left(\frac{k\pi}{q}\right) \\ \Rightarrow & (\Delta-1)^2 + 16 \sin^4\left(\frac{k\pi}{q}\right) + 8(\Delta-3) \sin^2\left(\frac{k\pi}{q}\right) > (\Delta-3)^2 + 16 \sin^4\left(\frac{k\pi}{q}\right) + 8(\Delta-3) \sin^2\left(\frac{k\pi}{q}\right) \end{aligned}$$

on remarque alors que le passage aux racines carrées des deux cotés de l'inégalité nous donne

$$\sqrt{(\Delta-1)^2 + 16 \sin^4\left(\frac{k\pi}{q}\right) + 8(\Delta-3) \sin^2\left(\frac{k\pi}{q}\right)} > 4 \sin^2\left(\frac{k\pi}{q}\right) + \Delta - 3$$

La dérivée est nulle uniquement lorsque $\sin\left(\frac{k\pi}{q}\right) = 0$ ou $\cos\left(\frac{k\pi}{q}\right) = 0$, donc elle est nulle pour les valeurs suivantes $k = 0, q, \frac{q}{2}, \frac{3q}{2}$ et comme $k \in [1, q-1]$, elle est nulle uniquement pour $k = \frac{q}{2}$, avec $\mu_{n-1}(k = \frac{q}{2}) = \frac{\Delta+3-\sqrt{\Delta^2+6\Delta-7}}{2} < 1$.

La fonction μ , est bornée et se comporte ainsi :

- croissante : pour $k \in [1, \frac{q}{2}]$.
- décroissante : pour $k \in [\frac{q}{2}, q-1]$

On conclue alors que $\mu_{n-1}(k = q-1) = \mu_{n-1}(k = 1)$ et que la valeur à choisir est $k = 1$ (ou $k = q-1$), ce qui donne

$$\mu_{n-1} = \frac{1}{2} \left(\Delta - 1 + 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right) - \sqrt{[\Delta - 1 + 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)]^2 - 16 \sin^2\left(\frac{\pi}{q}\right)} \right)$$

□

Proposition 5.14: Soit $G(q, n_1, 0)$ un graphe unicyclique. On a

1. Si q est pair : $\mu_1 = \frac{\Delta+3+\sqrt{(\Delta+3)^2-16}}{2}$
2. Si q est impair : $\mu_1 = \frac{(\Delta+1)+2\cos(\frac{\pi}{q})+\sqrt{[(\Delta+1)+2\cos(\frac{\pi}{q})]^2-8(1+\cos(\frac{\pi}{q}))}}{2}$

Preuve: En suivant le même raisonnement que celui de la preuve de la Proposition (5.13), et en utilisant la matrice circulante associée, on arrive à l'équation suivante :

$$\mu_1^2 - (\Delta + 1 - 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right))\mu_1 + 2(1 - \cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right)) = 0$$

et on rappelle que pour un graphe unicyclique, on a bien

$$\Delta + 1 \leq \mu_1 \leq \Delta + 2\sqrt{\Delta - 1} \quad (5.19)$$

Le discriminant de cette équation est positif (voir preuve de la Proposition (5.13)), ce qui nous conduit à deux solutions :

$$1. \mu_1^{(1)} = \frac{\Delta+1-2\cos(\frac{2k\pi}{q})-\sqrt{[\Delta+1-2\cos(\frac{2k\pi}{q})]^2-8[1-\cos(\frac{2k\pi}{q})]}}{2}$$

$$2. \mu_1^{(2)} = \frac{\Delta+1-2\cos(\frac{2k\pi}{q})+\sqrt{[\Delta+1-2\cos(\frac{2k\pi}{q})]^2-8[1-\cos(\frac{2k\pi}{q})]}}{2}$$

Il est clair que $\mu_1^{(1)}$ ne vérifie pas la formule (5.19), car

$$\mu_1^{(1)} = \frac{\Delta+1}{2} - \left(\frac{2\cos(\frac{2k\pi}{q}) + \sqrt{[\Delta+1-2\cos(\frac{2k\pi}{q})]^2-8[1-\cos(\frac{2k\pi}{q})]}}{2} \right) < \Delta+1$$

ce qui nous permet de l'exclure et de ne garder que

$$\mu_1 = \frac{\Delta+1-2\cos(\frac{2k\pi}{q}) + \sqrt{[\Delta+1-2\cos(\frac{2k\pi}{q})]^2-8[1-\cos(\frac{2k\pi}{q})]}}{2}$$

μ_1 est une fonction en k , qui est symétrique autour de $\lfloor \frac{q}{2} \rfloor$, c'est à dire qu'on retrouve la même valeur de μ_1 pour des valeurs de $k = 0$ et $k = q$, ensuite $k = 1$ et $k = q - 1, \dots$

Avec ce raisonnement, on peut tracer l'évolution de la fonction μ_1 par rapport aux valeurs de $k = 0, \dots, q$ (voir Figure (5.2)). On rappelle aussi que $\cos(\frac{2(q-1)\pi}{2q}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{q}) = -\cos(\frac{\pi}{q})$.

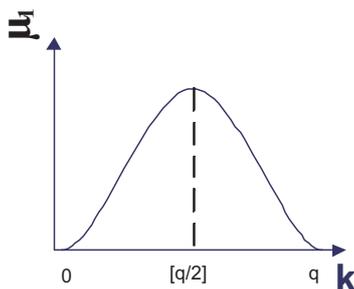


FIGURE 5.2 – La courbe de μ_1 en fonction de k

Le calcul de la dérivée de notre fonction μ_1 , nous donne

$$\mu_1' = \frac{1}{2} \left[\frac{4\pi}{q} \sin\left(\frac{2k\pi}{q}\right) + \frac{2(\Delta+1-2\cos(\frac{2k\pi}{q}))(\frac{4\pi}{q} \sin(\frac{2k\pi}{q})) - \frac{16\pi}{q} \sin(\frac{2k\pi}{q})}{2\sqrt{[\Delta+1-2\cos(\frac{2k\pi}{q})]^2-8[1-\cos(\frac{2k\pi}{q})]}} \right]$$

$$\mu_1' = \frac{2\pi}{q} \sin\left(\frac{2k\pi}{q}\right) \left[1 + \frac{(\Delta+1-2\cos(\frac{2k\pi}{q})) - 2}{\sqrt{[\Delta+1-2\cos(\frac{2k\pi}{q})]^2-8[1-\cos(\frac{2k\pi}{q})]}} \right]$$

et comme $\Delta \geq 3$, le terme entre crochets est strictement positif. La dérivée est égale à zéro pour les valeurs de $k = 0, \frac{q}{2}$, et comme l'étude se fait dans l'intervalle des entiers $k \in [1, q - 1]$, alors on garde l'unique valeur entière de $k = \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$. Comme on l'a déjà vu précédemment, la fonction étudiée atteint son maximum lorsque $k = \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$, et on distingue :

1. q pair : $k = \frac{q}{2}$, et

$$\mu_1 = \frac{\Delta + 3 + \sqrt{(\Delta + 3)^2 - 16}}{2}$$

2. q impair : $k = \frac{q-1}{2}$, et

$$\mu_1 = \frac{(\Delta + 1) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{q}\right) + \sqrt{[(\Delta + 1) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{q}\right)]^2 - 8(1 + \cos\left(\frac{\pi}{q}\right))}}{2}$$

□

5.4 Spectre des graphes unicycliques $G(q, n_1, n_2)$

Dans cette partie, on s'intéresse aux graphes unicycliques du type de la figure (5.3). On note par $G(q, n_1, n_2)$, le graphe unicyclique dont le cycle est C_q , puis sur chacun des sommets du cycle, on trouve n_1 sommets adjacents, et sur chacun de ces derniers, on trouve n_2 sommets pendants.

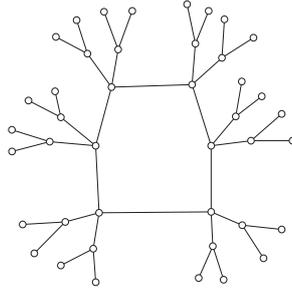


FIGURE 5.3 – Graphe unicyclique $G(6, 2, 2)$

On considère un vecteur propre x associé à λ_1 . Le vecteur x a une composante par sommet.

Les sommets du cycle sont notés c_1, \dots, c_q . Pour chaque sommet c_i du cycle, il y a n_1 sommets adjacents qu'on note $I_i^{j_1}$ avec $1 \leq j_1 \leq n_1$. Chaque sommet intermédiaire $I_i^{j_1}$ est adjacent à n_2 feuilles notées par $f_{i,j_1}^{j_2}$ avec $1 \leq j_2 \leq n_2$.

On a la proposition suivante :

Proposition 5.15: Soit G un graphe unicyclique du type $G(q, n_1, n_2)$. On a

$$\lambda_1(G) = \frac{2}{3} + 2\sqrt{\frac{-P}{3}} \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2} \sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right) \quad (5.20)$$

où

$$P = \frac{-4}{3} - (n_1 + n_2)$$

et

$$Q = \frac{-2}{27} (8 + 9(n_1 + n_2)) + 2n_2$$

Preuve: On note par N_1 l'ensemble des sommets adjacents aux sommets du cycle, et par N_2 l'ensemble des sommets pendants et adjacents aux sommets de N_1 .

Partant de la définition

$$\lambda_1 x_i = \sum_{j \sim i} x_j$$

avec la notation $j \sim i$ qui signifie que j est voisin de i . On distingue trois cas (avec $i = 1, \dots, q$, $j_1 = 1, \dots, n_1$ et $j_2 = 1, \dots, n_2$) :

1. $i \in C_q$: $\lambda_1 x_{c_i} = x_{c_{i+1}} + x_{c_{i-1}} + \sum_{j_1=1}^{n_1} x_{I_i^{j_1}}$
2. $i \in N_1$: $\lambda_1 x_{I_i^{j_1}} = x_{c_i} + \sum_{j_2=1}^{n_2} x_{f_{i,j_1}^{j_2}}$
3. $i \in N_2$: $\lambda_1 x_{f_{i,j_1}^{j_2}} = x_{I_i^{j_1}}$

Du troisième cas, on tire $x_{f_{i,j_1}^{j_2}} = \frac{x_{I_i^{j_1}}}{\lambda_1}$, et en le remplaçant dans le deuxième cas, on trouve

$$\begin{aligned} \lambda_1 x_{I_i^{j_1}} &= x_{c_i} + \frac{1}{\lambda_1} \sum_{j_2=1}^{n_2} x_{I_i^{j_1}} = x_{c_i} + \frac{n_2}{\lambda_1} x_{I_i^{j_1}} \\ \Rightarrow x_{I_i^{j_1}} &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 - n_2} x_{c_i} \end{aligned}$$

qui sera à son tour remplacé dans le premier cas. On obtient

$$\left(\lambda_1 - \frac{n_1 \lambda_1}{\lambda_1^2 - n_2}\right) x_{c_i} = x_{c_{i+1}} + x_{c_{i-1}} \quad (5.21)$$

D'après (5.2) ($\lambda_1 \geq \sqrt{\Delta}$), et du fait que $\Delta \geq n_2 + 1$, il est facile de voir que $\lambda_1^2 \neq n_2$.

À l'aide du théorème de Perron-Frobenius [47], l'équation (5.21), devient (du fait que $\sum_{c_i \in C_q} x_{c_i} \neq 0$) :

$$\lambda_1^3 - 2\lambda_1^2 - (n_1 + n_2)\lambda_1 + 2n_2 = 0 \quad (5.22)$$

Cette équation est du troisième degré, et le calcul du discriminant nous donne

$$disc = Q^2 + \frac{4}{27}P^3$$

où

$$Q = \frac{-2(8 + 9(n_1 + n_2))}{27} + 2n_2 = 2n_2 - \frac{16}{27} - \frac{2(n_1 + n_2)}{3}$$

et

$$P = -\frac{4}{3} - (n_1 + n_2)$$

alors

$$\begin{aligned} disc &= \left[\frac{4}{3}n_2 - \frac{2n_1}{3} - \frac{16}{27}\right]^2 - \frac{4}{27}\left[\frac{4}{3} + n_1 + n_2\right]^3 \\ \Rightarrow disc &= \frac{4}{9} \left(\left[2n_2 - n_1 - \frac{8}{9}\right]^2 - \frac{1}{3}\left[\frac{4}{3} + n_1 + n_2\right]^3 \right) \end{aligned}$$

Le signe du discriminant dépend uniquement du terme entre parenthèses. Si on pose $n_1 = kn_2$ avec $k \in \mathbb{R}^{*+}$, et après développement, on trouve que le signe de $disc$ dépendra du signe de

$$disc_0 = -n_2 \left((k+1)^3 n_2^2 + (k^2 - 4k - 8)n_2 + 16 \right)$$

On pose $f(n_2) = (k+1)^3 n_2^2 + (k^2 - 4k - 8)n_2 + 16$. On sait que $f(n_2) > n_2 \left((k+1)^3 n_2 + (k^2 - 4k - 8) \right)$. Il suffit donc de montrer que $(k+1)^3 n_2 + (k^2 - 4k - 8) \geq 0$. Sachant que $n_2 \geq 1$, et que $\forall k > 0$, $\frac{k^2 - 4k - 8}{(k+1)^3} < 1$ alors on déduit que $n_2 > \frac{k^2 - 4k - 8}{(k+1)^3}$. En d'autres termes, $(k+1)^3 n_2 + (k^2 - 4k - 8) \geq 0$ et on arrive au fait que $f(n_2) > 0$. On a alors pour tout $k \in \mathbb{R}^{*+}$: $disc_0 < 0$.

On en déduit que notre discriminant est négatif, et on a trois solutions réelles qui sont :

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(1)} &= 2\sqrt{\frac{-P}{3}} \cos \left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2} \sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right) + 2\pi}{3} \right) + \frac{2}{3} \\ \lambda_1^{(2)} &= 2\sqrt{\frac{-P}{3}} \cos \left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2} \sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right) + 4\pi}{3} \right) + \frac{2}{3} \\ \lambda_1^{(3)} &= 2\sqrt{\frac{-P}{3}} \cos \left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2} \sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3} \right) + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

et qui deviennent après le développement du cosinus :

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(1)} &= \frac{2}{3} - \sqrt{\frac{-P}{3}} \left[\cos \left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2} \sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2} \sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3} \right) \right] \\ \lambda_1^{(2)} &= \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{-P}{3}} \left[-\cos \left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2} \sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3} \right) + \sqrt{3} \sin \left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2} \sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3} \right) \right] \\ \lambda_1^{(3)} &= \frac{2}{3} + 2\sqrt{\frac{-P}{3}} \cos \left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2} \sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3} \right) \end{aligned}$$

On rappelle aussi que pour un angle β

$$\text{Arccos}(\beta) \in [0; \pi] \Rightarrow \frac{\text{Arccos}(\beta)}{3} \in [0; \frac{\pi}{3}]$$

Il est clair qu'en variant l'angle du cosinus entre 0 et $\frac{\pi}{3}$, et en tenant compte du résultat $\lambda_1 \geq \sqrt{\Delta}$ (voir [121]), on trouve que le terme entre crochets de $\lambda_1^{(1)}$ est positif, et dans ce cas $\lambda_1^{(1)} < \frac{2}{3}$, or elle devrait vérifier $\lambda_1^{(1)} \geq \sqrt{3}$, alors elle est rejetée.

D'après la Proposition 5.2, λ_1 doit toujours vérifier $\lambda_1 \geq \sqrt{\Delta}$.

Il est facile de voir que le terme entre crochets de $\lambda_1^{(2)}$ varie entre -1 et 1 . $\lambda_1^{(2)}$ atteint son maximum lorsque la valeur entre crochets est de 1 . Ainsi, $\lambda_1^{(2)} = \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{n_1+n_2}{3}}$.

Il est facile de voir que $\Delta = n_2 + 1$ si $n_2 \geq n_1 + 2$, et $\Delta = n_1 + 2$ sinon.

1. $n_1 > n_2$, $\Delta = n_1 + 2$, et on pose $n_2 = k_1 n_1$ avec $k_1 \in \mathbb{R}^{*+}$ et $k_1 < 1$. On veut alors montrer que $\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{k_1+1}{3}n_1} < \sqrt{n_1+2} - \frac{2}{3}$: après développement, on cherche finalement à montrer que $(n_1 + 2) - \frac{k_1+1}{3}n_1 - \frac{4}{3}\sqrt{n_1+2} \geq 0$. Le membre gauche de cette dernière inégalité peut s'écrire ainsi : $\left(\sqrt{2-k_1}\sqrt{n_1+2} - \frac{2}{\sqrt{2-k_1}}\right)^2 + 2(k_1+1) - \frac{4}{2-k_1}$. Comme on peut facilement vérifier que $2(k_1+1) - \frac{4}{2-k_1} > 0$, alors on constate que $\left(\sqrt{2-k_1}\sqrt{n_1+2} - \frac{2}{\sqrt{2-k_1}}\right)^2 + 2(k_1+1) - \frac{4}{2-k_1} \geq 0$.
2. $n_2 \geq n_1 + 2$, $\Delta = n_2 + 1$, et on pose $n_1 = k_1 n_2$ avec $k_1 \in \mathbb{R}^{*+}$ et $k_1 < 1$. On veut montrer que $\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{k_1+1}{3}n_2} < \sqrt{n_2+1} - \frac{2}{3}$: après développement de cette inégalité, on cherche alors à montrer que $(2-k_1)(n_2+1) - 4\sqrt{n_2+1} + (k_1+1) \geq 0$. On fait un changement de variable sur le membre gauche de l'inégalité. On pose $z = \sqrt{n_2+1}$, avec $z \geq 2$. Ainsi, on trouve deux racines inférieures à 2 : $z_1 = \frac{2-\sqrt{k_1^2-k_1+2}}{2-k_1}$, et $z_2 = \frac{2+\sqrt{k_1^2-k_1+2}}{2-k_1}$. On conclue alors que $(2-k_1)(n_2+1) - 4\sqrt{n_2+1} + (k_1+1) \geq 0$

$\lambda_1^{(2)} < \sqrt{\Delta}$ pour les deux cas étudiés, donc elle est rejetée.

Finalement, notre solution est

$$\lambda_1^{(3)} = 2\sqrt{\frac{-P}{3}} \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2}\sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right) + \frac{2}{3}$$

□

Proposition 5.16: Soit G un graphe unicyclique du type $G(q, n_1, n_2)$. On a

1. **q pair :** $\lambda_n = -\frac{2}{3} - \sqrt{\frac{-P}{3}} \left[\cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2}\sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2}\sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right) \right]$
2. **q impair :** $\lambda_n = \frac{2}{3} \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) - \sqrt{\frac{-P}{3}} \left[\cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2}\sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2}\sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right) \right]$

où

$$P = \frac{-4\cos^2\left(\frac{2\pi k}{q}\right)}{3} - (n_1 + n_2)$$

et

$$Q = \frac{-2\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)}{27} \left[8\cos^2\left(\frac{2\pi k}{q}\right) + 9(n_1 + n_2) \right] + 2n_2 \cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)$$

et que $k = \frac{q}{2}$, si q est pair, sinon $k = \frac{q-1}{2}$.

Preuve: Suivant le même raisonnement précédent, on obtient l'équation suivante

$$\left[\lambda_n - \frac{n_1 \lambda_n}{\lambda_n^2 - n_2} \right] x_{c_i} = x_{c_{i+1}} + x_{c_{i-1}}$$

qui est une équation parmi un système associé à une matrice circulante :

$$C = \begin{pmatrix} \gamma & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \gamma & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \gamma & -1 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & -1 & \gamma & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \gamma & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & \gamma \end{pmatrix}$$

et qui admet $\gamma - 2 \cos(\frac{2k\pi}{q})$ comme valeur propre, tel que $\exists k, \gamma - 2 \cos(\frac{2k\pi}{q}) = 0$.

D'après la Proposition (5.5), on a $\lambda_n \leq -1$, donc $\lambda_n^2 - n_2 > 1 - n_2 = \eta$ avec η qui prend ses valeurs dans \mathbb{Z}^- . On conclue que $\lambda_n^2 \neq n_2$.

La solution de ce système existe si et seulement si on a

$$\gamma = \lambda_n - \frac{n_1 \lambda_n}{\lambda_n^2 - n_2} = 2 \cos(\frac{2k\pi}{q})$$

autrement dit

$$\lambda_n^3 - 2 \cos(\frac{2k\pi}{q}) \lambda_n^2 - (n_1 + n_2) \lambda_n + 2n_2 \cos(\frac{2k\pi}{q}) = 0$$

C'est une équation du troisième degré qu'on peut résoudre avec la méthode de Cardan, en posant :

$$P = \frac{-4 \cos^2(\frac{2\pi k}{q})}{3} - (n_1 + n_2)$$

et

$$Q = \frac{-2 \cos(\frac{2\pi k}{q})}{27} \left[8 \cos^2(\frac{2\pi k}{q}) + 9(n_1 + n_2) \right] + 2n_2 \cos(\frac{2\pi k}{q})$$

Le calcul du discriminant est donné par

$$Disc = Q^2 + \frac{4}{27} P^3 = \cos^2(\frac{2\pi k}{q}) \left[2n_2 - \frac{2}{27} (8 \cos^2(\frac{2\pi k}{q}) + 9n_1 + 9n_2) \right]^2 - \frac{4}{27} \left[\frac{4}{3} \cos^2(\frac{2\pi k}{q}) + n_1 + n_2 \right]^3$$

$$\Rightarrow Disc = \cos^2(\frac{2\pi k}{q}) \left[\frac{4}{3} n_2 - \frac{2}{3} n_1 - \frac{16}{27} \cos^2(\frac{2\pi k}{q}) \right]^2 - \frac{4}{27} \left[\frac{4}{3} \cos^2(\frac{2\pi k}{q}) + (n_1 + n_2) \right]^3$$

$$\Rightarrow Disc = \frac{4}{9} \cos^2(\frac{2\pi k}{q}) \left[2n_2 - n_1 - \frac{8}{9} \cos^2(\frac{2\pi k}{q}) \right]^2 - \frac{4}{27} \left[\frac{4}{3} \cos^2(\frac{2\pi k}{q}) + (n_1 + n_2) \right]^3$$

$$\Rightarrow Disc = \frac{4}{9} \cos^2(\frac{2\pi k}{q}) \left[\frac{8}{9} \cos^2(\frac{2\pi k}{q}) + (n_1 + n_2) - 3n_2 \right]^2 - \frac{4}{27} \left[\frac{4}{3} \cos^2(\frac{2\pi k}{q}) + (n_1 + n_2) \right]^3$$

On pose $n_1 = k_0 n_2$ avec $k_0 \in \mathbb{R}^{*+}$. $Disc$ aura le même signe que

$$Disc_0 = \frac{-n_2}{3} \left((k_0 + 1)^3 n_2^2 + \cos^2(\frac{2\pi k}{q}) (k_0^2 - 4k_0 - 8) n_2 + 16 \cos^4(\frac{2\pi k}{q}) \right)$$

Pour montrer que ce discriminant est négatif, on suivra les mêmes étapes de la preuve précédente.

On pose $H(n_2) = (k_0 + 1)^3 n_2^2 + \cos^2(\frac{2\pi k}{q})(k_0^2 - 4k_0 - 8)n_2 + 16 \cos^4(\frac{2\pi k}{q})$. On sait que $H(n_2) > n_2 \left((k_0 + 1)^3 n_2 + \cos^2(\frac{2\pi k}{q})(k_0^2 - 4k_0 - 8) \right)$. Il suffit donc de montrer que $(k_0 + 1)^3 n_2 + \cos^2(\frac{2\pi k}{q})(k_0^2 - 4k_0 - 8) \geq 0$. Sachant que $n_2 \geq 1$, et que $\forall k_0 > 0$, $\frac{k_0^2 - 4k_0 - 8}{(k_0 + 1)^3} \cos^2(\frac{2\pi k}{q}) < 1$ alors on déduit que $n_2 > \frac{k_0^2 - 4k_0 - 8}{(k_0 + 1)^3} \cos^2(\frac{2\pi k}{q})$. En d'autres termes, $(k_0 + 1)^3 n_2 + \cos^2(\frac{2\pi k}{q})(k_0^2 - 4k_0 - 8) \geq 0$ et on arrive au fait que $H(n_2) > 0$. On a alors pour tout $k_0 \in \mathbb{R}^{*+}$: $Disc_0 < 0$. Le discriminant $Disc$ est alors négatif, et on possède trois solutions réelles :

$$\begin{aligned}\lambda_n^{(1)} &= \frac{2}{3} \cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right) + 2\sqrt{\frac{-P}{3}} \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2} \sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right) + 2\pi}{3}\right) \\ \lambda_n^{(2)} &= \frac{2}{3} \cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right) + 2\sqrt{\frac{-P}{3}} \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2} \sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right) + 4\pi}{3}\right) \\ \lambda_n^{(3)} &= \frac{2}{3} \cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right) + 2\sqrt{\frac{-P}{3}} \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2} \sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right)\end{aligned}$$

Une fois qu'on développe le cosinus dans les trois précédentes formules, on obtient de nouveau :

$$\begin{aligned}\lambda_n^{(1)} &= \frac{2}{3} \cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right) - \sqrt{\frac{-P}{3}} \left(\cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2} \sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2} \sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right) \right) \\ \lambda_n^{(2)} &= \frac{2}{3} \cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right) + \sqrt{\frac{-P}{3}} \left(-\cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2} \sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2} \sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right) \right) \\ \lambda_n^{(3)} &= \frac{2}{3} \cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right) + 2\sqrt{\frac{-P}{3}} \left(\cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2} \sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right) \right)\end{aligned}$$

Sachant que l'Arccosinus d'un angle est toujours dans l'intervalle $[0, \pi]$, on constate alors que l'angle du cosinus (qui est le même avec celui du sinus) est dans $[0, \frac{\pi}{3}]$, ce qui rend le sinus et le cosinus toujours positifs ($\forall n_1, n_2, k$).

Dans ce cas, où la valeur propre qu'on cherche est liée à la matrice circulante C , il suffit de trouver la plus petite valeur parmi les trois. En effet :

1. $\lambda_n^{(1)} - \lambda_n^{(2)} = -\sqrt{\frac{-P}{3}} \left(2\sqrt{3} \sin\left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2} \sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right) \right) < 0$ et donc : $\lambda_n^{(1)} < \lambda_n^{(2)}$
2. $\lambda_n^{(1)} - \lambda_n^{(3)} = -\sqrt{\frac{-P}{3}} \left(\cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2} \sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2} \sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right) \right) < 0$ et donc

$$\lambda_n^{(1)} < \lambda_n^{(3)}$$

On conclue que la valeur propre recherchée est

$$\lambda_n^{(1)} = \frac{2}{3} \cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right) - \sqrt{\frac{-P}{3}} \left(\cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2} \sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2} \sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right) \right)$$

Le calcul de la dérivée de λ_n est donné par :

$$\lambda_n' = -\sqrt{\frac{4}{9} \cos^2\left(\frac{2\pi k}{q}\right) + n_2 + n_1} \left[\frac{\sqrt{3}(-B - \frac{48\pi(\frac{1}{27} \cos(\frac{2\pi k}{q})(8 \cos^2(\frac{2\pi k}{q}) + 9(n_2 + n_1)) - n_2 \cos(\frac{2\pi k}{q}))^2}{q(\frac{4}{3} \cos^2(\frac{2\pi k}{q}) + n_2 + n_1)^4} \cos(\frac{2\pi k}{q}) \sin(\frac{2\pi k}{q}))}{2\sqrt{A}} \right. \\ \left. + \frac{-\frac{2\pi}{27q}(8 \cos^2(\frac{2\pi k}{q}) + 9(n_2 + n_1)) \sin(\frac{2\pi k}{q}) - \frac{32\pi}{27q} \cos^2(\frac{2\pi k}{q}) \sin(\frac{2\pi k}{q}) + \frac{2\pi n_2}{q} \sin(\frac{2\pi k}{q})}{\left(\frac{4}{3} \cos^2(\frac{2\pi k}{q}) + n_2 + n_1\right)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{3} + \right. \\ \left. \frac{8\pi(\frac{1}{27} \cos(\frac{2\pi k}{q})(8 \cos^2(\frac{2\pi k}{q}) + 9(n_2 + n_1)) - n_2 \cos(\frac{2\pi k}{q}))}{q\left(\frac{4}{3} \cos^2(\frac{2\pi k}{q}) + n_2 + n_1\right)^{\frac{5}{2}}} \sqrt{3} \cos(\frac{2\pi k}{q}) \sin(\frac{2\pi k}{q}) \right] + \\ \frac{8\pi \cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right) \left(\sqrt{3} \sqrt{1 - \frac{3(\frac{1}{27} \cos(\frac{2\pi k}{q})(8 \cos^2(\frac{2\pi k}{q}) + 9(n_2 + n_1)) - n_2 \cos(\frac{2\pi k}{q}))^2}{\left(\frac{4}{3} \cos^2(\frac{2\pi k}{q}) + n_2 + n_1\right)^3}} + \frac{\frac{1}{27} \cos(\frac{2\pi k}{q})(8 \cos^2(\frac{2\pi k}{q}) + 9(n_2 + n_1)) - n_2 \cos(\frac{2\pi k}{q})}{\left(\frac{4}{3} \cos^2(\frac{2\pi k}{q}) + n_2 + n_1\right)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{3}} \right) \sin\left(\frac{2\pi k}{q}\right)}{9q \sqrt{\frac{4}{9} \cos^2\left(\frac{2\pi k}{q}\right) + n_2 + n_1}}$$

$$\frac{4\pi}{3q} \sin\left(\frac{2\pi k}{q}\right)$$

$$\text{avec } A = 1 - \frac{3\left(\frac{1}{27} \cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)(8 \cos^2\left(\frac{2\pi k}{q}\right) + 9(n_2 + n_1)) - n_2 \cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)\right)^2}{\left(\frac{4}{3} \cos^2\left(\frac{2\pi k}{q}\right) + n_2 + n_1\right)^3}$$

$$B = \frac{6\left(\frac{1}{27} \cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)(8 \cos^2\left(\frac{2\pi k}{q}\right) + 9(n_2 + n_1)) - n_2 \cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)\right) B_1}{\left(\frac{4}{3} \cos^2\left(\frac{2\pi k}{q}\right) + n_2 + n_1\right)^3}$$

$$\text{avec } B_1 = -\frac{2\pi}{27q}(8 \cos^2\left(\frac{2\pi k}{q}\right) + 9(n_2 + n_1)) \sin\left(\frac{2\pi k}{q}\right) - \frac{32\pi}{27q} \cos^2\left(\frac{2\pi k}{q}\right) \sin\left(\frac{2\pi k}{q}\right) + \frac{2\pi n_2}{q} \sin\left(\frac{2\pi k}{q}\right)$$

λ_n atteint sa valeur minimum lorsque : $\frac{2\pi k}{q} \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\Rightarrow \frac{q}{4} < k < \frac{3q}{4}$ et $k = 1, \dots, q-1$ et la valeur entière comprise entre $\frac{q}{4}$ et $\frac{3q}{4}$ est bien $k = \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$.

On en distingue alors deux cas :

$$1. \text{ } \mathbf{q \text{ pair}} : k = \frac{q}{2}, \text{ et } \lambda_n = -\frac{2}{3} - \sqrt{\frac{-P}{3}} \left(\cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2} \sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2} \sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right) \right)$$

$$2. \text{ } \mathbf{q \text{ impair}} : k = \frac{q-1}{2}, \text{ et } \lambda_n = \frac{2}{3} \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right) - \sqrt{\frac{-P}{3}} \left(\cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2} \sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right) + \sqrt{3} \sin\left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2} \sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right) \right)$$

□

Remarque : Ces calculs ont été réalisés avec [72].

Proposition 5.17: Soit G un graphe unicyclique du type $G(q, n_1, n_2)$. On a

$$1. \text{ } \mathbf{q \text{ pair}} : k = \frac{q}{2}, \text{ et } \mu_1 = \frac{6+n_1+n_2}{3} + 2\sqrt{\frac{-P}{3}} \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2} \sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right)$$

$$2. \text{ } \mathbf{q \text{ impair}} : k = \frac{q-1}{2}, \text{ et } \mu_1 = \frac{4+n_1+n_2-2\cos\left(\frac{2\pi}{q}\right)}{3} + 2\sqrt{\frac{-P}{3}} \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2} \sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right)$$

où

$$P = -\frac{\left(4 + n_1 + n_2 - 2\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)\right)^2}{3} + n_1 + 2n_2 + n_1n_2 + 5 - 2(2 + n_2)\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)$$

$$\text{et } Q = -\frac{4+n_1+n_2-2\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)}{27} \left[2\left(4 + n_1 + n_2 - 2\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)\right)^2 - 9(n_1 + 2n_2 + n_1n_2 + 5 - 2(2 + n_2)\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)) \right] + 2\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right) - 2$$

Preuve: Partant de la définition du rayon spectral de la matrice du Laplacien de G , on a (avec $j_1 = 1 \dots, n_1$ et $i = 1, \dots, q$ et $j_2 = 1 \dots, n_2$) :

$$- i \in C_q : (n_1 + 2 - \mu_1)x_{c_i} = x_{c_{i+1}} + x_{c_{i-1}} + \sum_{j_1=1}^{n_1} x_{I_i^{j_1}}$$

$$- i \in N_1 : (n_2 + 1 - \mu_1)x_{I_i^{j_1}} = x_{c_i} + \sum_{j_2=1}^{n_2} x_{f_{i,j_1}^{j_2}}$$

$$- i \in N_2 : (1 - \mu_1)x_{f_{i,j_1}^{j_2}} = x_{I_i^{j_1}}$$

Ces équations forment un système associé à une matrice circulante :

$$C = \begin{pmatrix} \gamma & -1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \gamma & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \gamma & -1 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & -1 & \gamma & -1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & \gamma & -1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & -1 & \gamma \end{pmatrix}$$

et qui admet $\gamma - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right)$ comme valeur propre, tel que $\exists k, \gamma - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right) = 0$.

La solution de ce système existe si et seulement si on a

$$\gamma = \left(n_1 + 2 - \mu_1 - \underbrace{\frac{n_1}{n_2 + 1 - \mu_1 - \frac{n_2}{1 - \mu_1}}}_{\text{}} \right) = 2\cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right) \quad (\text{et } \mu_1 > 1)$$

Le terme indiqué sur l'accolade est différent de zéro, à cause du fait que $\mu_1 \geq \Delta + 1$. En effet, en calculant son discriminant on trouve :

$disc = n_2(n_2 - 4)$. On discute trois cas :

1. $n_2 < 4$: il n'y a pas de solution.
2. $n_2 = 4$: on trouve une solution double $\mu_1 = 1 - \frac{n_2}{2}$ qui est rejetée ($\mu_1 \geq \Delta + 1$).
3. $n_2 > 4$: on trouve deux solutions de μ_1 : $1 + \frac{n_2 + \sqrt{n_2(n_2 - 4)}}{2}$, et $1 + \frac{n_2 - \sqrt{n_2(n_2 - 4)}}{2}$ qui sont les deux rejetées, car $\mu_1 \geq \Delta + 1$.

On a alors une équation de troisième degré à résoudre

$$\mu_1^3 - \left(4 + n_1 + n_2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right)\right)\mu_1^2 + \left(n_1 + 2n_2 + n_1n_2 + 5 - 2(2 + n_2)\cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right)\right)\mu_1 + 2\cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right) - 2 = 0.$$

Le calcul du discriminant de cette équation est :

$$disc = \left[2 \cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right) - 2 - \frac{(4+n_1+n_2-2\cos(\frac{2k\pi}{q}))}{27} \left[2(4+n_1+n_2-2\cos(\frac{2k\pi}{q}))^2 - 9(n_1+2n_2+n_1n_2+5-2(2+n_2)\cos(\frac{2k\pi}{q})) \right] \right]^2 + \frac{4}{27} \left[-\frac{(4+n_1+n_2-2\cos(\frac{2k\pi}{q}))^2}{3} + (n_1+2n_2+n_1n_2+5-2(2+n_2)\cos(\frac{2k\pi}{q})) \right]^3$$

donc

$$disc = \left[2 \cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right) - 2 - \frac{(4+n_1+n_2-2\cos(\frac{2k\pi}{q}))}{27} \left(2(4+n_1+n_2-2\cos(\frac{2k\pi}{q}))^2 - 9(n_1+2n_2+n_1n_2+5-2(2+n_2)\cos(\frac{2k\pi}{q})) \right) \right]^2 - \frac{4}{27} \left[\frac{(4+n_1+n_2-2\cos(\frac{2k\pi}{q}))^2}{3} - (n_1+2n_2+n_1n_2+5-2(2+n_2)\cos(\frac{2k\pi}{q})) \right]^3$$

On pose $n_1 = k_0 n_2$, avec $k_0 \in \mathbb{R}^{+*}$. Soient

$$\Gamma_1 = k_0 n_2^2 + (k_0 + 2)n_2 - 2(2 + n_2) \cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right) + 5$$

et

$$\Gamma_2 = (k_0 + 1)n_2 + 4 - 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right)$$

Le discriminant s'écrit de nouveau

$$disc = \left(2 \cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right) - 2 - \frac{\Gamma_2}{27} (2\Gamma_2^2 - 9\Gamma_1) \right)^2 - 4 \left(\frac{\Gamma_2^2}{9} - \frac{\Gamma_1}{3} \right)^3$$

On pose $\Gamma_2 = k_1 \Gamma_1$, avec $k_1 \in \mathbb{R}^*$. On aura

$$disc = \left(2 \cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right) - 2 - \frac{k_1 \Gamma_1}{27} (2k_1^2 \Gamma_1^2 - 9\Gamma_1) \right)^2 - 4 \left(\frac{k_1^2 \Gamma_1^2 - 3\Gamma_1}{9} \right)^3$$

$$disc = \left(2 \cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right) - 2 + \frac{k_1 \Gamma_1^2}{3} - \frac{2k_1^3 \Gamma_1^3}{27} \right)^2 - 4 \left(\frac{k_1^2 \Gamma_1^2 - 3\Gamma_1}{9} \right)^3$$

Comme $\Gamma_1 \geq 0$, on peut alors écrire

$$disc \leq \left(\frac{k_1 \Gamma_1^2}{3} \right)^2 - 4 \left(\frac{k_1^2 \Gamma_1^2 - 3\Gamma_1}{9} \right)^3$$

Après développement du membre droit de cette inégalité, on trouve

$$disc \leq \left(\frac{k_1^2 \Gamma_1^2}{9} \right) \Gamma_1 \left(\Gamma_1 - \frac{4k_1}{3} \left(\frac{k_1 \Gamma_1}{3} - \frac{1}{k_1} \right)^3 \right)$$

Il est clair que le signe du discriminant dépend du signe du terme :

$$\Gamma_1 - \frac{4k_1}{3} \left(\frac{k_1 \Gamma_1}{3} - \frac{1}{k_1} \right)^3 = H(\Gamma_1)$$

On développe $H(\Gamma_1)$ et on obtient

$$H(\Gamma_1) = \frac{-4}{81k_1^2} \underbrace{\left(k_1^6\Gamma_1^3 - 9k_1^4\Gamma_1^2 - 27\right)} - \frac{\Gamma_1}{3}$$

On peut facilement montrer avec un changement de variable, que le terme au dessus de l'accolade est bien positif. Ceci signifie finalement, que le signe du discriminant de l'équation de troisième degré, est bien négatif.

On distingue trois solutions :

$$\begin{aligned}\mu_1^{(1)} &= \frac{4 + n_1 + n_2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right)}{3} + 2\sqrt{\frac{-P}{3}} \cos\left[\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2}\sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right) + 2\pi}{3}\right] \\ \mu_1^{(2)} &= \frac{4 + n_1 + n_2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right)}{3} + 2\sqrt{\frac{-P}{3}} \cos\left[\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2}\sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right) + 4\pi}{3}\right] \\ \mu_1^{(3)} &= \frac{4 + n_1 + n_2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right)}{3} + 2\sqrt{\frac{-P}{3}} \cos\left[\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2}\sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right]\end{aligned}$$

et après développement des cosinus, on retrouve les trois formules suivantes :

$$\begin{aligned}\mu_1^{(1)} &= \frac{4 + n_1 + n_2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right)}{3} - \sqrt{\frac{-P}{3}} \left[\cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2}\sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right) - \sqrt{3}\sin\left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2}\sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right) \right] \\ \mu_1^{(2)} &= \frac{4 + n_1 + n_2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right)}{3} - \sqrt{\frac{-P}{3}} \left[\cos\left[\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2}\sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right] + \sqrt{3}\sin\left[\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2}\sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right] \right] \\ \mu_1^{(3)} &= \frac{4 + n_1 + n_2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{q}\right)}{3} + 2\sqrt{\frac{-P}{3}} \cos\left(\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2}\sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right)\end{aligned}$$

Pour trouver la valeur du rayon spectral parmi ces trois valeurs, on procède comme suit :

$$\mu_1^{(3)} - \mu_1^{(1)} = \sqrt{\frac{-P}{3}} \left[3\cos\left[\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2}\sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right] - \sqrt{3}\sin\left[\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2}\sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right] \right] \geq 0$$

$$\mu_1^{(3)} - \mu_1^{(2)} = \sqrt{\frac{-P}{3}} \left[3\cos\left[\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2}\sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right] + \sqrt{3}\sin\left[\frac{\arccos\left(\frac{-Q}{2}\sqrt{\frac{-27}{P^3}}\right)}{3}\right] \right] \geq 0$$

Ceci nous aide à conclure que $\mu_1^{(3)}$ est la plus grande valeur propre associée au graphe $G(q, n_1, n_2)$.

Le calcul de la dérivée de $\mu_1^{(3)}$ est donné par

$$\begin{aligned} (\mu_1^{(3)})' &= \frac{2\sqrt{\frac{1}{9}\left(-2\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+n_2+n_1+4\right)^2-\frac{1}{3}\left(-2(n_2+2)\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+n_1n_2+2n_2+n_1+5\right)A_1*A_2}}{3\sqrt{1-\frac{27\left(\frac{1}{54}\left(-2\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+n_2+n_1+4\right)\left(2\left(-2\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+n_2+n_1+4\right)^2-9\left(-2(n_2+2)\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+2n_2+n_1+5\right)\right)-\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+1\right)^2}{\left(2(n_2+2)\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+\frac{1}{9}\left(-2\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+n_2+n_1+4\right)^2-n_1n_2-2n_2-n_1-5\right)^3}}}} + \\ & B_1 \cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3\left(\frac{1}{54}\left(-2\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+n_2+n_1+4\right)\left(2\left(-2\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+n_2+n_1+4\right)^2-9\left(-2(n_2+2)\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+2n_2+n_1+5\right)\right)-\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+1\right)}{\left(2(n_2+2)\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+\frac{1}{9}\left(-2\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+n_2+n_1+4\right)^2-n_1n_2-2n_2-n_1-5\right)^{\frac{3}{2}}}\sqrt{3}\right)\right) + \\ & \frac{\frac{4\pi}{3q}\sin\left(\frac{2\pi k}{q}\right)}{\sqrt{\frac{1}{9}\left(-2\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+n_2+n_1+4\right)^2-\frac{1}{3}\left(-2(n_2+2)\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+n_1n_2+2n_2+n_1+5\right)}} \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{3*A_1^{(1)}}{\left(2(n_2+2)\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+\frac{1}{9}\left(-2\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+n_2+n_1+4\right)^2-n_1n_2-2n_2-n_1-5\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{3}-} \\ & \frac{9\left(\frac{1}{54}\left(-2\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+n_2+n_1+4\right)\left(2\left(-2\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+n_2+n_1+4\right)^2-9\left(-2(n_2+2)\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+2n_2+n_1+5\right)\right)-\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+1\right)A_1^{(2)}}{2\left(2(n_2+2)\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+\frac{1}{9}\left(-2\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+n_2+n_1+4\right)^2-n_1n_2-2n_2-n_1-5\right)^{\frac{5}{2}}}\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1^{(1)} &= \frac{1}{54}\left(-2\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+n_2+n_1+4\right) + n_2 + n_1 + \\ & 4\left(\frac{16\pi}{q}\left(-2\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+n_2+n_1+4\right)\sin\left(\frac{2\pi k}{q}\right)-\frac{36\pi}{q}(n_2+2)\sin\left(\frac{2\pi k}{q}\right)\right) + \\ & \frac{2\pi}{27q}\left(2\left(-2\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+n_2+n_1+4\right)^2-9\left(-2(n_2+2)\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+2n_2+n_1+5\right)\right)\sin\left(\frac{2\pi k}{q}\right) + \\ & \frac{2\pi}{q}\sin\left(\frac{2\pi k}{q}\right) \end{aligned}$$

$$A_1^{(2)} = \left(\frac{8\pi}{9q}\left(-2\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+n_2+n_1+4\right)\sin\left(\frac{2\pi k}{q}\right)-\frac{4\pi}{q}(n_2+2)\sin\left(\frac{2\pi k}{q}\right)\right)$$

$$A_2 = \sin\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3*A_2^{(3)}}{\left(2(n_2+2)\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+\frac{1}{9}\left(-2\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+n_2+n_1+4\right)^2-n_1n_2-2n_2-n_1-5\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$\begin{aligned} A_2^{(3)} &= \frac{1}{54}\left(-2\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+n_2+n_1+4\right) + n_2 + n_1 + \\ & 4\left(2\left(-2\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+n_2+n_1+4\right)^2-9\left(-2(n_2+2)\cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+2n_2+n_1+5\right)\right) - \\ & \cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right)+1 \end{aligned}$$

$$B_1 = \frac{8\pi}{9q} \left(-2 \cos\left(\frac{2\pi k}{q}\right) + n_2 + n_1 + 4 \right) \sin\left(\frac{2\pi k}{q}\right) - \frac{4\pi}{3q} (n_2 + 2) \sin\left(\frac{2\pi k}{q}\right)$$

$\mu_1^{(3)}$ atteint son maximum lorsque $k = \lfloor \frac{2q}{4} \rfloor = \lfloor \frac{q}{2} \rfloor$.

On distingue alors deux cas :

- **q pair** : $k = \frac{q}{2}$, et $\mu_1 = \frac{6+n_1+n_2}{3} + 2\sqrt{\frac{-P}{3}} \cos\left(\frac{\arccos(\frac{-Q}{2}\sqrt{\frac{-27}{P^3}})}{3}\right)$
- **q impair** : $k = \frac{q-1}{2}$, et $\mu_1 = \frac{4+n_1+n_2-2\cos(\frac{2\pi}{q})}{3} + 2\sqrt{\frac{-P}{3}} \cos\left(\frac{\arccos(\frac{-Q}{2}\sqrt{\frac{-27}{P^3}})}{3}\right)$

□

Pour chercher la valeur exacte de la connectivité algébrique des graphes $G(q, n_1, n_2)$, on peut suivre le même procédé qu'auparavant, tout en choisissant $k = q - 1$. Ceci nous donne la proposition suivante, dont la démonstration est similaire à celle de la proposition (5.17).

Proposition 5.18: Soit G un graphe unicyclique du type $G(q, n_1, n_2)$. La connectivité algébrique de G est donnée par

$$\mu_{n-1}(G) = \frac{4 + n_1 + n_2 - 2 \cos(\frac{2\pi}{q})}{3} + 2\sqrt{\frac{-P}{3}} \cos\left(\frac{\arccos(\frac{-Q}{2}\sqrt{\frac{-27}{P^3}}) + 2\pi}{3}\right)$$

où

$$P = \frac{\left(4 + n_1 + n_2 - 2 \cos(\frac{2\pi}{q})\right)^2}{3} + n_1 + 2n_2 + n_1n_2 + 5 - 2(2 + n_2) \cos\left(\frac{2\pi}{q}\right)$$

$$\text{et } Q = -\frac{4+n_1+n_2-2\cos(\frac{2\pi}{q})}{27} \left[2\left(4 + n_1 + n_2 - 2 \cos(\frac{2\pi}{q})\right)^2 - 9(n_1 + 2n_2 + n_1n_2 + 5 - 2(2 + n_2) \cos(\frac{2\pi}{q})) \right] + \left(2 \cos(\frac{2\pi}{q}) - 2\right)$$

La preuve est similaire à celle de la proposition précédente.

Proposition 5.19: Si on pose $n_2 = 0$, on retrouve le premier type de graphes unicycliques $G(q, n_1 = \Delta - 2, 0)$, et les résultats de cette section (avec $n_2 = 0$), coïncident avec ceux de la section 3.

5.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons réalisé une étude algébrique qui consiste à calculer les valeurs propres extrêmes et exactes des matrices d'adjacence et du Laplacien de deux classes particulières de graphes unicycliques qu'on a noté par $G(q, n_1, n_2)$.

Dans un proche temps, il sera intéressant de pouvoir généraliser ces calculs pour des graphes unicycliques quelconques, ou alors le cas échéant, de donner de bornes meilleures que celles existantes dans la littérature.

Comme indiqué dans le résumé de ce chapitre, la connaissance des valeurs propres extrêmes permet de renforcer la relaxation linéaire de la formulation entière du problème de synthèse d'un réseau appartenant à l'une de ces deux classes.

En effet, posons X la matrice d'adjacence d'un tel réseau où x_{uv} est une variable binaire indiquant l'existence de l'arête uv . X est supposé être variable. Si le réseau appartient à la classe $G(q, n_1, n_2)$, alors on peut par exemple écrire que $y^t X y \leq \lambda_1 \|y\|^2$ pour tout vecteur y . Ceci nous fournit un ensemble d'inégalités valides qui pourraient renforcer la relaxation courante. On peut faire de même en utilisant les valeurs propres $\lambda_n, \mu_1, \mu_{n-1}$. En effet, le Laplacien s'exprime linéairement par rapport à X puisque $L = X - D$, avec $D_{uv} = \sum_{v \sim u} x_{uv}$.

Signalons enfin que la séparation de ces inégalités valides, se fait par simple calcul des valeurs propres de la matrice X ou du Laplacien $X - D$.