

Identification des sommets dans les graphes

Les codes identifiants ont été introduits par M.G. Karpovsky, K. Chakrabarty et L.B. Levitin dans l'article séminal [65], afin de modéliser la détection et localisation de pannes dans les réseaux multi-processeurs. En un peu plus d'une dizaine d'années, ils ont donné lieu à de nombreuses publications (plus d'une centaine à ce jour) ; on pourra consulter une bibliographie quasi-exhaustive, méticuleusement maintenue à jour par A. Lobstein, à l'adresse électronique [73]. Cette liste recense aussi les articles concernant les codes localisateurs-dominateurs, une notion antérieure et assez proche (voir 1.5.1 à ce sujet). Citons également la thèse de J. Moncel ([74]) qui constitue une bonne introduction au sujet.

Les définitions concernant les codes identifiants et graphes sans jumeaux se trouvent dans le chapitre 1 ; nous ne pourrions y faire un état de l'art complet mais présenterons les résultats fondamentaux, ainsi que ceux directement liés à nos travaux. Les résultats de ce chapitre concernent essentiellement le cardinal minimal d'un code identifiant dans un graphe : nous y verrons quelques bornes inférieures et supérieures, ainsi que quelques graphes où ce cardinal minimal est connu exactement (ou presque). Les questions relatives aux graphes sans jumeaux, intrinsèquement liés aux codes identifiants, seront abordées dans le chapitre 2, puis le chapitre 3 traitera de la question de la complexité algorithmique du calcul de codes identifiants. Enfin, le chapitre 4 présente une nouvelle notion, celle des *systèmes de contrôle*, qui constitue une généralisation de la notion de code identifiant. Rappelons que la plupart des preuves de nos résultats ne seront pas données ici mais peuvent être consultées dans les annexes en troisième partie de cette thèse.

Chapitre 1

Codes identifiants

Sommaire

1.1	Introduction	11
1.2	Notations	15
1.3	Définitions	15
1.3.1	Identification des sommets	15
1.3.2	Identification des ensembles de sommets	16
1.4	Graphes sans jumeaux	16
1.5	Liens avec d'autres notions	18
1.5.1	Ensembles dominants et codes localisateurs-dominateurs	18
1.5.2	Puissances de graphes	18
1.6	Valeurs extrémales de $\gamma_{r,\ell}^{id}(G)$	18
1.6.1	Borne inférieure	18
1.6.2	Borne supérieure	19
1.7	Chaînes et cycles	20
1.8	Grille du roi	20

1.1 Introduction

Les codes identifiants ont été introduits afin de modéliser des problèmes de localisation dans des réseaux, par exemple la recherche de pannes dans les systèmes de processeurs ([65]). Une autre application possible est la détection et localisation d'un incendie dans un bâtiment ([81]), que nous allons ici utiliser pour présenter le problème.

Prenons l'exemple d'un musée, représenté sur la figure 1.I (partie gauche), que nous voulons équiper de détecteurs de fumée. Ce musée est composé de huit pièces dénommées selon les huit premières lettres de l'alphabet ; certaines de ces pièces communiquent par une porte et d'autres non. Nous modélisons ce musée par un graphe G_1 comportant huit sommets correspondant chacun à une pièce ; deux sommets de ce graphe sont reliés par une arête si et seulement si les deux pièces correspondantes du musée communiquent par une porte. Ce graphe est également représenté sur la figure 1.I (partie droite).

Le cadre étant posé, supposons que nous disposions de détecteurs de fumée dont chaque pièce puisse être équipée. Ces détecteurs ont une portée d'une pièce, c'est-à-dire qu'ils détecteront de la fumée si un feu se déclare dans la pièce où ils se trouvent, ou dans une pièce immédiatement adjacente. Par exemple, un détecteur placé dans la pièce G pourra détecter si un feu se déclare dans les pièces E , F , G et H ; en revanche il ne détectera pas un feu en B ou en D . Le concept mathématique correspondant à celui d'un détecteur de

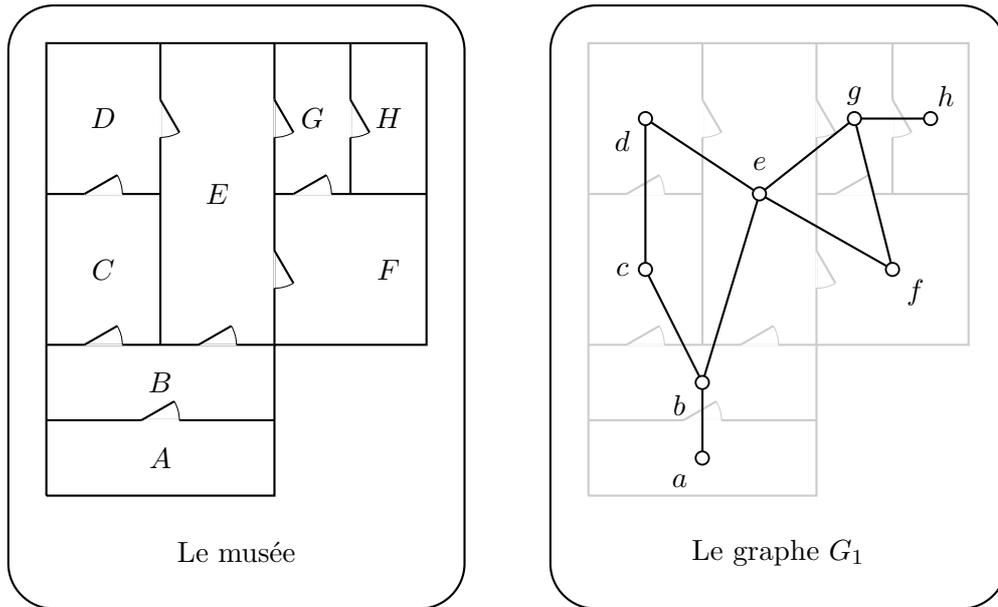


Figure 1.I – Le musée où nous allons placer des détecteurs de fumée et le graphe G_1 qui lui est associé.

fumée est celui de *mot de code*. Nous indiquons le choix d'un mot de code sur les figures en noircissant le sommet correspondant. Nous dirons ainsi par exemple que les sommets e, f, g et h sont *couverts* par le mot de code g : voir la figure 1.II.

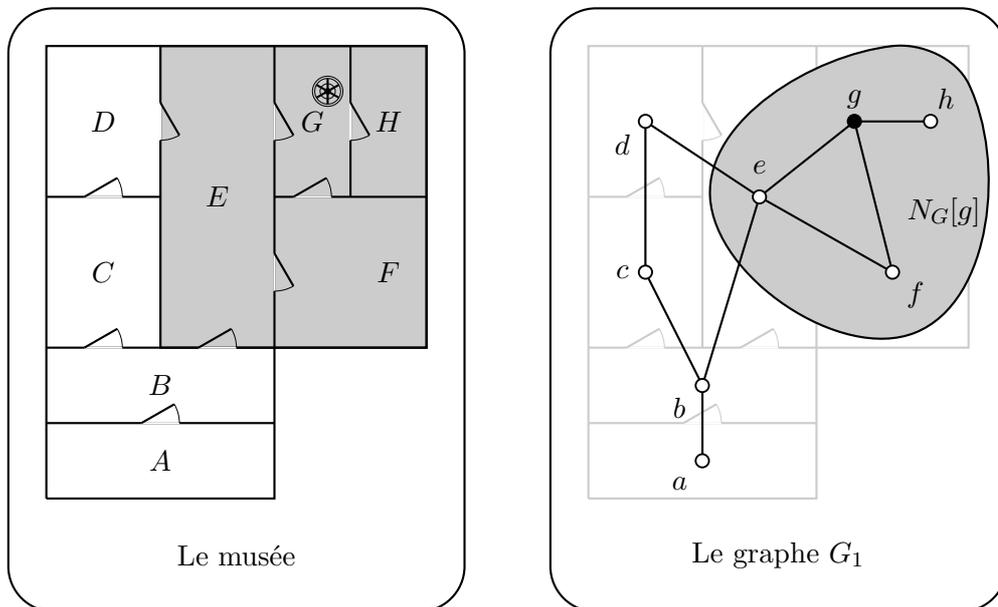


Figure 1.II – Un détecteur de fumée dans la pièce G détecte les feux dans la zone grisée composée de G et des pièces adjacentes. Dans le modèle mathématique, le mot de code g couvre les sommets de son voisinage fermé $N_G[g]$ (zone grisée).

Une première condition à remplir, si nous voulons pouvoir détecter un feu dans n'importe quelle pièce du musée, est de placer suffisamment de détecteurs de façon qu'une

pièce, si elle ne comporte pas de détecteur, soit adjacente à au moins une pièce en comportant un. La notion correspondante dans le graphe G_1 est celle d'*ensemble dominant* (voir 0.7 page 7 pour une définition) : tous les sommets doivent être couverts par au moins un mot de code. Il est facile de se convaincre qu'ici trois mots de code au moins sont nécessaires pour couvrir tout le graphe. Une solution est présentée sur la figure 1.III ; il y en a d'autres.

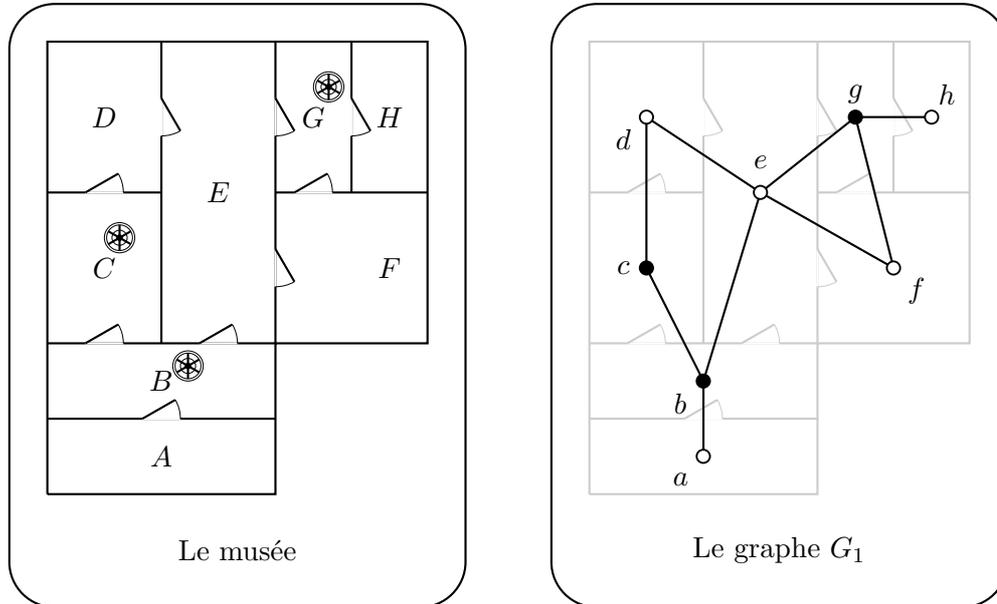


Figure 1.III – *Un exemple d'ensemble dominant composé des sommets b , c et g dans le graphe G_1 . Dans le musée, les trois détecteurs de fumée correspondants suffisent à surveiller toutes les pièces.*

Déterminer un ensemble dominant de cardinal minimum dans un graphe donné est un problème difficile (voir le paragraphe 1.5.1). Ici, nous voulons cependant faire plus que surveiller l'intégralité du musée : nous voulons être capables de localiser les feux. Pour cela, supposons qu'au poste de commandement du gardien de musée se trouvent des voyants lumineux, un par détecteur de fumée, ces voyants s'allument si le détecteur correspondant détecte de la fumée. En reprenant l'exemple de la figure 1.III, et en supposant qu'il y ait au plus un départ d'incendie dans notre musée, dressons une table indiquant, pour chaque pièce où un feu pourrait se déclarer, quels voyants s'allumeraient dans ce cas (table 1.I).

Comme on peut le constater, les mots de codes choisis forment bien un ensemble dominant car toutes les lignes de la table 1.I signalent au moins un voyant allumé. Considérons maintenant plusieurs hypothèses, toujours dans le cas où il n'y aurait qu'un seul départ d'incendie :

- supposons que seul le voyant B s'allume : c'est qu'alors un feu s'est déclaré dans le musée, et ce feu se trouve nécessairement dans la pièce A , car c'est l'unique cas où seul le voyant B s'allume ;
- de même, si seul le voyant C s'allumait, ou si les deux voyants B et G s'allumaient simultanément, alors nous pourrions localiser l'incendie (respectivement en D et en E) ;
- toutefois, dans les autres cas, par exemple si les voyants B et C s'allumaient, nous saurions qu'il y a un feu en B ou C , mais serions incapables de distinguer les deux cas avec ces seules informations, car les lignes correspondantes de la table 1.I sont

Pièce \ Voyants	B	C	G
A	•		
B	•	•	
C	•	•	
D		•	
E	•		•
F			•
G			•
H			•

Table 1.I – Voyants allumés suivant les différents départs d’incendie dans l’exemple de la figure 1.III. On constate qu’aucune ligne n’est vide : le code forme un ensemble dominant.

égales.

Dans le graphe G_1 , nous dirons que le code choisi, à savoir $\mathcal{C} = \{b, c, g\}$, n’est pas suffisant pour *séparer* le sommet b du sommet c . Le même problème se présente avec les trois sommets f, g et h . Il nous faut pour ce faire davantage de mots de code, réalisant ainsi ce que nous appellerons un *code identifiant*, c’est-à-dire un choix de mots de code tel que la table correspondante, en plus de ne pas comporter de lignes vides, ne contienne pas deux lignes égales. Pour ce graphe, il nous faut au minimum quatre mots de code afin de réaliser un code identifiant. Un exemple optimal est donné sur la figure 1.IV, et on pourra vérifier les conditions requises pour être un code identifiant sur la table 1.II.

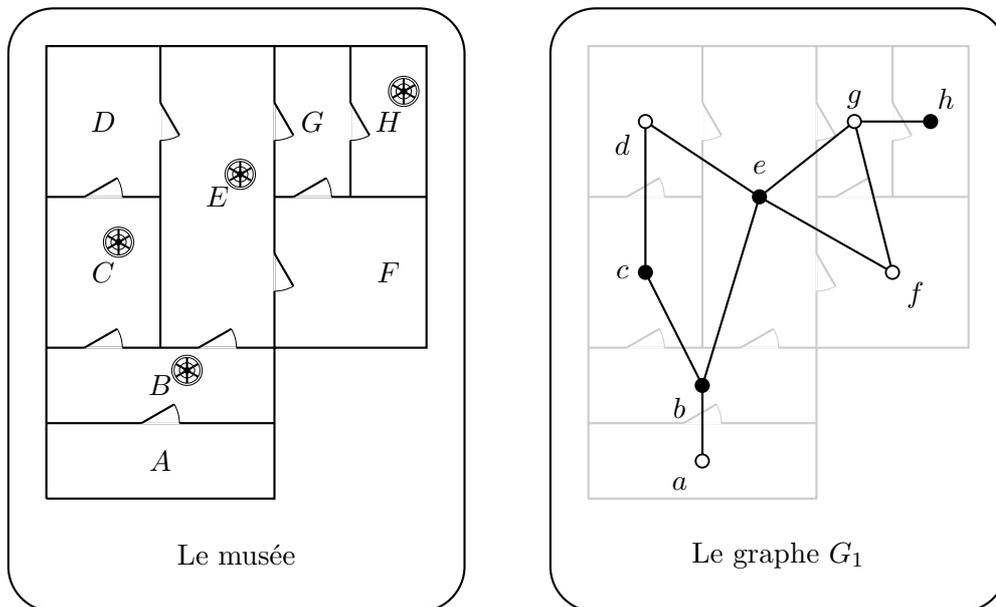


Figure 1.IV – Un exemple de code identifiant composé des sommets b, c, e et h dans le graphe G_1 ; les mots de code sont les sommets noirs. Dans le musée, les quatre détecteurs de fumée correspondants suffisent à surveiller toutes les pièces et localiser les départs d’incendie.

Nous généraliserons la notion de code identifiant dans un graphe à celle de code $(r, \leq \ell)$ -identifiant où r et ℓ sont des entiers strictement positifs : intuitivement, un tel code remplit les mêmes fonctions qu’un code identifiant, à ceci près que la zone de couverture des mots

Pièce \ Voyants	B	C	E	H
A	•			
B	•	•	•	
C	•	•		
D		•	•	
E	•		•	
F			•	
G			•	•
H				•

Table 1.II – *Voyants allumés suivant les différents départs d'incendie dans l'exemple de la figure 1.IV. On constate qu'aucune ligne n'est vide et qu'elles sont deux à deux distinctes : le code est identifiant.*

de codes (*i.e.* la portée des détecteurs en nombre portes à franchir) est r et non plus 1, et que le code permet de détecter et localiser jusqu'à ℓ feux simultanés.

1.2 Notations

Comme nous venons de le mentionner, la notion de code identifiant se décline de plusieurs manières et on parlera de codes identifiants, de codes r -identifiants ou de codes $(r, \leq \ell)$ -identifiants. Il se trouve que le terme «code identifiant» désigne aussi bien ce genre de codes dans son ensemble qu'un code $(1, \leq 1)$ -identifiant ; on peut également parler de code 1-identifiant, car le terme «code r -identifiant» signifie la même chose que «code $(r, \leq 1)$ -identifiant». Afin d'y voir clair dès maintenant et pour éviter de nous répéter par la suite, lorsqu'un paramètre lié aux codes identifiants (par exemple $\gamma_{r,\ell}^{id}(G)$, cf. 1.3.2) dépend d'un couple noté $(r, \leq \ell)$ ou (r, ℓ) , nous le déclinerons (dans l'exemple en $\gamma_r^{id}(G)$ et $\gamma^{id}(G)$) avec la convention suivante :

Convention 1.1. *Lorsque $\ell = 1$ le couple $(r, \leq \ell)$ (ou (r, ℓ)) peut juste être noté r et lorsqu'on a également $r = 1$, la référence à $(r, \leq \ell)$ peut être omise.*

Ainsi «code $(r, \leq 1)$ -identifiant» et «code r -identifiant» ont la même signification ; de même pour «code $(1, \leq 1)$ -identifiant», «code 1-identifiant» et «code identifiant». Nous utiliserons la même convention pour les graphes sans $(r, \leq \ell)$ -jumeaux ainsi que pour les systèmes de $(r, \leq \ell)$ -contrôle au chapitre 4. Dans tout le chapitre, r et ℓ désignent des entiers naturels strictement positifs.

1.3 Définitions

1.3.1 Identification des sommets

Soit G un graphe non orienté. Un *code* de G est simplement une partie \mathcal{C} de l'ensemble $V(G)$ des sommets de G , et ses éléments sont appelés *mots de code*. Soient x et y des sommets de G et $c \in \mathcal{C}$ un mot de code. On dit que :

- le sommet x est *r -couvert* par le mot de code c si $d_G(c, x) \leq r$;
- les sommets x et y sont *r -séparés* par le mot de code c si l'un de ces deux sommets est r -couvert par c et l'autre ne l'est pas.

On dira que x est r -couvert par le code \mathcal{C} s'il est couvert par au moins un mot de code appartenant à \mathcal{C} , et nous parlerons de même de r -séparation de deux sommets par \mathcal{C} . Un sommet à la fois r -couvert et r -séparé de tous les sommets $y \in V(G) \setminus \{x\}$ par \mathcal{C} sera dit r -identifié. On notera $I_{\mathcal{C}}^r(x)$ l'ensemble identifiant de x , qui est constitué des mots de codes qui r -couvrent le sommet x , c'est-à-dire

$$I_{\mathcal{C}}^r(x) = B_G(x, r) \cap \mathcal{C}.$$

Définition 1.2. Un code $\mathcal{C} \subset V(G)$ est dit r -identifiant pour le graphe G si l'une des deux conditions équivalentes qui suivent est vérifiée :

- (i) tous les sommets de G sont r -identifiés par \mathcal{C} ;
- (ii) les ensembles $I_{\mathcal{C}}^r(x)$ pour $x \in V(G)$ sont tous non vides et deux à deux distincts.

Conformément à la convention 1.1, lorsque $r = 1$ on écrit *code identifiant* pour «code 1-identifiant», « $I_{\mathcal{C}}(x)$ » pour « $I_{\mathcal{C}}^1(x)$ », «séparés» pour «1-séparés», etc.

1.3.2 Identification des ensembles de sommets

Si \mathcal{C} est un code du graphe G et $A \subset V(G)$ est un ensemble de sommets de G , on définit $I_{\mathcal{C}}^r(A)$ comme l'ensemble des mots de code r -couvrant au moins un sommet de A , c'est-à-dire :

$$I_{\mathcal{C}}^r(A) = \bigcup_{x \in A} I_{\mathcal{C}}^r(x).$$

On a donc, pour tout sommet x , la relation $I_{\mathcal{C}}^r(\{x\}) = I_{\mathcal{C}}^r(x)$, ainsi que $I_{\mathcal{C}}^r(\emptyset) = \emptyset$. Les codes identifiant les ensembles de sommets, ou codes $(r, \leq \ell)$ -identifiants sont alors ainsi définis :

Définition 1.3. Étant donnés deux entiers strictement positifs r et ℓ , un code $\mathcal{C} \subset V(G)$ est dit $(r, \leq \ell)$ -identifiant pour le graphe G si les ensembles $I_{\mathcal{C}}^r(A)$ sont deux à deux distincts pour toutes les parties A de $V(G)$ de cardinal au plus ℓ .

Remarquons que si $A \neq \emptyset$ on aura alors toujours $I_{\mathcal{C}}^r(A) \neq \emptyset$; pour $\ell = 1$, on retrouve donc la notion de code r -identifiant. Nous noterons $\gamma_{r,\ell}^{id}(G)$ le cardinal minimum d'un code $(r, \leq \ell)$ -identifiant dans un graphe G , en appliquant la convention 1.1 qui donnera les abréviations $\gamma_r^{id}(G)$ et $\gamma^{id}(G)$.

1.4 Graphes sans jumeaux

Si deux sommets distincts d'un graphe G ont le même voisinage fermé, alors aucun mot de code ne pourra les séparer ; deux tels sommets d'un graphe seront appelés *1-jumeaux*, ou plus simplement *jumeaux* (voir fig. 1.V). Ainsi, un graphe contenant deux jumeaux ne saurait admettre de code identifiant. Plus généralement, deux r -jumeaux dans un graphe G , où $r \geq 1$, sont deux sommets distincts x et y de G tels que

$$B_G(x, r) = B_G(y, r)$$

(voir la figure 1.VI pour un exemple de 2-jumeaux dans un graphe). Un graphe ne contenant pas de r -jumeaux est tout bonnement appelé *graphe sans r -jumeaux*.

Le lien précis avec les codes identifiants est donné par le théorème suivant (dont la preuve est élémentaire) :

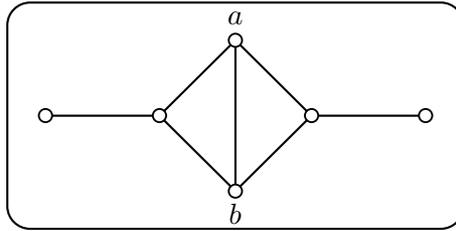


Figure 1.V – Les sommets a et b sont jumeaux; ce graphe ne peut admettre de code identifiant.

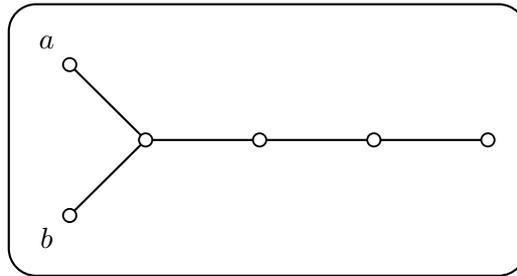


Figure 1.VI – Un graphe sans jumeaux, mais où les sommets a et b sont 2-jumeaux.

Théorème 1.4. *Un graphe admet des codes r -identifiants si et seulement s'il est sans r -jumeaux.*

Autrement dit, un graphe G admet des codes identifiants si et seulement si $V(G)$ est un code identifiant de G ; la figure 1.VII montre un exemple de code 2-identifiant dans un graphe sans 2-jumeaux. Le fait qui précède se généralise aux codes $(r, \leq \ell)$ -identifiants :

Théorème 1.5. *Pour tous $r \geq 1$ et $\ell \geq 1$, un graphe G admet des codes $(r, \leq \ell)$ -identifiants si et seulement si pour tous les ensembles distincts $A, B \subset V(G)$ de taille au plus ℓ on a*

$$\bigcup_{x \in A} B_G(x, r) \neq \bigcup_{x \in B} B_G(x, r).$$

Les graphes satisfaisant la condition du théorème précédent sont appelés *graphes sans $(r, \leq \ell)$ -jumeaux*; les jumeaux en question sont ici des ensembles de sommets que le code ne peut distinguer. Le chapitre 2 sera entièrement consacré à l'étude des graphes sans $(r, \leq \ell)$ -jumeaux; dans la suite du chapitre présent nous étudierons les propriétés des codes identifiants dans ces graphes.

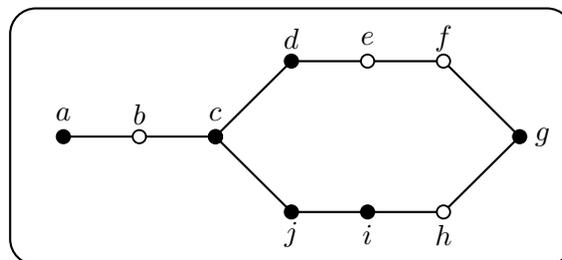


Figure 1.VII – Un graphe sans 2-jumeaux muni d'un code 2-identifiant (sommets noirs).

1.5 Liens avec d'autres notions

1.5.1 Ensembles dominants et codes localisateurs-dominateurs

Rappelons qu'un *ensemble dominant* dans un graphe G est un code $\mathcal{C} \subset V(G)$ tel que tout sommet de G soit couvert par au moins un mot de code (voir 0.7); un code identifiant est donc en particulier un ensemble dominant. Un code \mathcal{C} dans un graphe G est dit *localisateur-dominateur* si les ensembles $I_{\mathcal{C}}(x)$ sont tous non vides et deux à deux distincts pour tous les $x \in V(G) \setminus \mathcal{C}$. On peut donc imaginer un code localisateur-dominateur comme un code identifiant où les mots de code seraient automatiquement identifiés. On remarque donc qu'un code identifiant est un code localisateur-dominateur, et que les codes localisateurs-dominateurs sont aussi des ensembles dominants. En notant $\gamma^L(G)$ la taille minimale d'un code localisateur-dominateur dans G et $\gamma(G)$ le nombre de domination de G , il vient donc

$$\gamma(G) \leq \gamma^L(G) \leq \gamma^{id}(G).$$

Les codes localisateurs-dominateurs ont été introduits par P.J. Slater en 1988 ([87]) et ont donné lieu à de nombreux développements. Nous renvoyons à [73] pour une bibliographie quasi-exhaustive les concernant, ainsi qu'au chapitre qui s'y rapporte dans [57].

Notons que calculer le cardinal minimum d'un ensemble dominant, ou d'un code localisateur-dominateur, dans un graphe donné constitue un problème \mathcal{NP} -difficile (voir respectivement [64] et [41]); nous verrons au chapitre 3 que c'est aussi le cas pour la recherche de codes identifiants.

1.5.2 Puissances de graphes

La notion de puissance de graphe (voir 0.9) est commode pour ramener l'étude des codes $(r, \leq \ell)$ -identifiants à celle des codes $(1, \leq \ell)$ -identifiants, puisqu'on a le résultat suivant (dont la preuve est immédiate) :

Théorème 1.6. *Pour $r \geq 1$ et $\ell \geq 1$, un graphe G est sans $(r, \leq \ell)$ -jumeaux si et seulement si G^r est sans $(1, \leq \ell)$ -jumeaux, et un code $\mathcal{C} \subset V(G)$ est $(r, \leq \ell)$ -identifiant pour G si et seulement s'il est $(1, \leq \ell)$ -identifiant pour G^r .*

Nous étudions cette notion plus en détail dans la seconde partie de cette thèse.

1.6 Valeurs extrémales de $\gamma_{r,\ell}^{id}(G)$

1.6.1 Borne inférieure

Une borne élémentaire, en fonction du nombre de sommets, est la suivante.

Théorème 1.7 (Karpovsky, Chakrabarty, Levitin [65]). *Soit G un graphe sans r -jumeaux d'ordre n . Alors*

$$\lceil \log_2(n+1) \rceil \leq \gamma_r^{id}(G).$$

S. Gravier et J. Moncel ([76]) ont caractérisé les graphes pour lesquels cette borne est atteinte, dans le cas $r = 1$. I. Charon, O. Hudry et A. Lobstein ont montré ([37]) que pour tout k satisfaisant

$$\lceil \log_2(n+1) \rceil \leq k \leq n-1$$

il existait un graphe sans jumeaux G d'ordre n tel que $\gamma_1^{id}(G) = k$.

1.6.2 Borne supérieure

Étant donné un graphe sans r -jumeaux G , quelle est la valeur maximale de $\gamma_{r,\ell}^{id}(G)$ en fonction de l'ordre n de G ? Le résultat suivant a été trouvé indépendamment plusieurs fois :

Théorème 1.8 (Gravier, Moncel [54], Bertrand, Charon, Hudry, Lobstein [33]). *Soit $r \geq 1$ et G un graphe sans r -jumeaux connexe d'ordre $n \geq 3$. Alors*

$$\gamma_r^{id}(G) \leq n - 1.$$

Le théorème 1.8 peut aussi être vu comme une conséquence du théorème suivant dû à A. Bondy, dont nous fournissons une esquisse de preuve.

Théorème 1.9 (A. Bondy [20]). *Soient*

$$S_1, S_2, \dots, S_n$$

n parties distinctes d'un ensemble fini non vide X , avec $n \leq |X|$. Alors il existe $x \in X$ tel que les parties

$$S_1 \setminus \{x\}, S_2 \setminus \{x\}, \dots, S_n \setminus \{x\}$$

soient encore distinctes.

Preuve. Par l'absurde : supposons qu'un tel élément x n'existe pas. Nous construisons un graphe non orienté dont les sommets sont les ensembles S_i , et nous ajoutons pour chaque $y \in X$ une arête dans le graphe entre deux parties S_i et S_j tels que $S_i \setminus \{y\} = S_j \setminus \{y\}$; deux telles parties doivent exister par hypothèse. Il est facile de constater qu'un tel graphe ne peut avoir de cycle, et doit donc avoir moins d'arêtes que de sommets : soit

$$|X| < n,$$

une contradiction. □

Ce théorème est optimal, comme le montrent sur l'ensemble $X = \{1, 2, \dots, n\}$ les familles

$$\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \dots, \{1, 2, \dots, n\}$$

et

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots, \{n\}$$

qui comptent chacune $n + 1$ éléments.

Preuve du théorème 1.8. Les boules $B_G(v, r)$ pour $v \in V(G)$ sont deux à deux distinctes et de cardinal supérieur ou égal à 2 puisque G est sans r -jumeaux, connexe et compte au moins trois sommets. Appliquons le théorème 1.9 à la famille

$$\{B_G(v, r) : v \in V(G)\}$$

de n sous-ensembles de $V(G)$: il existe un sommet x tel que les n ensembles composant la famille

$$\{B_G(v, r) \setminus \{x\} : v \in V(G)\}$$

soient deux à deux distincts. Étant également non vides, on en déduit que $V(G) \setminus \{x\}$ est un code identifiant de G . □

Notons que ce théorème n'est valable que pour $\ell = 1$; lorsque $\ell \geq 2$, on peut avoir $\gamma_{r,\ell}^{id}(G) = n$, comme le montre l'exemple du cycle : pour $n \geq 4r + 3$ et $\ell = 2$ on établit facilement

$$\gamma_{r,2}^{id}(C_n) = n.$$

1.7 Chaînes et cycles

Les graphes les plus simples pour lesquels on peut tenter de calculer les valeurs de $\gamma_{r,\ell}^{id}$ sont les chaînes et les cycles, et ceci constitue déjà un problème combinatoire assez complexe. La chaîne \mathcal{P}_n est sans r -jumeaux dès que $n \geq 2r + 1$. Des résultats partiels ont été obtenus dans [17], et le cas $r = 2$ a été traité dans [82]. Finalement Junnila et Laihonon ont traité les cas restants ([63]). Les différentes valeurs de $\gamma_r^{id}(\mathcal{P}_n)$ sont données par la table 1.III.

n	condition	$\gamma_r^{id}(\mathcal{P}_n)$
$n = 2r + 1$		$2r$
$2r + 2 \leq n \leq 4r + 1$		$2r + 1$
$n = 4r + 2$		$2r + 2$
$n \geq 4r + 3$ avec $n = \frac{q(2r+1)}{2} + p$ où $1 \leq p \leq 2r + 1$	q pair et $1 \leq p \leq r + 1$	$\frac{q(2r+1)}{2} + p$
	q pair et $2r + 1 < p$	$\frac{q(2r+1)}{2} + p - 1$
	q impair et $1 \leq p \leq 2r$	$\frac{(q+1)(2r+1)}{2}$
	q impair et $2r < p$	$\frac{(q+1)(2r+1)}{2} + 1$

Table 1.III – Taille minimum d'un code r -identifiant dans \mathcal{P}_n

La chaîne \mathcal{P}_n ayant des sommets de degré 1, elle n'admet aucun code $(r, \leq \ell)$ -identifiant dès que $\ell \geq 2$ (voir 2.4.1), sauf dans le cas élémentaire $n = 1$.

Passons maintenant au cas des cycles \mathcal{C}_n . Le cas $r = 1$ a été traité dans [55], et le cas $r = 2$ dans [82]. Le cas général a été terminé il y a peu. Les résultats sont résumés par les tables 1.IV et 1.V. Les références sont données en fonction du premier article ayant établi les valeurs.

n	$\gamma_r^{id}(\mathcal{C}_n)$	référence
$n = 2r + 2$	$n - 1$	[17]
$n \geq 2r + 4$, n pair	$\frac{n}{2}$	[17]

Table 1.IV – Taille minimum d'un code r -identifiant dans \mathcal{C}_n pour n pair

Le cycle \mathcal{C}_n est sans $(r, \leq 2)$ -jumeaux dès que $n \geq 4r + 3$, son unique code $(r \leq 2)$ -identifiant contenant tous les sommets. Enfin, dès que $\ell \geq 3$, le cycle \mathcal{C}_n n'admet plus de codes $(r, \leq \ell)$ -identifiants.

1.8 Grille du roi

La *grille du roi* est un graphe non orienté infini, dont l'ensemble des sommets est \mathbb{Z}^2 , et tel que deux sommets distincts (i, j) et (i', j') sont adjacents si et seulement si $|i - i'| \leq 1$ et $|j - j'| \leq 1$; ainsi deux sommets sont adjacents si, sur l'échiquier infini \mathbb{Z}^2 , un roi peut se déplacer en un coup d'un sommet à l'autre. Le figure 1.VIII représente un morceau de ce graphe. Nous présentons ici quelques résultats sur les codes identifiants de ce graphe,

n	conditions	$\gamma_r^{id}(\mathcal{C}_n)$	référence
$n = 2r + 3$		$\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$	[55]
$2r + 5 \leq n \leq 3r + 1$	$\text{pgcd}(2r + 1, n) = 1$ et $n = 2mp + 1$ ou $n = (2m + 2)p - 1$ avec $n = 2r + 1 + p$ et $m \geq 2$	$\frac{n+1}{2} + 1$	[63]
	$\text{pgcd}(2r + 1, n) = 1$ autres cas	$\frac{n+1}{2}$	[63]
	$\text{pgcd}(2r + 1, n) > 1$	$\text{pgcd}(2r + 1, n) \left\lceil \frac{2}{\text{pgcd}(2r+1, n)} \right\rceil$	[63]
$3r + 2 \leq n$	$\text{pgcd}(2r + 1, n) = 1$ et $n = 2m(2r + 1) + 1$ ou $n = (2m + 1)(2r + 1) + 2r$ avec $m \geq 1$	$\frac{n+1}{2} + 1$	[55] et [89]
	$\text{pgcd}(2r + 1, n) = 1$ autres cas	$\frac{n+1}{2}$	[55] et [89]
	$\text{pgcd}(2r + 1, n) > 1$	$\text{pgcd}(2r + 1, n) \left\lceil \frac{2}{\text{pgcd}(2r+1, n)} \right\rceil$	[55]

Table 1.V – Taille minimum d'un code r -identifiant dans \mathcal{C}_n pour n impair

essentiellement pour les comparer aux résultats analogues pour les systèmes de contrôle (chapitre 4).

On définit les codes identifiants dans la grille du roi de manière analogue au cas fini : un code identifiant est un ensemble \mathcal{C} de sommets de la grille du roi qui couvre tous les sommets et sépare toutes les paires de sommets distincts. On généralise de même au cas infini la notion de code $(r, \leq \ell)$ -identifiant pour $r \geq 1$ et $\ell \geq 1$. Soit pour $n \geq 0$ l'ensemble T_n défini par

$$T_n = \{(i, j) : -n \leq i \leq n \text{ et } -n \leq j \leq n\}.$$

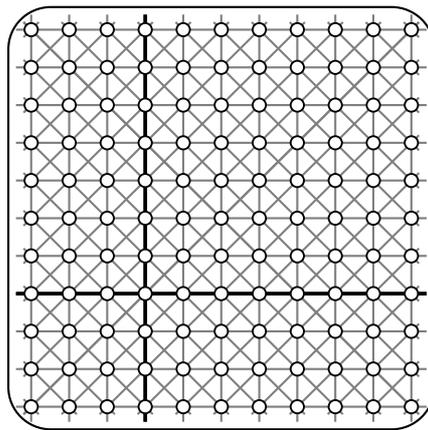


Figure 1.VIII – La grille du roi (extrait).

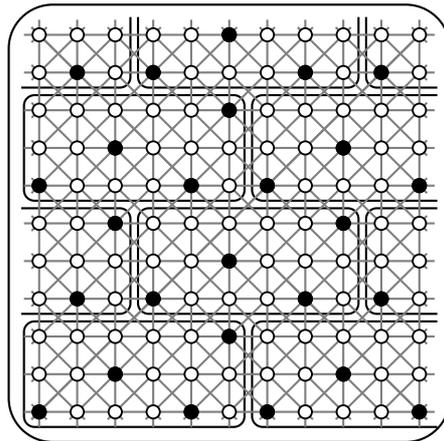


Figure 1.IX – Un code 1-identifiant de densité minimale dans la grille du roi; les mots de code sont les sommets noirs.

La densité d'un code \mathcal{C} de la grille du roi est alors définie par

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\mathcal{C} \cap T_n|}{|T_n|} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{|\mathcal{C} \cap T_n|}{(2n+1)^2}.$$

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.10 (Charon, Honkala, Hudry, Lobstein [32] & [40]). *Soit $D_{1,1}$ la borne inférieure des densités des codes identifiants dans la grille du roi. On a*

$$D_{1,1} = \frac{2}{9}.$$

La figure 1.IX représente un code 1-identifiant de densité optimale dans la grille du roi : comme la plupart des codes trouvés en pratique ce code est périodique.

Pour $r > 1$, nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.11 (Charon, Honkala, Hudry, Lobstein [28]). *Pour tout $r \geq 2$, la borne inférieure $D_{r,1}$ des densités des codes $(r, \leq 1)$ -identifiants dans la grille du roi est égale à*

$$D_{r,1} = \frac{1}{4r}.$$

Plus généralement, on définira $D_{r,\ell}$ comme la borne inférieure des densités des codes $(r, \leq \ell)$ -identifiants dans la grille du roi. Notons que la grille du roi admet des $(r, \leq 3)$ -jumeaux pour tout $r \geq 1$: on a toujours l'inclusion

$$B((0,0), r) \subset B((-1,0), r) \cup B((1,0), r)$$

et les ensembles $\{(-1,0), (1,0)\}$ et $\{(-1,0), (0,0), (1,0)\}$ ne peuvent donc pas être r -séparés.

Nous reproduisons la table dressée par M. Peltó dans [80], qui donne les meilleures bornes pour sur $D_{r,\ell}$ connues à ce jour (table 1.VI).

	$\ell = 1$	$\ell = 2$	$\ell \geq 3$
$r = 1$	$D_{1,1} = \frac{2}{9}$ [32, 40]	$\frac{5}{12} \leq D_{2,1} \leq \frac{3}{7}$ [80] [60]	n'existe pas [60]
$r = 2$	$D_{2,1} = \frac{1}{8}$ [28]	$\frac{31}{120} \leq D_{2,2} \leq \frac{2}{7}$ [60] [80]	n'existe pas [60]
$r \geq 3$	$D_{r,1} = \frac{1}{4r}$ [28]	$D_{r,2} = \frac{1}{4}$ [60]	n'existe pas [60]

Table 1.VI – Valeurs connues à ce jour concernant les densités minimales $D_{r,\ell}$ des codes $(r, \leq \ell)$ -identifiants dans la grille du roi

Chapitre 2

Structure des graphes sans jumeaux

Sommaire

2.1	Réduction des graphes sans jumeaux	24
2.2	Paramètres extrémaux des graphes sans r-jumeaux	25
2.2.1	Ordre et taille	26
2.2.2	Degré minimal	26
2.3	Longues chaînes dans les graphes sans r-jumeaux	27
2.4	Structure des graphes sans $(1, \leq \ell)$-jumeaux	27
2.4.1	Graphes sans $(1, \leq 2)$ -jumeaux	27
2.4.2	Cas général	29

Nous avons vu que la notion de codes $(r, \leq \ell)$ -identifiants appelle immédiatement celle de *graphes sans $(r, \leq \ell)$ -jumeaux*, qui sont précisément les graphes admettant de tels codes (voir 1.4). Rappelons que nous utilisons, comme dans toute cette partie, la convention 1.1 pour les notations.

2.1 Réduction des graphes sans jumeaux

Nous commençons ce chapitre par une propriété des graphes sans 1-jumeaux, qui étend un résultat de [36]. La preuve reprend l'idée utilisée par J. Moncel et S. Gravier dans [54].

Théorème 2.1. *Soit G un graphe connexe sans jumeaux ayant au moins 4 sommets. Il existe un sommet $v_0 \in V(G)$ tel que $G \setminus v_0$ soit aussi sans jumeaux et connexe.*

Preuve.

Soit \mathcal{A} l'ensemble des sommets v de G tels que le graphe $G \setminus v$ soit connexe. L'ensemble \mathcal{A} est non vide : par exemple, les extrémités d'un diamètre de G , ou d'une chaîne de G de longueur maximale, appartiennent à \mathcal{A} . Choisissons un sommet $a \in \mathcal{A}$ dont le degré soit le plus grand possible. Si $G \setminus a$ est sans jumeaux, on pose $v_0 = a$; sinon, c'est qu'il existe deux sommets distincts b_1 et b_2 de G tels que

$$N_G[b_1] = N_G[b_2] \cup \{a\}. \quad (2.1)$$

Dans ce cas, puisque tout sommet adjacent à b_2 l'est aussi à b_1 , on a $b_2 \in \mathcal{A}$. Supposons donc à nouveau que $G \setminus b_2$ ait des jumeaux (sinon, nous pouvons poser $v_0 = b_2$) : il existe

deux sommets distincts x et y dans G , tels que

$$N_G[x] = N_G[y] \cup \{b_2\}. \quad (2.2)$$

Puisque $x \in N_G[b_2]$, d'après (2.1) on a aussi $x \in N_G[b_1]$. De façon à avoir (2.2), on a nécessairement $y \in N_G[b_1] \setminus N_G[b_2]$ et donc $y = a$. Ainsi,

$$N_G[x] = N_G[a] \cup \{b_2\}. \quad (2.3)$$

Montrons que $x \in \mathcal{A}$, contredisant alors le choix de a par 2.3. Si $x = b_1$, par (2.1) et (2.3), les sommets n'appartenant pas à $\{b_1, b_2, a\}$ peuvent soit être adjacents, à ces trois sommets, soit à aucun des trois. Puisque $n \geq 4$, le premier cas se produit pour au moins un sommet de G : il est alors immédiat de vérifier que $G \setminus b_1$ est connexe, donc $b_1 \in \mathcal{A}$.

Si $x \neq b_1$, alors par (2.3) on a aussi $x \neq a$ et $x \neq b_2$. Ainsi, $x \in \mathcal{A}$ puisque les sommets adjacents à x sont tous adjacents à a , à part b_2 mais ce dernier est relié à a par la chaîne b_2b_1a . \square

On peut aussi formuler ce résultat de la façon suivante, permettant de construire un graphe sans jumeaux en ajoutant les sommets un à un.

Corollaire 2.2. *Soit G un graphe connexe sans jumeaux ayant n sommets, $n \geq 4$. Alors il existe une suite de graphes connexes sans jumeaux*

$$G_3, G_4, \dots, G_n$$

où G_3 est une chaîne à 3 sommets et $G_n = G$, telle que pour $3 \leq i \leq n-1$, le graphe G_i ait i sommets et soit un sous-graphe induit de G_{i+1} .

En combinant ce résultat avec le lemme suivant et le fait que $\gamma_1^{id}(\mathcal{P}_3) = 2$, on trouve une nouvelle preuve du fait qu'un code identifiant dans un graphe sans jumeaux d'ordre n nécessite au plus $n-1$ sommets (théorème 1.8).

Lemme 2.3 (Charon, Hudry, Lobstein (communication personnelle)). *Soit G un graphe sans jumeaux connexe et $v \in V(G)$ tel que le graphe $G \setminus v$ soit aussi connexe et sans jumeaux. Alors*

$$\gamma^{id}(G) \leq \gamma^{id}(G \setminus v) + 1.$$

Preuve du lemme 2.3. Soit \mathcal{C} un code identifiant de taille minimale de $G \setminus v$, et considérons-le comme un code de G . Etant donné que pour toute paire de sommets distincts x et y dans $V(G) \setminus \{v\}$, les sommets x et y sont couverts et séparés par \mathcal{C} , seul v peut, ou bien n'être pas couvert par \mathcal{C} , ou bien ne pas être séparé d'un unique sommet $v' \neq v$. Dans le premier cas, il suffit d'ajouter v à \mathcal{C} pour faire de \mathcal{C} un code identifiant de G , et dans le deuxième cas il suffit d'ajouter un sommet de $N_G[v] \Delta N_G[v']$, non vide par hypothèse. \square

2.2 Paramètres extrémaux des graphes sans r -jumeaux

Ce travail avait été commencé par Charon, Honkala, Hudry et Lobstein dans [30] et [31]; nous nous sommes joints à eux pour le poursuivre dans [6]. Nous ne présentons ici que les résultats concernant la taille et le degré minimal; se reporter à l'article [6] (annexe A) pour les autres paramètres.

2.2.1 Ordre et taille

Rappelons que l'ordre d'un graphe G est son nombre de sommets (ici noté n) et sa taille est son nombre d'arêtes (ici noté ϵ). Le résultat qui suit peut être vu comme une conséquence des théorèmes 2.8 et 2.10 qui seront abordés dans la prochaine section.

Théorème 2.4. *Soit $r \geq 1$ et G un graphe connexe sans r -jumeaux d'ordre $n \geq 2$ et de taille ϵ . Alors $n \geq 2r + 1$ et $\epsilon \geq 2r$, et le seul de ces graphes admettant $2r + 1$ sommets ou $2r$ arêtes est la chaîne P_{2r+1} .*

Notons qu'aucun autre paramètre n'étant contraint, il existe des graphes sans r -jumeaux connexes ayant un ordre ou une taille arbitrairement grands; en revanche, trouver la valeur maximale de la taille ϵ devient plus difficile quand l'ordre n du graphe est fixé. Commençons par le cas $r = 1$:

Théorème 2.5 (Auger, Charon, Honkala, Hudry, Lobstein [6] & annexe A). *Soit G un graphe connexe sans 1-jumeaux d'ordre $n \geq 3$ et de taille ϵ . Alors*

$$\epsilon \leq \binom{n}{2} - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

et le seul de ces graphes satisfaisant l'égalité est le graphe hyperoctaédral \mathcal{H}_n .

Pour $r > 1$, le problème est plus délicat et les résultats précis complexes à énoncer; nous renvoyons à l'article [6] (annexe A) pour les détails. Néanmoins, nous pouvons donner l'ordre de grandeur asymptotique suivant :

Théorème 2.6 (Auger, Charon, Honkala, Hudry, Lobstein [6] & annexe A). *Soit $r \geq 3$ fixé et soit $F_{r,n}(\epsilon)$ la taille maximum d'un graphe connexe sans r -jumeaux d'ordre n . Alors*

$$.63(r - .915)n \log_2 n \lesssim \binom{n}{2} - F_{r,n}(\epsilon) \lesssim rn \log_2 n,$$

où la notation $f(n) \lesssim g(n)$ signifie

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} \geq 1.$$

2.2.2 Degré minimal

Il est clair qu'il existe pour toutes valeurs de n et r (avec $n \geq 2r + 1$) des graphes sans r -jumeaux connexes de degré minimal 1 : une simple chaîne convient. Une question plus intéressante est de déterminer la valeur *maximale* du degré minimal Δ_{\min} d'un tel graphe. Voici un des résultats :

Théorème 2.7 (Auger, Charon, Honkala, Hudry, Lobstein [6] & annexe A). *Soit G un graphe connexe sans r -jumeaux d'ordre $n \geq 2$ et de degré minimal $\Delta_{\min} \geq 2$. Pour tout $r \geq 6$ on a*

$$\Delta_{\min} \leq \min \left\{ \frac{n}{\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor + 1} - 1, \frac{3n - r + 2}{2r - 5} \right\}.$$

2.3 Longues chaînes dans les graphes sans r -jumeaux

Deux sommets distincts x et y d'un graphe sans r -jumeaux doivent être r -séparés, d'où l'existence d'un sommet dont la distance à x , ou à y , est au moins $r + 1$. Ceci laisse présager l'existence de longues chaînes dans un tel graphe ; et en effet la propriété suivante a été établie :

Théorème 2.8 (Charon, Hudry, Lobstein [29]). *Pour tout $r \geq 1$, un graphe sans r -jumeaux d'ordre au moins 3 contient une chaîne à $2r + 1$ sommets en tant que sous-graphe partiel.*

Les auteurs ont conjecturé dans [29] qu'il existerait en fait une telle chaîne en tant que sous-graphe *induit* dans un graphe sans r -jumeaux, c'est-à-dire un chaîne de la forme

$$x_1 x_2 \cdots x_{2r+1}$$

où deux sommets x_i et x_j ne peuvent être adjacents dès que $|i - j| > 1$.

Nous avons prouvé cette conjecture dans [5], en reprenant l'idée d'une preuve due à F. Chung dans l'article [46].

Théorème 2.9 (Auger [5]). *Un graphe de rayon $\rho \geq 1$ et contenant un centre c dont aucun voisin n'est un centre admet une chaîne à $2\rho + 1$ sommets en tant que sous-graphe induit.*

De ce résultat, nous déduisons facilement la conjecture :

Théorème 2.10. *Pour tout $r \geq 1$, un graphe sans r -jumeaux d'ordre au moins 3 contient une chaîne à $2r + 1$ sommets en tant que sous-graphe induit.*

Un corollaire intéressant du théorème 2.10 est le suivant :

Corollaire 2.11. *Pour tout $r \geq 1$, la chaîne P_{2r+1} à $2r + 1$ sommets est le plus petit graphe sans r -jumeaux d'ordre au moins 3.*

Nous avons volontairement laissé une ambiguïté ci-dessus dans le superlatif «le plus petit» : il peut s'entendre au sens du nombre de sommets, ou des relations d'ordre «être un sous-graphe induit de» ou «être un sous-graphe partiel de» ; pour ces différentes relations la chaîne P_{2r+1} est un élément minimal de l'ensemble des graphes sans r -jumeaux d'ordre au moins 3.

Une autre preuve du théorème [5], n'utilisant pas [46] mais plus complexe, peut aussi être consultée dans [4].

2.4 Structure des graphes sans $(1, \leq \ell)$ -jumeaux

2.4.1 Graphes sans $(1, \leq 2)$ -jumeaux

Il est immédiat de constater qu'un graphe G sans $(1, \leq 2)$ -jumeaux ne peut posséder de sommet de degré 1 : en effet, si a est un sommet de degré 1 ayant pour unique voisin un sommet b , on a toujours

$$N_G[b] = N_G[\{a, b\}].$$

Il s'ensuit qu'un graphe sans $(1, \leq 2)$ -jumeaux d'ordre au moins 3 possède nécessairement un cycle. Nous avons prouvé le résultat suivant :

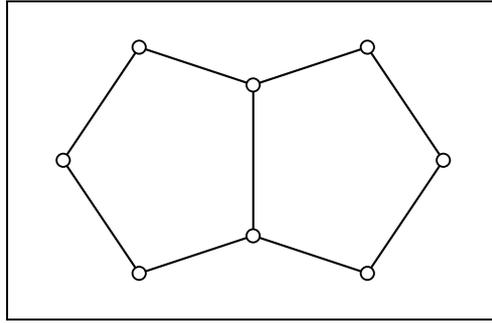


Figure 2.I – Un graphe sans $(1, \leq 2)$ -jumeaux et dont le plus grand cycle sans corde est de longueur 5

Théorème 2.12 (Auger, Charon, Hudry, Lobstein [14], [9] & annexe C). *Un graphe sans $(1, \leq 2)$ -jumeaux d'ordre au moins 3 contient un cycle de longueur au moins 7 en tant que sous-graphe partiel.*

Puisque le plus petit cycle sans $(1, \leq 2)$ -jumeaux compte 7 sommets, ce résultat est l'analogue des théorèmes 2.8 et 2.10 dans le cas $(r, \ell) = (1, 2)$. Le plus petit cycle sans $(r, \leq 2)$ -jumeaux étant le cycle de longueur $4r + 3$, il n'y a de là qu'un pas pour conjecturer ce qui suit :

Conjecture 2.13. *Pour tout $r \geq 1$, un graphe sans $(r, \leq 2)$ -jumeaux d'ordre au moins 3 contient un cycle de longueur au moins $4r + 3$ en tant que sous-graphe partiel.*

Cependant, contrairement au cas du théorème 2.10, un tel cycle ne saurait toujours exister en tant que sous-graphe induit, en effet déjà pour $r = 1$ on peut trouver un graphe sans $(1, \leq 2)$ -jumeaux, ayant plus d'une arête, dont le plus grand cycle sans corde est de longueur 5 (voir sur la figure 2.I).

Quant à la structure des graphes sans $(1, \leq 3)$ -jumeaux, peu de choses sont connues à l'heure actuelle. Le plus petit de ces graphes actuellement connu a été donné par T. Laihonen dans [68] et est représenté sur la figure 2.II. Ce graphe possède 16 sommets et tous ses sommets sont de degré 3. Il paraît cependant prématuré de penser que tous les graphes sans $(1, \leq 3)$ -jumeaux pourraient contenir un sous-graphe apparenté à celui-ci. La généralisation des théorèmes 2.10 et 2.12 au cas $\ell \geq 3$ est donc encore à imaginer.

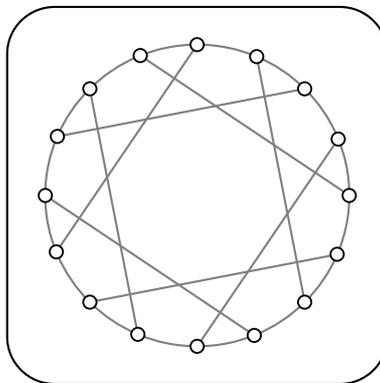


Figure 2.II – Un graphe sans $(1, \leq 3)$ -jumeaux.

2.4.2 Cas général

On en sait encore peu au sujet des graphes sans $(r, \leq \ell)$ -jumeaux, et ce même quand $r = 1$. La propriété suivante est due à J. Moncel et T. Laihonen.

Théorème 2.14 (Moncel, Laihonen [69]). *Soient $\ell \geq 1$ et G un graphe sans $(1, \leq \ell)$ -jumeaux, connexe, ayant au moins une arête. Alors pour tout sommet $v \in V(G)$, le voisinage ouvert $N(v)$ contient un stable de cardinal ℓ .*

En particulier, le degré minimal d'un graphe sans $(1, \leq \ell)$ -jumeaux est supérieur ou égal à ℓ , ce qui a déjà été observé dans [75]. Un autre résultat permet à l'inverse d'établir qu'un graphe est sans $(1, \leq \ell)$ -jumeaux :

Théorème 2.15 (Moncel, Laihonen [69]). *Si $\ell \geq 1$, les graphes ℓ -réguliers de maille supérieure ou égale à 7, ainsi que les graphes $(\ell + 1)$ -réguliers de maille supérieure ou égale à 5, sont sans $(1, \leq \ell)$ -jumeaux.*

Prouvons un résultat recouvrant partiellement ceux qui précèdent :

Théorème 2.16. *Soit $\ell \geq 1$.*

- *Si G est un graphe connexe sans $(1, \leq \ell)$ -jumeaux connexe d'ordre au moins 3 et si $x \in V(G)$, alors toute partie $A \subset V(G) \setminus \{x\}$ couvrant $N_G[x]$ est de cardinal supérieur ou égal à ℓ ;*
- *réciproquement, si G est un graphe tel que pour tout sommet $x \in V(G)$, toute partie $A \subset V(G) \setminus \{x\}$ couvrant $N_G[x]$ soit de cardinal supérieur ou égal à $\ell + 1$, alors G est sans $(1, \leq \ell)$ -jumeaux.*

Preuve. Soit G sans $(1, \leq \ell)$ -jumeaux, connexe, comportant au moins deux sommets et soit $A \subset V(G) \setminus \{x\}$ couvrant $N_G[x]$ où $x \in V(G)$. Alors $N_G[A] = N_G[A \cup \{x\}]$ donc $|A \cup \{x\}| \geq \ell + 1$. Réciproquement, soit G un graphe vérifiant l'hypothèse de la seconde partie du théorème, et soient X et Y deux ensembles d'au plus ℓ sommets de G , tels que

$$N_G[X] = N_G[Y].$$

Si X et Y sont distincts, sans perte de généralité on peut supposer qu'il existe $x \in X \setminus Y$. Alors $N_G[x]$ est couvert par la partie Y , contredisant notre hypothèse. \square

On retrouve aisément la seconde partie du théorème 2.15. D'autre part, un stable maximum de $N_G(x)$ couvre nécessairement $N_G[x]$ et on retrouve donc le théorème 2.14.

Chapitre 3

Complexité algorithmique et codes identifiants

Sommaire

3.1	Introduction et état des lieux	30
3.2	Des résultats de \mathcal{NP}-complétude	31
3.3	Un algorithme linéaire pour les arbres	32
3.3.1	Principe de l'algorithme	32
3.3.2	Codes presque identifiants	34
3.3.3	Généralisation aux graphes de largeur d'arbre bornée	35

3.1 Introduction et état des lieux

Dans ce chapitre, nous tentons d'évaluer la complexité algorithmique des problèmes de calcul de codes identifiants dans les graphes. Est-il envisageable de programmer un ordinateur pour calculer un code identifiant optimal dans un graphe à 1000 sommets? Serait-ce plus simple si le graphe avait une structure particulière, par exemple s'il était un arbre? Les différents problèmes que nous allons envisager peuvent être décrits par le problème de décision générique suivant, qui dépend de deux entiers $r \geq 1$, $\ell \geq 1$ et d'une classe \mathcal{H} de graphes :

MIN $(r, \leq \ell)$ -IDCODE DANS \mathcal{H}

INSTANCE : Un graphe $G \in \mathcal{H}$ et un entier k ;

QUESTION : G admet-il un code $(r, \leq \ell)$ -identifiant de taille au plus k ?

Le terme IDCODE est bien entendu une abréviation pour *code identifiant*, et comme d'habitude nous omettrons les références superfétatoires à r ou ℓ dans les cas où ils sont égaux à 1 (convention 1.1), ainsi que celle à \mathcal{H} si la classe en question est celle de tous les graphes. Après un rappel des résultats déjà connus quant aux problèmes relevant de ce type, nous présenterons de nouveaux résultats de \mathcal{NP} -complétude pour différentes valeurs de r, ℓ et différentes classes \mathcal{H} de graphes. Ceci fait, nous exhiberons un algorithme linéaire permettant de calculer efficacement un code identifiant de taille minimale dans un arbre donné. Nous renvoyons à [50] pour les définitions des notions relatives à la complexité algorithmique utilisées dans ce chapitre.

Les résultats précédemment établis sur la complexité algorithmique des problèmes de minimisation des codes identifiants concernent tous le cas $\ell = 1$; à notre connaissance un seul [34] aborde le cas $r > 1$.

Théorème 3.1 (Cohen, Honkala, Lobstein, Zémor [39], Charon, Hudry, Lobstein [34]). *Pour tout $r \geq 1$, le problème MIN r -IDCODE est \mathcal{NP} -complet.*

La recherche d'un code r -identifiant de taille minimale dans un graphe donné est donc un problème algorithmiquement difficile. Sous réserve de validité de l'hypothèse $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, qui est au moins satisfaite dans la pratique jusqu'à preuve du contraire, un algorithme qui calculerait un code r -identifiant de taille minimale dans tout graphe donné ne pourrait fonctionner qu'en un temps *exponentiel* (dans le pire des cas) par rapport à la taille du graphe.

Quand un problème est \mathcal{NP} -complet, il est d'usage d'étudier les *algorithmes polynomiaux d'approximation* pour ce problème. Un tel algorithme doit fonctionner en temps polynomial par rapport à la taille du graphe et retourner un code identifiant ; on mesure la «marge d'erreur» de cet algorithme par son *rapport d'approximation* qui est le quotient, dans le pire des cas, entre la taille du code identifiant retourné par l'algorithme et la taille optimale d'un code identifiant dans le graphe. Ainsi, ce rapport est d'autant plus proche de 1 que l'algorithme est efficace.

Dans le cas $r = 1$, Gravier, Moncel et Klasing sont allés plus loin que le théorème 3.1 en prouvant que MIN IDCODE est APX-difficile ([52]). Rappelons que ceci implique, sous réserve de l'hypothèse $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$, que MIN IDCODE n'admet pas d'algorithmes d'approximation de rapport constant en dessous d'une certaine valeur $c > 1$. Ainsi, on ne saurait concevoir des algorithmes efficaces avec une marge d'erreur arbitrairement petite.

Avec une hypothèse plus forte, Laifefeld et Trachtenberg ([67]) ont prouvé que MIN IDCODE n'admettait pas d'algorithme polynomial d'approximation dont le rapport d'approximation serait en deçà de $(1 - \epsilon) \log n$, où n est l'ordre du graphe, et ce pour tout $\epsilon > 0$. L'hypothèse en question est la non-inclusion suivante :

$$\mathcal{NP} \not\subseteq DTIME(n^{\log \log n}).$$

Si cette hypothèse était fautive, elle signifierait que tous les problèmes de la classe \mathcal{NP} admettent un algorithme déterministe les résolvant en temps $O(n^{\log \log n})$. On voit donc que cette hypothèse est plus forte que l'hypothèse $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

Finalement, différents auteurs ont remarqué qu'un algorithme glouton appliqué au problème MIN r -IDCODE fournissait un algorithme polynomial d'approximation de rapport d'approximation $O(\log n)$ ([67], [88]).

3.2 Des résultats de \mathcal{NP} -complétude

Pour pousser l'analyse de la complexité au-delà de la constatation de \mathcal{NP} -complétude, nous avons choisi une autre direction que celle qui a été empruntée dans [52] et [67] : nous étudions la complexité de MIN $(r, \leq \ell)$ -IDCODE DANS \mathcal{H} pour différentes classes \mathcal{H} de graphes. Les classes qui nous concernent sont les suivantes :

- la classe $\mathcal{P}_{\Delta \leq 3}$ des graphes planaires de degré maximal inférieur ou égal à 3 ;
- pour tout $k \geq 3$, la classe $\mathcal{P}_{\Delta \leq 4}^{m \geq k}$ des graphes planaires de degré maximal au plus 4 et dont la maille est au moins k ;
- la classe \mathcal{F} des forêts.

Commençons par un résultat valable pour $\ell = 1$ et $\ell = 2$:

Théorème 3.2 (Auger, Charon, Hudry, Lobstein [7] & annexe D). *Pour tout $r \geq 1$ et $\ell \in \{1, 2\}$, le problème MIN $(r, \leq \ell)$ -IDCODE DANS $\mathcal{P}_{\Delta \leq 3}$ est \mathcal{NP} -complet.*

Ce résultat étend ainsi le théorème 3.1 en prouvant que même le fait de limiter les instances à la classe $\mathcal{P}_{\Delta \leq 3}$, pourtant beaucoup plus restreinte, fait toujours de la recherche d'un code r -identifiant de taille minimale un problème \mathcal{NP} -difficile. Il constitue aussi à notre connaissance, dans le cas $\ell = 2$, le premier résultat concernant la complexité algorithmique de la recherche d'un code $(r, \leq \ell)$ -identifiant optimal quand $\ell > 1$ (sujet ayant par ailleurs fait l'objet de nombreuses recherches d'un point de vue combinatoire, voir le chapitre 1). On pourrait d'ailleurs se contenter d'énoncer le corollaire suivant :

Corollaire 3.3. *Pour tout $r \geq 1$, le problème MIN $(r, \leq 2)$ -IDCODE est \mathcal{NP} -complet.*

Dans le cadre de notre recherche d'un algorithme efficace dans la classe des arbres, nous avons établi une variante de ce résultat dans le cas $r = 1$ et $\ell = 1$, en nous intéressant à la classe $\mathcal{P}_{\Delta \leq 4}^{m \geq k}$ des graphes planaires de maille au moins k et de degré maximal au plus 4 :

Théorème 3.4 (Auger [3] & annexe E). *Pour tout $k \geq 3$, le problème MIN IDCODE DANS $\mathcal{P}_{\Delta \leq 4}^{m \geq k}$ est \mathcal{NP} -complet.*

La raison de l'étude de ces classes de graphes est qu'elles constituent des approximations, en un certain sens, de la classe des arbres, ces derniers pouvant être considérés comme ayant une maille infinie. Plus précisément, ces classes forment une suite décroissante au sens de l'inclusion, et leur intersection pour $k \geq 3$ est la classe des graphes planaires de degré au plus 4 ne contenant aucun cycle : une sous-classe de celle des *forêts*. Or nous verrons dans la prochaine section un algorithme qui résout le problème MIN IDCODE DANS \mathcal{F} en un temps linéaire, donc polynomial, en l'ordre du graphe. Autour de cette classe, nous disposons de l'infinité des classes $\mathcal{P}_{\Delta \leq 4}^{m \geq k}$, en un certain sens aussi proches que l'on veut de \mathcal{F} , où le problème de minimisation reste \mathcal{NP} -complet.

Avant de terminer cette partie, notons qu'il n'existe pour l'instant aucun résultat sur la complexité algorithmique des problèmes MIN $(r, \leq \ell)$ -IDCODE lorsque $\ell \geq 3$, et ce même pour $r = 1$. Toutefois, il serait très surprenant que ces problèmes soient faciles et ce n'est pas faire preuve d'une bien grande témérité que de risquer ce qui suit :

Conjecture 3.5. *Pour tout $r \geq 1$ et tout $\ell \geq 3$, le problème MIN $(r, \leq \ell)$ -IDCODE est \mathcal{NP} -complet.*

3.3 Un algorithme linéaire pour les arbres

3.3.1 Principe de l'algorithme

Nous présentons ici un algorithme permettant de calculer un code identifiant de taille minimale dans un arbre ou une forêt donnés, en un temps linéaire par rapport à l'ordre du graphe. On se limitera sans perte de généralité à la description de l'algorithme lorsque le graphe donné en instance est un arbre. Le détail de l'algorithme peut être trouvé dans [3] (annexe E), nous allons juste ici en expliquer le principe. Considérons un arbre \mathcal{A} et une arête $v_1 v_2$ de \mathcal{A} , nous voulons procéder de manière récursive comme illustré sur la figure 3.1 :

- on supprime l'arête $v_1 v_2$ de \mathcal{A} , obtenant ainsi deux arbres \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 contenant respectivement les sommets v_1 et v_2 ;
- on applique récursivement l'algorithme dans les sous-arbres \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 , obtenant pour chacun d'eux un code identifiant ;

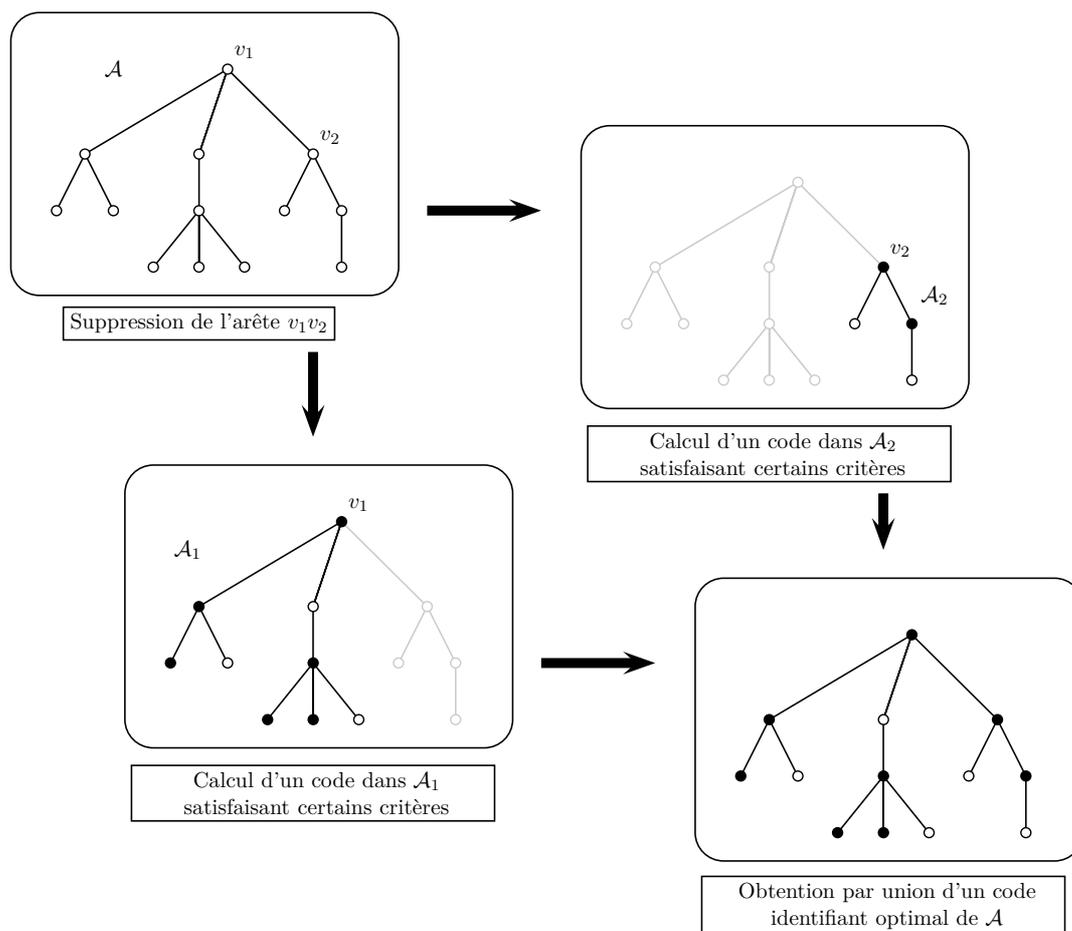


Figure 3.I – Principe de l'algorithme de calcul d'un code identifiant optimal dans un arbre. Les sommets noirs sont les mots de code.

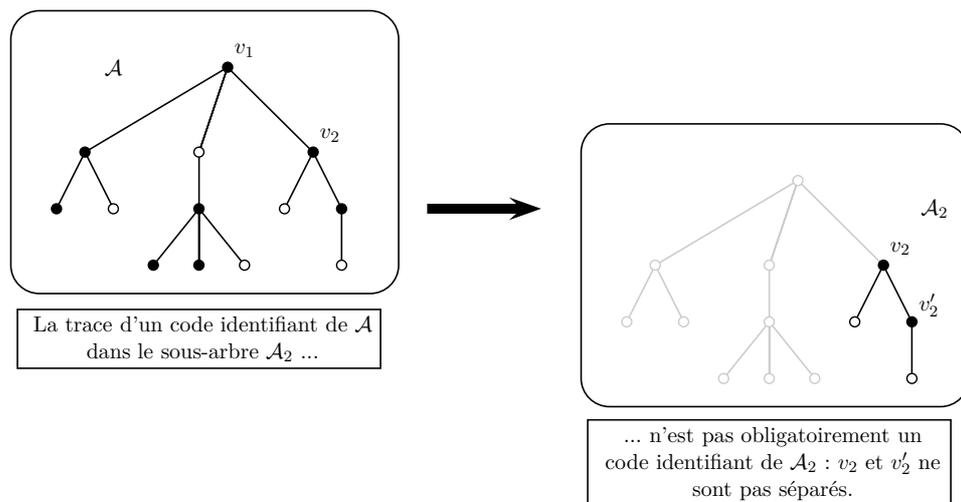


Figure 3.II – Un problème pour la récursivité

- on calcule l'union des deux codes obtenus, espérant ainsi obtenir un code identifiant pour \mathcal{A} .

Bien entendu, appliqué tel quel, l'algorithme ne peut fonctionner et comme indiqué sur la figure 3.I ce ne sont pas des codes identifiants que l'on va chercher dans \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 mais des codes satisfaisant *certaines critères*, que nous allons maintenant détailler. Le principal problème que nous rencontrons, outre le souci de minimalité, est qu'en considérant au départ un code identifiant de \mathcal{A} , les codes obtenus dans les sous-arbres \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 après suppression de v_1v_2 ne sont pas nécessairement des codes identifiants, comme illustré sur la figure 3.II.

3.3.2 Codes presque identifiants

Ainsi, en gardant les notations du paragraphe précédent, un code identifiant pour \mathcal{A} , s'il était l'unique code identifiant minimal, ne saurait être obtenu directement comme union de codes identifiants de \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 et il nous faut introduire une notion plus souple que celle de code identifiant :

Définition 3.6. Si G est un graphe et v un sommet de G , un code v -presque identifiant est un sous-ensemble \mathcal{C} de $V(G)$ tel que les sous-ensembles

$$N_G[x] \cap \mathcal{C}$$

pour tout $x \in V(G) \setminus \{v\}$ soient non vides et distincts.

Ainsi dans un code v -presque identifiant, le sommet v peut être choisi comme mot de code et donc utilisé pour couvrir et séparer, mais nous n'avons pas à identifier v . Cette fois-ci, on peut vérifier facilement que si \mathcal{C} est un code v_1 -presque identifiant de \mathcal{A} , alors les codes $\mathcal{C} \cap V(\mathcal{A}_1)$ et $\mathcal{C} \cap V(\mathcal{A}_2)$ sont respectivement des codes v_1 -presque identifiant de \mathcal{A}_1 et v_2 -presque identifiant de \mathcal{A}_2 .

Pour assurer la réciproque et calculer un code minimal, il va nous falloir en fait calculer plusieurs types de codes presque identifiants à chaque étape, 10 pour être précis, satisfaisant différentes combinaisons des propriétés suivantes, par exemple pour un code v_1 -presque identifiant :

- on peut exiger que le code soit en fait identifiant ;
- on peut exiger que v_1 lui-même soit un mot de code ;
- on peut exiger que v_1 soit adjacent à au moins un mot de code ;
- on peut enfin exiger qu’il existe un *voisin préféré* de v_1 , c’est-à-dire un sommet adjacent à v_1 qui ne soit couvert que par le mot de code v_1 .

Ces propriétés sont suffisantes pour établir des formules de récurrence entre les tailles minimales de ces différents codes dans \mathcal{A} , \mathcal{A}_1 et \mathcal{A}_2 , nous fournissant un algorithme qui fonctionne en un temps linéaire par rapport à la taille de l’arbre passé en instance. Nous renvoyons à [3] (annexe E) pour les détails de l’algorithme.

3.3.3 Généralisation aux graphes de largeur d’arbre bornée

Dans sa thèse [74], Moncel a remarqué qu’un théorème assez général dû à Arnborg, Lagergren et Seese et concernant l’algorithmique dans la classe des graphes de largeur d’arbre bornée ([2]), impliquait plus généralement :

Théorème 3.7 (Moncel [74]). *Pour tout $k \geq 1$, il existe un algorithme qui calcule en temps linéaire un code identifiant de taille minimale pour tout graphe de largeur d’arbre au plus k .*

Pour la notion de largeur d’arbre, nous renvoyons (par exemple) à [21]. Contentons-nous de dire que les forêts ont précisément une largeur d’arbre 1, et que ce théorème implique donc l’existence d’un algorithme comme le nôtre. Ceci dit, le théorème 3.7 donne l’existence théorique d’un algorithme, et ne permet pas de calculer effectivement un code identifiant.

Chapitre 4

Systemes de contrôle

Sommaire

4.1	Introduction	36
4.2	Définitions	37
4.3	Premières propriétés	39
4.3.1	Lien avec les codes identifiants	39
4.3.2	Existence de systèmes de contrôles	39
4.3.3	Lien avec les ensembles dominants	39
4.3.4	Lien avec les codes superposés	40
4.3.5	Propriétés de monotonie	40
4.3.6	Compression	40
4.3.7	Complexité algorithmique	41
4.4	Bornes en fonction du nombre de sommets	41
4.4.1	Bornes inférieures	41
4.4.2	Bornes supérieures	41
4.5	Systemes de contrôle dans les chaînes et les cycles	43
4.6	Systemes de contrôle dans la grille du roi	44
4.6.1	Identification des sommets	45
4.6.2	Identification des ensembles de sommets	45

4.1 Introduction

L'idée à la base des systèmes de contrôle dans les graphes est d'étendre la notion de code identifiant en apportant un peu de souplesse au rôle des mots de code, en leur offrant en particulier la possibilité de ne pas couvrir un sommet pourtant à portée de l'être. Nous allons voir que, paradoxalement, donner moins de sommets à couvrir à chacun des mots de code peut amener à des codes bien plus efficaces. Expliquons-nous grâce à un nouvel exemple de musée, que l'on pourra trouver sur la figure 4.I. À ce musée est associé un graphe G , construit en utilisant le même principe que dans le chapitre 1. Si l'on voulait surveiller ce musée (pour détecter du feu, du mouvement, ou autre) avec un système modélisé par un code identifiant, nous aurions besoin de cinq détecteurs, car G n'est autre que le graphe hyperoctaédral d'ordre 6 (voir 0.8), qui nécessite de considérer tous les sommets comme des mots de code, sauf un seul, afin de former un code identifiant.

Faisons maintenant l'hypothèse suivante : *on peut décider d'exclure certaines pièces de la zone de couverture des détecteurs*. En orientant les détecteurs d'une certaine manière, en

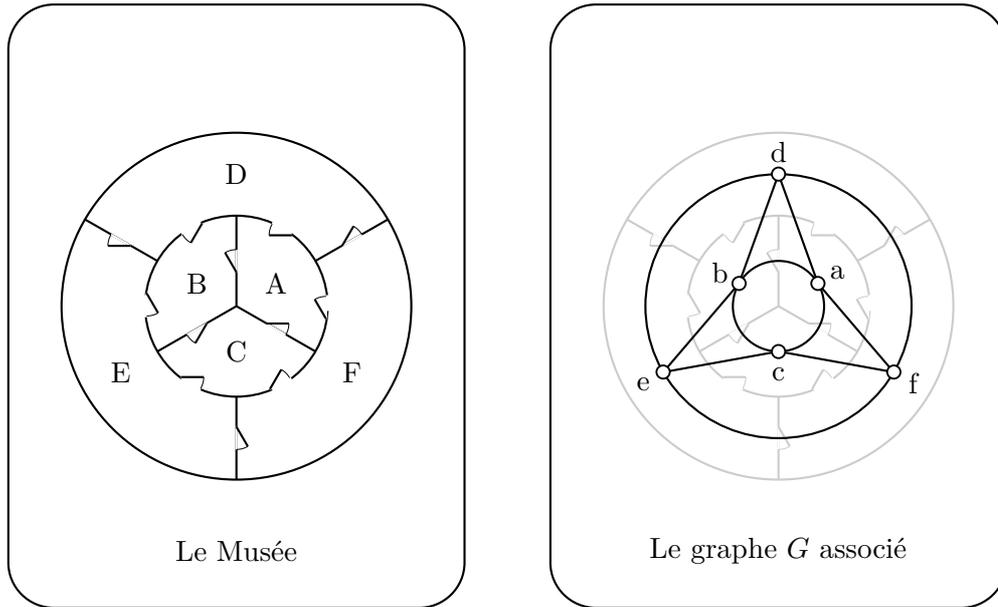


Figure 4.I – Un nouveau musée à surveiller, et le graphe G associé.

couplant certains circuits ou autre manipulation, on suppose donc que l'on peut assigner au détecteur une zone de contrôle plus petite que l'ensemble des pièces qui seraient à portée. Dans notre modèle mathématique, ceci signifie que l'on peut assigner à chaque mot de code c un ensemble de sommets $Z(c) \subseteq N_G[c]$ qui seront couverts par c . Les sommets de $N_G[c] \setminus Z(c)$ sont considérés comme non couverts par c , et pour le reste tout fonctionne comme pour un code identifiant. Nous parlerons alors de *contrôleurs* au lieu de mots de codes, et de *contrôle* au lieu de couverture. L'ensemble des contrôleurs qui ont en charge un sommet x s'appelle l'*étiquette* de x . La figure 4.II montre une manière optimale de procéder dans notre musée, utilisant trois contrôleurs, au lieu des cinq nécessaires pour un code identifiant. Dans cet exemple, tout se passe en fait comme si l'on était en présence d'un code identifiant sur un cycle de longueur 6 : on n'a pas tenu compte des arêtes qui ne nous intéressaient pas.

Nous nous autorisons, dans le cas des systèmes de contrôle, à placer plusieurs contrôleurs au même endroit, avec des zones de contrôle différentes. On pourrait considérer qu'il s'agit d'un seul détecteur avec plusieurs zones différentes à observer ; mais un tel équipement aurait besoin de plus de bits pour transmettre ses observations, et c'est ce nombre de bits (un par zone) que nous prenons en compte. Considérons un deuxième exemple, là encore un graphe extrémal où tous les sommets sauf un seraient nécessaires pour un code identifiant : il s'agit de l'étoile à 15 sommets $K_{1,14}$. La figure 4.III présente pour ce graphe un code identifiant optimal de taille 14, et un système de contrôle optimal de taille 4.

Comme pour les codes identifiants, nous étendrons les systèmes de contrôle à l'identification à distance d'ensembles de sommets et définirons ainsi les systèmes de $(r, \leq \ell)$ -contrôle.

4.2 Définitions

Dans tout le chapitre, r et ℓ sont des entiers strictement positifs et G un graphe non orienté connexe. Un r -contrôleur de G est un couple

$$w = (c, Z)$$

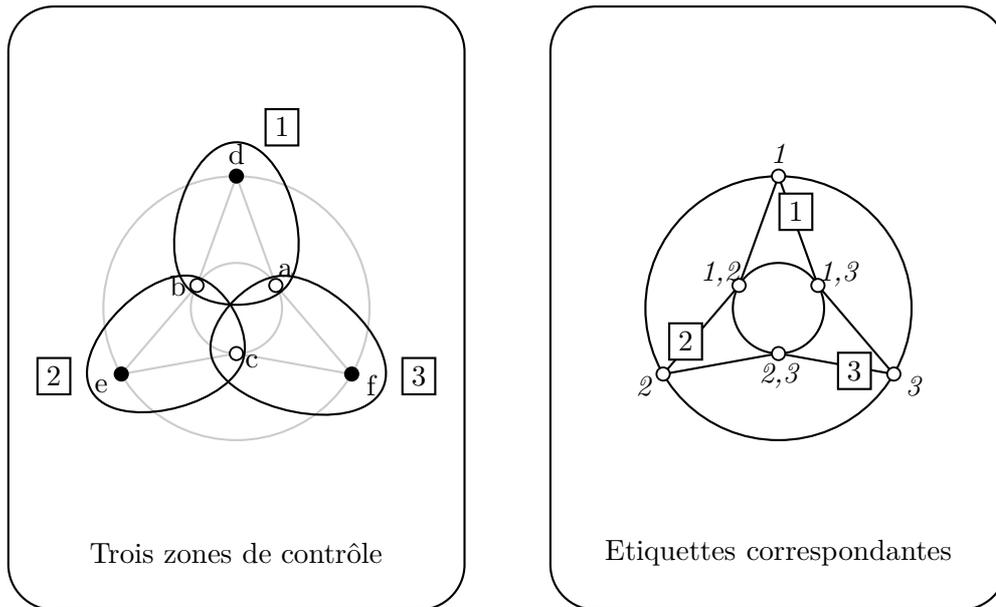


Figure 4.II – Un système de contrôle optimal dans G . À gauche, les trois zones de contrôle assignées aux contrôleurs 1, 2 et 3 respectivement placés en d , e et f . À droite, le même système de contrôle représenté avec les notations que nous utiliserons dans cette partie : les localisations des contrôleurs 1, 2 et 3 sont indiquées par des boîtes, et on indique près de chaque sommet son étiquette, c'est-à-dire la liste des contrôleurs qui le contrôlent.

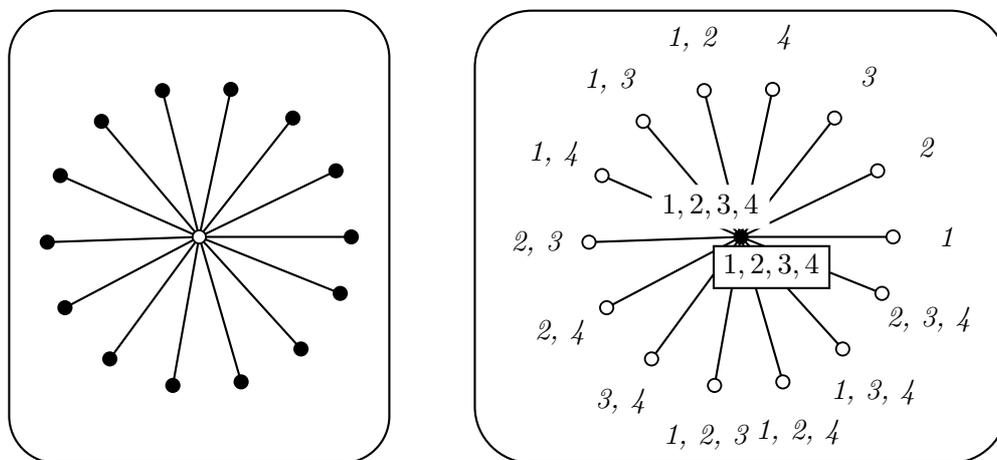


Figure 4.III – À gauche, un code identifiant optimal (sommets noirs) sur l'étoile à 15 sommets. À droite, un système de contrôle optimal sur ce même graphe, avec le même système de notation que sur la figure 4.II.

où c est un sommet de G et Z un sous-ensemble de $B_G(c, r)$. Nous disons que le r -contrôleur w est localisé en c , ou est en c , et que c est le centre de contrôle de w . L'ensemble Z est la zone de contrôle de w . Etant donné un r -contrôleur w , on notera respectivement $c(w)$ et $Z(w)$ le centre de contrôle et la zone de contrôle de w . Si x est un sommet de G et $x \in Z(w)$, nous disons que w contrôle x .

Si \mathcal{W} est un ensemble (fini) de r -contrôleurs de G , nous définissons l'étiquette d'un

sommet x de G dans \mathcal{W} comme l'ensemble des contrôleurs de \mathcal{W} qui contrôlent x . Nous notons

$$L_{\mathcal{W}}(v) = \{w \in \mathcal{W} : x \in Z(w)\}$$

cet ensemble. Si A est un ensemble de sommets de G , on pose alors

$$L_{\mathcal{W}}(A) = \bigcup_{x \in A} L_{\mathcal{W}}(x);$$

ainsi $L_{\mathcal{W}}(\emptyset) = \emptyset$. Un ensemble de r -contrôleurs \mathcal{W} est alors dit *système de $(r, \leq \ell)$ -contrôle* de G si les étiquettes $L_{\mathcal{W}}(A)$, pour toutes les parties A de $V(G)$ de taille au plus ℓ , sont deux à deux distinctes. Comme dans le cas des codes identifiants, si \mathcal{W} est un ensemble de contrôleurs dans G , nous dirons qu'un sommet $x \in V(G)$ est *identifié* par \mathcal{W} si $L_{\mathcal{W}}(x) \neq L_{\mathcal{W}}(y)$ pour tous les $y \in V(G)$ distincts de x .

Nous notons $w_{r,\ell}(G)$ la taille minimale d'un système de $(r, \leq \ell)$ -contrôle dans un graphe G ; on abrégiera $w_{r,1}(G)$ en $w_r(G)$.

4.3 Premières propriétés

4.3.1 Lien avec les codes identifiants

Un code $(r, \leq \ell)$ -identifiant \mathcal{C} dans un graphe sans $(r, \leq \ell)$ -jumeaux G définit de manière naturelle un système de $(r, \leq \ell)$ -contrôle de G , en associant à chaque mot de code $c \in \mathcal{C}$ le contrôleur $(c, B_G(c, r))$. Ainsi, quel que soit le graphe sans $(r, \leq \ell)$ -jumeaux G considéré, on a l'inégalité

$$w_{r,\ell}(G) \leq \gamma_{r,\ell}^{id}(G).$$

En ceci, les systèmes de contrôle constituent bien une extension des codes identifiants.

4.3.2 Existence de systèmes de contrôles

Contrairement aux cas des codes identifiants, tout graphe admet des systèmes de $(r, \leq \ell)$ -contrôle pour toutes les valeurs de r et ℓ . En particulier, dans tout graphe G l'ensemble des contrôleurs de la forme $(x, \{x\})$ pour tous les sommets x de G est un système de $(r, \leq \ell)$ -contrôle pour tous $r \geq 1$ et $\ell \geq 1$; nous appelons *trivial* ce système de contrôle, et par extension tout système de contrôle contenant autant ou plus de contrôleurs que de sommets à contrôler.

4.3.3 Lien avec les ensembles dominants

Si \mathcal{D} est un ensemble dominant d'un graphe G , on peut aisément construire à partir de \mathcal{D} un système de $(1, \leq 1)$ -contrôle pour G : il suffit de placer suffisamment de contrôleurs sur chaque élément x de \mathcal{D} pour qu'il puisse identifier les sommets de $N_G[x]$, et tous les sommets de G seront alors identifiés. Il suffit clairement de $\lceil \log(k+1) \rceil$ pour identifier par des 1-contrôleurs une étoile de taille k (comme dans le cas de la figure 4.III); nous obtenons donc l'inégalité suivante :

$$w_1(G) \leq \sum_{x \in \mathcal{D}} \lceil \log(d(x) + 2) \rceil,$$

où $d(x)$ désigne le degré du sommet x . On a ainsi

$$w_1(G) \leq \gamma_G \cdot \lceil \log(\Delta_{\max} + 2) \rceil,$$

où γ_G et Δ_{\max} sont respectivement le nombre de domination et le degré maximal de G .

4.3.4 Lien avec les codes superposés

Si $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ est une famille de parties d'un ensemble X , nous disons que \mathcal{S} est une famille ℓ -superposée si, dès que I et J sont deux parties distinctes de $\{1, 2, \dots, k\}$ de taille au plus ℓ , on a

$$\cup_{i \in I} S_i \neq \cup_{j \in J} S_j.$$

Si \mathcal{W} est un système de $(r, \leq \ell)$ -contrôle de G , alors l'ensemble des étiquettes $L_{\mathcal{W}}(x)$ des sommets $x \in V(G)$ est une famille ℓ -superposée. Ces familles ont été introduites dans [66] (sous la forme équivalente de *codes ℓ -superposés*), et leur lien avec les codes $(r, \leq \ell)$ -identifiants a été observé par exemple dans [53].

Le résultat suivant nous sera utile :

Théorème 4.1 (D'yachkov, Rykov [44]). *Soit $s_{w,\ell}$ la taille maximale d'une famille ℓ -superposée dans un ensemble de taille w . Il existe deux constantes k_1 et k_2 telles que pour tous w et ℓ strictement positifs on ait*

$$2^{k_1 \frac{1}{\ell^2} w} \leq s_{w,\ell} \leq 2^{k_2 \frac{\log \ell}{\ell^2} w}.$$

4.3.5 Propriétés de monotonie

Les systèmes de contrôle sont beaucoup plus souples que les codes identifiants, et en particulier ils jouissent de propriétés de monotonie. En particulier :

- si $r \leq r'$ et $\ell \geq \ell'$, un système de $(r, \leq \ell)$ -contrôle de G est un système de $(r', \leq \ell')$ -contrôle de G et donc

$$w_{r,\ell}(G) \geq w_{r',\ell'}(G).$$

- si G est un graphe partiel de G' alors pour tous $r \geq 1$ et $\ell \geq 1$

$$w_{r,\ell}(G') \leq w_{r,\ell}(G).$$

Autrement dit, ajouter une arête à un graphe ne fait que fournir de nouvelles possibilités pour les systèmes de contrôle et fait donc décroître la taille des systèmes minimaux. Ceci rend possible l'étude de graphes *maximaux*, où l'ajout de toute arête fait strictement décroître le cardinal des systèmes de contrôle optimaux ; c'est ce que nous ferons en 4.4.2.

4.3.6 Compression

On dira qu'un système de contrôle \mathcal{W} d'un graphe G est *compressé* si, pour tout sommet $x \in V(G)$ et toute partie non vide $A \subseteq L_{\mathcal{W}}(x)$, il existe un sommet $y \in V(G)$ tel que $L_{\mathcal{W}}(y) = A$.

Étant donné un système de r -contrôle de G , il est toujours possible d'obtenir un système de r -contrôle de G qui soit compressé et de même taille que \mathcal{W} : il suffit, dès qu'il existe un sommet $x \in V(G)$ et une partie A non vide telle que $A \subset L_{\mathcal{W}}(x)$ mais ne correspondant à aucune étiquette, de supprimer x des zones de contrôle des contrôleurs de $L_{\mathcal{W}}(x) \setminus A$. On obtient alors un système de contrôle pour lesquels tous les sommets ont même étiquette qu'avec \mathcal{W} , sauf x ayant maintenant l'étiquette A . En répétant ce procédé, on obtient en un nombre fini d'étapes un système de contrôle compressé.

Si \mathcal{W} est un système de r -contrôle compressé de G , alors pour tout sommet x on a

$$|L_{\mathcal{W}}(x)| \leq \lfloor \log(|B(x, 2r)| + 1) \rfloor,$$

que l'on déduit immédiatement de la propriété de compression. Un système compressé peut donc être utile pour l'estimation de la taille de certains systèmes de contrôle.

4.3.7 Complexité algorithmique

Sans surprise, la recherche d'un système de $(1, \leq 1)$ -contrôle optimal dans un graphe donné est un problème \mathcal{NP} -difficile. Mais nous allons un peu plus loin en prouvant un résultat analogue au théorème 3.2 concernant les codes identifiants :

Théorème 4.2 (Auger, Charon, Hudry, Lobstein, annexe F). *Le problème consistant à déterminer, étant donné un entier k et un graphe G planaire et de degré maximal au plus 3, si G admet un système de contrôle de cardinal au plus k , est \mathcal{NP} -complet.*

Notons que, pour l'instant, les cas $r > 1$ ou $\ell > 1$ sont ouverts.

4.4 Bornes en fonction du nombre de sommets

4.4.1 Bornes inférieures

Pour $\ell = 1$, la borne du théorème 1.7 s'étend clairement au cas des systèmes de contrôle :

Théorème 4.3. *Soient G un graphe d'ordre n et $r \geq 1$. Alors*

$$\lceil \log(n+1) \rceil \leq w_r(G).$$

L'égalité est atteinte, par exemple, pour tous les graphes de diamètre inférieur ou égal à r . Lorsque $\ell > 1$, nous faisons appel au théorème 4.1 pour obtenir :

Théorème 4.4. *Il existe une constante strictement positive c_1 telle que pour $r > 0$, $\ell > 1$ et tout graphe G d'ordre n on ait*

$$c_1 \frac{\ell^2}{\log \ell} \log n \leq w_{r,\ell}(G).$$

La borne inférieure du théorème 4.1 peut, elle, être utilisée pour construire des systèmes de $(r, \leq \ell)$ -contrôle de petite taille dans des graphes particuliers (par exemple des graphes de diamètre inférieur à r).

4.4.2 Bornes supérieures

Un code identifiant définissant de manière naturelle un système de contrôle (voir 4.3.1), le théorème 1.8 prouve que dans tout graphe sans r -jumeaux connexe à n sommets, avec $n \geq 3$, un système de contrôle minimal est au plus de cardinal $n - 1$. On peut prouver en fait bien mieux :

Théorème 4.5 (Auger, Charon, Hudry, Lobstein, annexe F). *Soit G un graphe connexe d'ordre n . Alors*

- si $n = 1$, $w_1(G) = 1$;
- si $n = 2$ ou $n = 3$, $w_1(G) = 2$;
- si $n = 4$ ou $n = 5$, $w_1(G) = 3$;
- si $n \notin \{1, 2, 4\}$, $w_1(G) \leq \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$.

Grâce à la propriété de monotonie, il suffit de prouver la borne supérieure de $\frac{2n}{3}$ dans le cas des arbres. D'autre part, la valeur $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ est atteinte pour tout $n \notin \{1, 2, 4\}$; nous avons caractérisé, dans [8], les graphes qui l'atteignent. Toujours grâce à la monotonie, il nous suffit de caractériser les graphes G d'ordre n tels que $w_1(G) = \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ et dont le nombre

d'arêtes est maximal; tous les graphes satisfaisant exactement cette borne seront alors exactement les graphes partiels connexes de ces graphes maximaux.

Le résultat dépend du reste de n modulo 3. Si ce reste est 0, le résultat est simple à énoncer :

Théorème 4.6 (Auger, Charon, Hudry, Lobstein, [8]). *Les graphes connexes G d'ordre n divisible par 3 tels que $w_1(G) = \frac{2n}{3}$ sont précisément les graphes partiels connexes du graphe H construit de la manière suivante : on considère l'union de $\frac{n}{3}$ triangles K_3 disjoints, on choisit un sommet dit point d'attache sur chaque triangle et on relie tous les points d'attache entre eux.*

La figure 4.IV représente le graphe H du théorème ci-dessus, ainsi qu'un exemple de sous-graphe connexe qui atteint la borne de $\frac{2n}{3}$; chaque triangle nécessitant au moins deux contrôleurs, il est immédiat de constater que la borne est atteinte.

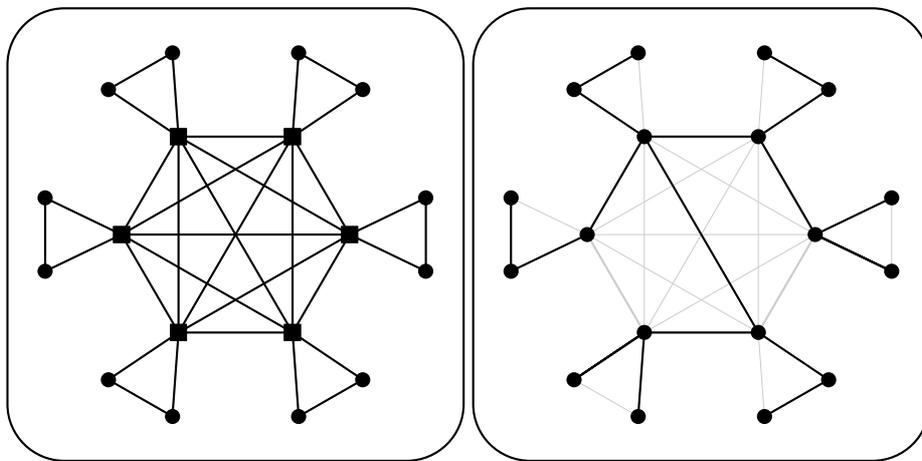


Figure 4.IV – À gauche, le graphe H d'ordre 18 dont tous les graphes G d'ordre 18 atteignant la borne $w_1(G) = 12$ sont des graphes partiels connexes. Les sommets représentés par des carrés sont les points d'attache des triangles. À droite, un arbre atteignant cette borne.

Nous appelons *gadgets* les triangles qui composent le graphe H du théorème 4.6. Lorsque n n'est pas divisible par 3, la situation se complique et de nouveaux gadgets apparaissent.

Théorème 4.7 (Auger, Charon, Hudry, Lobstein, annexe F). *Soit G un graphe connexe d'ordre $n = 3k + 2$ où $k \geq 3$. Alors $w_1(G) = 2k + 1$ si et seulement si G est un graphe partiel connexe de l'un des graphes suivants :*

- la clique d'ordre $k + 1$, sur laquelle sont rattachés chacun par un sommet k triangles K_3 ainsi qu'une arête K_2 ;
- la clique d'ordre k , sur laquelle sont rattachés chacun par un sommet $k - 1$ triangles K_3 ainsi qu'une clique K_5 .

Le premier des graphes ci-dessus est donc construit à partir de $k + 2$ gadgets, qui sont des triangles K_3 et une arête K_2 . Le deuxième est lui construit à partir de $k + 1$ gadgets, à savoir des triangles et une clique K_5 . Dans chaque cas chacun des gadgets est muni d'un seul point d'attache, et tous les points d'attaches sont deux à deux adjacents. Les deux graphes extrémaux correspondant au cas $n = 20$ sont représentés sur la figure 4.V.

Dans le cas $n \equiv 1 \pmod{3}$, de nouveaux gadgets apparaissent, certains disposant de deux points d'attache. Aux arêtes K_2 , triangles K_3 et clique K_5 nous devons ajouter :

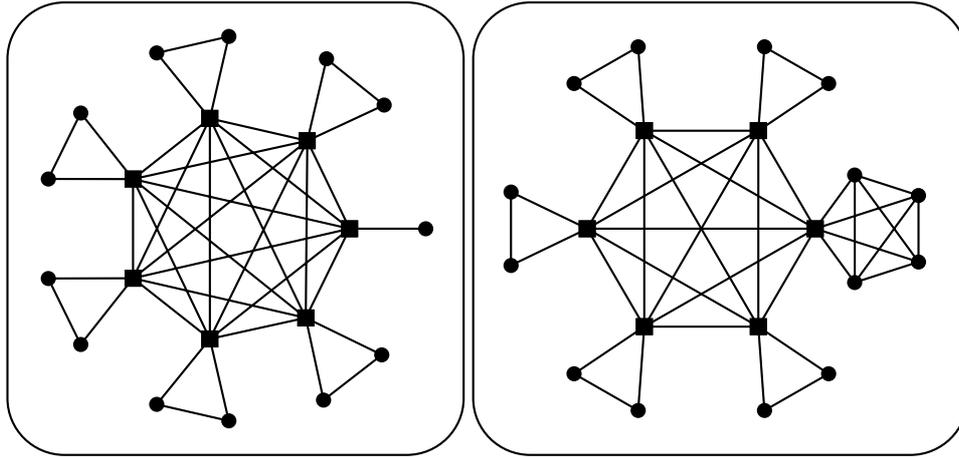


Figure 4.V – Les deux graphes maximaux d'ordre 20 tels que $w_1 = 13$. Tout graphe connexe d'ordre 20 atteignant la borne du théorème 4.6 est un graphe partiel connexe de l'un de ces deux graphes. Les sommets représentés par des carrés sont les points d'attache des gadgets.

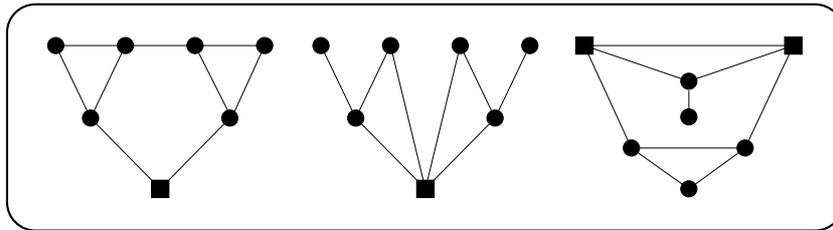


Figure 4.VI – Les trois gadgets d'ordre 7. Les carrés indiquent les points d'attache des gadgets.

- la clique K_4 , qui dispose de deux points d'attache ;
- les trois gadgets d'ordre 7 représentés sur la figure 4.VI. Les deux premiers ont un seul points d'attache et le troisième en a deux.

Le cas $n \equiv 1 \pmod 3$ n'est pas terminé à ce jour. Nous caractérisons dans ce cas les arbres atteignant la borne (voir l'annexe D), et donnons des constructions avec ces gadgets que nous pensons suffisantes pour recouvrir tous les cas. Nous conjecturons :

Conjecture 4.8. Soit G un graphe connexe d'ordre $n = 3k + 1$ où $k \geq 3$. Alors $w_1(G) = 2k + 1$ si et seulement si G est un graphe partiel connexe d'un graphe construit à partir de gadgets pour un des cas suivants :

- $k - 1$ triangles K_3 et deux arêtes K_2 ;
- $k - 2$ triangles K_3 , une arête K_2 et une clique K_5 ;
- $k - 3$ triangles K_3 et deux cliques K_5 ;
- $k - 1$ triangles K_3 et une clique K_4 (avec deux points d'attache) ;
- $k - 2$ triangles K_3 et un gadget d'ordre 7 (fig. 4.VI).

4.5 Systèmes de contrôle dans les chaînes et les cycles

Pour $r = 1$ et $\ell = 1$, un système de contrôle dans la chaîne \mathcal{P}_n ne peut faire mieux qu'un code identifiant (voir la table 1.III) :

Théorème 4.9 (Auger, Charon, Hudry, Lobstein, annexe F). *Pour tout $n \geq 0$, on a*

$$w_1(\mathcal{P}_n) = \lceil \frac{n+1}{2} \rceil.$$

Pour $\ell = 2$, nous savons que la chaîne \mathcal{P}_n admet des 2-jumeaux puisqu'elle a des sommets de degré 1. En revanche, elle admet comme tout graphe des systèmes de $(1, \leq 2)$ -contrôle et nous prouvons :

Théorème 4.10 (Auger, Charon, Hudry, Lobstein, annexe F). *On a $w_{1,2}(\mathcal{P}_n) = n$ pour $1 \leq n \leq 10$ et*

$$w_{1,2}(\mathcal{P}_n) = \lceil \frac{5(n+1)}{6} \rceil$$

pour $n \geq 11$.

La figure 4.VII présente un système de $(1, \leq 2)$ -contrôle de cardinal 10 dans une chaîne à 11 sommets, généralisable en un système de taille $5k$ dans une chaîne à $6k - 1$ sommets. Le même type de construction existe pour les chaînes ayant d'autres longueurs.

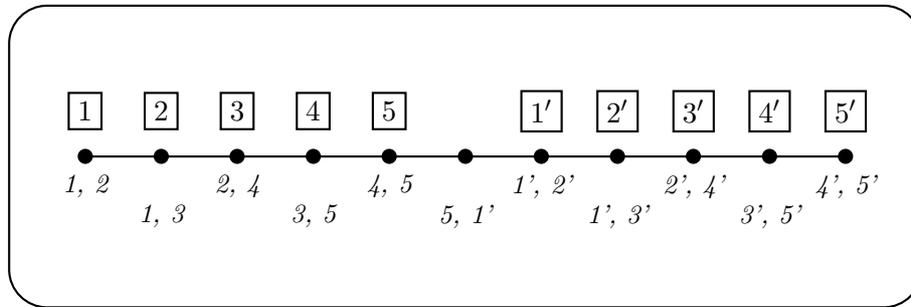


Figure 4.VII – Un système de $(1, \leq 2)$ -contrôle optimal dans les chaînes.

Pour les valeurs supérieures de ℓ , nous ne pouvons faire mieux qu'utiliser un système de contrôle trivial dans la chaîne :

Théorème 4.11 (Auger, Charon, Hudry, Lobstein, annexe F). *Pour tout $n \geq 0$ et tout $\ell \geq 3$, on a*

$$w_{1,\ell}(\mathcal{P}_n) = n.$$

Nous obtenons des résultats sensiblement équivalents dans les cycles :

Théorème 4.12 (Auger, Charon, Hudry, Lobstein, annexe F). *Pour tout $n \geq 1$ on a*

$$w_1(\mathcal{C}_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil.$$

D'autre part $w_{1,2}(\mathcal{C}_6) = 6$, et pour $n \neq 6$ on a

$$w_{1,2}(\mathcal{C}_n) = w_{1,2}(\mathcal{P}_n) = \lceil \frac{5n}{6} \rceil.$$

4.6 Systèmes de contrôle dans la grille du roi

Les résultats de cette section ont été obtenus en collaboration avec Iiro Honkala lors d'un séjour doctoral à l'université de Turku, Finlande. Ce travail est encore en cours.

Nous renvoyons au chapitre 1 pour la définition de la grille du roi. Ce graphe est infini mais toutes les définitions données pour les systèmes de contrôles dans les graphes finis s'y

généralisent sans problème. Comme pour les codes identifiants, nous nous intéressons à la *densité* des systèmes de contrôle plutôt qu'à leur cardinal (qui sera également infini). La densité d'un système de contrôle \mathcal{W} de la grille du roi est définie de manière analogue à celle d'un code identifiant (voir 1.8).

4.6.1 Identification des sommets

À distance 1, nous pouvons montrer que les codes identifiants sont optimaux comme systèmes de $(1, \leq 1)$ -contrôle dans la grille du roi (voir le théorème 1.10). Plus précisément :

Théorème 4.13 (Auger, Honkala). *La densité optimale d'un système de $(1, \leq 1)$ -contrôle dans la grille du roi est $\frac{2}{9}$.*

La preuve de ce résultat est une adaptation de la preuve du résultat analogue pour les codes identifiants, issue de [40].

Quand r grandit, les systèmes de $(r, \leq 1)$ -contrôle deviennent rapidement bien meilleurs que les codes identifiants, dont la densité optimale est $\frac{1}{4r}$ pour $r > 1$ (voir la table 1.VI).

Théorème 4.14 (Auger, Honkala). *Soit D_r la densité optimale d'un système de $(r, \leq 1)$ -contrôle dans la grille du roi. On a pour tout $r \geq 1$*

$$\frac{\log r}{2r^2}(1 + o(1)) \leq D_r \leq \frac{\lceil \log((2r+1)^2 + 1) \rceil}{(2r+1)^2}$$

et donc

$$D_r \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\log r}{2r^2}.$$

Preuve. Pour la borne supérieure, nous utilisons le même principe que dans la partie 4.3.3, mais à distance r : l'ensemble

$$\mathcal{C} = (2r+1)\mathbb{Z} \times (2r+1)\mathbb{Z}$$

est tel qu'il contient un élément à distance inférieure à r de tout sommet de la grille ; autrement dit, l'union des boules de centre r centrées sur les sommets de \mathcal{C} couvre entièrement \mathbb{Z}^2 . Or il suffit de $\lceil \log((2r+1)^2 + 1) \rceil$ contrôleurs au centre de chacune de ces boules pour en identifier les $(2r+1)^2$ éléments. La densité de \mathcal{C} étant par ailleurs égale à $\frac{1}{(2r+1)^2}$, nous obtenons ainsi le majorant annoncé.

Considérons maintenant $\epsilon > 0$. Pour identifier les sommets d'une boule de centre x fixé et de rayon $\lceil \epsilon r \rceil$, le nombre de contrôleurs nécessaire est au moins égal à $\log((2\epsilon r + 1)^2 + 1)$; d'autre part ces contrôleurs sont nécessairement centrés dans la boule de centre x et de rayon $\lceil \epsilon r + r \rceil$. En pavant la grille avec des boules de ce rayon on voit donc que

$$\frac{\log((2\epsilon r + 1)^2 + 1)}{(2\lceil (1 + \epsilon)r \rceil + 1)^2} \leq D_r.$$

Ceci étant vrai pour tout $\epsilon > 0$, un peu d'analyse permet d'établir simplement le minorant. \square

4.6.2 Identification des ensembles de sommets

Résultats d'impossibilité

Comme tout graphe, la grille du roi admet des systèmes de $(r, \leq \ell)$ -contrôle pour toutes les valeurs de r et ℓ ; cependant il est raisonnable de penser que pour ℓ grand, quand r

est fixé, ces systèmes seront tous triviaux, c'est-à-dire de densité supérieure ou égale à 1. Nous avons commencé par le cas $r = 1$, en nous intéressant à la question suivante : *jusqu'à quelle valeur de ℓ la grille du roi admet-elle des systèmes de $(1, \leq \ell)$ -contrôle non triviaux ?*

Si \mathcal{W} est un système de contrôle d'un graphe G , nous appelons *ermite* un sommet $h \in V(G)$ tel qu'il existe un contrôleur $w \in \mathcal{W}$ qui contrôle uniquement h . Remarquons qu'il est alors inutile que tout autre contrôleur contrôle h , et qu'on peut ainsi supposer que l'étiquette $L_{\mathcal{W}}(h)$ est un singleton. On peut aussi supposer que le centre de contrôle du contrôleur d'un ermite h est le sommet h lui-même, ce que nous ferons désormais.

Nous avons besoin d'utiliser, pour les propriétés à venir, la notion d'ensemble couvrant une famille de parties. Si X est un ensemble fini et \mathcal{F} est une famille de parties de X , un *ensemble couvrant* \mathcal{F} est un sous-ensemble \mathcal{C} de \mathcal{F} tel que, pour tout $F \in \mathcal{F}$, on ait $F \cap \mathcal{C} \neq \emptyset$. Cette notion généralise celle d'ensemble de sommets couvrant un ensemble d'arêtes, ou d'ensemble dominant un graphe.

Supposons r fixé. Soient G un graphe, x un sommet de G et w_1, w_2, \dots, w_k des r -contrôleurs de G . Nous notons

$$\kappa_x(\{w_1, w_2, \dots, w_k\})$$

le nombre minimal de sommets *distincts de x* nécessaires pour couvrir l'ensemble des parties

$$\{Z(w_i) : 1 \leq i \leq k\}.$$

Clairement, on a $\kappa_x(\{w_1, w_2, \dots, w_k\}) < +\infty$ si et seulement si les contrôleurs w_i , pour $1 \leq i \leq k$, contrôlent x et au moins un autre sommet.

Nous pouvons alors énoncer un lemme qui nous sera utile :

Lemme 4.15. *Soit \mathcal{W} un système de $(r, \leq \ell)$ -contrôle dans un graphe G . Alors pour tout $x \in V(G)$, si x n'est pas un ermite, on a*

$$\kappa_x(L_{\mathcal{W}}(x)) \geq \ell$$

et en particulier on a $|B(x, 2r)| \geq \ell + 1$.

Preuve. Si x n'est pas un ermite, alors on a $\kappa_x(L_{\mathcal{W}}(x)) < +\infty$: soit $A \subset V(G) \setminus \{x\}$ couvrant $L_{\mathcal{W}}(x)$ et de taille minimale. Par définition, tout contrôleur $w \in L_{\mathcal{W}}(x)$ contrôle un élément de A ; on a donc $L_{\mathcal{W}}(x) \subset L_{\mathcal{W}}(A)$ et ainsi $L_{\mathcal{W}}(A) = L_{\mathcal{W}}(A \cup \{x\})$; ceci implique que $|A| + 1 > \ell$.

Remarquons maintenant que tous les contrôleurs de x ont leur centre dans $B_G(x, r)$, et donc que leur zone de contrôle est incluse dans $B_G(x, 2r)$. Ainsi $B_G(x, 2r) \setminus \{x\}$ couvre $L_{\mathcal{W}}(x)$ et est donc de cardinal au moins ℓ . □

Ce lemme implique, par exemple, que dans un graphe de degré maximal Δ , tous les systèmes de $(1, \leq \ell)$ -contrôle avec $\ell > \Delta^2$ sont triviaux. Pour la grille du roi, nous obtenons une borne plus fine :

Théorème 4.16 (Auger, Honkala). *Pour $\ell \geq 6$, tous les systèmes de $(1, \leq \ell)$ -contrôle dans la grille du roi ont une densité supérieure ou égale à 1.*

Preuve. Soit $\ell \geq 6$ et \mathcal{W} un système de $(1, \leq \ell)$ -contrôle dans la grille du roi. Considérons qu'un contrôleur (c, Z) confère un poids de $\frac{1}{|Z|}$ à chaque sommet de Z ; le poids d'un sommet étant alors la somme des poids qui lui sont conférés par chacun des contrôleurs

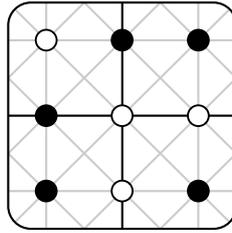


Figure 4.VIII – Motif M utilisé pour créer un système de $(1, \leq 4)$ -contrôle, composé des cinq sommets noirs.

qui le contrôlent. Il suffit alors, pour prouver qu'un système de contrôle a une densité supérieure ou égale à 1, de montrer que tous les sommets ont un poids supérieur ou égal à 1.

Considérons d'abord un sommet x tel que $|L_{\mathcal{W}}(v)| = 1$; alors, puisque $\ell > 1$ le contrôleur qui contrôle x ne peut contrôler d'autre sommet (ainsi x est un ermite). Ce contrôleur confère donc un poids de 1 à x . D'après le lemme 4.15, si x n'est pas un ermite alors nous devons avoir $|L_{\mathcal{W}}(x)| \geq \ell \geq 6$.

- Supposons que $|L_{\mathcal{W}}(x)| \geq 9$: alors le poids de x est au moins égal à $9 \times \frac{1}{9} = 1$.
- Supposons maintenant $|L_{\mathcal{W}}(x)| = 8$, et posons

$$L_{\mathcal{W}}(x) = \{w_1, w_2, \dots, w_8\}.$$

Si trois de ces contrôleurs, sans perte de généralité w_1 , w_2 et w_3 contrôlent un même sommet distinct de x , alors $\kappa_x(\{w_1, w_2, w_3\}) = 1$ et donc $\kappa_x(\{w_4, w_5, w_6, w_7, w_8\}) \geq 5$. Les cinq contrôleurs w_i pour $4 \leq i \leq 8$ doivent donc avoir des zones de contrôle ne s'intersectant deux à deux qu'en x ; ces cinq zones sont incluses dans la boule $B(x, 2)$, de cardinal 25. Étant disjointes, à part en x , elles confèrent à x un poids minimum de $5 \times \frac{1}{1+\frac{24}{5}} = \frac{25}{29}$. Les contrôleurs w_1, w_2 et w_3 , quant à eux, confèrent à x un poids d'au minimum $3 \times \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$. Le poids de x est donc au moins $\frac{25}{29} + \frac{1}{3} > 1$.

Si, en dehors de x , trois des huit contrôleurs ne contrôlent jamais un même sommet, alors les éléments de $B(x, 2) \setminus \{x\}$ appartiennent à au plus deux zones de contrôles; ainsi la taille moyenne de ces zones de contrôle est d'au plus $1 + \frac{48}{8} = 7$, d'où un poids d'au moins $\frac{8}{7}$ pour x .

- Supposons maintenant que $|L_{\mathcal{W}}(x)| = 7$. Parmi ces sept contrôleurs, cinq au moins doivent avoir des zones de contrôle deux à deux disjointes en dehors de x , de façon à avoir $\kappa_x(L_{\mathcal{W}}(x)) \geq 6$. Ces cinq contrôleurs confèrent à x un poids d'au moins $\frac{25}{29}$, et les deux autres un poids d'au moins $\frac{2}{9}$, d'où un poids supérieur à 1 pour x .
- Enfin, si $|L_{\mathcal{W}}(x)| = 6$, les six zones de contrôle doivent être disjointes en dehors de x et ainsi le poids de x est d'au moins $6 \times \frac{1}{1+\frac{24}{6}} = \frac{6}{5} > 1$.

□

Une construction pour $\ell = 4$

Proposons maintenant une construction qui prouve qu'il existe des systèmes de $(1, \leq 4)$ -contrôle de densité strictement inférieure à 1 dans la grille du roi. Notre construction utilise le motif M représenté sur la figure 4.VIII. Notons $\{m_1, \dots, m_5\}$ les sommets de M dans un ordre indifférent; rappelons que ces sommets sont des éléments de \mathbb{Z}^2 . Notre motif M a la propriété suivante :

Propriété 4.17. *Les différences $m_j - m_i$, où les entiers i et j sont tels que $1 \leq i < j \leq 5$, sont deux à deux distinctes.*

Cette propriété nous permet de prouver :

Théorème 4.18. *Si \mathcal{C} est un ensemble de sommets de G tels que deux sommets distincts x et y n'appartenant pas à \mathcal{C} sont au moins à distance 5, alors l'ensemble de contrôleurs*

$$\mathcal{W} = \{(c, c + M) : c \in \mathcal{C}\}$$

est un système de $(1, \leq 4)$ -contrôle de G .

Un tel ensemble \mathcal{C} avec une densité optimale est par exemple

$$\mathbb{Z}^2 \setminus (5\mathbb{Z} \times 5\mathbb{Z})$$

qui nous fournit un système de contrôle de densité $\frac{24}{25} < 1$.

Preuve. L'intérêt de la propriété 4.17 est qu'elle assure que si les sommets x et y sont distincts, alors $(x + M) \cap (y + M)$ contient au plus un sommet. Soit \mathcal{C} comme dans l'énoncé ; on remarque de plus que pour tout sommet x , l'ensemble $x - M$ contient au plus un élément de \mathcal{C} . Par conséquent, l'étiquette $L_{\mathcal{W}}(x)$ de tout sommet x est de taille au moins 4.

Soient X et Y deux ensembles distincts de sommets de taille au plus 4 et prouvons que $L_{\mathcal{W}}(X) \neq L_{\mathcal{W}}(Y)$; c'est clairement le cas si Y est vide. Supposons donc Y non vide, et aussi dans un premier temps que $|X| < 4$. Soit $y \in Y$; puisque pour tout $x \in X$ on a $|L_{\mathcal{W}}(x) \cap L_{\mathcal{W}}(y)| \leq 1$, on en déduit qu'il existe au moins un sommet de $L_{\mathcal{W}}(y)$ qui n'appartient pas à $L_{\mathcal{W}}(X)$. On a donc $L_{\mathcal{W}}(Y) \neq L_{\mathcal{W}}(X)$.

Nous pouvons ainsi supposer que $|L_{\mathcal{W}}(X)| = |L_{\mathcal{W}}(Y)| = 4$. Il existe alors un sommet $x_1 \in X \setminus Y$ et un sommet $y_1 \in Y \setminus X$. Si jamais nous avons $|L_{\mathcal{W}}(x_1)| = 5$, alors par un argument similaire au précédent nous ne pourrions avoir $L_{\mathcal{W}}(x_1) \subset L_{\mathcal{W}}(Y)$, et inversement si $|L_{\mathcal{W}}(y_1)| = 5$. On peut donc supposer que

$$|L_{\mathcal{W}}(x_1)| = |L_{\mathcal{W}}(y_1)| = 4.$$

Si ces deux étiquettes ne sont pas de cardinal 5, c'est qu'il existe deux sommets de la forme $x_1 + m_1$ et $y_1 + m_2$, où m_1 et m_2 sont dans M , qui n'appartiennent pas à \mathcal{C} . Si ces sommets sont distincts, alors $d_G(x_1 + m_1, y_1 + m_2) \geq 5$, et donc $d_G(x_1, y_1) \geq 3$ d'où $L_{\mathcal{W}}(x_1) \cap L_{\mathcal{W}}(y_1) = \emptyset$. Mais alors $L_{\mathcal{W}}(x_1) \subset L_{\mathcal{W}}(Y \setminus \{y_1\})$ et nous pouvons appliquer le même argument que précédemment.

Si jamais $x_1 + m_1 = y_1 + m_2$, alors l'intersection de $x_1 - M$ et $y_1 - M$ est précisément réduite à ce sommet. On a donc $L_{\mathcal{W}}(x_1) \cap L_{\mathcal{W}}(y_1) = \emptyset$, et encore une fois le même argument implique qu'il est impossible d'avoir $L_{\mathcal{W}}(x_1) \subset L_{\mathcal{W}}(Y)$. \square

Plus généralement, on peut prouver le résultat suivant, où l'hypothèse de *différences distinctes* est la généralisation de la propriété 4.17.

Théorème 4.19 (Auger, Honkala). *Soit $\ell \geq 2$ et $M = \{m_1, m_2, \dots, m_{\ell+1}\}$ un sous-ensemble de la boule de rayon r et de centre $\mathbf{0}$ de la grille du roi, ayant des différences distinctes. Alors il existe un système de $(r, \leq \ell)$ -contrôle dans la grille de densité*

$$D = 1 - \frac{1}{(4r + 1)^2}$$

où toutes les zones de contrôle sont de la forme $x + M$ pour un sommet x .

Le cas $\ell = 5$ est pour l'instant encore ouvert, car nous ne disposons ni d'une construction, ni d'une preuve d'inexistence, d'un système de $(1, \leq 5)$ -contrôle non trivial dans la grille du roi.