Homogénéisation périodique en grandes déformations

Ce chapite a pour but de présenter l'homogénéisation périodique en grandes déformations. Dans un premier temps, on présente l'écriture du problème mécanique dans le cadre de la mécanique des milieux continus. Puis, on introduit les grandeurs physiques et mécaniques nécessaires à l'écriture du problème dans le cadre de l'homogénéisation des milieux périodiques. Finalement, on décrit les développements nécessaires à son introdution dans le formalisme des éléments finis. L'application dans le code de calcul Z-set (`www.zset-software.com`) est présentée en annexe A.

Ecriture du problème mécanique en grandes déformations

On considère la mécanique des milieux continus pour décrire la déformation d'un corps matériel $\mathcal{M}$. On nomme la configuration Ω_t et son bord $\partial\Omega_t$, l'espace qu'occupe les points matériels de ce corps à un instant t. On note $\underline{\boldsymbol{x}}\,(M,t)$ la position à un instant t d'un point matériel M du corps matériel $\mathcal{M}$ dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un référentiel $\mathcal{R}$. On note Ω_0 la configuration initiale à l'instant $t = 0$ dite configuration de référence. On note $\underline{\boldsymbol{X}}$ et $\underline{\boldsymbol{x}}$ respectivement les positions du point matériel M dans la configuration de référence et dans la configuration courante. On considère la transformation Φ qui, à chaque instant t, associe les positions d'un point matériel dans Ω_0 et Ω_t :

$$\underline{\boldsymbol{x}} = \Phi(\underline{\boldsymbol{X}}, t) \tag{2.1}$$

On demande à Φ d'être une application bijective. On écrit donc

$$\underline{\boldsymbol{X}} = \Phi^{-1}(\underline{\boldsymbol{x}}, t) \tag{2.2}$$

Descriptions matérielle et spatiale du mouvement

On peut suivre l'évolution de grandeurs physiques et mécaniques d'un corps matériel dans son mouvement à partir de plusieurs points de vue particuliers.

Description lagrangienne du mouvement

La configuration initiale à $t = 0$ est ici choisie comme configuration de référence. La description lagrangienne du mouvement consiste à considérer les grandeurs physiques et mécaniques étudiées comme des fonctions de la variable $\underline{\boldsymbol{X}} \in \Omega_0$. Pour suivre la trajectoire d'un point matériel, on observe son déplacement $\underline{\boldsymbol{u}}$ défini par :

$$\underline{\boldsymbol{x}}(t) = \underline{\boldsymbol{X}} + \underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{X}}, t) \tag{2.3}$$

Description eulérienne du mouvement

La description eulérienne du mouvement consiste à considérer les grandeurs physiques et mécaniques étudiées comme des fonctions du point géométrique $\underline{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{E}$.

Gradient de la transformation

On adopte ici le point de vue lagrangien et on considère la transformation Φ d'une configuration initiale Ω_0 à une configuration actuelle Ω_t. Pour analyser la transformation dans le voisinage du point $\underline{\boldsymbol{X}}$, on fait appel à la différentielle par rapport aux coordonnées spatiales initiales :

$$\underline{\boldsymbol{dx}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underline{\boldsymbol{dX}}, \text{ avec } \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \frac{\partial \underline{\boldsymbol{x}}}{\partial \underline{\boldsymbol{X}}} \tag{2.4}$$

D'un point de vue physique, $\underline{\boldsymbol{dX}}$ donne la direction d'une fibre matérielle tracée sur Ω_0 passant par $\underline{\boldsymbol{X}}$. Cette ligne se transforme en une courbe dont la tangente en $\underline{\boldsymbol{x}}$ est selon $\underline{\boldsymbol{dx}}$. On peut assimiler la transformée du petit segment liant $\underline{\boldsymbol{X}}$ à $\underline{\boldsymbol{X}} + \underline{\boldsymbol{dX}}$ au segment $\underline{\boldsymbol{x}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}.\underline{\boldsymbol{dX}}$ avec une erreur en $\mathcal{O}(\|\underline{\boldsymbol{dX}}\|^2)$. On appelle gradient de la transformation, l'application linéaire $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{X}}, t)$. On a en particulier

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}(\underline{\boldsymbol{X}}, t = 0) = \underset{\sim}{\boldsymbol{1}} \tag{2.5}$$

On se restreint au cas d'un gradient $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$ inversible et on ne s'intéresse qu'à la situation

$$\det \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} > 0 \tag{2.6}$$

Le gradient de la transformation s'exprime aussi en fonction du déplacement

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{1}} + \frac{\partial \underline{\boldsymbol{u}}}{\partial \underline{\boldsymbol{X}}} \tag{2.7}$$

Transport d'un élément de volume

Le volume initial dV d'un élément de volume se transforme en un volume actuel dv valant :

$$\frac{dv}{dV} = J, \text{ avec } J = \det \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} \tag{2.8}$$

J est le jacobien de la transformation Φ.

Transport d'un élément de surface

On considère l'élément de surface dans la configuration de référence $\underline{\boldsymbol{dS}}$ engendrée par deux fibres matérielles. On obtient l'élément de surface $\underline{\boldsymbol{ds}}$ dans la configuration actuelle par :

$$\underline{\boldsymbol{ds}} = J\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T}\underline{\boldsymbol{dS}} \tag{2.9}$$

Mesures de déformation

On peut effectuer une décomposition polaire du gradient de la transformation :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{R}}.\underset{\sim}{\boldsymbol{U}} \tag{2.10}$$

où $\underset{\sim}{\boldsymbol{R}}$ est un tenseur anti-symétrique de rotation et $\underset{\sim}{\boldsymbol{U}}$ est le tenseur droit des déformations pures. On définit le tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{C}}$ de Cauchy-Green droit par :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{C}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{T}.\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} \tag{2.11}$$

On peut alors choisir une mesure de la déformation $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Xi}}$ dite de Green-Lagrange, symétrique, définie dans le repère de référence, et nulle lors de tout mouvement de corps rigide.

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\Xi}} = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{C}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{1}}\right) = \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{H}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{H}}^{T} + \underset{\sim}{\boldsymbol{H}}^{T}.\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}\right) \text{ avec } \underset{\sim}{\boldsymbol{H}} = \mathrm{Grad}\,\underline{\boldsymbol{u}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{1}} \tag{2.12}$$

Mesures des contraintes

En utilisant les différents transports entre les configurations courante et de référence, on peut exprimer la puissance des efforts intérieures $\mathcal{P}^i$ en fonction de différentes grandeurs conjugées :

$$\mathcal{P}^i = \int_{\Omega} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} dv = \int_{\Omega_0} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{D}} J dV = \int_{\Omega_0} \underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{\Xi}}} dV = \int_{\Omega_0} \underset{\sim}{\boldsymbol{S}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}} dV \tag{2.13}$$

où $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}$ est le tenseur eulerien des contraintes de Cauchy et $\underset{\sim}{\boldsymbol{D}}$ le taux de déformation, qui est la partie symétrique de $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}} = \dfrac{\partial \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}{\partial t}$, $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Pi}} = J\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-1}\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T}$ est le tenseur de Piola-Kirchhoff 2 et $\underset{\sim}{\boldsymbol{S}} = J\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{-T}$ est le tenseur de Piola-Kirchhoff 1

Transition d'échelle et opérations de Moyenne

On considère la moyenne sur le volume Ω_0 des gradients des transformations mésoscopiques $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{'}$ cinématiquement admissibles sur le domaine afin de la relier à la moyenne des valeurs du champ de position $\underline{\boldsymbol{x}}^{'}$ cinématiquement admissible sur le bord $\partial\Omega_0$ de normale $\underline{\boldsymbol{N}}$.

$$\begin{aligned} \langle F^{'}_{\mathbf{m}iJ} \rangle &= \frac{1}{V}\int_{\Omega_0} F^{'}_{\mathbf{m}iJ} dV \\ &= \frac{1}{V}\int_{\Omega_0} x^{'}_{i,J} dV \\ &= \frac{1}{V}\int_{\partial\Omega_0} x^{'}_{i} N_J dS \end{aligned} \tag{2.14}$$

on note $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}^{'} = F^{'}_{iJ} = \dfrac{\partial x^{'}_i}{\partial X_J}$ où i et J sont les indices de la convention d'Einstein, et J est noté en majuscule pour montré le caractère mixte du tenseur $\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}$. L'indice $(\cdot)_{\mathbf{m}}$ indique une grandeur mésoscopique.
On relie de manière similaire la moyenne volumique du tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff 1 - ou de Boussinesq - à la moyenne des résultantes des vecteurs tractions sur le bord. Le champ $\underset{\sim}{\boldsymbol{S}}^{*}$ défini sur Ω_0 est supposé statiquement admissible. Ainsi, en tout point de Ω_0 :

$$\mathrm{Div}\ \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}^{*} = 0 \tag{2.15}$$

$$\begin{aligned}
\langle S^{*}_{\mathbf{m}iJ} \rangle &= \frac{1}{V}\int_{\Omega_0} S^{*}_{\mathbf{m}iJ} dV \\
&= \frac{1}{V}\int_{\Omega_0} \left(\underbrace{S^{*}_{\mathbf{m}iK,K} x_J}_{0 \text{ car Div } \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}^{*}=0} + S^{*}_{\mathbf{m}iK} x_{J,K} \right) dV \\
&= \frac{1}{V}\int_{\partial\Omega_0} S^{*}_{\mathbf{m}iK} N_K x_J dS
\end{aligned} \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
\langle \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}^{*}_{\mathbf{m}} : \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}^{'}_{\mathbf{m}} \rangle &= \frac{1}{V}\int_{\Omega_0} S^{*}_{\mathbf{m}iJ} \dot{F}^{'}{}_{\mathbf{m}iJ} dV \\
&= \frac{1}{V}\int_{\Omega_0} S^{*}_{\mathbf{m}iJ} \dot{u}^{'}_{i,J} dV \\
&= \frac{1}{V}\int_{\partial\Omega_0} S^{*}_{\mathbf{m}iJ} N_J \dot{u}^{'}_{i} dS
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Grandeurs macroscopiques

L'homogénéisation demande de définir l'ensemble des grandeurs qui seront utilisées à chaque échelle de modélisation. A l'échelle mésoscopique, on note le champ de vitesse $\underline{\dot{\boldsymbol{u}}}$ en tout point comme étant la somme d'un champ issue d'une vitesse de déformation homogène $\dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}$ et d'un champ de vitesse périodique $\underline{\dot{\boldsymbol{v}}}$:

$$\underline{\dot{\boldsymbol{u}}} = \dot{\underset{\sim}{\boldsymbol{F}}}.\underline{\boldsymbol{X}} + \underline{\dot{\boldsymbol{v}}} \tag{2.18}$$

On écrit alors la moyenne des puissances des efforts internes mésoscopiques :

$$
\begin{aligned}
\langle \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{\mathbf{m}} : \underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{F}}}_{\mathbf{m}} \rangle &= \frac{1}{V}\int_{\Omega_0} S_{\mathbf{m}iJ} \dot{F}_{\mathbf{m}iJ} dV \\
&= \frac{1}{V}\int_{\Omega_0} S_{\mathbf{m}iJ} \dot{u}_{i,J} dV \\
&= \frac{1}{V}\int_{\partial\Omega_0} S_{\mathbf{m}iJ} N_J \dot{u}_i dS \\
&= \frac{1}{V}\int_{\partial\Omega_0} S_{\mathbf{m}iJ} N_J \left(\dot{F}_{ik} X_k + \dot{v}_i\right) dS \\
&= \frac{1}{V}\int_{\partial\Omega_0} \left(S_{\mathbf{m}iJ} N_J \dot{F}_{ik} X_k + S_{\mathbf{m}iJ} N_J \dot{v}_k\right) dS \\
&= \frac{1}{V}\left(\int_{\partial\Omega_0} S_{\mathbf{m}iJ} N_J \dot{F}_{ik} X_k dS + \underbrace{\int_{\partial\Omega_0} S_{\mathbf{m}iJ} N_J \dot{v}_k \, dS}_{\text{0 car périodique}}\right) \\
&= \frac{1}{V}\int_{\Omega_0} S_{\mathbf{m}iJ} \dot{F}_{iJ} dV \\
&= \frac{1}{V}\int_{\Omega_0} S_{\mathbf{m}iJ} dV \dot{F}_{iJ} \\
&= \langle \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{\mathbf{m}} \rangle : \underset{\sim}{\dot{\boldsymbol{F}}} \qquad (2.19)
\end{aligned}
$$

On en conclut que le travail des forces internes macroscopiques est égal à la moyenne du travail des forces internes mésoscopiques (lemme de Hill-Mandel, Hill (1967))

$$
\langle \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{\mathbf{m}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_{\mathbf{m}} \rangle = \langle \underset{\sim}{\boldsymbol{S}}_{\mathbf{m}} \rangle : \langle \underset{\sim}{\boldsymbol{F}}_{\mathbf{m}} \rangle = \underset{\sim}{\boldsymbol{S}} : \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} \qquad (2.20)
$$

Homogénéisation numérique

Les développements nécessaires à l'introdution des grandeurs macroscopiques dans un calcul éléments finis sont présentés dans cette partie.

Formulation éléments finis

La formulation *total lagrangian* est décrite ici pour la discrétisation du problème mécanique :

$$
\underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{X}}, t) = \sum_{j=1}^{n} \underline{\boldsymbol{N}}_j(X) \underline{\boldsymbol{u}}_j(t) \qquad (2.21)
$$

$$
\underline{\boldsymbol{u}}(\underline{\boldsymbol{X}}, t) = \mathbf{N}\mathbf{u} \text{ avec } \mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1(X) & N_2(X) & \cdots & N_n(X) \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix} \qquad (2.22)
$$

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}} + \frac{\partial \underline{\boldsymbol{u}}}{\partial \underline{\boldsymbol{X}}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}} + \mathbf{B}_0 \mathbf{u} \text{ où } \mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} N_{1,X} & N_{2,X} & \cdots & N_{n,X} \end{bmatrix} \tag{2.23}$$

avec $\mathbf{B}_0$ la matrice des dérivées des fonctions de forme $\mathbf{N}_0$ par rapport à la configuration de référence.

Degrés de libertés macroscopiques

On s'intéresse maintenant à la formulation éléments finis d'un problème mécanique d'homogénéisation périodique avec conditions de périodicité. On peut réécrire la matrice des dérivées des fonctions de forme et des degrés de liberté du problème en intégrant les degrés de liberté macroscopiques :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{F}} = \underset{\sim}{\mathbf{1}} + \mathbf{B}_0^{'} \mathbf{u}^{'} \text{ avec } \mathbf{B}_0^{'} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & \mathbf{B}_0 \end{bmatrix} \text{ et } \mathbf{u}^{'} = \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{22} \\ F_{33} \\ F_{23} \\ F_{32} \\ F_{13} \\ F_{31} \\ F_{12} \\ F_{21} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

Hypothèse des petites déformations en homogénéisation périodique

Transformations infinitésimales

Il est intéressant de simplifier les méthodes mathématiques de résolution du problème mécanique posé en utilisant l'hypothèse des transformations infinitésimales. En faisant l'hypothèse de linéarisation de la déformation, on retrouve la formulation classique de l'homogénéisation périodique :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}} := \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{H}} + \underset{\sim}{\boldsymbol{H}}^T\right) \text{ avec } \underset{\sim}{\boldsymbol{H}} = \operatorname{Grad} \underline{\boldsymbol{u}} \tag{2.25}$$

Ce tenseur des déformations infinitésimales est la partie symétrique du gradient du déplacement. Le cadre des transformations infinitésimales est plus restrictif que celui où l'on ne demanderait qu'aux seules déformations d'être infinitésimales, car il faut également que les rotations $\underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}}$ soient infinitésimales :

$$\underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}} := \frac{1}{2}\left(\underset{\sim}{\boldsymbol{H}} - \underset{\sim}{\boldsymbol{H}}^T\right) \tag{2.26}$$

En résumé, le cas particulier des petites déformations revient à avoir :

$$\begin{aligned} |\underset{\sim}{\boldsymbol{H}}| \ll 1 &\implies |\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}| \ll 1,\ |\underset{\sim}{\boldsymbol{\omega}}| \ll 1 \\ \underset{\sim}{\boldsymbol{F}} \simeq 1 &\implies \underset{\sim}{\boldsymbol{R}} \simeq 1,\ \underset{\sim}{\boldsymbol{U}} \simeq 1 \end{aligned} \tag{2.27}$$

Ce qui implique pour l'homogénéisation périodique :

$$\begin{aligned} \langle \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{m}} \rangle &= \frac{1}{V}\int_{\Omega} \underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{m}} dV \\ &= \underset{\sim}{\boldsymbol{E}} \end{aligned} \tag{2.28}$$

où $\underset{\sim}{\boldsymbol{E}}$ est la moyenne des déformations mésoscopiques $\underset{\sim}{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\mathbf{m}}$ et :

$$\begin{aligned} \langle \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{m}} \rangle &= \frac{1}{V}\int_{\Omega} \underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{m}} dV \\ &= \underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}} \end{aligned} \tag{2.29}$$

où $\underset{\sim}{\boldsymbol{\Sigma}}$ est la moyenne des contraintes mésoscopiques $\underset{\sim}{\boldsymbol{\sigma}}_{\mathbf{m}}$. L'écriture du champ de déplacement mésoscopique dans le cadre de l'homogénéisation des milieux périodiques s'écrit alors :

$$\underline{\boldsymbol{u}} = \underset{\sim}{\boldsymbol{E}}.\underline{\boldsymbol{x}} + \underline{\boldsymbol{v}} \tag{2.30}$$