Inégalités de Fefferman-Stein pour l'opérateur maximal de Dunkl associé à $\mathbb{Z}_2^d$

Le principal but de ce chapitre est de démontrer dans le cadre de l'analyse de Dunkl des inégalités de Fefferman-Stein pour un opérateur maximal défini classiquement au moyen des mesures μ_κ^W et de la translation de Dunkl. Ces inégalités, qui constituent un outil fondamental en analyse harmonique, généralisent dans un cadre vectoriel le théorème maximal (scalaire) prouvé par Thangavelu et Xu ([56]). Cependant, comme la grande majorité des résultats de la théorie de Dunkl, nous ne pourrons démontrer ces inégalités que dans le cas où le groupe de réflexions est $\mathbb{Z}_2^d$. La méconnaissance de l'opérateur de translation généralisé empêche à l'heure actuelle d'énoncer un théorème de Fefferman-Stein en toutes généralités. Pour autant, démontrer ces inégalités dans le cadre $\mathbb{Z}_2^d$ où l'opérateur de translation est mieux cerné est loin d'être une évidence car la structure de la translation de Dunkl ne permet pas la mise en œuvre des outils d'analyse réelle.
Le contenu du chapitre est le suivant. Dans un premier temps, nous introduirons, pour un groupe de réflexions quelconque, l'opérateur maximal de Dunkl pour lequel un théorème maximal a été démontré. Nous apporterons alors des précisions sur la taille des constantes de ce théorème. Nous présenterons en détails dans une deuxième section le cadre de travail dans lequel nous établirons les inégalités de Fefferman-Stein, à savoir $\mathbb{Z}_2^d$. On démontrera en particulier une inégalité fondamentale pour la translatée de Dunkl de la fonction caractéristique d'une boule euclidienne de rayon r centrée en l'origine. La troisième section sera quant à elle consacrée à l'énoncé et à la démonstration des inégalités de Fefferman-Stein. On donnera enfin dans une dernière section une extension de ces inégalités à une plus large classe d'opérateurs liés à l'analyse de Dunkl.
Signalons que ce chapitre contient entre autres les résultats publiés dans [12].

2.1 Opérateur maximal de Dunkl

Dans cette section, nous allons introduire l'opérateur maximal de Dunkl associé à un groupe de réflexions et présenter le théorème maximal prouvé en 2005 par Thangavelu et Xu. Nous apporterons des précisions sur les constantes de ce théorème.

2.1.1 Définition et théorème maximal

Commençons par donner la définition de l'opérateur maximal de Dunkl qui a été introduit dans [56].

Définition 2.1. Soit $f \in L^2(\mu_\kappa^W)$. La fonction maximale de Dunkl associée à f et W, notée $M_\kappa^W f$, est définie pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par

$$M_\kappa^W f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu_\kappa^W(B_r)} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(-y)\, \mathrm{d}\mu_\kappa^W(y) \right|.$$

L'opérateur M_κ^W est l'opérateur maximal de Dunkl associé au groupe de réflexions W.

Dans le cas où la fonction de multiplicité κ est nulle, on retrouve l'opérateur maximal classique introduit en 1930 par Hardy et Littlewood dans un cadre unidimensionnel (voir [27]) et généralisé en dimension supérieure par Wiener en 1939 (voir [59]). Le résultat suivant, dû à Thangavelu et Xu ([56]), discute du caractère $L^p(\mu_\kappa^W)$-borné de l'opérateur maximal de Dunkl. Il généralise le théorème maximal classique (aussi appelé théorème de Hardy-Littlewood).

Théorème 2.2. *Soit f une fonction mesurable définie sur $\mathbb{R}^d$.*

1. *Si $f \in L^1(\mu_\kappa^W)$, alors pour tout $\lambda > 0$ on a*

$$\mu_\kappa^W\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^d : M_\kappa^W f(x) > \lambda\Big\}\Big) \leqslant \frac{C}{\lambda}\|f\|_{W,\kappa,1},$$

où $C = C(d,\kappa)$ est une constante indépendante de f et de λ.

2. *Si $f \in L^p(\mu_\kappa^W)$, avec $1 < p \leqslant +\infty$, alors $M_\kappa^W f \in L^p(\mu_\kappa^W)$ et on a*

$$\big\|M_\kappa^W f\big\|_{W,\kappa,p} \leqslant C\|f\|_{W,\kappa,p},$$

où $C = C(d,\kappa,p)$ est une constante indépendante de f.

Remarque 2.3. Signalons que même le cas où $p = +\infty$ est loin d'être aisé. En effet, pour montrer que

$$\big\|M_\kappa^W f\big\|_{W,\kappa,\infty} \leqslant \|f\|_{W,\kappa,\infty},$$

on a besoin d'invoquer la positivité de la translation de Dunkl d'une fonction intégrable, bornée, radiale et positive ainsi que le résultat non trivial suivant (application du théorème 1.26)

$$\int_{\mathbb{R}^d} \tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(y)\, \mathrm{d}\mu_\kappa^W(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{B_r}(y)\, \mathrm{d}\mu_\kappa^W(y).$$

Comme dans le cas usuel, un résultat de type fort est faux pour $p = 1$. Localement, on peut tout de même énoncer le résultat d'intégrabilité suivant.

Proposition 2.4. *Soit B une boule de $\mathbb{R}^d$ et soit $f \in L^1(\mu_\kappa^W)$. Supposons que*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| \log^+ |f(x)|\, \mathrm{d}\mu_\kappa^W(x) < +\infty,$$

où l'on a noté $\log^+ t = \max\{\log t; 0\}$. Alors

$$\int_B M_\kappa^W f(x)\, \mathrm{d}\mu_\kappa^W(x) < +\infty.$$

Plus précisément, on a l'inégalité suivante

$$\int_B M_\kappa^W f(x)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(x) \leqslant 2\mu_\kappa^W(B) + C\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\log^+|f(x)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(x),$$

où $C = C(d,\kappa)$ est une constante indépendante de f et de B.

Démonstration. En termes de fonction de répartition, on peut écrire

$$\int_B M_\kappa^W f(x)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(x) = \int_0^{+\infty} \mu_\kappa^W\Big(\Big\{x\in B : M_\kappa^W f(x) > \lambda\Big\}\Big)\,\mathrm{d}\lambda,$$

égalité de laquelle on peut déduire que

$$\int_B M_\kappa^W f(x)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(x) \leqslant 2\mu_\kappa^W(B) + 2\int_1^{+\infty} \mu_\kappa^W\Big(\Big\{x\in \mathbb{R}^d : M_\kappa^W f(x) > 2\lambda\Big\}\Big)\,\mathrm{d}\lambda.$$

Pour tout $\lambda > 0$, écrivons $f = f_\lambda + (f - f_\lambda)$ où $f_\lambda = f\chi_{\{|f|>\lambda\}}$. Puisque l'on a d'une part

$$M_\kappa^W f \leqslant M_\kappa^W|f_\lambda| + M_\kappa^W|f - f_\lambda|,$$

et $M_\kappa^W|f - f_\lambda| \leqslant \lambda$ d'autre part (car M_κ^W est $L^\infty(\mu_\kappa^W)$-contractant), on peut affirmer que

$$\Big\{x\in\mathbb{R}^d : M_\kappa^W f(x) > 2\lambda\Big\} \subset \Big\{x\in\mathbb{R}^d : M_\kappa^W |f_\lambda|(x) > \lambda\Big\}.$$

Par conséquent

$$\int_B M_\kappa^W f(x)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(x) \leqslant 2\mu_\kappa^W(B) + 2\int_1^{+\infty} \mu_\kappa^W\Big(\Big\{x\in \mathbb{R}^d : M_\kappa^W |f_\lambda|(x) > \lambda\Big\}\Big)\,\mathrm{d}\lambda.$$

En utilisant la première assertion du théorème 2.2, on obtient

$$\int_B M_\kappa^W f(x)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(x) \leqslant 2\mu_\kappa^W(B) + C\int_1^{+\infty} \frac{1}{\lambda}\int_{\{|f|>\lambda\}} |f(x)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(x)\,\mathrm{d}\lambda,$$

où $C = C(d,\kappa)$ est une constante indépendante de f, de B et de λ. Après interversion puis intégration, on aboutit à

$$\int_B M_\kappa^W f(x)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(x) \leqslant 2\mu_\kappa^W(B) + C\int_{\{|f|>1\}} |f(x)|\log|f(x)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(x),$$

ce qui est bien le résultat escompté. □

Revenons au théorème maximal (théorème 2.2). À l'heure actuelle, une preuve basée sur une méthode combinant des arguments de recouvrement et d'interpolation semble, pour un groupe de réflexions quelconque, hors de portée, tout comme une théorie des intégrales singulières dans le contexte de l'analyse de Dunkl semble hors de portée. Cela est dû à la structure de la translation de Dunkl qui ne permet pas la mise en œuvre des outils classiques d'analyse réelle, et ce, bien que les mesures μ_κ^W soient doublantes. Pour démontrer le théorème maximal en toute généralité, Thangavelu et Xu ont réussi à contourner le problème en contrôlant l'opérateur maximal de Dunkl au moyen de l'opérateur maximal associé au semi-groupe de la chaleur de type Dunkl afin d'utiliser le théorème ergodique de Hopf-Dunford-Schwartz. Cette technique est due à Stein ([50]). Plus précisément, ils ont démontré l'inégalité ponctuelle suivante

$$M_\kappa^W f(x) \leqslant C(d,\kappa)\sup_{t>0}\bigg(\frac{1}{t}\int_0^t H_s^{W,\kappa}|f|(x)\,\mathrm{d}s\bigg)$$

afin d'appliquer le théorème ergodique que nous énonçons maintenant (pour des informations sur ce théorème, nous renvoyons le lecteur à [14]).

Théorème 2.5. *Soit X un espace mesurable et soit m une mesure positive sur X. Soit $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ un semi-groupe d'opérateurs sur $L^p(X;m)$. Pour tout $p \in [1,+\infty]$ et tout $f \in L^p(X;m)$ on suppose que*

$$\|T_t f\|_{L^p(X;m)} \leqslant \|f\|_{L^p(X;m)},$$

et on note $\mathscr{M} f$ la fonction définie par

$$\mathscr{M} f(x) = \sup_{t>0}\left|\frac{1}{t}\int_0^t T_s f(x)\,\mathrm{d}s\right|.$$

1. *Si $f \in L^1(X;m)$, alors pour tout $\lambda > 0$ on a*

$$m\Big(\Big\{x \in X : \mathscr{M} f(x) > \lambda\Big\}\Big) \leqslant \frac{2}{\lambda}\|f\|_{L^1(X;m)}.$$

2. *Si $f \in L^p(X;m)$, $1 < p \leqslant +\infty$, alors $\mathscr{M} f \in L^p(X;m)$ et on a*

$$\big\|\mathscr{M} f\big\|_{L^p(X;m)} \leqslant C\|f\|_{L^p(X;m)},$$

où $C = C(p)$ est une constante indépendante de f.

Si l'utilisation de ce théorème ne permet pas d'établir des inégalités de Fefferman-Stein, il permet en revanche d'être plus précis quant à la taille des constantes dans le théorème maximal. C'est ce que nous allons voir maintenant dans une nouvelle sous-section.

2.1.2 Discussion sur la taille des constantes du théorème maximal

Les théorèmes que nous allons présenter dans cette sous-section généralisent certains résultats démontrés par Stein et Strömberg pour la fonction maximale usuelle (voir [48]). Nous nous inspirons d'ailleurs de leur stratégie de preuve.
Nous supposerons $\gamma_{\mathcal{R}} > 0$ car le cas $\gamma_{\mathcal{R}} = 0$ correspond au cas classique.

Lorsque $p = 1$, on donne la version suivante du théorème maximal 2.2.

Théorème 2.6. *Il existe une constante numérique C telle que pour tout $f \in L^1(\mu_\kappa^W)$ et pour tout $\lambda > 0$*

$$\mu_\kappa^W\left(\Big\{x \in \mathbb{R}^d : M_\kappa^W f(x) > \lambda\Big\}\right) \leqslant C\frac{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}{\lambda}\|f\|_{W,\kappa,1}.$$

Pour démontrer ce théorème, nous allons avoir besoin de deux lemmes. Le premier est purement calculatoire. Avant de l'énoncer et de le prouver, nous introduisons des notations commodes.

Notations 2.7. On désignera par $a(h_W, S^{d-1})$ la masse de la sphère S^{d-1} pour la mesure $h_{W,\kappa}^2\,\mathrm{d}\omega$ (avec ω la mesure de surface sur S^{d-1}), c'est-à-dire

$$a(h_W, S^{d-1}) = \int_{S^{d-1}} h_{W,\kappa}^2(x)\,\mathrm{d}\omega(x).$$

On utilisera également la notation suivante

$$q_t^{W,\kappa}{}_{|S^{d-1}} = \frac{c_\kappa^W}{(2t)^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4t}}.$$

On en vient dorénavant à l'énoncé du premier lemme.

Lemme 2.8. *On a les égalités suivantes*

$$\begin{aligned}
\mu_\kappa^W(B_1) &= \frac{a(h_W, S^{d-1})}{d+2\gamma_{\mathcal{R}}};\\
(c_\kappa^W)^{-1} &= 2^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-1}\Gamma\Big(\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}\Big)a(h_W, S^{d-1});\\
\int_0^{+\infty} q_t^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}}\,\mathrm{d}t &= \frac{c_\kappa^W 2^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}}}{4}\Gamma\Big(\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-1\Big).
\end{aligned}$$

De plus, si on suppose $d+2\gamma_{\mathcal{R}} \geqslant 8$, alors on a l'inégalité suivante

$$\int_{\frac{1}{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}}^{+\infty} q_t^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{c_\kappa^W 2^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}}}{4}\Big(\frac{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}{4}\Big)^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-1}\mathrm{e}^{-\frac{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}{4}}.$$

Démonstration. Les trois premières égalités sont évidentes par passage en coordonnées polaires et changement de variable. Prouvons seulement l'inégalité. Par définition, on a

$$\int_{\frac{1}{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}}^{+\infty} q_t^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}}\,\mathrm{d}t = c_\kappa^W\int_{\frac{1}{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}}^{+\infty}\frac{1}{(2t)^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{4t}}\,\mathrm{d}t,$$

ce qui donne après changement de variable

$$\int_{\frac{1}{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}}^{+\infty} q_t^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}}\,\mathrm{d}t = \frac{c_\kappa^W 2^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}}}{4}\int_0^{\frac{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}{4}} t^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour $d+2\gamma_{\mathcal{R}} \geqslant 8$ et pour tout $t\in[0,\frac{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}{4}]$ on a

$$t^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-2}\mathrm{e}^{-t} \leqslant \Big(\frac{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}{4}\Big)^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-2}\mathrm{e}^{-\frac{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}{4}}.$$

Par conséquent

$$\int_0^{\frac{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}{4}} t^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \leqslant \Big(\frac{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}{4}\Big)^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-1}\mathrm{e}^{-\frac{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}{4}},$$

et l'inégalité est ainsi prouvée. □

Le second lemme va quant à lui permettre de réduire l'inégalité du théorème 2.6 à une inégalité plus simple.

Lemme 2.9. *Supposons qu'il existe un $t_0>0$ tel que*

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_1)} \leqslant \frac{C(d,\kappa)}{t_0}\int_0^{t_0} q_t^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}}\,\mathrm{d}t.$$

On a alors pour tout $f\in L^1(\mu_\kappa^W)$ et pour tout $\lambda>0$ l'inégalité faible suivante

$$\mu_\kappa^W\Big(\Big\{x\in\mathbb{R}^d : M_\kappa^W f(x)>\lambda\Big\}\Big) \leqslant 4\frac{C(d,\kappa)}{\lambda}\|f\|_{W,\kappa,1},$$

où $C(d,\kappa)$ est la même constante dans l'hypothèse et dans la conclusion du lemme.

Démonstration. Remarquons que l'on peut considérer f positive. Supposons qu'il existe un $t_0 > 0$ tel que

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_1)} \leqslant \frac{C(d,\kappa)}{t_0} \int_0^{t_0} q_t^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}} \,\mathrm{d}t.$$

On peut donc dire que pour n suffisamment grand

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_1)} \leqslant \frac{2C(d,\kappa)}{t_0} \int_{\frac{1}{n}}^{t_0} q_t^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}} \,\mathrm{d}t. \tag{2.1}$$

Alors on peut affirmer que pour tout $y \in \mathbb{R}^d$

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_1)} \chi_{B_1}(y) \leqslant \frac{2C(d,\kappa)}{t_0} \int_{\frac{1}{n}}^{t_0} q_t^{W,\kappa}(y) \,\mathrm{d}t. \tag{2.2}$$

En effet, si $\|y\| > 1$, l'inégalité (2.2) est évidente puisque $\chi_{B_1}(y) = 0$ et que le membre de droite est positif. Dans le cas où $\|y\| \leqslant 1$, il suffit d'utiliser l'inégalité (2.1) et le fait que $q_t^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}} \leqslant q_t^{W,\kappa}(y)$.
Par conséquent, on peut écrire pour tout $r > 0$ et tout $y \in \mathbb{R}^d$ que

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_r)} \chi_{B_r}(y) = \frac{1}{r^{d+2\gamma_\mathcal{R}} \mu_\kappa^W(B_1)} \chi_{B_1}\left(\frac{y}{r}\right) \leqslant \frac{2C(d,\kappa)}{r^{d+2\gamma_\mathcal{R}} t_0} \int_{\frac{1}{n}}^{t_0} q_t^{W,\kappa}\left(\frac{y}{r}\right) \mathrm{d}t.$$

Après changement de variable on obtient

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_r)} \chi_{B_r}(y) \leqslant \frac{2C(d,\kappa)}{r^2 t_0} \int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2 t_0} q_t^{W,\kappa}(y) \,\mathrm{d}t.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Par positivité de la translation de Dunkl sur l'ensemble des fonctions qui sont bornées, radiales, positives et éléments de $L^1(\mu_\kappa^W)$, on a

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_r)} \tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(-y) \leqslant \frac{2C(d,\kappa)}{r^2 t_0} \tau_x^{W,\kappa}\left(\int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2 t_0} q_t^{W,\kappa}(\cdot) \,\mathrm{d}t\right)(-y).$$

On admet provisoirement que

$$\tau_x^{W,\kappa}\left(\int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2 t_0} q_t^{W,\kappa}(\cdot) \,\mathrm{d}t\right)(-y) = \int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2 t_0} \tau_x^{W,\kappa}(q_t^{W,\kappa})(-y) \,\mathrm{d}t. \tag{2.3}$$

On peut alors écrire que

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_r)} \tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(-y) \leqslant \frac{2C(d,\kappa)}{r^2 t_0} \int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2 t_0} \tau_x^{W,\kappa}(q_t^{W,\kappa})(-y) \,\mathrm{d}t.$$

En multipliant par $f(y)$ puis en intégrant sur $\mathbb{R}^d$ on aboutit à

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_r)} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(-y) \,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(y) \leqslant \frac{2C(d,\kappa)}{r^2 t_0} \int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2 t_0} H_t^{W,\kappa} f(x) \,\mathrm{d}t$$

puis à

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_r)} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(-y) \,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(y) \leqslant \frac{2C(d,\kappa)}{r^2 t_0} \int_0^{r^2 t_0} H_t^{W,\kappa} f(x) \,\mathrm{d}t.$$

On en déduit bien évidemment que

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_r)}\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(-y)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(y) \leqslant 2C(d,\kappa)\sup_{s>0}\left(\frac{1}{s}\int_0^s H_t^{W,\kappa}f(x)\,\mathrm{d}t\right),$$

et donc

$$M_\kappa^W f(x) \leqslant 2C(d,\kappa)\sup_{s>0}\left(\frac{1}{s}\int_0^s H_t^{W,\kappa}f(x)\,\mathrm{d}t\right).$$

Puisque $\{H_t^{W,\kappa}\}_{t\geqslant 0}$ est un semi-groupe contractant sur $L^p(\mu_\kappa^W)$, la première assertion du théorème ergodique de Hopf-Dunford-Schwartz (théorème 2.5) permet de conclure. Il nous reste à prouver l'égalité (2.3).

On a bien évidemment $\int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2 t_0} q_t^{W,\kappa}(\cdot)\,\mathrm{d}t \in L^1(\mu_\kappa^W)$ (par utilisation de la proposition 1.34) donc d'après le premier point du théorème 1.26

$$\tau_x^{W,\kappa}\left(\int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2 t_0} q_t^{W,\kappa}(\cdot)\,\mathrm{d}t\right) \in L^1(\mu_\kappa^W).$$

Puisque l'on a d'une part

$$\mathcal{F}_\kappa^W\left(\int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2 t_0} q_t^{W,\kappa}(\cdot)\,\mathrm{d}t\right) = \int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2 t_0} \mathrm{e}^{-t\|\cdot\|^2}\,\mathrm{d}t \in L^1(\mu_\kappa^W),$$

et d'autre part

$$\mathcal{F}_\kappa^W\left(\tau_x^{W,\kappa}\left(\int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2 t_0} q_t^{W,\kappa}(\cdot)\,\mathrm{d}t\right)\right) = E_\kappa^W(ix,\cdot)\,\mathcal{F}_\kappa^W\left(\int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2 t_0} q_t^{W,\kappa}(\cdot)\,\mathrm{d}t\right),$$

alors

$$\mathcal{F}_\kappa^W\left(\tau_x^{W,\kappa}\left(\int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2 t_0} q_t^{W,\kappa}(\cdot)\,\mathrm{d}t\right)\right) \in L^1(\mu_\kappa^W).$$

Par conséquent, $\tau_x^{W,\kappa}\left(\int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2 t_0} q_t^{W,\kappa}(\cdot)\,\mathrm{d}t\right) \in \mathscr{A}_\kappa^W(\mathbb{R}^d)$ et d'après la formule d'inversion

$$\tau_x^{W,\kappa}\left(\int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2 t_0} q_t^{W,\kappa}(\cdot)\,\mathrm{d}t\right)(y) = c_\kappa^W\int_{\mathbb{R}^d} E_\kappa^W(ix,z)E_\kappa^W(iy,z)\int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2 t_0} \mathrm{e}^{-t\|z\|^2}\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(z),$$

soit après interversion

$$\tau_x^{W,\kappa}\left(\int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2 t_0} q_t^{W,\kappa}(\cdot)\,\mathrm{d}t\right)(y) = \int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2 t_0}\left(c_\kappa^W\int_{\mathbb{R}^d} E_\kappa^W(ix,z)E_\kappa^W(iy,z)\mathrm{e}^{-t\|z\|^2}\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(z)\right)\mathrm{d}t.$$

En utilisant à nouveau la formule d'inversion on aboutit à

$$\tau_x^{W,\kappa}\left(\int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2 t_0} q_t^{W,\kappa}(\cdot)\,\mathrm{d}t\right)(y) = \int_{\frac{r^2}{n}}^{r^2 t_0} \tau_x^{W,\kappa}(q_t^{W,\kappa})(y)\,\mathrm{d}t.$$

L'égalité (2.3) est donc vraie, et le lemme est entièrement démontré. $\square$

Nous pouvons désormais prouver le théorème 2.6.

Démonstration. D'après le lemme 2.9, il nous suffit de trouver un t_0 de telle sorte que

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_1)} \leqslant C\frac{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}{t_0}\int_0^{t_0} q_t^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}}\,\mathrm{d}t. \tag{2.4}$$

Prenons $t_0 = \frac{1}{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}$. On sait d'après l'inégalité du lemme 2.8 que l'on a dans le cas où $d+2\gamma_{\mathcal{R}} \geqslant 8$

$$\int_{\frac{1}{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}}^{+\infty} q_t^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{c_\kappa^W 2^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}}}{4}\Big(\frac{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}{4}\Big)^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-1}\mathrm{e}^{-\frac{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}{4}}.$$

D'une part, la formule de Stirling permet de montrer que

$$\Big(\frac{n}{4}\Big)^{\frac{n}{2}-1}\mathrm{e}^{-\frac{n}{4}} = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}\Big(\Gamma\Big(\frac{n}{2}-1\Big)\Big),$$

et, d'autre part, on sait d'après la troisième égalité du lemme 2.8 que

$$\int_0^{+\infty} q_t^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}}\,\mathrm{d}t = \frac{c_\kappa^W 2^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}}}{4}\Gamma\Big(\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-1\Big).$$

Par conséquent, on peut conclure qu'il existe une constante numérique C telle que

$$c_\kappa^W 2^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}}\Gamma\Big(\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-1\Big) \leqslant C\int_0^{\frac{1}{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}} q_t^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}}\,\mathrm{d}t. \tag{2.5}$$

En utilisant les deux premières égalités du lemme 2.8, on peut écrire

$$c_\kappa^W 2^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}}\Gamma\Big(\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-1\Big) = \frac{2\,\Gamma\big(\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-1\big)}{\mu_\kappa^W(B_1)(d+2\gamma_{\mathcal{R}})\Gamma\big(\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}\big)},$$

et, en injectant cette nouvelle égalité dans (2.5) on aboutit alors à

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_1)} \leqslant C\frac{(d+2\gamma_{\mathcal{R}})\,\Gamma\big(\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}\big)}{\Gamma\big(\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-1\big)}\int_0^{\frac{1}{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}} q_t^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}}\,\mathrm{d}t,$$

ce qui implique finalement que

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_1)} \leqslant C(d+2\gamma_{\mathcal{R}})^2\int_0^{\frac{1}{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}} q_t^{W,\kappa}{}_{|_{S^{d-1}}}\,\mathrm{d}t.$$

On a donc prouvé (2.4) et le théorème est ainsi démontré. □

On en vient à présent au second théorème de cette sous-section. Il apporte des précisions sur la constante du théorème maximal dans le cas où $1 < p \leqslant +\infty$. Le résultat est le suivant.

Théorème 2.10. *Il existe une constante numérique C telle que pour tout p vérifiant $1 < p \leqslant +\infty$ et tout $f \in L^p(\mu_\kappa^W)$*

$$\big\|M_\kappa^W f\big\|_{W,\kappa,p} \leqslant C\Big(\frac{p}{p-1}\Big)\sqrt{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}\,\|f\|_{W,\kappa,p}.$$

Remarquons que cette inégalité est plus fine que celle que l'on obtiendrait en utilisant le théorème 2.6, le cas L^∞ et un argument d'interpolation. Pour prouver le théorème, nous allons avoir besoin du lemme suivant.

Lemme 2.11. *Supposons qu'il existe un* $t_0 > 0$ *tel que*

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_1)} \leqslant C(d,\kappa) {q_{t_0}^{W,\kappa}}_{|_{S^{d-1}}}.$$

Alors il existe une constante numérique C *telle que pour tout* p *vérifiant* $1 < p \leqslant +\infty$ *et tout* $f \in L^p(\mu_\kappa^W)$

$$\left\| M_\kappa^W f \right\|_{W,\kappa,p} \leqslant C\Big(\frac{p}{p-1}\Big) C(d,\kappa) \, \|f\|_{W,\kappa,p},$$

où $C(d,\kappa)$ *est la même constante dans l'hypothèse et dans la conclusion du lemme.*

Démonstration. La démonstration est proche de celle du lemme 2.9. On peut supposer f positive. S'il existe $t_0 > 0$ tel que

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_1)} \leqslant C(d,\kappa) {q_{t_0}^{W,\kappa}}_{|_{S^{d-1}}}, \tag{2.6}$$

alors on peut en déduire que pour tout $y \in \mathbb{R}^d$

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_1)} \chi_{B_1}(y) \leqslant C(d,\kappa) q_{t_0}^{W,\kappa}(y). \tag{2.7}$$

En effet, si $\|y\| > 1$, l'inégalité (2.7) est évidente puisque $\chi_{B_1}(y) = 0$ et que le membre de droite est positif. Dans le cas où $\|y\| \leqslant 1$, il suffit d'utiliser l'inégalité (2.6) et le fait que ${q_{t_0}^{W,\kappa}}_{|_{S^{d-1}}} \leqslant q_{t_0}^{W,\kappa}(y)$.
Par conséquent, pour tout $r > 0$, on peut écrire

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_r)} \chi_{B_r}(y) = \frac{1}{r^{d+2\gamma_\mathcal{R}} \mu_\kappa^W(B_1)} \chi_{B_1}\Big(\frac{y}{r}\Big) \leqslant \frac{C(d,\kappa)}{r^{d+2\gamma_\mathcal{R}}} q_{t_0}^{W,\kappa}\Big(\frac{y}{r}\Big) = C(d,\kappa) q_{r^2 t_0}^{W,\kappa}(y).$$

Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Par positivité de la translation de Dunkl sur l'ensemble des fonctions qui sont bornées, radiales, positives et éléments de $L^1(\mu_\kappa^W)$, on a

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_r)} \tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(-y)) \leqslant C(d,\kappa) \tau_x^{W,\kappa}(q_{r^2 t_0}^{W,\kappa})(-y).$$

En multipliant par $f(y)$ puis en intégrant sur $\mathbb{R}^d$ on aboutit à

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_r)} \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \tau_x^{W,\kappa}(\chi_{B_r})(-y) \, \mathrm{d}\mu_\kappa^W(y) \leqslant C(d,\kappa) H_{r^2 t_0}^{W,\kappa} f(x)$$

dont on déduit que

$$M_\kappa^W f(x) \leqslant C(d,\kappa) \sup_{t>0} H_t^{W,\kappa} f(x). \tag{2.8}$$

Or, $\{H_t^{W,\kappa}\}_{t \geqslant 0}$ est un semi-groupe symétrique de diffusion (d'après le théorème 1.39) : on sait donc d'après un résultat dû à Stein (voir [50, chapitre 4]) qu'il vérifie pour tout $1 < p \leqslant +\infty$

$$\big\|\sup_{t>0} H_t^{W,\kappa} f\big\|_{W,\kappa,p} \leqslant C\Big(\frac{p}{p-1}\Big) \big\|f\big\|_{W,\kappa,p},$$

avec C une constante numérique. On aboutit au résultat en utilisant cette inégalité dans l'inégalité ponctuelle (2.8). ∎

Venons-en maintenant à la preuve du théorème 2.10.

Démonstration. D'après le lemme précédent, il nous suffit de trouver $t_0 > 0$ tel que

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_1)} \leqslant C\sqrt{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}\, q_{t_0}^{W,\kappa}{}_{|S^{d-1}}$$

c'est-à-dire tel que

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_1)} \leqslant C c_\kappa^W \sqrt{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}\Big(\frac{1}{2t_0}\Big)^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{4t_0}}.$$

D'une part, les deux premières égalités du lemme 2.8 permettent d'affirmer que

$$\frac{1}{\mu_\kappa^W(B_1)} = c_\kappa^W (d+2\gamma_{\mathcal{R}}) 2^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}-1}\Gamma\Big(\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}\Big),$$

et d'autre part, la formule de Stirling donne l'estimation

$$2^{\frac{n}{2}}\Gamma\Big(\frac{n}{2}\Big) = \underset{n\to+\infty}{\mathrm{O}}\big(n^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}}\big).$$

On obtient finalement le résultat souhaité en choisissant $t_0 = \frac{1}{2d+4\gamma_{\mathcal{R}}}$. □

2.2 Analyse associée au groupe $\mathbb{Z}_2^d$

Nous présentons de manière détaillée le cadre dans lequel nous allons énoncer et démontrer les inégalités de Fefferman-Stein, à savoir le cas où le groupe de réflexions est $\mathbb{Z}_2^d$. Les résultats de l'analyse de Dunkl sont en grande majorité démontrés dans ce cas particulier car c'est le seul où la connaissance explicite du noyau (produit des noyaux unidimensionnels) permet d'établir une formule produit pour celui-ci. De plus, on peut déduire de cette formule produit le caractère $L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$-borné de l'opérateur de translation. C'est ce que nous allons maintenant présenter.

2.2.1 Formule produit et opérateur de translation

Rappelons pour commencer que se placer dans le cas $\mathbb{Z}_2^d$ signifie que l'on considère le système positif de racines $\mathcal{R}_+ = \{e_j : 1 \leqslant j \leqslant d\}$ (le système de racines est $\mathcal{R} = \{\pm e_j : 1 \leqslant j \leqslant d\}$). La fonction de multiplicité κ prend d valeurs notées $\kappa_1, \dots, \kappa_d$ plutôt que $\kappa(e_1), \dots, \kappa(e_d)$. On supposera dans tout le chapitre que ces valeurs sont strictement positives. Le noyau de Dunkl est donné pour tout $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{C}^d$ et tout $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{C}^d$ par

$$E_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x,y) = \prod_{j=1}^d E_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(x_j, y_j),$$

où le noyau unidimensionnel $E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}$ est donné pour x et y dans $\mathbb{C}$ par

$$E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(x,y) = j_{\kappa-\frac{1}{2}}(ixy) + \frac{xy}{2\kappa+1} j_{\kappa+\frac{1}{2}}(ixy).$$

Enfin, la mesure considérée est

$$\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x) = \Big(\prod_{j=1}^d |x_j|^{2\kappa_j}\Big)\,\mathrm{d}x = \bigotimes_{j=1}^d \mathrm{d}\mu_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(x_j).$$

Introduisons maintenant plusieurs notations qui vont s'avérer utiles dans la suite de la discussion.

Notations 2.12. 1. Pour $x, y, z \in \mathbb{R}$, on pose

$$\rho_{x,y,z} = \begin{cases} \frac{1}{2xy}(x^2 + y^2 - z^2) & \text{si } x, y \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } y = 0, \end{cases}$$

et on note alors

$$\varrho(x, y, z) = \frac{1}{2}(1 - \rho_{x,y,z} + \rho_{z,x,y} + \rho_{z,y,x}).$$

2. Pour $x, y, z > 0$, on pose

$$K_\kappa(x, y, z) = 2^{2\kappa-2}\mathscr{B}^{-1}\Big(\kappa, \frac{1}{2}\Big)\frac{\Delta(x, y, z)^{2\kappa-2}}{(xyz)^{2\kappa-1}}\chi_{[|x-y|, x+y]}(z),$$

où $\Delta(x, y, z)$ désigne l'aire du triangle de côtés x, y, z, c'est-à-dire

$$\Delta(x, y, z) = \frac{1}{4}\sqrt{(x + y + z)(x + y - z)(x - y + z)(y + z - x)}.$$

3. Pour x, y, z réels non nuls, on note enfin

$$\mathcal{K}_\kappa(x, y, z) = K_\kappa\big(|x|, |y|, |z|\big)\,\varrho(x, y, z).$$

Signalons les symétries évidentes du noyau $\mathcal{K}_\kappa$

$$\mathcal{K}_\kappa(x, y, z) = \mathcal{K}_\kappa(y, x, z) = \mathcal{K}_\kappa(-x, z, y) = \mathcal{K}_\kappa(-z, y, -x).$$

En ayant à l'esprit ces notations, nous pouvons désormais énoncer une formule produit pour le noyau de Dunkl unidimensionnel. Ce résultat fondamental est dû à Rösler ([39]) et a été prouvé dans le cadre des hypergroupes signés de type Bessel sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2.13. *Soit $x, y \in \mathbb{R}$.*

1. *Pour tout $z \in \mathbb{R}$ on a*

$$E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(ix, z)E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(iy, z) = \int_{\mathbb{R}} E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(iz, z')\,\mathrm{d}\nu_{x,y}^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(z'),$$

où la mesure $\nu_{x,y}^{\mathbb{Z}_2,\kappa}$ est donnée par

$$\mathrm{d}\nu_{x,y}^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(z') = \begin{cases} \mathcal{K}_\kappa(x, y, z')\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z') & si\ x, y \neq 0 \\ \mathrm{d}\delta_x(z') & si\ y = 0 \\ \mathrm{d}\delta_y(z') & si\ x = 0. \end{cases}$$

2. *La mesure $\nu_{x,y}^{\mathbb{Z}_2,\kappa}$ satisfait*
   (a) $\operatorname{supp}\nu_{x,y}^{\mathbb{Z}_2,\kappa} = \Big[-|x| - |y|, -\big||x| - |y|\big|\Big] \bigcup \Big[\big||x| - |y|\big|, |x| + |y|\Big]$ *pour $x, y \neq 0$.*
   (b) $\nu_{x,y}^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\mathbb{R}) = 1$ *et* $\|\nu_{x,y}^{\mathbb{Z}_2,\kappa}\| = \int_{\mathbb{R}} |\mathrm{d}\nu_{x,y}^{\mathbb{Z}_2,\kappa}| \leqslant 4$, *pour $x, y \in \mathbb{R}$.*

Remarque 2.14. Il est important de noter que les mesures $\nu_{x,y}^{\mathbb{Z}_2,\kappa}$ ne sont pas positives. En effet, pour x et y non nuls et tels que $x \neq y$, alors $\varrho(x, y, y - x) = -1$. Par conséquent, on peut trouver un voisinage de $y - x$ dans $\operatorname{supp}\nu_{x,y}^{\mathbb{Z}_2,\kappa}$ pour lequel la fonction $z \mapsto \mathcal{K}_\kappa(x, y, z)$ est strictement négative.

L'argument principal intervenant dans la preuve du théorème précédent est la formule produit suivante pour les fonctions de Bessel normalisées (pour $\alpha > -\frac{1}{2}$ et $x, y > 0$)

$$j_\alpha(x)j_\alpha(y) = \mathscr{B}^{-1}\Big(\alpha, \frac{1}{2}\Big) \int_0^\pi j_\alpha\Big(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\theta}\Big)\sin^{2\alpha}\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

Du fait que le noyau de Dunkl associé à $\mathbb{Z}_2^d$ est le produit des noyaux unidimensionnels, on déduit trivialement du théorème 2.13 le résultat suivant.

Théorème 2.15. *Soit $x, y, z \in \mathbb{R}^d$. On a alors*

$$E_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(ix, z)E_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(iy, z) = \int_{\mathbb{R}^d} E_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(iz, z') \bigotimes_{j=1}^d \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z'_j). \tag{2.9}$$

Comme conséquence importante de cette formule produit, on a une représentation intégrale de l'opérateur de translation généralisé sur l'espace de Schwartz qui va permettre d'étendre à tous les $L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$ la translation de Dunkl en un opérateur borné (cela illustre d'ailleurs le fait que formule produit et caractère borné de l'opérateur de translation sont intimement liés).

Proposition 2.16. *Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ on a la représentation intégrale suivante*

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \bigotimes_{j=1}^d \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j), \quad y \in \mathbb{R}^d. \tag{2.10}$$

Démonstration. En appliquant la formule d'inversion du théorème 1.21 (ce qui est licite puisque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$), on peut écrire

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(f)(y) = c_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} \int_{\mathbb{R}^d} E_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(ix, z)E_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(iy, z)\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(f)(z)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(z).$$

En utilisant la formule produit (2.9) et après interversion, on aboutit à

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \Big(c_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} \int_{\mathbb{R}^d} E_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(iz, z')\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(f)(z)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(z) \Big) \bigotimes_{j=1}^d \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z'_j).$$

On obtient le résultat escompté en utilisant de nouveau la formule d'inversion. ☐

Remarque 2.17. Dans le cas où $d = 1$, signalons que la formule (2.10) coïncide à changement de variable près avec la formule (1.5).

La proposition 2.16 implique naturellement le théorème suivant.

Théorème 2.18. *Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et soit p vérifiant $1 \leqslant p \leqslant +\infty$. La translation de Dunkl $\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}$ s'étend à $L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$ en un opérateur borné qui vérifie*

$$\|\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa} f\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p} \leqslant 4^d \|f\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p}.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et soit $f \in L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$. Nous allons montrer que

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \bigotimes_{j=1}^d \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j) \in L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}).$$

Les cas $p=1$ et $p=+\infty$ étant évidents, on suppose $1<p<+\infty$. Soit alors q tel que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. En écrivant

$$\Big|f(z)\prod_{j=1}^{d}\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_j,y_j,z_j)\Big| = |f(z)|\prod_{j=1}^{d}|\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_j,y_j,z_j)|^{\frac{1}{p}}\prod_{j=1}^{d}|\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_j,y_j,z_j)|^{\frac{1}{q}},$$

on obtient après utilisation de l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}&\Big|\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\bigotimes_{j=1}^{d}\mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j)\Big|^p\\ &\leqslant\Big(\int_{\mathbb{R}^d}|f(z)|^p\prod_{j=1}^{d}|\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_j,y_j,z_j)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(z)\Big)\Big(\int_{\mathbb{R}^d}\prod_{j=1}^{d}|\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_j,y_j,z_j)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(z)\Big)^{\frac{p}{q}}.\end{aligned}$$

D'après le théorème 2.13 (point *2.(b)*), on en déduit que

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\bigotimes_{j=1}^{d}\mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j)\Big|^p\leqslant 4^{\frac{dp}{q}}\int_{\mathbb{R}^d}|f(z)|^p\prod_{j=1}^{d}|\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_j,y_j,z_j)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(z).$$

En intégrant et après interversion licite, on aboutit à

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d}\Big|\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\bigotimes_{j=1}^{d}\mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j)\Big|^p\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y)\\ &\qquad\leqslant 4^{\frac{dp}{q}}\int_{\mathbb{R}^d}|f(z)|^p\Big(\int_{\mathbb{R}^d}\prod_{j=1}^{d}|\mathcal{K}_{\kappa_j}(x_j,y_j,z_j)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y)\Big)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(z).\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de symétrie de chaque $\mathcal{K}_{\kappa_j}$ et en utilisant à nouveau le théorème 2.13 (point *2.(b)*), on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^d}\Big|\int_{\mathbb{R}^d} f(z)\bigotimes_{j=1}^{d}\mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j)\Big|^p\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y)\leqslant 4^{\frac{dp}{q}+d}\int_{\mathbb{R}^d}|f(z)|^p\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(z),$$

et le théorème est prouvé. □

Remarque 2.19. Tout comme pour la dimension un, Amri, Anker et Sifi donnent dans [3] une meilleure estimation de la borne, à savoir

$$\|\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}f\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p}\leqslant\left(\sqrt{2}\,\frac{\Gamma\big(\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}+\frac{1}{2}\big)^2}{\Gamma\big(\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}+\frac{1}{4}\big)\Gamma\big(\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}+\frac{3}{4}\big)}\right)^{2d|\frac{1}{p}-\frac{1}{2}|}\|f\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p}.$$

On peut montrer classiquement à partir du théorème 2.18 les inégalités de Young suivantes pour la convolution de Dunkl (voir [63] pour la preuve standard).

Corollaire 2.20. *Soit $p,q,r\in[1,+\infty]$ vérifiant*

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1+\frac{1}{r}.$$

Alors l'application $(f,g)\mapsto f \underset{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}{*} g$ *définie initialement sur* $L^2(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})\times L^2(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$ *s'étend en une application continue de* $L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})\times L^q(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$ *dans* $L^r(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$ *et on a*

$$\|f \underset{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}{*} g\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,r} \leqslant c_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} 4^d \|f\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p}\|g\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,q}.$$

Nous avons donc dans le cas où le groupe de réflexions est $\mathbb{Z}_2^d$ des outils puissants pour faire de l'analyse.

Nous allons montrer dans la sous-section suivante une estimation fine de la translatée de Dunkl de la fonction caractéristique d'une boule euclidienne de rayon r centrée en l'origine. Cette estimation va être un argument important dans la démonstration des inégalités de Fefferman-Stein.

2.2.2 Estimation de la translatée de Dunkl de χ_{B_r}

Avant d'énoncer le résultat fondamental de cette sous-section, nous avons besoin d'introduire la notation suivante.

Notation 2.21. Pour $x\in\mathbb{R}$ et $r>0$, on désignera par $I(x,r)$ l'intervalle suivant

$$I(x,r)=]\max\{0;|x|-r\},|x|+r[.$$

Ayant fixé cette notation, nous pouvons maintenant présenter l'estimation fine suivante.

Théorème 2.22. *Pour tout* $x\in\mathbb{R}^d$*, tout* $y\in\mathbb{R}^d$ *et tout* $r>0$ *on a*

$$|\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(y)| \leqslant C\prod_{j=1}^d \frac{\mu_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(]-r,r[)}{\mu_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(I(x_j,r))},$$

où $C=C(d,\kappa)$ *est une constante indépendante de* x,y,r.

Pour prouver ce théorème, nous allons avoir besoin du résultat unidimensionnel suivant.

Théorème 2.23. *Pour tout* $x\in\mathbb{R}$*, tout* $y\in\mathbb{R}$ *et tout* $r>0$ *on a*

$$|\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[})(y)| \leqslant C\frac{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(]-r,r[)}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x,r))},$$

où $C=C(\kappa)$ *est une constante indépendante de* x,y,r.

Ce théorème, dû à Abdelkefi et Sifi ([1]), a été démontré en s'appuyant sur des résultats analogues dans le cadre des hypergroupes unidimensionnels de Chébli-Trimèche (voir l'article de Bloom et Xu [8]). Pour plus de clarté, nous en donnons ici une preuve dégagée de tout contexte d'hypergroupe. Nous allons avoir besoin de deux lemmes. Le premier est une estimation du noyau de Dunkl en dimension un.

Lemme 2.24. *Soit* $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ *et* $y\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$*. On a l'estimation suivante*

$$|E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(ix,y)| \leqslant \frac{C}{|x|^\kappa|y|^\kappa},$$

où $C=C(\kappa)$ *est indépendante de* x *et* y.

Démonstration. Rappelons la formule explicite du noyau

$$E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(ix,y) = j_{\kappa-\frac{1}{2}}(xy) + \frac{ixy}{2\kappa+1} j_{\kappa+\frac{1}{2}}(xy),$$

égalité que l'on peut écrire sous la forme

$$E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(ix,y) = 2^{\kappa-\frac{1}{2}}\Gamma\Big(\kappa+\frac{1}{2}\Big)\frac{(xy)^{\frac{1}{2}}J_{\kappa-\frac{1}{2}}(xy)}{(xy)^\kappa} + \frac{ixy}{2\kappa+1}2^{\kappa+\frac{1}{2}}\Gamma\Big(\kappa+\frac{3}{2}\Big)\frac{(xy)^{\frac{1}{2}}J_{\kappa+\frac{1}{2}}(xy)}{(xy)^{\kappa+1}}.$$

Or, on sait que pour tout $\alpha > -\frac{1}{2}$ (voir [55, page 167])

$$\sup_{x\geqslant 0}\Big(x^{\frac{1}{2}}|J_\alpha(x)|\Big) < +\infty.$$

En appliquant cet argument, on obtient le résultat. □

Le second lemme donne la transformée de Dunkl de la fonction caractéristique d'une boule euclidienne de rayon r centrée en l'origine. Nous donnons pour ce résultat connu (voir par exemple [56]) une nouvelle preuve. Signalons que nous énonçons le résultat en dimension d et pour un groupe de réflexions quelconque.

Lemme 2.25. *Soit $r>0$. Alors, pour tout $x\in\mathbb{R}^d$, on a*

$$\mathcal{F}_\kappa^W(\chi_{B_r})(x) = \frac{r^{d+2\gamma_\mathcal{R}}}{2^{\frac{d}{2}+\gamma_\mathcal{R}}\Gamma\big(\frac{d}{2}+\gamma_\mathcal{R}+1\big)|S^{d-1}|} j_{\frac{d}{2}+\gamma_\mathcal{R}}\big(r\|x\|\big).$$

Démonstration. Par définition de la transformée de Dunkl, on a

$$\mathcal{F}_\kappa^W(\chi_{B_r})(x) = c_\kappa^W\int_{\mathbb{R}^d} E_\kappa^W(-ix,y)\chi_{B_r}(y)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(y).$$

En revenant à l'opérateur d'entrelacement, on écrit alors

$$\mathcal{F}_\kappa^W(\chi_{B_r})(x) = c_\kappa^W\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}V_\kappa^W(\langle -ix,\cdot\rangle^n)(y)\chi_{B_r}(y)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(y),$$

ce qui donne après interversion licite

$$\mathcal{F}_\kappa^W(\chi_{B_r})(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{c_\kappa^W}{n!}\int_{\mathbb{R}^d}V_\kappa^W(\langle -ix,\cdot\rangle^n)(y)\chi_{[0,r[}(\|y\|)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(y). \tag{2.11}$$

Or, on dispose de la formule suivante (voir [23, page 196])

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d}V_\kappa^W(\langle -ix,\cdot\rangle^n)(y)\chi_{[0,r[}(\|y\|)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^W(y)\\ &\quad= \frac{\Gamma\big(\frac{d}{2}+\gamma_\mathcal{R}\big)a(h_W,S^{d-1})}{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(\gamma_\mathcal{R})|S^{d-1}|}\int_{\mathbb{R}^d}\langle -ix,y\rangle^n\bigg(\int_{\|y\|}^{+\infty}u\big(u^2-\|y\|^2\big)^{\gamma_\mathcal{R}-1}\chi_{[0,r[}(u)\,\mathrm{d}u\bigg)\,\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

Par conséquent, l'égalité (2.11) peut s'écrire après interversion comme suit

$$\mathcal{F}_\kappa^W(\chi_{B_r})(x) = \frac{c_\kappa^W\Gamma\big(\frac{d}{2}+\gamma_\mathcal{R}\big)a(h_W,S^{d-1})}{\pi^{\frac{d}{2}}\Gamma(\gamma_\mathcal{R})|S^{d-1}|}\int_{\|y\|\leqslant r}\mathrm{e}^{\langle -ix,y\rangle}\bigg(\int_{\|y\|}^{r}u\big(u^2-\|y\|^2\big)^{\gamma_\mathcal{R}-1}\,\mathrm{d}u\bigg)\,\mathrm{d}y.$$

Après intégration on obtient

$$\mathcal{F}_\kappa^W(\chi_{B_r})(x) = \frac{c_\kappa^W \Gamma\left(\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}\right) a(h_W, S^{d-1})}{2\pi^{\frac{d}{2}} \gamma_{\mathcal{R}} \Gamma(\gamma_{\mathcal{R}}) |S^{d-1}|} \int_{\|y\| \leqslant r} \mathrm{e}^{\langle -ix,y\rangle} (r^2 - \|y\|^2)^{\gamma_{\mathcal{R}}} \,\mathrm{d}y.$$

On utilise la deuxième égalité du lemme 2.8 afin de simplifier la constante et on utilise un changement de variable pour aboutir à

$$\mathcal{F}_\kappa^W(\chi_{B_r})(x) = \frac{r^{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}}{2^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}} \Gamma\left(\gamma_{\mathcal{R}}+1\right) \pi^{\frac{d}{2}} |S^{d-1}|} \int_{\|y\| \leqslant 1} \mathrm{e}^{\langle -irx,y\rangle} (1 - \|y\|^2)^{\gamma_{\mathcal{R}}} \,\mathrm{d}y.$$

En utilisant maintenant la formule donnant la transformée de Fourier de la fonction $t \mapsto (1-|t|^2)^{\gamma_{\mathcal{R}}} \chi_{[0,1]}(|t|)$ (voir par exemple [52, page 171]) on en déduit que

$$\mathcal{F}_\kappa^W(\chi_{B_r})(x) = \frac{r^{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}}{2^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}} \Gamma\left(\gamma_{\mathcal{R}}+1\right) \pi^{\frac{d}{2}} |S^{d-1}|} \left(2^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}} \Gamma\left(\gamma_{\mathcal{R}}+1\right) \pi^{\frac{d}{2}} (r\|x\|)^{-\frac{d}{2}-\gamma_{\mathcal{R}}} J_{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}}(r\|x\|)\right),$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{F}_\kappa^W(\chi_{B_r})(x) = \frac{r^{d+2\gamma_{\mathcal{R}}}}{2^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}} \Gamma\left(\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}+1\right) |S^{d-1}|} j_{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathcal{R}}}(r\|x\|).$$

Le lemme est démontré. □

Nous sommes désormais en mesure de donner la preuve de l'inégalité du théorème 2.23.

Démonstration. Commençons par prouver qu'il existe une constante C ne dépendant que de κ telle que pour tout x réel non nul, tout y réel et tout r réel strictement positif

$$|\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[})(y)| \leqslant C \frac{r^{2\kappa}}{|x|^{2\kappa}}. \tag{2.12}$$

Supposons dans un premier temps que $0 < |x| < 2r$. Alors, en utilisant le fait que la translation de Dunkl $\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}$ est $L^\infty(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2})$-bornée, on a pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$|\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[})(y)| \leqslant \|\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[})\|_{\mathbb{Z}_2,\kappa,\infty} \leqslant 4,$$

et l'inégalité (2.12) s'en déduit aisément.

Supposons maintenant que $|x| \geqslant 2r$. La représentation intégrale

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[})(y) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{]-r,r[}(z) \,\mathrm{d}\nu_{x,y}^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(z)$$

et la condition de support *2.(a)* du théorème 2.13 impliquent que l'on peut se limiter au cas où $\big||x|-|y|\big| \leqslant r$ car, sinon, l'inégalité (2.12) est évidente puisque $\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[})(y) = 0$. Soit $t > 0$ et soit $q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa}$ la gaussienne généralisée. Comme on a

$$\chi_{]-r,r[} \underset{\mathbb{Z}_2,\kappa}{*} q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa} \in L^1(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}),$$

le caractère $L^1(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2})$-borné de la translation de Dunkl implique que

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[} \underset{\mathbb{Z}_2,\kappa}{*} q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa}) \in L^1(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}).$$

De plus, l'inégalité de Hölder et le théorème de Plancherel donnent

$$\big\|\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\chi_{]-r,r[})\,\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa})\big\|_{\mathbb{Z}_2,\kappa,1} \leqslant \big\|\chi_{]-r,r[}\big\|_{\mathbb{Z}_2,\kappa,2}\big\|q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa}\big\|_{\mathbb{Z}_2,\kappa,2},$$

inégalité de laquelle on déduit d'une part que

$$\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\chi_{]-r,r[} \underset{\mathbb{Z}_2,\kappa}{*} q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa}) = \mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\chi_{]-r,r[})\,\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa}) \in L^1(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}).$$

D'autre part, puisque l'on a par définition

$$\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\big(\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[} \underset{\mathbb{Z}_2,\kappa}{*} q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa})\big)(\cdot) = E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(ix,\cdot)\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\chi_{]-r,r[} \underset{\mathbb{Z}_2,\kappa}{*} q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa})(\cdot),$$

alors $\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\big(\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[} \underset{\mathbb{Z}_2,\kappa}{*} q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa})\big) \in L^1(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2})$. On peut donc affirmer que

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[} \underset{\mathbb{Z}_2,\kappa}{*} q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa}) \in \mathscr{A}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{R}),$$

et la formule d'inversion permet alors d'écrire

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[} \underset{\mathbb{Z}_2,\kappa}{*} q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa})(y) = c_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\int_{\mathbb{R}} E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(ix,z)E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(iy,z)\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\chi_{]-r,r[})(z)\mathrm{e}^{-tz^2}\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z).$$

Notons

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[} \underset{\mathbb{Z}_2,\kappa}{*} q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa})(y) = c_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\Big(I_1(x,y,r,t) + I_2(x,y,r,t)\Big), \tag{2.13}$$

avec

$$\begin{aligned} I_1(x,y,r,t) &= \int_{|z|\leqslant\frac{1}{r}} E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(ix,z)E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(iy,z)\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\chi_{]-r,r[})(z)\mathrm{e}^{-tz^2}\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z)\\ I_2(x,y,r,t) &= \int_{|z|>\frac{1}{r}} E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(ix,z)E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(iy,z)\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\chi_{]-r,r[})(z)\mathrm{e}^{-tz^2}\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z). \end{aligned}$$

Commençons par étudier $I_1(x,y,r,t)$. On a par définition de la transformée de Dunkl

$$\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\chi_{]-r,r[})(z) = c_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\int_{-r}^{r} E_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(-iz,\xi)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\xi),$$

et puisque le noyau de Dunkl est borné par 1 on en déduit facilement que

$$|\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\chi_{]-r,r[})(z)| \leqslant Cr^{2\kappa+1}.$$

En utilisant à la fois l'inégalité précédente et l'inégalité du lemme 2.24, on obtient

$$|I_1(x,y,r,t)| \leqslant C\int_{|z|\leqslant\frac{1}{r}} \frac{r^{2\kappa+1}}{|x|^\kappa|y|^\kappa|z|^{2\kappa}}\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z).$$

Puisque

$$\int_{|z|\leqslant\frac{1}{r}} \frac{1}{|z|^{2\kappa}}\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z) = \int_{|z|\leqslant\frac{1}{r}} \mathrm{d}z,$$

on aboutit alors à

$$|I_1(x,y,r,t)| \leqslant C\frac{r^{2\kappa}}{|x|^\kappa|y|^\kappa}.$$

En remarquant l'implication

$$\begin{cases} |x| \geqslant 2r\\ \big||x|-|y|\big| \leqslant r \end{cases} \Longrightarrow\ 2|y| \geqslant |x|,$$

on en déduit finalement l'estimation suivante

$$|I_1(x,y,r,t)| \leqslant C\frac{r^{2\kappa}}{|x|^{2\kappa}}. \tag{2.14}$$

Étudions à présent $I_2(x,y,r,t)$. En utilisant le résultat du lemme 2.25, on a

$$\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\chi_{]-r,r[})(z) = Cr^{2\kappa+1} j_{\kappa+\frac{1}{2}}(r|z|) = \frac{Cr^\kappa}{|z|^{\kappa+1}}\Big((r|z|)^{\frac{1}{2}} J_{\kappa+\frac{1}{2}}(r|z|)\Big),$$

égalité de laquelle on déduit que

$$|\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\chi_{]-r,r[})(z)| \leqslant \frac{Cr^\kappa}{|z|^{\kappa+1}},$$

où l'on a utilisé le fait que $\sup_{x\geqslant 0}\big(x^{\frac{1}{2}}|J_\alpha(x)|\big) < +\infty$ tout comme dans la preuve du lemme 2.24. Par conséquent, on peut écrire

$$|I_2(x,y,r,t)| \leqslant C\int_{|z|>\frac{1}{r}} \frac{r^\kappa}{|z|^{\kappa+1}|x|^\kappa|y|^\kappa|z|^{2\kappa}}\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z).$$

Après intégration et en considérant à nouveau le fait que $2|y| \geqslant |x|$, on aboutit à

$$|I_2(x,y,r,t)| \leqslant C\frac{r^{2\kappa}}{|x|^{2\kappa}}. \tag{2.15}$$

En utilisant à la fois (2.14) et (2.15) dans l'égalité (2.13), on obtient

$$|\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[} \underset{\mathbb{Z}_2,\kappa}{*} q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa})(y)| \leqslant C\frac{r^{2\kappa}}{|x|^{2\kappa}}. \tag{2.16}$$

Pour montrer (2.12), nous allons bien sûr faire tendre t vers 0 dans l'inégalité (2.16). Observons que par utilisation du théorème de Plancherel on a l'égalité suivante

$$\big\|\chi_{]-r,r[} \underset{\mathbb{Z}_2,\kappa}{*} q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa} - \chi_{]-r,r[}\big\|_{\mathbb{Z}_2,\kappa,2}^2 = \int_{\mathbb{R}} \big|\mathcal{F}_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\chi_{]-r,r[})(\xi)\big|^2\big(1-\mathrm{e}^{-t\xi^2}\big)^2\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(\xi).$$

On a donc

$$\chi_{]-r,r[} \underset{\mathbb{Z}_2,\kappa}{*} q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa} \to \chi_{]-r,r[}$$

dans $L^2(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2})$ lorsque $t \to 0$. Puisque $\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}$ est $L^2(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2})$-borné on a aussi

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[} \underset{\mathbb{Z}_2,\kappa}{*} q_t^{\mathbb{Z}_2,\kappa}) \to \tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[})$$

dans $L^2(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2})$ lorsque $t \to 0$. En passant à une sous-suite si nécessaire, on peut de ce fait supposer que la convergence se fait presque partout. En passant à la limite lorsque t tend vers 0 dans (2.16), on aboutit à

$$|\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[})(y)| \leqslant C\frac{r^{2\kappa}}{|x|^{2\kappa}},$$

et la démonstration de l'inégalité (2.12) est terminée.

Venons-en maintenant à la preuve elle-même du théorème.
On peut supposer que $x \neq 0$ car, dans le cas contraire, l'inégalité à démontrer est évidente puisque pour tout y réel

$$\tau_0^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[})(y) = \chi_{]-r,r[}(y).$$

Considérons pour commencer le cas où $|x| \leqslant r$. On a alors

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x,r)) = \int_0^{|x|+r} \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z) \leqslant \int_0^{2r} \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z) \leqslant Cr^{2\kappa+1},$$

c'est-à-dire

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x,r)) \leqslant C\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(]-r,r[).$$

Le résultat découle alors du fait que

$$|\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[})(y)| \leqslant \|\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-r,r[})\|_{\mathbb{Z}_2,\kappa,\infty} \leqslant 4.$$

Considérons maintenant le cas où $|x| > r$. On a dans cette situation

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x,r)) = \int_{|x|-r}^{|x|+r} \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z) \leqslant 2r(|x|+r)^{2\kappa} \leqslant Cr^{2\kappa+1}\left(\frac{|x|^{2\kappa}}{r^{2\kappa}}\right),$$

soit

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x,r)) \leqslant C\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(]-r,r[)\left(\frac{|x|^{2\kappa}}{r^{2\kappa}}\right).$$

On obtient alors le résultat escompté en utilisant l'inégalité (2.12). Le théorème est entièrement démontré. □

Nous allons pouvoir donner la preuve de l'estimation fondamentale du théorème 2.22. Au préalable, on introduit une notation.

Notation 2.26. Pour x et y réels, on désignera par $\nu_{x,y}^{\mathbb{Z}_2,\kappa,+}$ la mesure donnée pour tout $z \in \mathbb{R}$ par

$$\mathrm{d}\nu_{x,y}^{\mathbb{Z}_2,\kappa,+}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}K_\kappa(|x|,|y|,|z|)(1-\rho_{x,y,z})\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z) & \text{si } x,y \neq 0 \\ \mathrm{d}\delta_x(z) & \text{si } y = 0 \\ \mathrm{d}\delta_y(z) & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Signalons que cette mesure est positive. En effet, c'est une simple conséquence de l'observation suivante

$$|z| \in \Big[\big||x|-|y|\big|, |x|+|y|\Big] \Longrightarrow |\rho_{x,y,z}| \leqslant 1.$$

Voici donc la preuve du théorème 2.22.

Démonstration. Écrivons pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, tout $y \in \mathbb{R}^d$ et tout $r > 0$

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{B_r}(z) \bigotimes_{j=1}^d \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j),$$

puis en utilisant le théorème de Fubini (justifié par le point *2.(b)* du théorème 2.13)

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(y) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{B_r}(z)\,\mathrm{d}\nu_{x_1,y_1}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_1}(z_1)\right) \bigotimes_{j=2}^d \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j). \tag{2.17}$$

Si x_1 est nul ou si y_1 est nul, on a alors bien évidemment

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(y) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{B_r}(z)\, \mathrm{d}\nu_{x_1,y_1}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_1,+}(z_1) \right) \bigotimes_{j=2}^{d} \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j).$$

Si x_1 et y_1 sont non nuls, l'égalité (2.17) s'écrit

$$\begin{aligned} &\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{B_r}(z) K_{\kappa_1}(|x_1|,|y_1|,|z_1|) \varrho(x_1,y_1,z_1)\, \mathrm{d}\mu_{\kappa_1}^{\mathbb{Z}_2}(z_1) \right) \bigotimes_{j=2}^{d} \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j). \quad (2.18) \end{aligned}$$

Or les fonctions

$$z_1 \mapsto \rho_{z_1,x_1,y_1} \quad \text{et} \quad z_1 \mapsto \rho_{z_1,y_1,x_1}$$

sont impaires. Mais puisque la fonction $z_1 \mapsto \chi_{B_r}(z)$ est paire, l'égalité (2.18) s'écrit

$$\begin{aligned} &\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \chi_{B_r}(z) K_{\kappa}(|x_1|,|y_1|,|z_1|)(1-\rho_{x_1,y_1,z_1})\, \mathrm{d}\mu_{\kappa_1}^{\mathbb{Z}_2}(z_1) \right) \bigotimes_{j=2}^{d} \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(y) = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{B_r}(z)\, \mathrm{d}\nu_{x_1,y_1}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_1,+}(z_1) \right) \bigotimes_{j=2}^{d} \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j).$$

En utilisant de manière répétée le théorème de Fubini (justifié à chaque fois par le point *2.(b)* du théorème 2.13) et l'argument décrit ci-dessus, on aboutit à

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(y) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{B_r}(z) \bigotimes_{j=1}^{d} \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j,+}(z_j).$$

Puisque la mesure est positive, on peut désormais affirmer que

$$|\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(y)| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{Q_r}(z) \bigotimes_{j=1}^{d} \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j,+}(z_j),$$

où l'on désigne par Q_r le cube suivant $Q_r = \{x \in \mathbb{R}^d : |x_j| < r,\ 1 \leqslant j \leqslant d\}$. Les variables étant séparées, on en déduit que

$$|\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(y)| \leqslant \prod_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} \chi_{]-r,r[}(z_j)\, \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j,+}(z_j).$$

Or, pour tout $1 \leqslant j \leqslant d$, on a par parité de $z_j \mapsto \chi_{]-r,r[}(z_j)$

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{]-r,r[}(z_j)\, \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j,+}(z_j) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{]-r,r[}(z_j)\, \mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(z_j),$$

c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{]-r,r[}(z_j)\,\mathrm{d}\nu_{x_j,y_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j,+}(z_j) = \tau_{x_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(\chi_{]-r,r[})(y_j).$$

Finalement, on a donc

$$|\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(y)| \leqslant \prod_{j=1}^{d} \tau_{x_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(\chi_{]-r,r[})(y_j). \tag{2.19}$$

On obtient le résultat escompté en utilisant le théorème 2.23 dans l'inégalité (2.19). □

Nous avons présenté dans les sections précédentes l'opérateur maximal de Dunkl et le cadre de travail. Nous pouvons à présent en venir au résultat fondamental de ce chapitre, à savoir les inégalités de Fefferman-Stein pour $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}$.

2.3 Inégalités de Fefferman-Stein pour $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}$

2.3.1 Énoncé et discussion du résultat

Commençons par énoncer les inégalités que nous souhaitons prouver. On dira indifféremment inégalités de Fefferman-Stein ou théorème maximal vectoriel pour désigner le résultat suivant, qui constitue une extension du théorème maximal de Thangavelu et Xu (théorème 2.2) dans le cas $\mathbb{Z}_2^d$.

Théorème 2.27. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}^d$.*

1. *Soit $1 < r < +\infty$. Si $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \in L^1(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$, alors pour tout $\lambda > 0$ on a*

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d : \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f_n(x)|^r\right)^{\frac{1}{r}} > \lambda\right\}\right) \leqslant \frac{C}{\lambda}\left\|\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1},$$

   où $C = C(d,\kappa,r)$ est indépendante de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ et de λ.

2. *Soit $1 < r < +\infty$ et soit $1 < p < +\infty$. Si $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \in L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$, alors on a*

$$\left\|\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p} \leqslant C\left\|\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}}\right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p},$$

   où $C = C(d,\kappa,p,r)$ est indépendante de $(f_n)_{n\geqslant 1}$.

Dans le cas où l'on remplace $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}$ par l'opérateur de Hardy-Littlewood et $L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$ par les espaces L^p classiques, on retrouve les inégalités prouvées par Fefferman et Stein au début des années soixante-dix ([24]), ces inégalités constituant une extension du théorème de Hardy-Littlewood au cas des fonctions à valeurs ℓ^r. Leur preuve repose essentiellement sur trois puissants arguments d'analyse réelle, à savoir un théorème maximal et une inégalité à poids pour l'opérateur maximal et une décomposition de Calderón-Zygmund. Comme nous l'avons dit dans le préambule au chapitre 2, un théorème analogue pour M_κ^W semble, du fait du manque d'informations sur la translation de Dunkl, hors de portée à l'heure actuelle. Même dans le cas où le groupe de réflexions est $\mathbb{Z}_2^d$, cet opérateur de translation, bien que $L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$-borné, ne permet pas la mise en œuvre pour l'opérateur $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}$

des trois ingrédients cités plus haut. Notre stratégie pour parvenir à démontrer le théorème 2.27 consiste donc à construire un opérateur de type Hardy-Littlewood qui contrôle ponctuellement $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}$ et pour lequel on pourra utiliser les techniques classiques d'analyse réelle. Pour construire un tel opérateur, il va falloir nous débarrasser finement de la translation de Dunkl. Dans cette optique, l'estimation du théorème 2.22 va jouer un rôle essentiel.

Avant de donner la preuve du théorème maximal vectoriel, discutons du cas où $r=+\infty$ et du cas où $p=+\infty$.

Le cas $r=+\infty$ Le théorème 2.27 reste vrai dans le cas où $r=+\infty$, et il est même vrai pour un groupe de réflexions quelconque. En effet, ce cas est une simple conséquence du théorème maximal pour M_κ^W (théorème 2.2) puisque

$$\sup_{n\geqslant 1} M_\kappa^W f_n \leqslant M_\kappa^W(\sup_{n\geqslant 1}|f_n|).$$

Le cas $p=+\infty$ Le théorème 2.27 est faux dans le cas où $p=+\infty$. Donnons un contre-exemple dans le cas de la dimension un. Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ la suite de fonctions où, pour tout $n\geqslant 1$, $f_n=\chi_{[2^{n-1},2^n[}$. On a

$$\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|\chi_{[2^{n-1},2^n[}|^r\Big)^{\frac{1}{r}}=\chi_{[1,+\infty[}\in L^\infty$$

alors que l'on va montrer que

$$\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\chi_{[2^{n-1},2^n[}|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\notin L^\infty. \tag{2.20}$$

Pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a, par définition de $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2}$, l'inégalité suivante

$$M_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\chi_{[2^{n-1},2^n[}(x)\geqslant \frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(]-|x|-2^n,|x|+2^n[)}\int_{2^{n-1}}^{2^n}\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-|x|-2^n,|x|+2^n[})(-y)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(y).$$

Or, on affirme que pour $y\in[2^{n-1},2^n[$

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-|x|-2^n,|x|+2^n[})(-y)=1. \tag{2.21}$$

En effet, on peut écrire

$$\begin{aligned}&2^{2-2\kappa}\mathscr{B}\Big(\kappa,\frac{1}{2}\Big)\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-|x|-2^n,|x|+2^n[})(-y)\\&\qquad=\int_{\mathbb{R}}\chi_{]-|x|-2^n,|x|+2^n[}(z)\chi_{]||x|-|y||,|x|+|y|[}(|z|)\frac{\Delta(|x|,|y|,|z|)^{2\kappa-2}}{(|xyz|)^{2\kappa-1}}\varrho(x,-y,z)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z),\end{aligned}$$

et, puisque $|x|+|y|<|x|+2^n$, on en déduit que

$$\begin{aligned}&2^{2-2\kappa}\mathscr{B}\Big(\kappa,\frac{1}{2}\Big)\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-|x|-2^n,|x|+2^n[})(-y)\\&\qquad=\int_{\mathbb{R}}\chi_{]||x|-|y||,|x|+|y|[}(|z|)\frac{\Delta(|x|,|y|,|z|)^{2\kappa-2}}{(|xyz|)^{2\kappa-1}}\varrho(x,-y,z)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z),\end{aligned}$$

c'est-à-dire
$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\chi_{]-|x|-2^n,|x|+2^n[})(-y) = \nu_{x,-y}^{\mathbb{Z}_2,\kappa}(\mathbb{R}).$$
On obtient (2.21) en utilisant le point *2.(b)* du théorème 2.13. Par conséquent on a l'inégalité
$$M_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\chi_{[2^{n-1},2^n[}(x) \geqslant \frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(]-|x|-2^n,|x|+2^n[)}\int_{2^{n-1}}^{2^n} \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(y),$$
soit après calcul
$$M_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\chi_{[2^{n-1},2^n[}(x) \geqslant \frac{2^{n(2\kappa+1)}-2^{(n-1)(2\kappa+1)}}{2(|x|+2^n)^{2\kappa+1}}.$$
Pour x vérifiant $|x| \leqslant 2^n$ on aboutit à l'inégalité
$$M_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\chi_{[2^{n-1},2^n[}(x) \geqslant \frac{2^{n(2\kappa+1)}-2^{(n-1)(2\kappa+1)}}{2^{(n+1)(2\kappa+1)+1}},$$
et après simplification
$$M_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\chi_{[2^{n-1},2^n[}(x) \geqslant \frac{1-2^{-(2\kappa+1)}}{2^{2\kappa+2}}.$$
On peut donc écrire pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2}\chi_{[2^{n-1},2^n[}(x)|^r \geqslant \sum_{\{n:2^n\geqslant|x|\}} \Big(\frac{1-2^{-(2\kappa+1)}}{2^{2\kappa+2}}\Big)^r = +\infty,$$
ce qui achève la preuve de (2.20) et fournit bien un contre-exemple au théorème 2.27 dans le cas où $p = +\infty$. Signalons tout de même que nous donnerons dans le chapitre 3 un résultat d'intégrabilité locale dans le cas où $p = +\infty$.

2.3.2 Preuve du théorème maximal vectoriel

Nous allons prouver dans cette sous-section le théorème 2.27. Comme nous l'avons déjà annoncé, notre but consiste à contrôler ponctuellement l'opérateur maximal de Dunkl associé à $\mathbb{Z}_2^d$ par un opérateur de type Hardy-Littlewood qui va vérifier un théorème maximal vectoriel que l'on pourra démontrer classiquement. Pour construire un tel opérateur, et puisque c'est la translation de Dunkl qui pose problème, nous cherchons à nous en débarrasser. Le théorème 2.22 va jouer un rôle essentiel et justifie la définition qui va suivre. On introduit au préalable des notations.

Notation 2.28. Pour $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ on notera $\tilde{x}$ le vecteur des valeurs absolues des coordonnées de x, c'est-à-dire $\tilde{x} = \big(|x_1|, \dots, |x_d|\big)$.
Pour $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$, on notera $R(x, d)$ le pavé suivant
$$R(x, r) = I(x_1, r) \times \cdots \times I(x_d, r),$$
où l'on rappelle que pour tout $1 \leqslant j \leqslant d$
$$I(x_j, r) =]\max\{0; |x_j| - r\}, |x_j| + r[.$$

Définition 2.29. Soit $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}$ l'opérateur maximal à poids défini par
$$M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}f(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))}\int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,r)\}} |f(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).$$

Signalons que cet opérateur est invariant sous l'action du groupe de réflexions $\mathbb{Z}_2^d$, c'est-à-dire que l'on a, pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d) \in \mathbb{Z}_2^d$

$$M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}(f \circ \varepsilon)(x) = M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f(x) = M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f(\varepsilon x), \tag{2.22}$$

où l'on note $f \circ \varepsilon$ la fonction $x \mapsto f(\varepsilon x)$, avec

$$\varepsilon x = (\varepsilon_1 x_1, \dots, \varepsilon_d x_d).$$

Cette propriété évidente va s'avérer très utile dans la suite. Nous allons maintenant montrer que cet opérateur contrôle ponctuellement $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}$.

Proposition 2.30. *Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on a l'inégalité de contrôle suivante*

$$M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f(x) \leqslant C M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f(x), \tag{2.23}$$

où $C = C(d, \kappa)$ est indépendante de f et de x.

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et soit $r > 0$. Dans la preuve du théorème 2.22, on a montré l'inégalité (2.19), à savoir pour tout $y \in \mathbb{R}^d$

$$|\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(y)| \leqslant \prod_{j=1}^d \tau_{x_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(\chi_{]-r,r[})(y_j).$$

Or, le point *2.(a)* du théorème 2.13 nous permet d'affirmer que

$$|y_j| \notin I(x_j, r) \Longrightarrow \tau_{x_j}^{\mathbb{Z}_2,\kappa_j}(\chi_{]-r,r[})(y_j) = 0.$$

Par conséquent, on a

$$\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(y) = 0 \quad \text{si} \quad \tilde{y} \notin R(x, r).$$

Cette condition de support et le résultat du théorème 2.22 impliquent que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(-y) \, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) \right| \leqslant C \int_{\{y : \tilde{y} \in R(x,r)\}} |f(y)| \prod_{j=1}^d \frac{\mu_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(]-r,r[)}{\mu_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(I(x_j, r))} \, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).$$

Puisque l'on a bien évidemment

$$\prod_{j=1}^d \mu_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(]-r,r[) = \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(Q_r), \quad \prod_{j=1}^d \mu_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}\big(I(x_j, r)\big) = \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x, r)),$$

on obtient

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f(y) \tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(-y) \, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) \right| \leqslant \frac{C \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(Q_r)}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))} \int_{\{y : \tilde{y} \in R(x,r)\}} |f(y)| \, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y). \tag{2.24}$$

Remarquons que l'on a $\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(Q_r) = C \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(B_r)$ avec

$$C = \frac{2^d (d + 2\gamma_{\mathbb{Z}_2^d})}{\prod_{j=1}^d (2\kappa_j + 1) a(h_{\mathbb{Z}_2^d}, S^{d-1})}.$$

En effet, on a d'une part

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(Q_r) = \prod_{j=1}^d \mu_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(]-r,r[) = 2^d \prod_{j=1}^d \Big(\frac{1}{2\kappa_j+1}\Big) r^{d+2\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}},$$

et d'autre part, un passage en coordonnées polaires nous donne

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(B_r) = \int_0^r u^{d+2\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}-1}\,\mathrm{d}u \int_{S^{d-1}} h^2_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(x)\,\mathrm{d}\omega(x) = \frac{a(h_{\mathbb{Z}_2^d}, S^{d-1})}{d+2\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}} r^{d+2\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}}.$$

On peut donc déduire de (2.24) que

$$\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(B_r)}\left|\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\tau_x^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(\chi_{B_r})(-y)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y)\right| \leqslant \frac{C}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))}\int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,r)\}} |f(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y),$$

et le résultat attendu découle trivialement de cette inégalité. □

Grâce à ce résultat, il nous suffit d'établir le théorème suivant afin de démontrer le théorème 2.27.

Théorème 2.31. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}^d$.*

1. *Soit $1 < r < +\infty$. Si $\big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\big)^{\frac{1}{r}} \in L^1(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$, alors pour tout $\lambda > 0$ on a*

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\bigg(\bigg\{x\in\mathbb{R}^d : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \lambda\bigg\}\bigg) \leqslant \frac{C}{\lambda}\bigg\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1},$$

   où $C = C(d,\kappa,r)$ est indépendante de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ et de λ.

2. *Soit $1 < r < +\infty$ et soit $1 < p < +\infty$. Si $\big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\big)^{\frac{1}{r}} \in L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$, alors on a*

$$\bigg\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p} \leqslant C\bigg\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p},$$

   où $C = C(d,\kappa,p,r)$ est indépendante de $(f_n)_{n\geqslant 1}$.

Pour prouver ce théorème, nous allons suivre la stratégie introduite par Fefferman et Stein dans un cadre classique ([24]). À cet effet, nous allons notamment prouver que l'opérateur $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}$ satisfait un théorème maximal et une inégalité à poids. Commençons donc par établir le théorème maximal. Dans cette optique, et puisque $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}$ se prête aux techniques de recouvrement, nous allons avoir besoin d'un lemme de type Vitali que nous énonçons immédiatement (une version de ce lemme dans le cas unidimensionnel peut être trouvée dans [8] ou [1]).

Lemme 2.32. *Soit X un sous-ensemble mesurable (pour la mesure $\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}$) de $\mathbb{R}_+^*\times\cdots\times\mathbb{R}_+^*$ (d fois). Supposons qu'il existe une famille $\{R_j\}_{j\in J}$ (avec pour tout $j\in J, R_j = R(z^j, r_j)$) vérifiant*

$$\sup_{j\in J}(\mathrm{diam} R_j) < +\infty$$

et telle que

$$X \subset \bigcup_{j\in J} R_j.$$

Alors, il existe une sous-famille disjointe (qui peut être finie) $R_1, \ldots, R_n, \ldots$, telle que

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(X) \leqslant C \sum_n \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R_n),$$

où $C = C(d, \kappa)$ est indépendante de la famille $\{R_j\}$.

Démonstration. En procédant de manière standard (voir par exemple [49, page 9]), il est facile de construire des ensembles disjoints $R(z^1, r_1) = R_1, \ldots, R(z^n, r_n) = R_n, \ldots$, qui sont tels que

$$X \subset \bigcup_n R(z^n, 5r_n).$$

Le lemme s'en déduit alors si l'on montre que la mesure $\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}$ est, de manière générale, doublante pour les ensembles $R(x, r)$, c'est-à-dire qu'il existe une constante $C < +\infty$ telle que

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x, 2r)) \leqslant C \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x, r)).$$

En fait, comme on a d'une part

$$\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x) = \bigotimes_{j=1}^d \mathrm{d}\mu_{\kappa_j}^{\mathbb{Z}_2}(x_j),$$

et d'autre part

$$R(x, r) = I(x_1, r) \times \cdots \times I(x_d, r),$$

il nous suffit même de montrer que la mesure unidimensionnelle $\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}$ est doublante pour un intervalle du type $I(x, r)$. Prouvons donc ce seul point.

Supposons dans un premier temps que $|x| \leqslant r$. Dans ce cas,

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x, 2r)) = \int_0^{|x|+2r} \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z) \leqslant (|x| + 2r)^{2\kappa+1}.$$

Par conséquent

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x, 2r)) \leqslant 2^{2\kappa+1}(|x| + r)^{2\kappa+1},$$

d'où

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x, 2r)) \leqslant C \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x, r)).$$

Supposons maintenant que $r \leqslant |x| \leqslant 2r$. On écrit

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x, 2r)) = \int_0^{|x|+2r} \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z) \leqslant C r^{2\kappa+1},$$

et on écrit

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x, r)) = \int_{|x|-r}^{|x|+r} \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z) \geqslant \int_r^{2r} \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z) \geqslant r^{2\kappa+1}.$$

D'où

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x, 2r)) \leqslant C \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x, r)).$$

Supposons pour finir que $|x| \geqslant 2r$. Dans ce cas, on a d'une part

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x,2r)) = \int_{|x|-2r}^{|x|+2r} \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z) \leqslant 4r(|x|+2r)^{2\kappa},$$

et d'autre part

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x,r)) = \int_{|x|-r}^{|x|+r} \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(z) \geqslant 2r(|x|-r)^{2\kappa}.$$

Puisque $|x|+2r \leqslant 4(|x|-r)$, on en déduit que

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x,2r)) \leqslant C\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}(I(x,r)).$$

On a donc bien prouvé le caractère doublant de $\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2}$ pour les $I(x,r)$, et on peut de ce fait considérer que le lemme est entièrement démontré. □

Grâce à ce lemme, nous allons pouvoir montrer classiquement (c'est-à-dire par une méthode combinant un argument d'interpolation et un argument de recouvrement) un théorème maximal pour $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}$.

Théorème 2.33. *Soit f une fonction mesurable définie sur $\mathbb{R}^d$.*

1. *Si $f \in L^1(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$, alors pour tout $\lambda > 0$ on a*

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^d : M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f(x) > \lambda\Big\}\Big) \leqslant \frac{C}{\lambda}\|f\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1},$$

   où $C = C(d,\kappa)$ est une constante indépendante de f et de λ.

2. *Si $f \in L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$, $1 < p \leqslant +\infty$, alors $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f \in L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$ et on a*

$$\big\|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f\big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p} \leqslant C\|f\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p},$$

   où $C = C(d,\kappa,p)$ est une constante indépendante de f.

Démonstration. Le cas $p = +\infty$ étant une évidence, il nous suffit, grâce au théorème d'interpolation de Marcinkiewicz (voir par exemple [49, page 21]), de prouver la première assertion du théorème.
On introduit pour tout $\lambda > 0$ l'ensemble suivant

$$X_\lambda^+ = \Big\{x \in \mathbb{R}_+^* \times \cdots \times \mathbb{R}_+^* : M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f(x) > \lambda\Big\}.$$

Soit $x \in X_\lambda^+$. Par définition de la fonction $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f$, il existe $r_x > 0$ tel que

$$\int_{\{y : \tilde{y} \in R(x,r_x)\}} |f(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) > \lambda\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r_x)),$$

ce qui implique que

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r_x)) < \frac{1}{\lambda}\,\|f\|_{\mathbb{Z}_2^d\kappa,1}.$$

Puisque $X_\lambda^+ \subset \cup_{x\in X_\lambda^+} R(x,r_x)$, on déduit en utilisant le lemme 2.32 l'existence d'une suite (finie ou non) d'ensembles disjoints $R(x^1,r_{x_1}) = R_1, \ldots, R(x^n,r_{x_n}) = R_n, \ldots$, telle que

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(X_\lambda^+) \leqslant C\sum_n \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R_n),$$

où $C = C(d,\kappa)$ est une constante indépendante de la famille $\{R(x,r_x)\}$. Or, chaque R_n vérifie

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R_n) < \frac{1}{\lambda}\int_{\{y:\tilde{y}\in R_n\}} |f(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).$$

Par conséquent

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(X_\lambda^+) \leqslant \frac{C}{\lambda}\sum_n \int_{\{y:\tilde{y}\in R_n\}} |f(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).$$

En utilisant le caractère disjoint de la suite, on aboutit à

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(X_\lambda^+) \leqslant \frac{C}{\lambda}\int_{\{y:\tilde{y}\in\cup_n R_n\}} |f(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) \leqslant \frac{C}{\lambda}\|f\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1}. \tag{2.25}$$

Notons maintenant pour tout $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_d) \in \mathbb{Z}_2^d$

$$\varepsilon X_\lambda^+ = \Big\{x \in \varepsilon_1\mathbb{R}_+^* \times \cdots \times \varepsilon_d\mathbb{R}_+^* : M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f(x) > \lambda\Big\},$$

où pour tout $1 \leqslant j \leqslant d$

$$\varepsilon_j\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+^* \text{ si } \varepsilon_j = 1, \quad \varepsilon_j\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_-^* \text{ si } \varepsilon_j = -1.$$

Pour tout $\varepsilon \in \mathbb{Z}_2^d$ on a donc en utilisant (2.22)

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(X_\lambda^+) = \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(\varepsilon X_\lambda^+).$$

Finalement, on peut écrire

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^d : M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f(x) > \lambda\Big\}\Big) \leqslant \sum_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d} \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(\varepsilon X_\lambda^+) \leqslant 2^d \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(X_\lambda^+),$$

ce qui implique en utilisant (2.25)

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^d : M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f(x) > \lambda\Big\}\Big) \leqslant \frac{C}{\lambda}\|f\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1}.$$

Le théorème est ainsi démontré. □

Remarque 2.34. Notons au passage que ce théorème maximal pour $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}$ et l'inégalité de contrôle (2.23) impliquent le théorème maximal pour $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}$. Cela constitue donc une preuve différente (dans le cas où le groupe de réflexions est $\mathbb{Z}_2^d$) de celle donnée par Thangavelu et Xu (théorème 2.2).

Démontrons maintenant une inégalité à poids pour $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}$. Dans la preuve des inégalités de Fefferman-Stein, ce résultat va jouer le rôle d'un argument de dualité.

Théorème 2.35. *Soit g une fonction mesurable définie sur $\mathbb{R}^d$ que l'on suppose positive et localement intégrable (au sens de $\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}$). Pour tout r vérifiant $1 < r < +\infty$, on a l'inégalité à poids suivante*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big(M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f(y)\big)^r g(y)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) \leqslant C\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^r M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} g(y)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y),$$

où $C = C(d,\kappa,r)$ est indépendante de f et de g.

Démonstration. Grâce au théorème d'interpolation de Marcinkiewicz et au caractère L^∞-borné de $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}$, il nous suffit pour prouver le théorème de démontrer que l'inégalité suivante est vérifiée pour tout $\lambda > 0$

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,g}\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^d : M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f(x) > \lambda\Big\}\Big) \leqslant \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} g(y)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y), \tag{2.26}$$

où $\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,g}(X) = \int_X g(y)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y)$ et où $C = C(d,\kappa)$ est une constante indépendante de f, de g et de λ. En fait, en notant pour tout $\lambda > 0$

$$X_\lambda^+ = \Big\{x \in \mathbb{R}_+^* \times \cdots \times \mathbb{R}_+^* : M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f(x) > \lambda\Big\},$$

il nous suffit même de montrer que pour tout $\lambda > 0$

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,g}(X_\lambda^+) \leqslant \frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} g(y)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y), \tag{2.27}$$

où $C = C(d,\kappa)$ est une constante indépendante de f, de g et de λ.
Supposons en effet que l'inégalité (2.27) est démontrée. On a alors

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,g}\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^d : M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f(x) > \lambda\Big\}\Big) \leqslant \sum_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d} \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,g}(\varepsilon X_\lambda^+) = \sum_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d} \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,g\circ\varepsilon}(X_\lambda^+).$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité (2.27) on obtient

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,g}\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^d : M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f(x) > \lambda\Big\}\Big) \leqslant \frac{C}{\lambda}\sum_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(y)| M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}(g\circ\varepsilon)(y)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).$$

En invoquant le fait que $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}(g\circ\varepsilon) = M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} g$, on aboutit à (2.26), inégalité dont découle comme on l'a dit le théorème. Il nous reste donc à prouver (2.27).

Soit K un sous-ensemble compact de X_λ^+. Comme pour la preuve du théorème 2.33, on peut affirmer qu'il existe $R(x^1,r_1),\ldots,R(x^n,r_n),\ldots$, deux à deux disjoints, tels que $X_\lambda^+ \subset \cup_n R(x^n,5r_n)$ et tels que chaque $R(x^n,r_n)$ vérifie

$$\lambda\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x^n,r_n)) < \int_{\{y:\tilde{y}\in R(x^n,r_n)\}} |f(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y). \tag{2.28}$$

On peut donc recouvrir K par un nombre fini de tels $R(x^n,r_n)$, disons $K \subset \cup_{k=1}^N R(x^k,5r_k)$. Soit alors $1 \leqslant k \leqslant N$ et soit y tel que $\tilde{y} \in R(x^k,r_k)$. Par définition de $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} g$, on peut écrire

$$\int_{\{z:\tilde{z}\in R(y,6r_k)\}} g(z)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(z) \leqslant \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(y,6r_k)) M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} g(y). \tag{2.29}$$

Or, on a d'une part

$$R(x^k,5r_k) \subset R(y,6r_k),$$

et d'autre part

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(y,6r_k)) \leqslant C\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x^k,r_k)),$$

puisque $R(y,6r_k) \subset R(x^k,7r_k)$. Par conséquent, on peut déduire de l'inégalité (2.29) que

$$\int_{\{z:\tilde{z}\in R(x^k,5r_k)\}} g(z)\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(z) \leqslant C\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x^k,r_k)) M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} g(y).$$

En multipliant par $|f(y)|$ et en intégrant sur $\{y : \tilde{y} \in R(x^k, r_k)\}$, on obtient

$$\int_{\{y:\tilde{y}\in R(x^k,r_k)\}} |f(y)| \, d\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) \int_{\{z:\tilde{z}\in R(x^k,5r_k)\}} g(z) \, d\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(z)$$
$$\leqslant C\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x^k, r_k)) \int_{\{y:\tilde{y}\in R(x^k,r_k)\}} |f(y)| M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} g(y) \, d\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y),$$

ce qui permet d'affirmer après utilisation de (2.28) et après simplification que

$$\int_{\{z:\tilde{z}\in R(x^k,5r_k)\}} g(z) \, d\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(z) \leqslant \frac{C}{\lambda} \int_{\{y:\tilde{y}\in R(x^k,r_k)\}} |f(y)| M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} g(y) \, d\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).$$

Puisque

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,g}(K) \leqslant \sum_{k=1}^N \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,g}(R(x^k, 5r_k)) \leqslant \sum_{k=1}^N \int_{\{z:\tilde{z}\in R(x^k,5r_k)\}} g(z) \, d\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(z),$$

on aboutit à

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,g}(K) \leqslant \sum_{k=1}^N \frac{C}{\lambda} \int_{\{y:\tilde{y}\in R(x^k,r_k)\}} |f(y)| M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} g(y) \, d\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).$$

En utilisant le caractère disjoint des $R(x^k, r_k)$, on peut affirmer que

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,g}(K) \leqslant \frac{C}{\lambda} \int_{\{y:\tilde{y}\in \cup_{k=1}^N R(x^k,r_k)\}} |f(y)| M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} g(y) \, d\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y),$$

puis que

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,g}(K) \leqslant \frac{C}{\lambda} \int_{y\in\mathbb{R}^d} |f(y)| M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} g(y) \, d\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).$$

Cette dernière inégalité étant vraie pour tout compact $K \subset X_\lambda^+$, on en déduit (2.27), et le théorème est démontré. □

On donne maintenant la décomposition de Calderón-Zygmund qui va nous servir par la suite (voir [51, page 17]).

Théorème 2.36. *Soit g une fonction appartenant à $L^1(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$ et soit λ un réel strictement positif. Alors, il existe une suite $(Q_j)_{j\geqslant 1}$ de cubes bornés dont les intérieurs sont deux à deux disjoints et telle que*

$$\sum_{j\geqslant 1} \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(Q_j) \leqslant \frac{C}{\lambda} \|g\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1},$$

$$|g(x)| \leqslant \lambda \textit{ si } x \notin \Omega = \bigcup_{j\geqslant 1} Q_j,$$

$$\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(Q_j)} \int_{Q_j} |g(y)| \, d\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) \leqslant C\lambda \quad \textit{pour chaque } Q_j,$$

avec $C = C(d, \kappa)$ une constante indépendante de f, de λ et de la suite $(Q_j)_{j\geqslant 1}$.

Nous venons donc de présenter les trois arguments essentiels qui vont servir dans la preuve des inégalités de Fefferman-Stein. Avant d'en venir à la preuve elle-même, on prouve un dernier point technique afin de ne pas alourdir la démonstration du théorème 2.31.

Lemme 2.37. *Soit $(Q_j)_{j\geqslant 1}$ une famille de cubes bornés dont les intérieurs sont deux à deux disjoints, et soit*

$$\Omega = \bigcup_{j\geqslant 1} Q_j, \quad \widetilde{\Omega} = \bigcup_{j\geqslant 1} \widetilde{Q_j},$$

où $\widetilde{Q_j}$ désigne le cube concentrique avec Q_j mais ayant pour diamètre le double de celui de Q_j.
Soit f une fonction mesurable définie sur $\mathbb{R}^d$ et soit $\overline{f}$ la fonction donnée par

$$\overline{f}(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \notin \Omega \\ \frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(Q_j)} \int_{Q_j} |f(y)|\, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) & si\ x \in Q_j \end{cases}.$$

Alors, on a l'inégalité suivante

$$M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}\big(f\chi_\Omega\big)(x) \leqslant C M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}\overline{f}(x), \quad x \in {}^c\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d} \varepsilon\widetilde{\Omega},$$

où $C = C(d,\kappa)$ est une constante indépendante de f et de Ω.

Démonstration. Soit $x \in {}^c\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d} \varepsilon\widetilde{\Omega}$. Pour tout $r > 0$ on a

$$\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))} \int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,r)\}} |(f\chi_\Omega)(y)|\, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) = \frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))} \int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,r)\}\cap\Omega} |f(y)|\, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).$$

Alors, en posant

$$J = \Big\{ j \geqslant 1 : Q_j \cap \bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d} \varepsilon R(x,r) \neq \emptyset \Big\},$$

il s'ensuit que

$$\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))} \int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,r)\}} |(f\chi_\Omega)(y)|\, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) \leqslant \frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))} \sum_{j\in J} \int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,r)\}\cap Q_j} |f(y)|\, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).$$

On étend le domaine d'intégration pour obtenir

$$\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))} \int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,r)\}} |(f\chi_\Omega)(y)|\, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) \leqslant \frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))} \sum_{j\in J} \int_{Q_j} |f(y)|\, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).$$

L'égalité suivante

$$\int_{Q_j} |\overline{f}(y)|\, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) = \int_{Q_j} |f(y)|\, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y)$$

implique que

$$\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))} \int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,r)\}} |(f\chi_\Omega)(y)|\, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) \leqslant \frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))} \sum_{j\in J} \int_{Q_j} |\overline{f}(y)|\, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).$$

Comme $(Q_j)_{j\geqslant 1}$ est une suite de cubes dont les intérieurs sont deux à deux disjoints, on peut écrire

$$\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))}\int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,r)\}}|(f\chi_\Omega)(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y)\leqslant\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))}\int_{\bigcup_{j\in J}Q_j}|\overline{f}(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).$$

Puisque

$$\begin{cases} x\in {}^c\displaystyle\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d}\varepsilon\Omega \\ Q_j\cap\displaystyle\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d}\varepsilon R(x,r)\neq\emptyset\end{cases}\Longrightarrow Q_j\subset\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d}\varepsilon R(x,3r),$$

nous avons donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))}&\int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,r)\}}|(f\chi_\Omega)(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y)\\ &\leqslant\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))}\int_{\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d}\varepsilon R(x,3r)}|\overline{f}(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y),\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))}\int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,r)\}}|(f\chi_\Omega)(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y)\leqslant\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))}\int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,3r)\}}|\overline{f}(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).$$

En utilisant l'égalité suivante

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))}&\int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,3r)\}}|\overline{f}(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y)\\ &=\frac{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,3r))}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))}\,\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,3r))}\int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,3r)\}}|\overline{f}(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y),\end{aligned}$$

on aboutit à

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))}&\int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,r)\}}|(f\chi_\Omega)(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y)\\ &\leqslant C\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,3r))}\int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,3r)\}}|\overline{f}(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y).\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(R(x,r))}\int_{\{y:\tilde{y}\in R(x,r)\}}|(f\chi_\Omega)(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y)\leqslant CM_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}\overline{f}(x).$$

Finalement, on en déduit que

$$M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}\big(f\chi_\Omega\big)(x)\leqslant CM_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}\overline{f}(x),$$

ce qui est l'inégalité recherchée. □

Nous avons maintenant à disposition tous les outils requis pour prouver le théorème 2.31, qui implique, comme on l'a déjà expliqué, le théorème 2.27 grâce à l'inégalité de contrôle (2.23).

Démonstration. On commence par prouver le second point dans le cas où $p = r$.
Puisque l'on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n(x)|^r \Big) \,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n(x)|^r \,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x),$$

on obtient en utilisant le théorème maximal pour $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}$ (théorème 2.33)

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n(x)|^r \Big) \,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x) \leqslant C \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x)|^r \,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x).$$

Après interversion on aboutit à

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n(x)|^r \Big) \,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x) \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)|^r \Big) \,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x),$$

c'est-à-dire

$$\left\| \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n(\cdot)|^r \Big)^{\frac{1}{r}} \right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,r}^r \leqslant C \left\| \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r \Big)^{\frac{1}{r}} \right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,r}^r, \tag{2.30}$$

ce qui est le résultat voulu dans le cas où $p = r$.

Grâce au théorème d'interpolation de Marcinkiewicz, le cas $1 < p < r$ est une simple conséquence de (2.30) et du premier point du théorème que nous allons maintenant démontrer.

Appliquons une décomposition de Calderón-Zygmund (théorème 2.36) à la fonction

$$\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r \Big)^{\frac{1}{r}}.$$

On obtient une suite $(Q_j)_{j\geqslant 1}$ de cubes bornés dont les intérieurs sont deux à deux disjoints et telle que

$$\sum_{j\geqslant 1} \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(Q_j) \leqslant \frac{C}{\lambda} \left\| \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r \Big)^{\frac{1}{r}} \right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1}, \tag{2.31}$$

$$\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)|^r \Big)^{\frac{1}{r}} \leqslant \lambda \quad \text{si } x \notin \Omega = \bigcup_{j\geqslant 1} Q_j, \tag{2.32}$$

$$\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(Q_j)} \int_{Q_j} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(y)|^r \Big)^{\frac{1}{r}} \,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) \leqslant C\lambda \quad \text{pour chaque } Q_j, \tag{2.33}$$

où $C = C(d, \kappa)$ est une constante indépendante de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ et de $(Q_j)_{j\geqslant 1}$.
Pour tout $n \geqslant 1$, on décompose f_n comme suit

$$f_n = f_n' + f_n'',$$

avec

$$f_n' = f_n\,\chi_{^c\Omega} \quad \text{et} \quad f_n'' = f_n\,\chi_\Omega.$$

Puisque l'on a évidemment

$$\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} \leqslant \Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}f_n'(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} + \Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}f_n''(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}},$$

il nous suffit pour démontrer le premier point du théorème de prouver les deux inégalités suivantes

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\bigg(\Big\{x\in\mathbb{R}^d : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}f_n'(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \lambda\Big\}\bigg) \leqslant \frac{C}{\lambda}\bigg\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1}, \tag{2.34}$$

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\bigg(\Big\{x\in\mathbb{R}^d : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}f_n''(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \lambda\Big\}\bigg) \leqslant \frac{C}{\lambda}\bigg\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1}. \tag{2.35}$$

On commence par prouver (2.34). Appliquons l'inégalité de Chebyshev afin d'obtenir

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\bigg(\Big\{x\in\mathbb{R}^d : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}f_n'(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \lambda\Big\}\bigg) \leqslant \frac{C}{\lambda^r}\bigg\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}f_n'(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,r}^r.$$

En utilisant l'inégalité (2.30), on en déduit que

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\bigg(\Big\{x\in\mathbb{R}^d : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}f_n'(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \lambda\Big\}\bigg) \leqslant \frac{C}{\lambda^r}\bigg\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n'(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,r}^r. \tag{2.36}$$

Or, on a d'une part

$$\bigg\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n'(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,r}^r \leqslant \bigg\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n'(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,\infty}^{r-1}\bigg\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1},$$

et puisque (2.32) implique d'autre part que

$$\bigg\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n'(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,\infty}^{r-1} \leqslant \lambda^{r-1},$$

on peut déduire de (2.36) l'inégalité

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\bigg(\Big\{x\in\mathbb{R}^d : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}f_n'(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \lambda\Big\}\bigg) \leqslant \frac{C}{\lambda}\bigg\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1},$$

et (2.34) est prouvé.

Nous allons maintenant prouver (2.35). Considérons pour tout $n \geqslant 1$ la fonction $\overline{f_n}$ définie par

$$\overline{f_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \Omega \\ \frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(Q_j)}\int_{Q_j}|f_n(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y) & \text{si } \ x \in Q_j, \end{cases}$$

et soit $\widetilde{Q_j}$ le dilaté de Q_j comme dans le lemme 2.37. Remarquons que la fonction $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |\overline{f_n}(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}}$ est majorée par $C\lambda$.
En effet, c'est évident si $x \notin \Omega$ et si $x \in Q_j$, alors

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |\overline{f_n}(x)|^{\,r}\Big)^{\frac{1}{r}} &= \Big(\sum_{n=1}^{+\infty}\Big[\frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(Q_j)}\int_{Q_j} |f_n(y)|\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y)\Big]^r\Big)^{\frac{1}{r}} \\ &\leqslant \frac{1}{\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(Q_j)}\int_{Q_j}\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(y)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(y),\end{aligned}$$

où l'on a appliqué l'inégalité de Minkowski. En utilisant (2.33), on obtient bien

$$\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |\overline{f_n}(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} \leqslant C\lambda.$$

Par conséquent, nous avons

$$\Big\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |\overline{f_n}(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\Big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,r}^r \leqslant C\lambda^r \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(\Omega) \leqslant C\lambda^r \sum_{j\geqslant 1}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(Q_j),$$

où l'on a également utilisé le fait que $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |\overline{f_n}(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}}$ est à support contenu dans Ω. En appliquant (2.31), on aboutit à

$$\Big\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |\overline{f_n}(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\Big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,r}^r \leqslant C\lambda^{r-1}\Big\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\Big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1}.$$

En utilisant successivement l'inégalité de Chebyshev, l'inégalité (2.30) et le dernier résultat ci-dessus, il s'ensuit que

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\Big\{x\in\mathbb{R}^d : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}\overline{f_n}(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \lambda\Big\}\Big) \leqslant \frac{C}{\lambda}\Big\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\Big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1}. \tag{2.37}$$

Puisque nous avons

$$\begin{aligned}&\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\Big\{x\in\mathbb{R}^d : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n''(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \lambda\Big\}\Big) \\ &\qquad\leqslant \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d}\varepsilon\widetilde{\Omega}\Big) + \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\Big\{x\in {}^c\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d}\varepsilon\widetilde{\Omega} : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n''(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \lambda\Big\}\Big),\end{aligned}$$

on obtient en appliquant le lemme 2.37

$$\begin{aligned}&\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\Big\{x\in\mathbb{R}^d : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n''(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \lambda\Big\}\Big) \\ &\leqslant 2^d\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(\widetilde{\Omega}) + \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\Big\{x\in {}^c\bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d}\varepsilon\widetilde{\Omega} : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}\overline{f_n}(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \frac{\lambda}{C}\Big\}\Big).\end{aligned} \tag{2.38}$$

D'une part, on a

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(\widetilde{\Omega}) \leqslant \sum_{j\geqslant 1} \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(\widetilde{Q_j}) \leqslant C \sum_{j\geqslant 1} \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(Q_j),$$

et donc en utilisant (2.31)

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(\widetilde{\Omega}) \leqslant \frac{C}{\lambda} \Big\| \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} \Big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1}. \tag{2.39}$$

D'autre part

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\Big\{x \in {}^c \bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d} \varepsilon\widetilde{\Omega} : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}\overline{f_n}(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \frac{\lambda}{C}\Big\}\Big)$$
$$\leqslant \mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^d : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}\overline{f_n}(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \frac{\lambda}{C}\Big\}\Big),$$

d'où, grâce à (2.37), on en déduit que

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\Big\{x \in {}^c \bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Z}_2^d} \varepsilon\widetilde{\Omega} : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R}\overline{f_n}(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \frac{\lambda}{C}\Big\}\Big) \leqslant \frac{C}{\lambda} \Big\| \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} \Big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1}. \tag{2.40}$$

Alors, en utilisant (2.39) et (2.40), on peut déduire de (2.38) que

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^d : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n''(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \lambda\Big\}\Big) \leqslant \frac{C}{\lambda} \Big\| \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} \Big\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1},$$

et la preuve de (2.35) est terminée.

Afin de démontrer le théorème dans son intégralité, il nous reste à prouver le second point dans le cas où $p > r$.
Soit g une fonction mesurable positive satisfaisant

$$\|g\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,\frac{p}{p-r}} = 1.$$

On a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n(x)|^r\Big) g(x)\, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n(x)|^r g(x)\, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x),$$

et on obtient en utilisant l'inégalité à poids du théorème 2.35

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n(x)|^r\Big) g(x)\, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x) \leqslant C \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x)|^r M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} g(x)\, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x),$$

et après interversion

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} f_n(x)|^r\Big) g(x)\, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x) \leqslant C \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)|^r\Big) M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,R} g(x)\, \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x).$$

Grâce à l'inégalité de Hölder, on aboutit à

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d, R} f_n(x)|^r \Big) g(x) \,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x) \leqslant C \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)|^r \Big)^{\frac{p}{r}} \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x) \bigg)^{\frac{r}{p}} \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} \big(M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d, R} g(x) \big)^{\frac{p}{p-r}} \mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x) \bigg)^{\frac{p-r}{p}},$$

c'est-à-dire

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d, R} f_n(x)|^r \Big) g(x) \,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x) \leqslant C \bigg\| \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r \Big)^{\frac{1}{r}} \bigg\|_{\mathbb{Z}_2^d, \kappa, p}^r \big\| M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d, R} g \big\|_{\mathbb{Z}_2^d, \kappa, \frac{p}{p-r}}.$$

En appliquant le théorème maximal pour l'opérateur $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d, R}$ (théorème 2.33), on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d, R} f_n(x)|^r \Big) g(x) \,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x) \leqslant C \bigg\| \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r \Big)^{\frac{1}{r}} \bigg\|_{\mathbb{Z}_2^d, \kappa, p}^r \| g \|_{\mathbb{Z}_2^d, \kappa, \frac{p}{p-r}},$$

et, puisque $\|g\|_{\mathbb{Z}_2^d, \kappa, \frac{p}{p-r}} = 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d, R} f_n(x)|^r \Big) g(x) \,\mathrm{d}\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}(x) \leqslant C \bigg\| \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r \Big)^{\frac{1}{r}} \bigg\|_{\mathbb{Z}_2^d, \kappa, p}^r.$$

De ce fait, on peut conclure que

$$\bigg\| \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d, R} f_n(\cdot)|^r \Big)^{\frac{1}{r}} \bigg\|_{\mathbb{Z}_2^d, \kappa, p} \leqslant C \bigg\| \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r \Big)^{\frac{1}{r}} \bigg\|_{\mathbb{Z}_2^d, \kappa, p},$$

et le théorème est entièrement prouvé. □

Les inégalités de Fefferman-Stein constituant un résultat fondamental en analyse harmonique, il est intéressant de pouvoir étendre ce résultat à une plus large classe d'opérateurs. C'est ce que nous allons faire maintenant dans une nouvelle section.

2.4 Extension du résultat à une plus large classe d'opérateurs

On cherche à définir une classe à laquelle va appartenir la fonction maximale associée au semi-groupe de la chaleur de type Dunkl et la fonction maximale associée au semi-groupe de Poisson de type Dunkl.

Définition 2.38. Soit $\phi \in L^1(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$ une fonction radiale, plus précisément $\phi(x) = \psi(\|x\|)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. On suppose que ψ est différentiable et qu'elle satisfait les conditions suivantes

$$\lim_{r \to +\infty} \psi(r) = 0, \qquad \int_0^{+\infty} r^{d+2\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}} \Big| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \psi(r) \Big| \,\mathrm{d}r < +\infty.$$

On note alors $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d, \phi}$ l'opérateur suivant

$$M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d, \phi} f(x) = \sup_{t>0} \big| (f \underset{\mathbb{Z}_2^d, \kappa}{*} \phi_t)(x) \big|, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

où ϕ_t désigne pour tout $t > 0$ la dilatée de ϕ donnée par

$$\phi_t(x) = \frac{1}{t^{d+2\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}}}\,\phi\Big(\frac{x}{t}\Big), \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Présentons tout de suite deux exemples important de telles fonctions.

Semi-groupe de la chaleur de type Dunkl Notre premier exemple concerne la gaussienne généralisée $q_t^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}$. Posons

$$\phi(x) = c_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

alors pour tout $t > 0$ on a

$$\phi_{\sqrt{2t}}(x) = \frac{c_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}}{(2t)^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}}}\,\mathrm{e}^{-\frac{\|x\|^2}{4t}} = q_t^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(x).$$

Dans ce cas, $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,\phi}$ est l'opérateur maximal associé au semi-groupe de la chaleur de type Dunkl.

Semi-groupe de Poisson de type Dunkl Notre second exemple concerne le noyau de Poisson généralisé (ou de type Dunkl). Si ϕ est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par

$$\phi(x) = \frac{a_\kappa}{(1+\|x\|^2)^{\frac{d+1}{2}+\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}}},$$

où a_κ est la constante

$$a_\kappa = \frac{c_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\,2^{\frac{d}{2}+\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}}\,\Gamma\big(\frac{d+1}{2}+\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}\big)}{\sqrt{\pi}},$$

alors pour tout $t > 0$ on a

$$\phi_t(x) = \frac{a_\kappa\, t}{(t^2+\|x\|^2)^{\frac{d+1}{2}+\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}}} = P_t^{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}(x),$$

où, de manière plus générale, $P_t^{W,\kappa}$ est l'opérateur de Poisson de type Dunkl (pour plus de précisions, nous renvoyons à [45] et [56]). Par conséquent, $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,\phi}$ est dans ce cas l'opérateur maximal associé au semi-groupe de Poisson de type Dunkl.

On énonce maintenant le résultat concernant l'opérateur $M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,\phi}$ (pour ϕ, ψ ϕ_t comme dans la définition 2.38).

Théorème 2.39. *Soit $(f_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}^d$.*

1. *Soit $1 < r < +\infty$. Si $\big(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\big)^{\frac{1}{r}} \in L^1(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$, alors pour tout $\lambda > 0$ on a*

$$\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d}\bigg(\Big\{x \in \mathbb{R}^d : \Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,\phi}f_n(x)|^r\Big)^{\frac{1}{r}} > \lambda\Big\}\bigg) \leqslant \frac{C}{\lambda}\bigg\|\Big(\sum_{n=1}^{+\infty}|f_n(\cdot)|^r\Big)^{\frac{1}{r}}\bigg\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,1},$$

où $C = C(d,\kappa,r,\phi)$ est indépendante de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ et de λ.

2. Soit $1 < r < +\infty$ *et soit* $1 < p < +\infty$. *Si* $\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r\right)^{\frac{1}{r}} \in L^p(\mu_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d})$, *alors on a*

$$\left\| \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d,\phi} f_n(\cdot)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p} \leqslant C \left\| \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(\cdot)|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{\mathbb{Z}_2^d,\kappa,p},$$

où $C = C(d, \kappa, p, r, \phi)$ *est indépendante de* $(f_n)_{n \geqslant 1}$.

Démonstration. La preuve ne présente pas de difficulté particulière. En effet, en s'appuyant sur la démonstration du théorème 7.5 de [56], on sait que pour une telle fonction ϕ et pour tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$\left|(f \underset{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}{*} \phi)(x)\right| \leqslant C M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f(x) \int_0^{+\infty} r^{d+2\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \psi(r) \right| \mathrm{d}r,$$

où $C = C(d, \kappa)$. De ce fait, pour tout $t > 0$ on obtient

$$\left|(f \underset{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}{*} \phi_t)(x)\right| \leqslant C M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f(x) \int_0^{+\infty} r^{d+2\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \psi_t(r) \right| \mathrm{d}r,$$

avec C indépendante de t. De l'égalité évidente

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \psi_t(r) = \frac{1}{t^{d+2\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}+1}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \psi\left(\frac{r}{t}\right),$$

on peut donc déduire que

$$\left|(f \underset{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}{*} \phi_t)(x)\right| \leqslant C M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f(x) \int_0^{+\infty} \frac{r^{d+2\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}}}{t^{d+2\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}+1}} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \psi\left(\frac{r}{t}\right) \right| \mathrm{d}r.$$

Un changement de variables nous donne

$$\left|(f \underset{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}{*} \phi_t)(x)\right| \leqslant C M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f(x) \int_0^{+\infty} r^{d+2\gamma_{\mathbb{Z}_2^d}} \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \psi(r) \right| \mathrm{d}r,$$

et on aboutit finalement à

$$\sup_{t>0} \left|(f \underset{\mathbb{Z}_2^d,\kappa}{*} \phi_t)(x)\right| \leqslant C M_\kappa^{\mathbb{Z}_2^d} f(x),$$

où $C = C(d, \kappa, \phi)$ est indépendante de f. Cette estimation ponctuelle et l'utilisation du théorème 2.27 permettent d'obtenir le résultat. $\square$