

Homogénéisation périodique et caractérisation du comportement élasto-plastique des empilements de tubes

La modélisation de structures sandwichs macroscopiques de grandes dimensions avec un cœur cellulaire dans le cas où la structure à l'échelle mésoscopique est du même ordre de grandeur de taille que la structure se confronte à deux limitations. D'une part, leur modélisation devient coûteuse en temps de calcul de par le grand nombre d'hétérogénéités à prendre en compte. Et d'autre part, l'application de la technique de l'homogénéisation s'approche de la limite de validité des hypothèses de la méthode. De plus, le matériau cellulaire modèle étudié a un taux de porosité située entre celui des matériaux tels que les mousses ou celui des matériaux poreux. Ainsi, l'objectif de cette partie est d'identifier une loi phénoménologique élasto-plastique compressible fortement anisotrope sur la base du comportement caractérisé du matériau modèle par la technique de l'homogénéisation des milieux périodiques. Ainsi, l'approche utilisée permet de déterminer le lien entre l'architecture à l'échelle mésoscopique de l'empilement, le comportement du matériau constitutif et le comportement macroscopique pour des chargements multi-axiaux. L'étude se concentre sur le comportement mécanique pour des déformations macroscopiques inférieures à 5%. Ainsi, on se place en première approche dans l'hypothèse des petites déformations ce qui simplifie grandement la résolution du problème mécanique et diminue les coûts des calculs éléments finis.

Les travaux présentés dans ce chapitre ont été soumis à publication dans *International Journal of Mechanical Sciences* (Iltchev *et al.*). Les figures sont données ici en couleur par rapport à l'article soumis et leur mise en page est uniformisée avec le reste du manuscrit. On propose, dans un premier temps (section 3.1), d'appliquer l'homogénéisation périodique en petites déformations pour l'étude des cœurs cellulaires des structures sandwichs modèles présentées dans l'introduction. Cette étude est menée jusqu'à 5% de déformation inélastique macroscopique pour étendre l'approche par modélisation de la cellule unitaire

de Tsuda *et al.* (2010) à des niveaux de déformations plus importants et avec des conditions aux limites périodiques. De plus, en appliquant la formulation de l'homogénéisation périodique numérique proposée par Feyel et Chaboche (2000), les calculs sont pilotés en contraintes macroscopiques ce qui permet de solliciter la cellule périodique selon des chemins de chargements proportionnels dans l'espace des contraintes. Ceci permet d'analyser les évolutions de la limite d'élasticité et du comportement inélastique pour des chargements multi-axiaux.

La section 3.2 est quant à elle dédiée à l'identification d'une Loi Homogène Equivalente (LHE) rendant compte du comportement de chaque empilement, carré et hexagonal, de tubes. Les LHE ainsi identifiées doivent permettre par la suite la modélisation des structures sandwichs à cœur cellulaire.

Une étude des structures sandwichs de taille finie est proposée dans la section 3.3 pour des cas de chargement en compression et en glissement simple. Le cœur des structures sandwichs étudiées est constitué d'un nombre fini de tubes dans la largeur et dans la hauteur. L'effet de taille et l'influence des effets de bords sont étudiés dans le cas de ces matériaux cellulaires de densités relatives d'environ 30% pour les deux types d'empilement. Une première étape a consisté à calculer toutes les tailles de structures pour chaque type d'empilement entre 3 et 11 tubes dans les deux directions. Ces calculs sur structures entièrement maillées servent de références. Puis, dans une deuxième étape, des calculs utilisant des Milieux Homogènes Equivalents (MHE) ont été effectués pour chaque taille de structure sandwich. Leurs comportements ont été comparés à ceux des calculs de référence sur structures complètement maillées.

Enfin, en section 3.4, différents compléments au contenu de l'article soumis (Itchev *et al.*) sont fournis. On présente tout d'abord les résultats de la caractérisation des VER de chaque empilement pour des chargements multi-axiaux. Puis, le comportement multi-axial des LHE identifiées est décrit. Pour finir, une phase de validation est réalisée à partir de calculs de flexion sur des structures sandwichs entièrement maillées et modélisées avec le MHE proposé.

3.1 Periodic homogenisation analysis of cellular structures

In order to study the macroscopic mechanical behaviour of heterogeneous solids with specific architectures such as those of the tube stackings considered here, a characterisation procedure is proposed involving both the finite element (FE) modelling of virtual multi-axial loading tests and periodic homogenisation techniques.

3.1.1 Homogenisation method

This kind of cellular structure can be analysed by following a standard homogenisation method. Therefore, the macroscopic strain $\underline{\underline{E}}$ and the macroscopic stress $\underline{\underline{\Sigma}}$ are introduced, according to the definition of Hill (1967) and Suquet (1987) for periodic homogenisation. They derive from the microscopic strain $\underline{\underline{\epsilon}}$ and the microscopic stress $\underline{\underline{\sigma}}$ obeying Eqs. (3.1) and (3.2) :

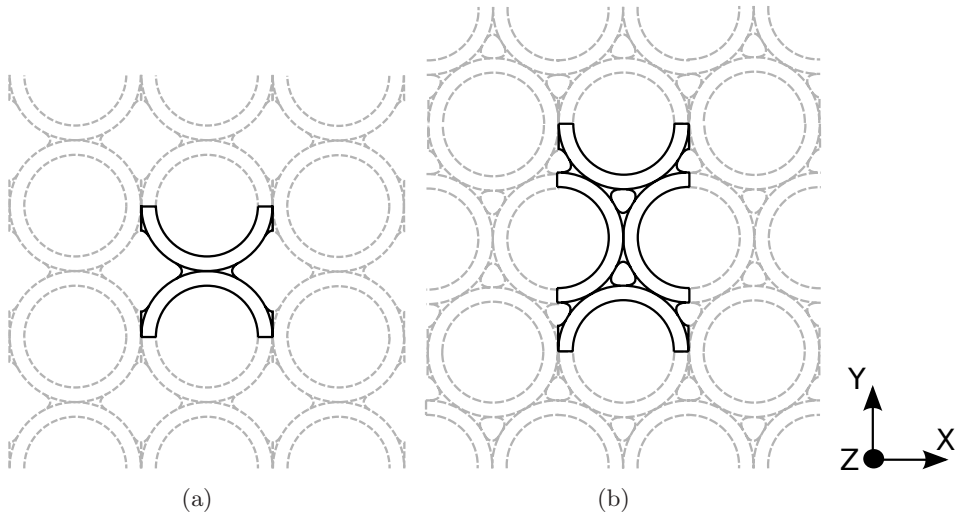


FIG. 3.1 – Unit cells of the periodic tube stackings studied : (a) the square pattern, (b) the hexagonal pattern.

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \langle \underline{\underline{\sigma}} \rangle = \frac{1}{V_{\Omega}} \int_{V_{\Omega}} \underline{\underline{\sigma}} \, dV_{\Omega} \quad (3.1)$$

$$\underline{\underline{E}} = \langle \underline{\underline{\varepsilon}} \rangle = \frac{1}{V_{\Omega}} \int_{V_{\Omega}} \underline{\underline{\varepsilon}} \, dV_{\Omega} \quad (3.2)$$

with V_{Ω} denoting the volume of Ω , the domain occupied by the considered unit cell.

The multi-scale character of the studied cellular structures is used to carry out the averaging procedure; one periodic unit cell is isolated for each stacking pattern as illustrated in solid lines in Fig. 3.1. Since focus is only on both elastic and plastic mechanical properties here, the periodic unit cells are valid representative volume elements (RVEs) of the considered regular tube stackings (Ostoja-Starzewski, 2006). FE simulations were conducted on the RVE of each stacking pattern to characterise their homogenised mechanical behaviour under multi-axial loads. The RVEs were meshed with triangular quadratic elements and the FE code *Z-set* (<http://www.zset-software.com/>) was used for the simulations. The different modelling assumptions formulated in the present work are listed hereafter.

Owing to the extruded character of the tube stackings only two-dimensional cross sections of the RVEs have been considered by using generalised plane-strain conditions. Hence it enabled us to simulate both in-plane and out-of-plane mixed loading cases without considering three-dimensional meshes (Besson *et al.*, 2009). To apply the periodic boundary conditions, linear multi-point constraints were imposed on the periodic components of the total displacement field on the pairs of opposite nodes on the boundary of the RVEs. The periodic components of the displacements were also set to zero on the unit cell vertices to fix rigid body motions. A small deformation formulation was adopted too for the range of macroscopic strain studied (up to 5%). The periodic homogenisation formu-

lation implemented in *Z-set* allows to prescribe either macroscopic strains or macroscopic stresses (Feyel et Chaboche, 2000).

To illustrate the homogenisation approach described in the present paper, the constitutive material has been assumed to be homogeneous in the tubes and in the braze joints on the basis of our previous works on brazed tube stackings made of nickel-base superalloys (Marcadon et Kruch, 2011; Marcadon *et al.*, 2012). Its mechanical properties were identified by performing tensile tests on single tubes after the brazing heat treatment (see (Marcadon et Kruch, 2011; Marcadon *et al.*, 2012) for more details concerning the processing of such tube stackings and the mechanical characterisation of their constitutive material). The constitutive material is assumed to exhibit an isotropic linear elasticity (Hooke's law) and an isotropic non-linear plasticity governed by von Mises yield criterion. The classic additive decomposition of the total strain $\underline{\varepsilon}$ into an elastic part $\underline{\varepsilon}_e$ and a plastic one $\underline{\varepsilon}_p$, i.e. $\underline{\varepsilon} = \underline{\varepsilon}_e + \underline{\varepsilon}_p$, is assumed. The constitutive equations of the bulk metal model are the following :

$$\underline{\varepsilon}_e = \frac{1+\nu}{E}\underline{\sigma} - \frac{\nu}{E}\text{tr}(\underline{\sigma})\underline{\mathbf{I}} \quad (3.3)$$

and

$$\dot{\underline{\varepsilon}}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \underline{\sigma}} \quad (3.4)$$

where $\dot{\lambda}$ is the scalar plastic multiplier and $\underline{\mathbf{I}}$ is the second-order identity tensor. E and ν denote Young's modulus and Poisson's ratio of the constitutive material, respectively. The yield function is :

$$\mathcal{F}(\underline{\sigma}, p_m) = \sqrt{\frac{3}{2}\underline{\sigma}_D : \underline{\sigma}_D} - r(p_m) \quad (3.5)$$

with $\underline{\sigma}_D$ the deviatoric part of $\underline{\sigma}$, $\underline{\sigma}_D = \underline{\sigma} - (1/3)\text{tr}(\underline{\sigma})\underline{\mathbf{I}}$, and p_m the cumulated plastic strain,

$$p_m = \int_0^t \sqrt{(2/3)\dot{\underline{\varepsilon}}_p : \dot{\underline{\varepsilon}}_p} dt \quad (3.6)$$

The instantaneous yield stress $r(p_m)$ varies according to the following relation :

$$r(p_m) = \sigma_y + hp_m + q(1 - \exp(-bp_m)) \quad (3.7)$$

with σ_y and h denoting the initial yield stress and the hardening modulus of the constitutive material, respectively. q and b are the material parameters of the non-linear hardening term. The different material parameters used are listed in Table 3.1.

In the present paper a fixed geometry has been considered for both stackings. The external diameter of the tubes and their thickness are equal to 5 mm and 500 μm , respectively, whereas the length of the braze joints is 1 mm. For this set of geometrical parameters, the ratio of matter is about 29% for the square stacking and 32% for the hexagonal one.

TAB. 3.1 – Mechanical properties used for the constitutive material (coming from (Marcadon et Kruch, 2011)).

| | |
|--|------------|
| Young's modulus E [MPa] | 171900. |
| Poisson's ratio ν | 0.3 |
| Initial yield stress σ_y [MPa] | 160.8 |
| Hardening modulus h [MPa] | 1974. |
| Non-linear hardening parameters q [MPa], b | 46.5, 76.2 |

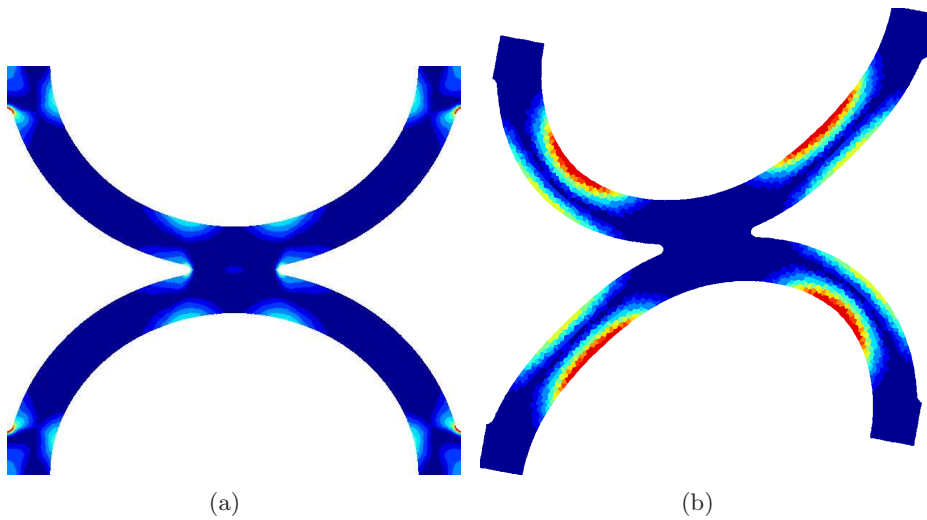


FIG. 3.2 – Von Mises stress maps obtained for the square stacking for a macroscopic strain of 5% : (a) uni-axial tension along the X-direction (a similar map is obtained for the tension along the Y-direction but rotated with an angle of 90°) (b) simple shear in the XY-plane. The maps are plotted in terms of integration node values.

3.1.2 Homogenised uni-axial mechanical responses

The first step for the numerical mechanical characterisation consisted in the FE simulation of uni-axial tests on the RVEs of the tube stackings. Uni-axial tensions in both the X- and Y-directions (axes are defined in Fig. 3.1) have been performed as well as XY-plane shear up to 5% of total strain (as illustrated in Fig. 3.2 for the square stacking and in Fig. 3.3 for the hexagonal stacking). Uni-axial tensile tests along the out-of-plane Z-direction have been performed too for the same level of strain.

From the different uni-axial tensile and simple shear tests simulated, the elastic moduli have been identified first from purely elastic simulations, in order to avoid a plastic contribution that can occur even for very low strain levels due to stress concentration observed for cellular structures. The effective elastic behaviour of the stackings is defined

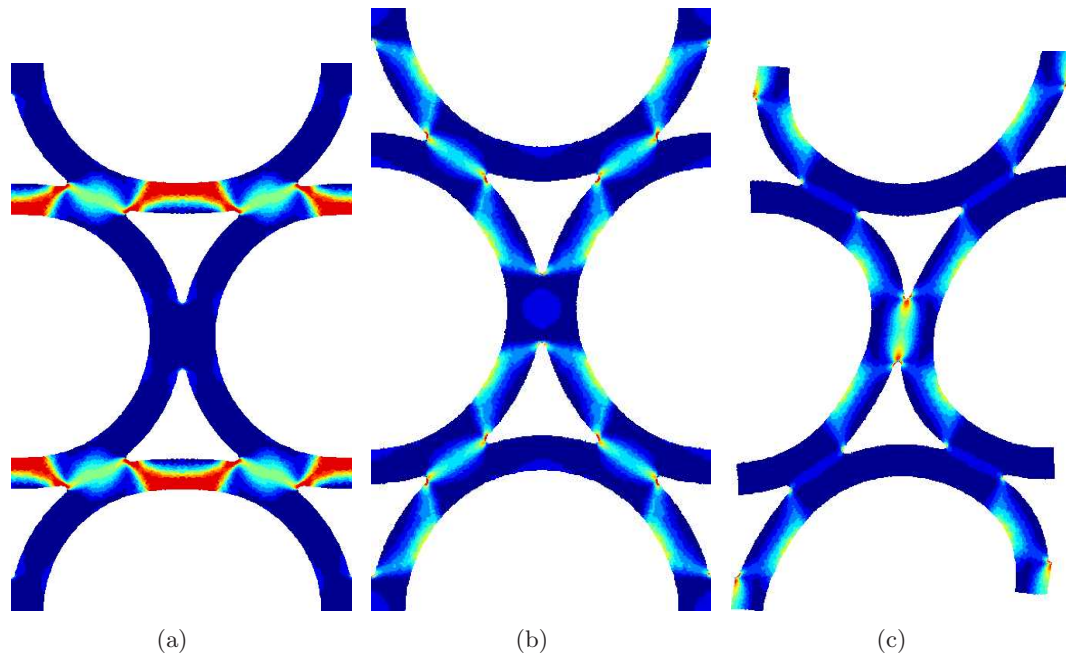


FIG. 3.3 – Von Mises stress maps obtained for the hexagonal stacking for a macroscopic strain of 5% : (a) uni-axial tension along the X-direction (b) uni-axial tension along the Y-direction (c) simple shear in the XY-plane. The maps are plotted in terms of integration node values.

TAB. 3.2 – Elasticity moduli identified by periodic homogenisation [MPa]. The lower indexes $_1$, $_2$ and $_3$ refer to the X-, Y- and Z-directions of Fig. 3.1, respectively. The components C_{2323} and C_{3131} are not available because of the generalised plane-strain formulation used for the simulations.

| $\underline{\underline{C}}$ component [MPa] | Square stacking | Hexagonal stacking |
|---|-----------------|--------------------|
| $C_{1111} = C_{2222}$ | 7555. | 25462. |
| C_{3333} | 51688. | 63329. |
| $C_{1122} = C_{2211}$ | 6744. | 9476. |
| $C_{2233} = C_{3311}$ | 4292. | 10490. |
| C_{1212} | 2200. | 8010. |

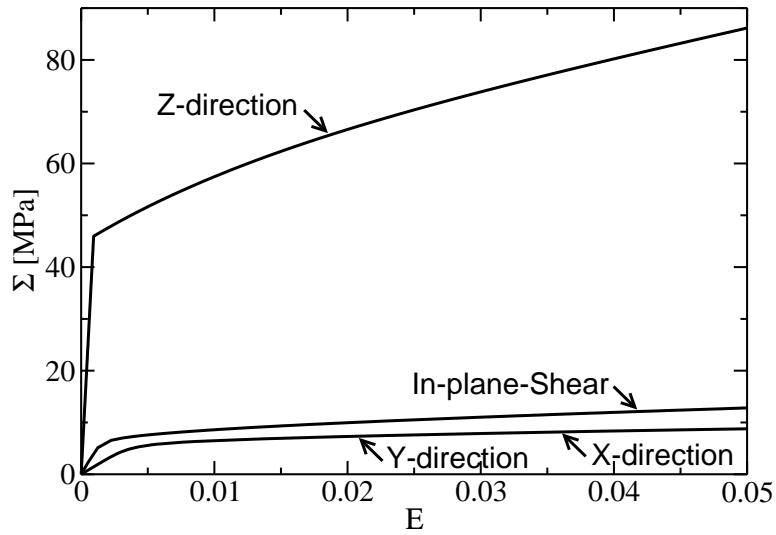
by Hooke's law for linear anisotropic elasticity :

$$\underline{\underline{\Sigma}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{E}}_e \quad (3.8)$$

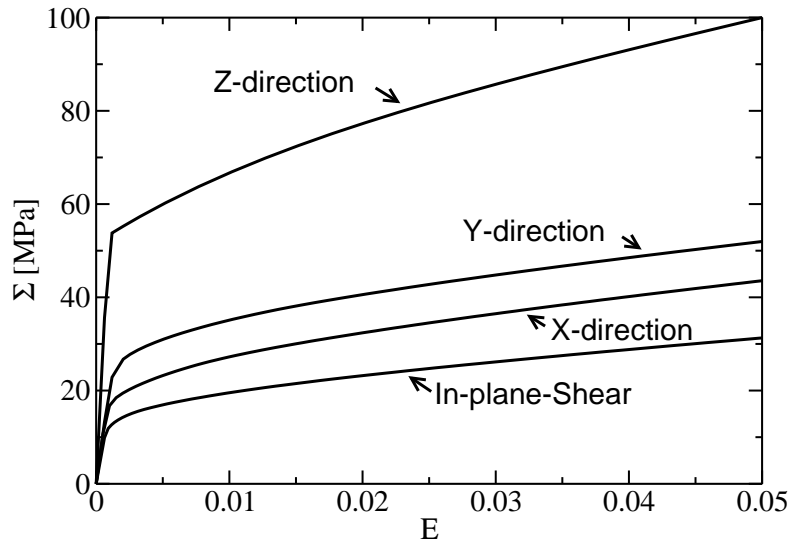
where $\underline{\underline{C}}$ and $\underline{\underline{E}}_e$ denotes the effective stiffness tensor and the elastic part of the macroscopic strain tensor, respectively. The different components identified for $\underline{\underline{C}}$ are given in Table 3.2 for both stacking patterns.

The results of the homogenisation procedure exhibit a non-linear and a strongly anisotropic behaviour in the case of the elasto-plastic simulations (see Fig. 3.4), whatever the loading case is. The main anisotropy comes from the extruded character of the tube stackings; the whole cross-section is homogeneously deformed in the Z-direction and the tube stacking behaves similarly to its constitutive material to within a factor that equals approximately the fraction of matter present in the cross-section. The in-plane directions, X- and Y-directions show non-linear behaviours for both types of stacking. It is the result not only of the non-linear behaviour of the base material, but also of the microscopic stress concentration in the tube walls and around the braze joints. The X- and Y-directions are equivalent in the case of the square stacking, leading to the same mechanical responses in both directions as illustrated in Fig. 3.4(a). On the contrary, the hexagonal stacking shows an additional in-plane plastic anisotropy (see Fig. 3.4(b)). The orientation of the braze joints relative to the load direction in this particular stacking is different for each in-plane direction, hence different concentrations of the microscopic stress induce an earlier plastic yield in the neighbourhood of the braze joints for a tensile test along the X-direction than along the Y-direction. The macroscopic mechanical response of the hexagonal stacking along the Y-direction for uni-axial tension is therefore stronger than that along the X-direction. However, the hexagonal stacking remains isotropic in terms of in-plane elasticity.

The square and hexagonal stackings show a rather similar strength along the out-of-plane direction (the fractions of matter in the cross-sections of the RVEs equal to about 29 and 32 % for the square and the hexagonal stackings, respectively). On the contrary, the



(a)



(b)

FIG. 3.4 – Mechanical responses for the uni-axial tensile tests along the X-, Y- and Z-directions, and the simple shear in the XY-plane (a) for the square stacking, (b) for the hexagonal stacking.

strength of the square stacking along the in-plane directions is considerably lower than that of the hexagonal stacking. The in-plane / out-of-plane anisotropy is considerably higher for the square stacking. Braze joints have a stiffening effect on tube walls ; they are more numerous for the hexagonal stacking, thus they are closer from ones to each others on a tube wall. Hence, the specific density is not necessary the most relevant geometrical parameter to explain the evolution of the mechanical properties of cellular structures (Marcadon et Kruch, 2013; Marcadon et Feyel, 2009). It can be also noticed that, the in-plane shear strength of the square stacking is higher than its in-plane tensile strength, which is not the case for the hexagonal stacking.

3.1.3 Planar bi-axial yield surfaces

The anisotropy of the plastic responses and their evolutions as a function of the loading path have then been characterised for each stacking pattern by a large number of FE simulations of bi-axial tensions. The yield surfaces have been built by simulating proportional loading paths in the space of the principal macroscopic stresses. Indeed, in a chosen $\Sigma_a \Sigma_b$ -plane, where Σ_a and Σ_b are the principal components of the bi-axial loading, proportional loading paths can be set for a discrete number of θ ranging in $[0, 2\pi]$:

$$\begin{cases} \Sigma_a = \Sigma_0 \cos \theta \\ \Sigma_b = \Sigma_0 \sin \theta \end{cases} \quad (3.9)$$

with Σ_0 denoting the amplitude of the bi-axial load. According to the additive decomposition of the total macroscopic strain $\underline{\underline{E}}$ into an elastic part and a plastic one, the macroscopic plastic strain $\underline{\underline{E}}_p$ can be computed from relation :

$$\underline{\underline{E}}_p = \underline{\underline{E}} - \underline{\underline{C}}^{-1} : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (3.10)$$

As already mentioned, the macroscopic plasticity results from both the constitutive material (through its plastic properties) and the architecture of the cellular structure (due to stress concentration) (Mangipudi et Onck, 2011; Marcadon *et al.*, 2012). Thus a measure of the macroscopic cumulated plastic strain p has been chosen to parametrise the evolution of the hardening behaviour :

$$p = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\underline{\underline{E}}}_p : \dot{\underline{\underline{E}}}_p} dt \quad (3.11)$$

The macroscopic stress controlled proportional loading paths provide the minimal macroscopic cumulated plastic strain for a given macroscopic stress state. It is the shortest path to reach a point on the actual yield surface.

Various threshold values of $p = p_1, p_2 \dots p_n$ have been set and for each one the corresponding macroscopic stress state was returned (see Fig. 3.5). An iterative routine was applied for a finer convergence toward the imposed thresholds. Both in-plane and combinations of in-plane and out-of-plane bi-axial loading cases have been simulated first on the RVEs. Iso-value surfaces of the macroscopic cumulated plastic strain have thus been drawn by assembling the results of the simulated multi-axial tests obtained by varying the

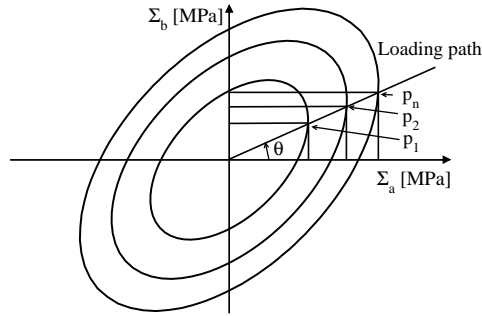
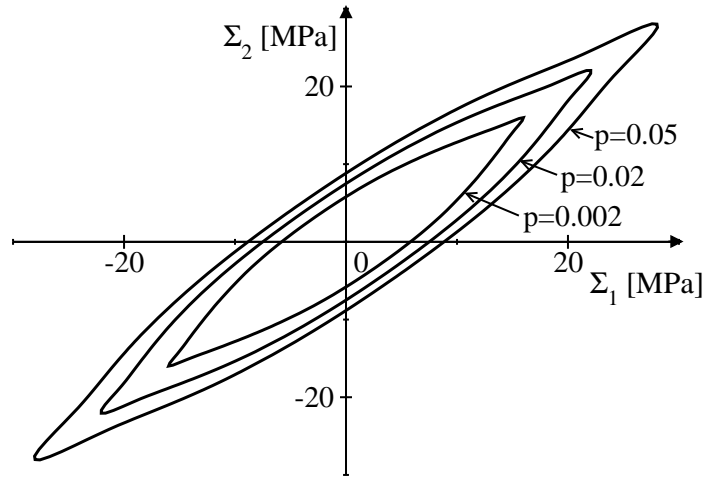


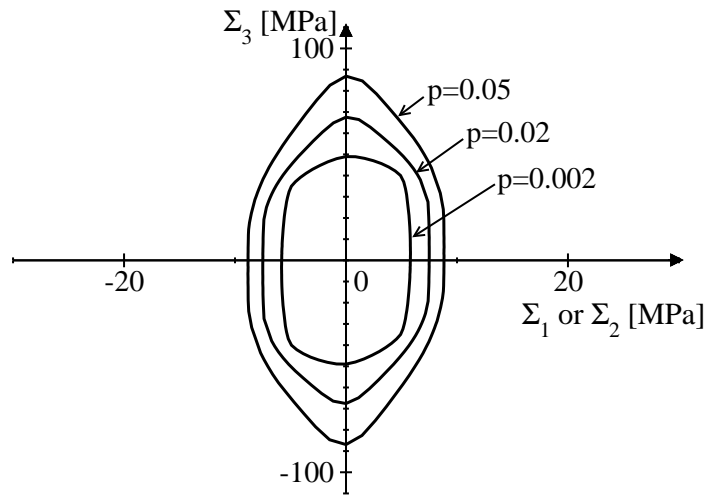
FIG. 3.5 – Construction method of the yield surfaces.

value of θ in the range of $[0, 2\pi]$. The surfaces obtained in this way for each p_n have then been considered as macroscopic yield surfaces. The steps of θ depend on the local curvature of the yield surface; it varies from 0.5° where the curvature is high to 10° for a low curvature. The yield surfaces obtained for both stacking patterns are illustrated in Figs. 3.6 and 3.7 for threshold values for $p = 0.002, 0.02$ and 0.05 .

The analysis of the yield surfaces is in accordance with the results coming from the uni-axial characterisation, see Figs. 3.4(a) and 3.6 for the square stacking or Figs. 3.4(b) and 3.7 for the hexagonal one. They provide the same information for these particular loading cases. Figs. 3.6 and 3.7 highlight the anisotropy of the in-plane and out-of-plane behaviours for both stackings. Especially, the strong out-of-plane anisotropy observed results from the extruded character of the tube stackings and their higher strength along the Z-direction. Similar anisotropic behaviours have been already observed by Sanders et Gibson (2003b,a) on regular hollow-sphere stackings. However, some differences exist between the square stacking behaviour and that of the hexagonal stacking. Indeed, because of the equivalent roles of the X- and Y-directions for the square stacking, the yield surfaces exhibit a symmetric shape close to be elliptic but elongated along the axis for which $\Sigma_1 = \Sigma_2$. This is never the case for the hexagonal stacking which the yield surfaces have non-quadratic shapes. However, the quadratic description or not of the yield surfaces remains a rather complex issue. As described below (see Section 3.2), even though the shape of the yield surfaces remains non-quadratic in all cases for the hexagonal stacking, if the yield surfaces are plotted in 2D in terms of plastic work density rather than cumulated plastic strain, those of the square stacking exhibit a quadratic shape. Thus, we suppose that the non-quadratic shape of the yield surfaces is intrinsic to the hexagonal stacking. It can be explained by the architecture; the localisation of the plasticity in the neighbourhood of the braze joints first and then in the tube walls govern the direction of the plastic flow and its evolution. On the contrary, the pointed shape of the yield surfaces observed for the square stacking in 3D may result from out-of-plane plastic Poisson's ratio effects.

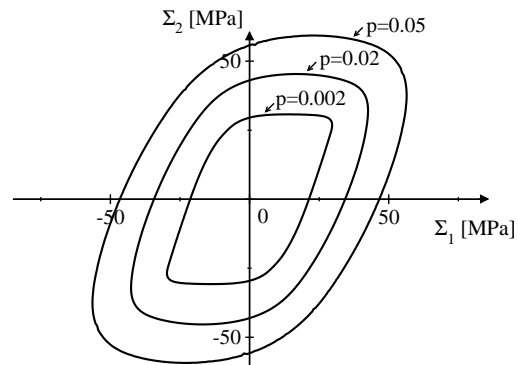


(a)

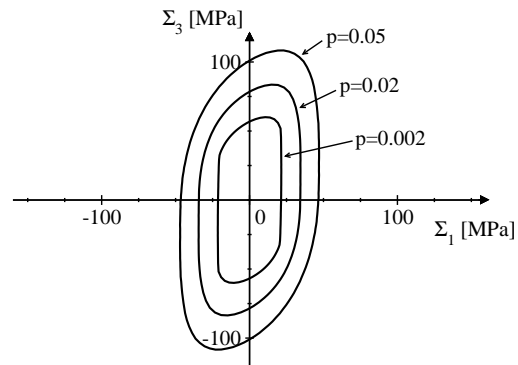


(b)

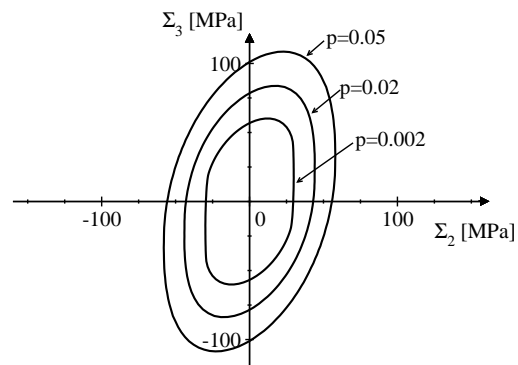
FIG. 3.6 – Planar yield surfaces for the square stacking : (a) $\Sigma_1\Sigma_2$ -plane (b) $\Sigma_1\Sigma_3$ -plane (or $\Sigma_2\Sigma_3$).



(a)



(b)



(c)

FIG. 3.7 – Planar yield surfaces for the hexagonal stacking : (a) $\Sigma_1\Sigma_2$ -plane (b) $\Sigma_1\Sigma_3$ -plane (c) $\Sigma_2\Sigma_3$ -plane.

3.1.4 General multi-axial loading cases

This section aims at generalising the method used previously for the characterisation of the planar bi-axial yield surfaces to 3D multi-axial ones. Only the initial yield surface $p = 0.002$ has been represented for that purpose. This new representation of the yield surface provides additional information regarding the compressibility of the tube stackings under tri-axial loading, and its anisotropy. The loading paths simulated were no longer proportional but, instead, a pre-load up to a macroscopic hydrostatic stress state then followed by a multi-axial loading path along the radii of the deviatoric planes have been applied to the RVEs. The deviatoric planes are those having the hydrostatic Σ_h -axis as normal, i.e. the planes in which $\Sigma_1 = \Sigma_2 = \Sigma_3$. Assuming that the macroscopic behaviour is purely elastic up to the yield stress allows the use of non-proportional loading paths. To characterise the evolution of the three-dimensional yield surfaces, we could have considered a projection of the loading paths onto a system of spherical coordinates, similarly to the method used before to obtain the planar bi-axial yield surfaces. But it would have required too many simulations.

Fig. 3.8 shows that the obtained 3D yield surfaces are closed along the spherical part of the macroscopic stress. The tips of the yield surfaces showing the compressible plastic behaviour are not centred around the hydrostatic Σ_h -axis because of the higher strength along the Z-direction characterising both the square and the hexagonal stackings. It can be also noticed that the surfaces are rather flat in the $\Sigma_h\Sigma_3$ -plane, especially for the square stacking. Moreover, the near-vertical edge of the yield surfaces under macroscopic hydrostatic loading illustrates the very high yield stress along the out-of-plane direction.

3.2 Identification of homogeneous equivalent laws

After having characterised the anisotropic elasto-plastic behaviour of both the square and the hexagonal stackings, focus is now on the construction of homogeneous equivalent laws (HEL) of these cellular architectures. They have to gather the distinctive features observed previously from the simulations on the RVE, such as their anisotropic elasticity and anisotropic compressible plasticity. We first start with the identification of a yield criterion for the square stacking and then address the case of the hexagonal stacking. Both stackings have some features in common but they differ regarding the equivalent stress measure involved in the yield function.

3.2.1 Square stacking

Formulation of the yield criterion

The total macroscopic strain $\tilde{\mathbf{E}}$ is additively decomposed in the same manner as before (Eq. (3.10)), i.e. with an elastic part $\tilde{\mathbf{E}}_e$ obeying Eq. (3.8) and a plastic part $\tilde{\mathbf{E}}_p$ obeying an associated plastic flow rule :

$$\dot{\tilde{\mathbf{E}}}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \tilde{\boldsymbol{\Sigma}}} \quad (3.12)$$

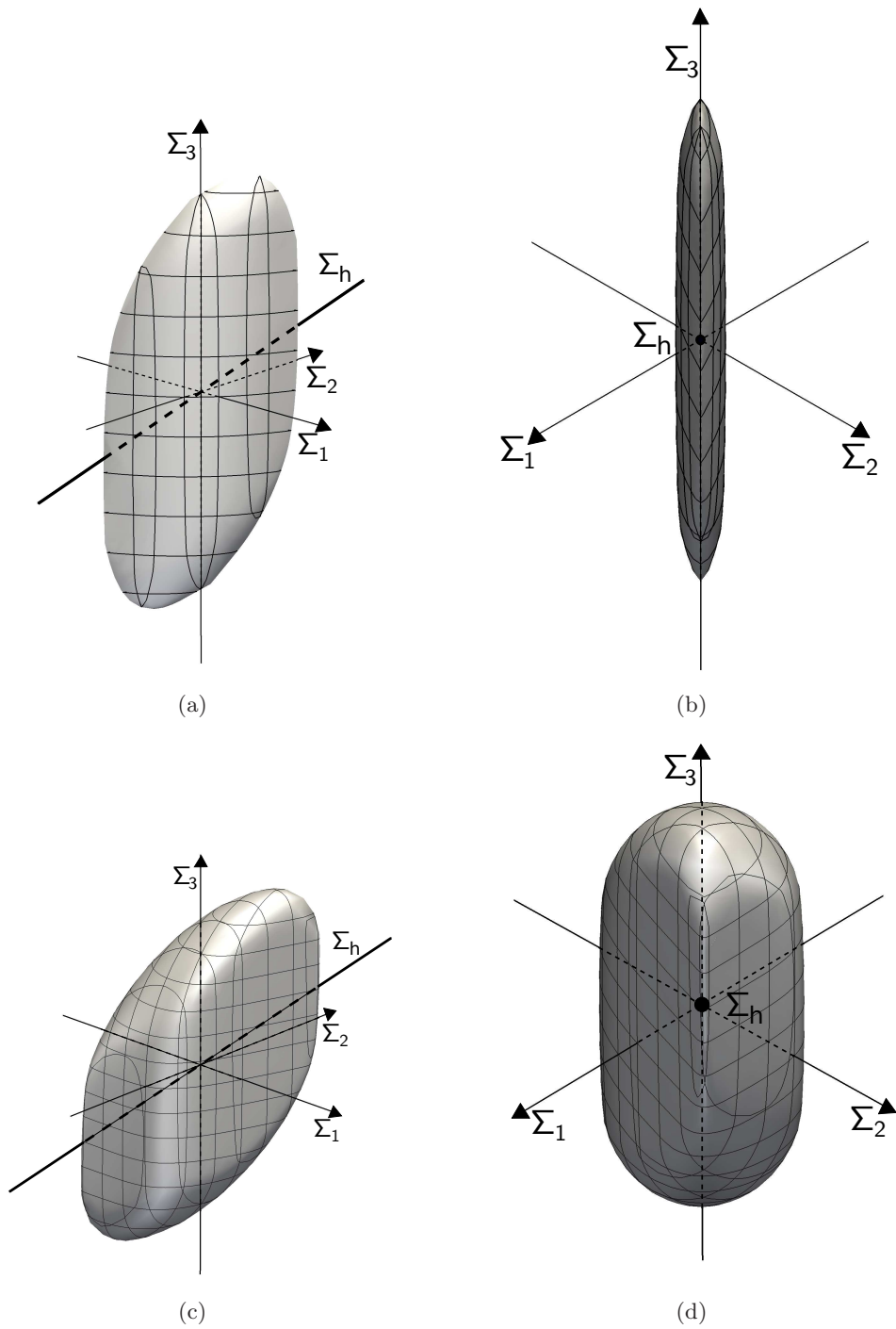


FIG. 3.8 – Initial $p = 0.002$ three-dimensional yield surfaces in the space of the macroscopic stresses : (a) and (b) for the square stacking (c) and (d) for the hexagonal stacking. For the sake of clarity, there are no units on the axes and the reader has to refer to Figs. 3.6 and 3.7 for the values for the square and the hexagonal stackings, respectively. However, the shapes of the three-dimensional yield surfaces illustrated in this figure are not distorted ones; the scale is the same for all the axes.

with $\dot{\lambda}$ the scalar plastic multiplier and \mathcal{G} the plastic potential written as $\mathcal{G}(\underline{\Sigma}, p) = \Sigma_{eq} - R(p)$. An elliptic anisotropic criterion, based on Green (1972)'s one and proposed by Badiche *et al.* (2000), is chosen as yield criterion :

$$\Sigma_{eq}^2 = 3C\Sigma_e^2 + F\Sigma_m^2 \quad (3.13)$$

where C and F are scalar material coefficients and where Σ_m denotes the modified trace of $\underline{\Sigma}$.

$$\Sigma_m = c_1\Sigma_{11} + c_2\Sigma_{22} + c_3\Sigma_{33} \quad (3.14)$$

with c_1 , c_2 and c_3 three scalar material coefficients expressing the anisotropy of the compressibility. The criterion is written in a general way from the literature and the F parameter of Eq. (3.13) sets the sensitivity to a hydrostatic stress state. In the anisotropic formulation, F becomes redundant with the coefficients on the components of the trace of the macroscopic stress tensor, hence F is set to 1. Eq. (3.13) is also function of an equivalent shear stress Σ_e . Since in the case of the square stacking a close to quadratic plastic behaviour has been observed, an equivalent stress of Hill (1948) has been chosen :

$$\Sigma_e = \sqrt{\frac{3}{2} \left(\underline{\Sigma}_D : \underline{\underline{H}} : \underline{\Sigma}_D \right)} \quad (3.15)$$

where $\underline{\Sigma}_D$ denotes the macroscopic deviatoric stress tensor, $\underline{\Sigma}_D = \underline{\Sigma} - (1/3)\text{tr}(\underline{\Sigma})\underline{\underline{I}}$, and $\underline{\underline{H}}$ is Hill's fourth-order diagonal tensor governing the anisotropy. An equivalent macroscopic plastic strain \dot{p} has been defined from Eq. (3.12) as $\dot{p} = \dot{\lambda}$ assuming an associated plastic flow and the equality of the macroscopic plastic dissipation (Badiche *et al.*, 2000) :

$$\underline{\Sigma} : \dot{\underline{\underline{E}}}_p = \Sigma_{eq}\dot{p} \quad (3.16)$$

The effective hardening $R(p)$ of the cellular structure is non-linear isotropic with the form :

$$R(p) = \Sigma_y + Hp + Q_1(1 - \exp(-B_1p)) + Q_2(1 - \exp(-B_2p)) \quad (3.17)$$

where Σ_y and H denotes the initial effective yield stress and the effective hardening modulus. The Q_i and B_i are the parameters of the effective non-linear hardening terms. An additional non-linear exponential term has been added compared to the constitutive material in order to account for the non-linearities induced by the architecture.

Effective mechanical properties

After having defined the formalism of the homogeneous equivalent law, the different effective parameters have been identified from the simulated uni-axial tensile tests, the shear test and the in-plane bi-axial yield surface. The elastic moduli have been identified first from the extension and shear tests, as mentioned previously. They are given in Table 3.2. However, the identification of the effective plastic properties is more complex and, because of the number of parameters, a numerical fitting procedure has been carried out.

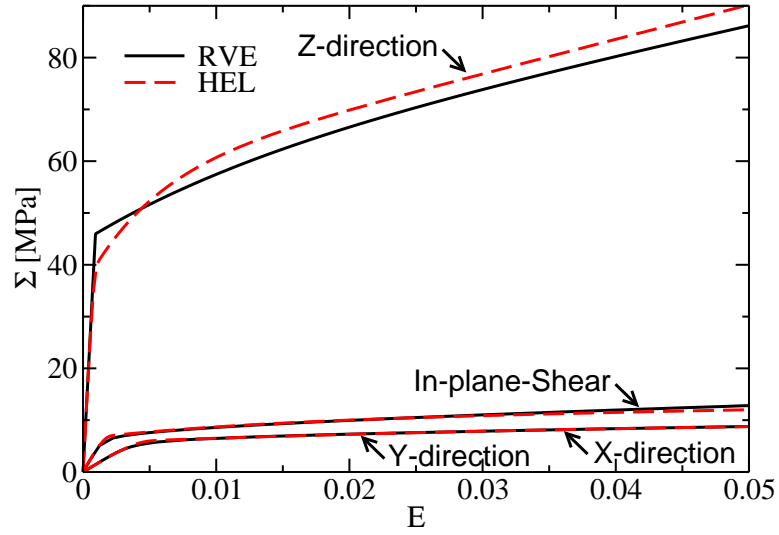
The shear coefficient of Hill's tensor $\underline{\underline{H}}$ is multiplied by the scalar C . Since C is in relation with Σ_e in Eq. (3.13), it gives the ratio of sensitivity to the spherical and

TAB. 3.3 – Effective plastic properties identified for the square stacking. Similarly to the C_{2323} and C_{3131} components of the stiffness tensor, the H_{2323} and H_{3131} components of Hill’s tensor are not available because of the generalised plane-strain formulation used for the simulations.

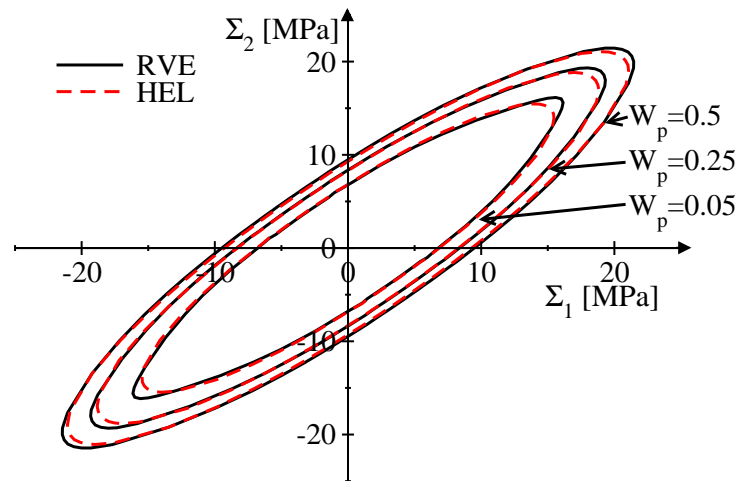
| | Green’s criterion | Hill’s tensor | Isotropic hardening | | |
|-------|-------------------|---------------|---------------------|--------------------|------------|
| C | 1.8 | H_{1111} | 5.2 | Σ_y [MPa] | 10. |
| F | 1. | H_{2222} | 5.2 | H [MPa] | 161. |
| c_1 | 0.58 | H_{3333} | -2.5 | Q_1 [MPa], B_1 | 5.5, 97. |
| c_2 | 0.58 | H_{1212} | 1. | Q_2 [MPa], B_2 | 6.5, 2700. |
| c_3 | 0. | | | | |

deviatoric parts of the macroscopic stress respectively onto the plastic behaviour. Hence H_{1212} has also been assumed to equal to 1. The c_3 parameter, controlling the out-of-plane compressibility for a hydrostatic stress state has been set to 0 due to the negligible yielding observed along the Z -direction under a spherical load (see Fig. 3.8). In-plane pure shear, uni-axial and in-plane equi-bi-axial tensions have then been used to determine the unknown material parameters that remained. The in-plane shear stress-strain curve has been used in order to determine the C parameter. The $\underline{\underline{H}}$ components governing the anisotropy, the c_1 and c_2 parameters of the anisotropic compressibility and the hardening parameters have been determined by fitting the stress-strain responses of the uni-axial and equi-bi-axial tensions. In addition, the in-plane transverse macroscopic strain of the uni-axial tension has been used to fit the local plastic flow direction. A numerical optimisation has been carried out with the Z -opt module of Z -set by using a Levenberg-Marquardt algorithm. The constitutive model parameters identified are given in Table 3.3.

The identified HEL has been validated by applying it on a single integration point in the Z -sim behaviour simulation module of Z -set and by simulating the different uni-axial and bi-axial loading cases considered previously for the characterisation of the behaviour of the square stacking RVE. Since they have been used as reference loading cases in the fitting procedure, the uni-axial tensions and in-plane shear show a very good agreement between the mechanical responses of the RVE and those of its HEM (see Fig. 3.9). The anisotropy as well as the non-linearity of the in-plane behaviour of the RVE of the square stacking are well described by its HEL. The out-of-plane non-linear behaviour predicted by the HEL shows the right trend too, but the fit is not as good as the in-plane ones due to the different origins of the effective non-linear behaviour. Indeed, the non-linearity resulting from the architecture can be neglected in the case of the out-of-plane behaviour of the stacking which is governed by that of its constitutive material only. Thus, the supplementary non-linear isotropic hardening term (Q_2 , B_2) added to correctly capture the in-plane behaviour is detrimental to fit the out-of-plane behaviour. The bi-axial yield surfaces in the $\Sigma_1\Sigma_2$ -plane are presented in terms of iso-surfaces of density of plastic work, $W_p = \int_0^t \underline{\underline{\Sigma}} : \underline{\underline{\dot{E}}}_p dt$, in Fig. 3.9 too. This measure has been chosen in order to present the



(a)



(b)

FIG. 3.9 – Comparison between the mechanical responses of the HEM identified for the square stacking and those coming from the simulations on the RVE : (a) in terms of uni-axial tensions and in-plane shear (b) in terms of the $\Sigma_1\Sigma_2$ -in-plane surfaces of plastic work density.

results independently from the form of the HEL yield criterion. The yield surfaces show a very good agreement between the mechanical responses of both the RVE and the HEM. The uni-axial extension stress-strain responses are equal in both the X- and Y-directions and the quadratic form of the yield surfaces under a bi-axial stress state is well captured. The hardening is also well modelled owing to the two non-linear exponential hardening terms. In the case of coupled in-plane / out-of-plane stress states the HEL identified fits well the behaviour; in terms of stress state and plastic flow direction. These last results are not illustrated here for the sake of brevity.

3.2.2 Hexagonal squacking

As shown into the work of Tsuda *et al.* (2010), Hill's criterion does not suit to capture non-quadratic yield surfaces. A good agreement can be obtained when fitting the uni-axial mechanical responses only but not when considering multi-axial loading cases in the general case of cellular materials with a non quadratic behaviour (Wang et McDowell, 2005; Wang et Pan, 2006; Tsuda *et al.*, 2010). Thus, the hexagonal stacking must be modelled with a more complex yield criterion.

Formulation of the yield criterion

The macroscopic model chosen for the hexagonal stacking still follows Eqs. (3.13), (3.14) and (3.17) regarding compressibility and hardening. However, the equivalent shear stress is now governed by a general non-quadratic yield function according to Bron et Besson (2004) :

$$\Sigma_e = \left[\alpha \left((\psi^1)^{1/b^1} \right)^a + (1 - \alpha) \left((\psi^2)^{1/b^2} \right)^a \right]^{1/a} \quad (3.18)$$

with a , α , b^1 , b^2 being scalar material coefficients. Functions ψ^1 and ψ^2 obey :

$$\begin{cases} \psi^1 = \frac{1}{2} \left(|S_2^1 - S_3^1|^{b^1} + |S_3^1 - S_1^1|^{b^1} + |S_1^1 - S_2^1|^{b^1} \right) \\ \psi^2 = \frac{3^{b^2}}{2^{b^2} + 2} \left(|S_1^2|^{b^2} + |S_2^2|^{b^2} + |S_3^2|^{b^2} \right) \end{cases} \quad (3.19)$$

where the $S_{i=1-3}^{k=1-2}$ denote the principal values of two different stress deviators $\underline{\underline{\Sigma}}_D^{k=1-2}$ defined as :

$$\underline{\underline{\Sigma}}_D^k = \underline{\underline{B}}^k : \underline{\underline{\Sigma}} \quad (3.20)$$

and where

$$\underline{\underline{B}}^k = \begin{pmatrix} (c_2^k + c_3^k)/3 & -c_3^k/3 & -c_2^k/3 & 0 & 0 & 0 \\ -c_3^k/3 & (c_3^k + c_1^k)/3 & -c_1^k/3 & 0 & 0 & 0 \\ -c_2^k/3 & -c_1^k/3 & (c_1^k + c_2^k)/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_5^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_6^k \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

An equivalent macroscopic plastic strain \dot{p} is defined from Eq. (3.12) as $\dot{p} = \dot{\lambda}$ assuming an associated plastic flow and Eq. (3.16) (Bron et Besson, 2004) :

$$\underline{\Sigma} : \underline{\dot{E}}_p = \Sigma_{eq} \dot{p} \quad (3.22)$$

Many other phenomenological yield functions exist in the literature (Karafillis et Boyce, 1993; Barlat *et al.*, 1991), but the one proposed by Bron and Besson has been preferred because of its general character that enables to capture a large variety of behaviours, anisotropic and quadratic or not.

3.2.3 Effective mechanical properties

The procedure used to identify the constitutive parameters of a HEL for the hexagonal stacking is similar to the one described previously in Section 3.2.1 for the square stacking. The components of the effective stiffness tensor have been identified first as already mentioned (see Table 3.2 in Section 3.1.2). The c_3 parameter in Eq. (3.14) has been set to 0 (for the same reasons as in the case of the square stacking). Concerning the shear behaviour, the c_6^1 and c_6^2 components of the $\underline{\underline{B}}^1$ and $\underline{\underline{B}}^2$ tensors have been set to 1. In-plane pure shear, uni-axial and in-plane equi-bi-axial tensions have then been used to determine the remaining unknown material parameters. The in-plane shear stress-strain curve has been used for the identification of the C parameter. The anisotropy parameters of the $\underline{\underline{B}}^1$ and $\underline{\underline{B}}^2$ tensors associated with tensions and those governing the compressibility, c_1 and c_2 , have been calibrated by fitting both the uni-axial and the equi-bi-axial tensions with the mechanical responses of the HEM. The transverse strains have also been used in order to capture the local plastic flow direction. The set of parameters identified is given in Table 3.4. It is worth noting that, because of the numerous parameters of the model, this set of values is not unique. The results of the fitting procedure obtained for the hexagonal stacking are illustrated in Fig. 3.10.

The comparison between the mechanical responses of the HEM and those obtained from the FE simulations on the hexagonal RVE shows reasonably close results (see Fig. 3.10). The bi-axial yield surfaces in the XY-plane are presented in Fig. 3.10 too, with the same graphic representation as the one used for the square stacking (see Section 3.2.1). The anisotropy as well as the non-linearity of the in-plane behaviour of the hexagonal stacking are successfully captured by the fitted HEL. However, when the load state is a mixed one, with both in-plane and out-of-plane components, the model displays some limitations due to the plastic transverse strain (not illustrated here). The results could be improved by using a multi-potential yield criterion that could be more accurate but more complex too (Cailletaud et Sai, 1995). In addition, although the non-linear hardening is fairly well modelled as a whole, in the particular case of the hexagonal stacking some difficulties are encountered when trying to capture perfectly the mechanical responses of bi-axial loading cases. An additional anisotropy might be introduced on the hardening, and not only on the yield criterion, but it would require even more parameters. Thus we have preferred to keep the aforementioned model, that contains many parameters yet and the Y-direction has been favoured in the fitting procedure for the hexagonal stacking. This is according

TAB. 3.4 – Effective plastic properties identified for the hexagonal stacking. Similarly to the C_{2323} and C_{3131} components of the stiffness tensor, the c_4^1 , c_5^1 , c_4^2 and c_5^2 components of $\underline{\underline{B}}^1$ and $\underline{\underline{B}}^2$ tensors are left undetermined because of the generalised plane-strain formulation used for the simulations.

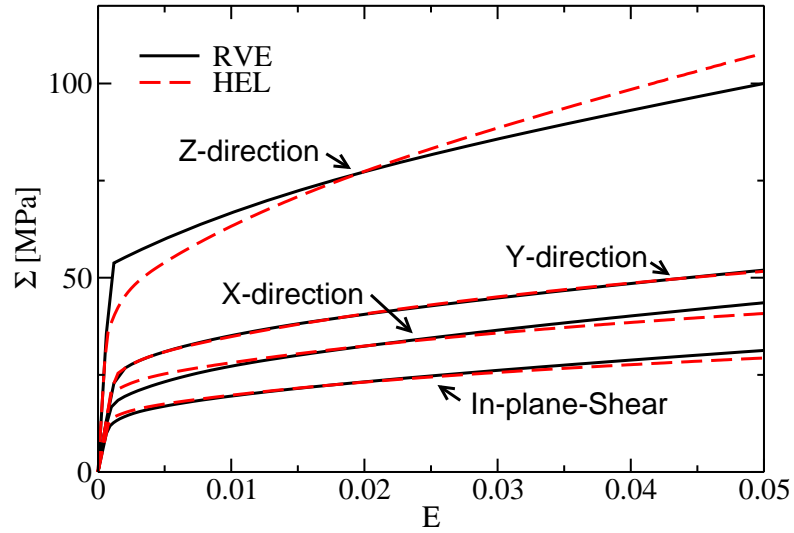
| Green's criterion | | Bron-Besson's tensors | | | | Isotropic hardening | |
|-------------------|------|-----------------------|-------|---------|------|---------------------|------------|
| C | 2. | b^1 | 3. | b^2 | 2. | Σ_y [MPa] | 33. |
| F | 1. | c_1^1 | 0.81 | c_1^2 | 0.02 | H [MPa] | 410. |
| c_1 | 0.69 | c_2^1 | 0.15 | c_2^2 | 0.85 | Q_1 [MPa], B_1 | 19., 71. |
| c_2 | 0.63 | c_3^1 | 0.93 | c_3^2 | 1.31 | Q_2 [MPa], B_2 | 4.8, 1050. |
| c_3 | 0. | c_6^1 | 1. | c_6^2 | 1. | | |
| | | a | 17.4 | | | | |
| | | α | 0.524 | | | | |

to the cases of validation of the identified HEL considered for the simulation of sandwich structures and described next in Section 3.3. Fig. 3.10 illustrates the fact that both the hardening evolution and the normal to the flow surface are correctly captured around the Y-axis.

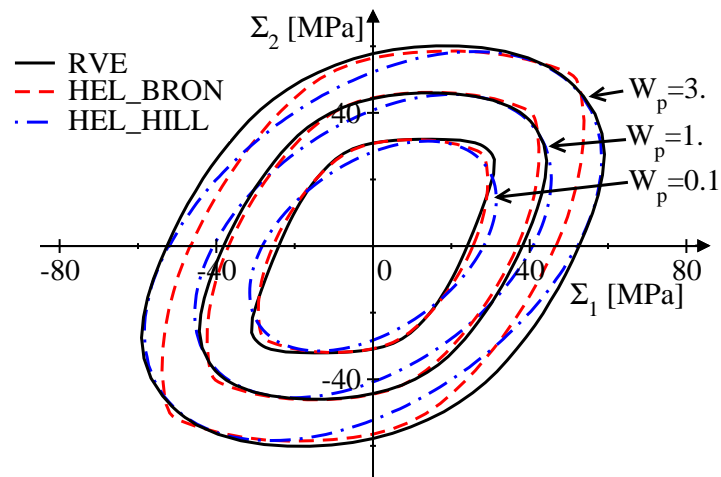
Even if the corresponding fitted properties are not given in Table 3.4 for the sake of brevity, we have tried to fit the homogenised behaviour of the hexagonal stacking by using Hill's equivalent stress rather than Bron-Besson's one, such as for the square stacking. However, the fitted yield surfaces have been added in Fig. 3.10(b). As mentioned before and according to the results of Tsuda *et al.* (2010), Hill's criterion permits to capture uni-axial tensions but is not sufficient to correctly capture the complex shape of the yield surface and the right direction of the plastic flow locally in the case of a multi-axial loading. This conclusion is all the more true that 3D loading cases are considered (the out-of-plane yield surfaces are not presented here) and that the level of cumulated plastic strain increases.

3.3 Modelling of sandwich structures

The purpose now is the evaluation of the HELs identified before for both stacking types for the modelling of finite sandwich structures. The sandwich structures considered are made of upper and lower skins with a tube stacking core in between. Reference full-scale computations on fully meshed sandwich structures have been performed first. The inhomogeneity of both the stress and strain fields in the architectures, under uni-axial normal compressive and in-plane simple shear loads, has been analysed. It has permitted to discuss the replacement of the stacking core with its HEM into the modelling. Boundary layer effects resulting from the finite size of the sandwich core on the mechanical responses of the sandwich structures are addressed for both stacking types. Similarly to the simulations on RVEs of the tubes stackings (see Section 3.1), simulations on the sandwich structures



(a)



(b)

FIG. 3.10 – Comparison between the mechanical responses of the HEM identified for the hexagonal stacking and those coming from the simulations on the RVE : (a) in terms of uni-axial tensions and in-plane shear (b) in terms of the $\Sigma_1\Sigma_2$ -in-plane surfaces of plastic work density.

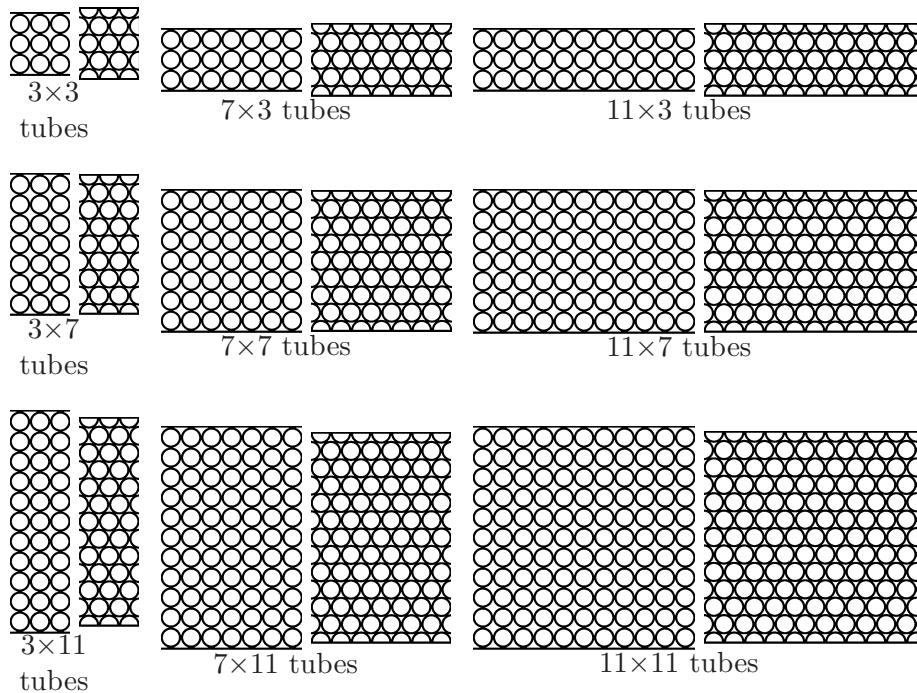


FIG. 3.11 – Illustrations of the various sandwich structures simulated in the case of a fully periodic core (square stacking on the left, hexagonal one on the right).

have been performed by using quadratic triangles and the finite-element software *Z-set*.

3.3.1 Geometries and models

Various sandwich structures have been considered for the validation step of the HELs. These different structures are summarised in Fig. 3.11. For all the simulated sandwich structures, the geometrical parameters (e.g. the tube thickness and external diameter, and the braze length) are kept constant and are the same as those used for the identification of the HELs. The thickness of the skins of the sandwich structures is fixed to 1 mm. The only parameter that changes from one architecture to another is the size of the core. It is defined by its numbers of whole tubes in the width and in the height. The constitutive material properties are also the same as those used previously for the characterisation of the infinite tube stackings. Both square and hexagonal tube stackings are considered.

In the case of the square stacking, the definition of the sandwich structures has been straightforward since the modelled structure is representative of a real one that would have been processed by stacking and brazing the tubes between two skins in one step (Marcadon *et al.*, 2012). For this structure, except for the free lateral edges, all the core can be considered as periodic. Each tube has the same number of neighbour tubes, hence the same number of braze joints equal to 4. Moreover, this number is the same as the one in the RVE of the stacking.

The case of the hexagonal stacking is a little bit more complex and two different architectures must be considered. The first architecture simulated is illustrated in Fig.

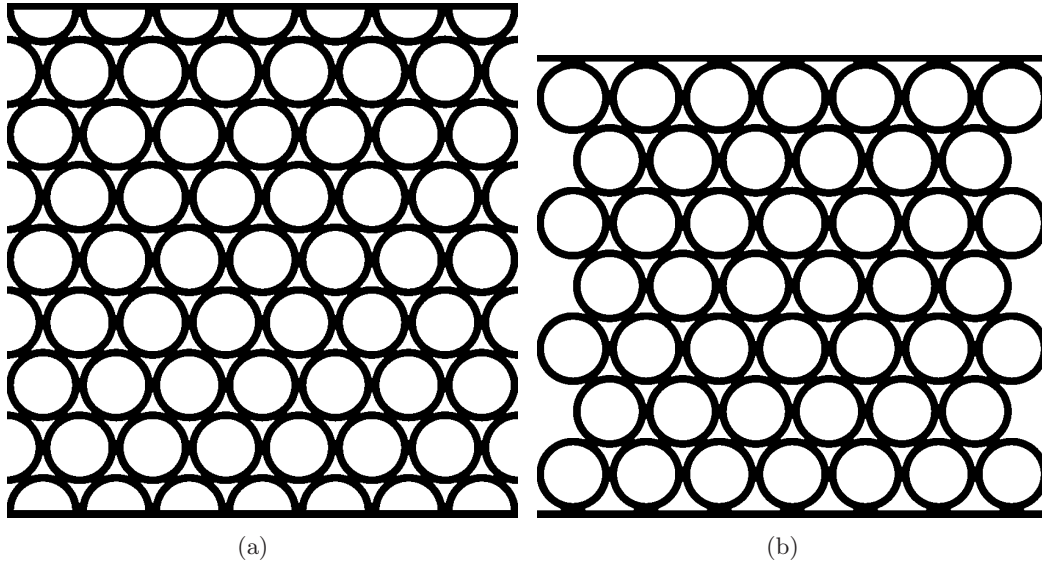


FIG. 3.12 – The two different sandwich structures studied with a hexagonal core. a) Periodic core. b) Technological geometry : compact stacking of tubes between the face skins.

3.12(a). Similarly to the square stacking, we have considered an architecture in which each tube in the sandwich contains the same number of neighbour tubes as the one in the RVE, hence the same number of braze joints that equals 6 for this stacking. It corresponds to a pseudo-periodic core with cut peripheral tubes. However, this architecture is not representative of a real structure that would have been processed in one step by stacking the tubes between the skins. Thus the second architecture made of full peripheral tubes, and illustrated in Fig. 3.12(b), has been studied too in order to discuss boundary layer effects. The peripheral tubes are not represented by the periodic unit cell of the stacking because they do not have all their neighbouring tubes, hence a lower strength is expected from this region of the core.

In parallel to this full-scale modelling, models of the sandwich structures aforementioned have been proposed by replacing their cores by their HEM. The aim was to considerably decrease computational costs in view of structural modelling. The scale transition between the cellular cores and their HEM has been made by using the macroscopic laws identified from the homogenisation approach. This modelling strategy can be applied when the load is not local (Kruch et Forest, 1998). It means that the multi-axial stress state must evolve in space more slowly than the characteristic length of the cellular architecture (or the explicit heterogeneity in a more general point of view in heterogeneous materials) in order to respect the scale separation assumption. Both the square stacking structure and the first hexagonal one (architecture shown in Fig. 3.12(a)) could be described as finite periodic cores except for the lateral faces of the sandwich structures. Thus we have assumed in both cases that the tube stacking cores could be replaced in the whole by their HEM. The lateral free surfaces of the cores have been modelled as free surfaces in the HEM-based simulations, such as in the full-scale ones.

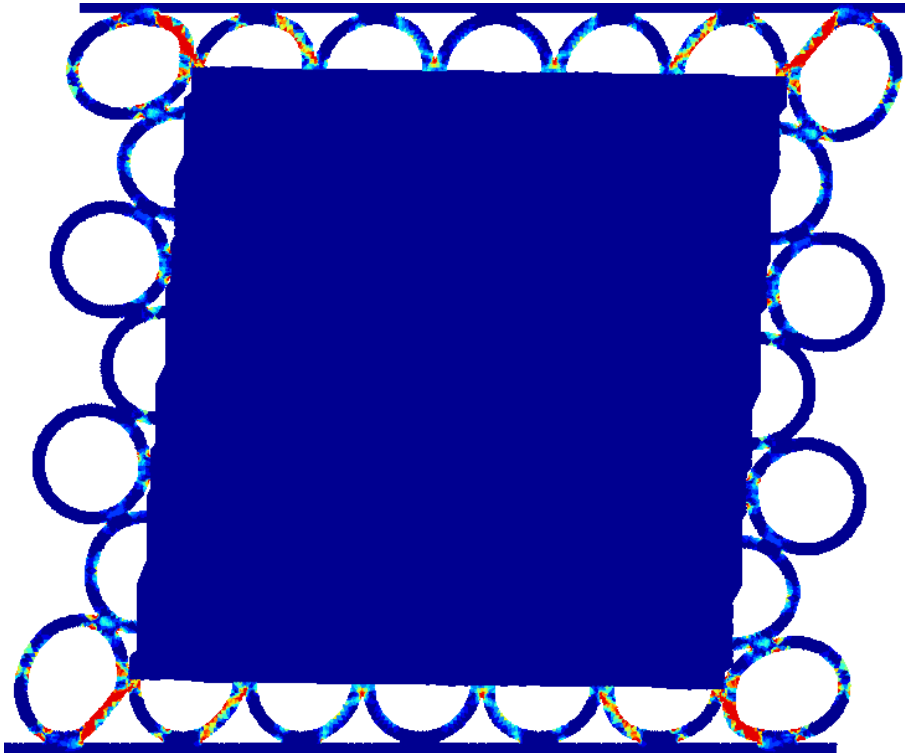


FIG. 3.13 – Illustration of the problem of the junction between the peripheral meshed half-tubes and the homogenised core in the case of the technological hexagonal specimen. This cumulated plastic strain maps is obtained in the case of an in-plane shear load for the 7×7 -hexagonal stacking core. The map is plotted in terms of integration node values.

On the contrary, when considering the technological structures for the hexagonal stacking illustrated in Fig. 3.12(b), the results obtained from the full-scale simulations have shown that the core can no longer be replaced by its HEM as a whole. It is due to the preferential collapse of the tubes in contact with the skins. Therefore, in that case the peripheral half-tubes have been kept fully meshed and only the central periodic region of the core has been replaced by the HEM. The interface between these two domains, i.e. the fully meshed half-tubes and the HEM of the core, is not continuous and the large strength difference between the constitutive material of the tubes and the HEM results in an indentation of the HEM by the tube walls. In order to avoid the occurrence of this modelling artefact, a uniform displacement condition normal to the interface between the half-tubes meshed and the HEM has been applied on several nodes of the outer edges of the HEM around the tube walls. This complementary modelling assumption is in rather good agreement with the displacement fields observed on the reference full-scale simulations. However, some steps are observed on the deformed geometries between the regions where the uniform displacement condition is applied and those where node displacements remain free. A localisation of the strain is observed at these steps but this modelling artefact remains very localised and does not affect significantly the macroscopic mechanical response of the sandwich structures. A compromise has been found in terms of the width of interface areas enabling to minimise the displacement gradient but without having a too strong indentation of the HEM. The width equals to one third of the internal diameter of the tubes on both sides of them ; it corresponds to about four elements each time. Thus, between two tube wall junctions with the HEM, the central third of the edges of the HEM is deformed freely. In the case of the in-plane shear load of the cellular structures, the displacement is approximated by steps as illustrated in Fig. 3.13. More complex interface conditions exist in literature, such as the ones proposed by Panasenko (2002) and based on the decomposition of the border of the domain in several sub-domains in which higher order homogenised conditions are applied. However, for the sake of simplicity, a uniform displacement condition has been preferred here since it provides accurate enough results.

3.3.2 Results and boundary layer effects

Uniform compressive and simple shear loads have been applied on the sandwich structures by imposing displacements to their skins. Multi-axial stress states in the core of the sandwich structures are observed due to the heterogeneous interfaces between the core and both the lower and the upper skins. Moreover, in spite of the absence of internal length-scale in the HEM-based modelling developed in the present work, the macroscopic mechanical responses of the structures vary with respect to the size of their core because of the difference in mechanical strength between the skins and the core. The different mechanical responses predicted by both the full-scale modelling and those HEM-based are compared in Figs. 3.15 to 3.19. They are presented in terms of nominal stress vs. nominal strain curves in order to consider quantities that are not dependent on the size of the core of the sandwich structure.

The reference full-scale simulations have been analysed first. In the case of the square stacking they show in Fig. 3.14 a decreasing effective strength of the sandwich structure

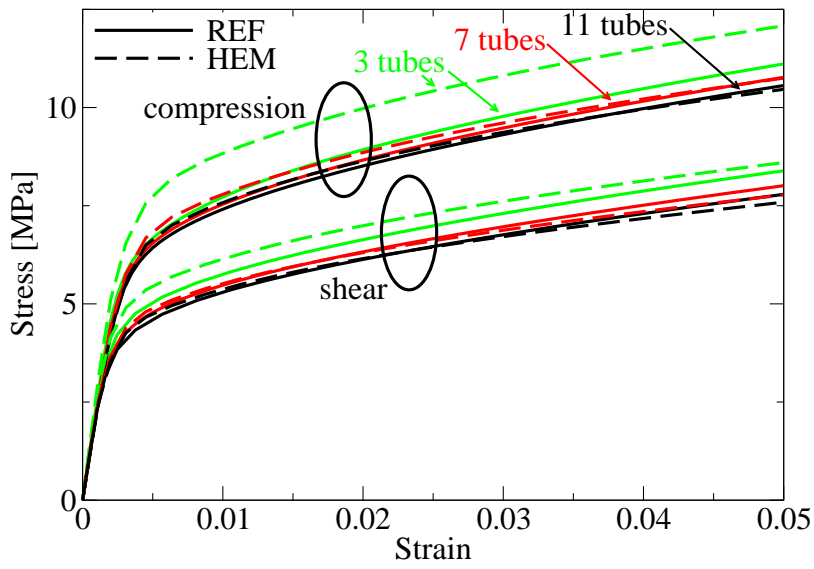
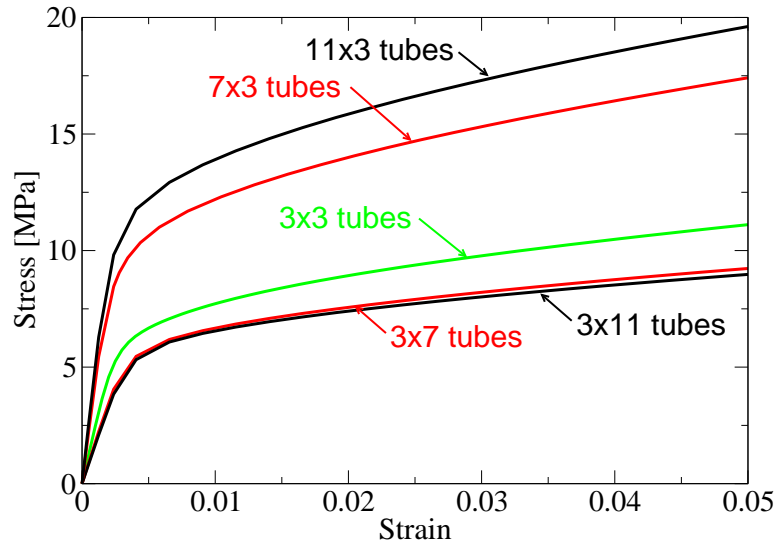
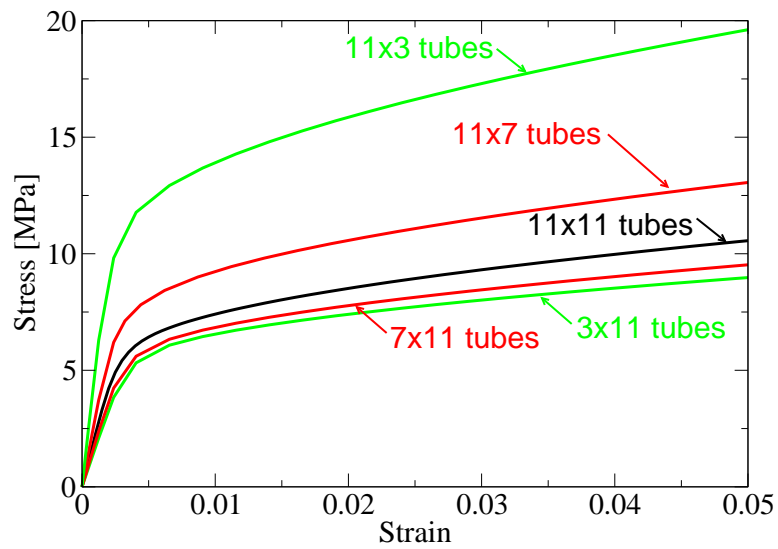


FIG. 3.14 – Comparison between the mechanical responses predicted by both the full-scale modelling and the HEM-based one in the case of the square stacking core, for both compressive and simple shear loads.



(a)



(b)

FIG. 3.15 – Stress-Strain curves predicted by the full-scale simulations for sandwich structures made of a square stacking core (compressive load). Comparison with : (a) the 3×3 -tube core (b) the 11×11 -tube core (width \times height).

with respect to an increasing core size. However, this general trend has to be reconsidered if the aspect ratio of the core (i.e. the ratio between the number of tubes in the height and in the width) equals to 1, as illustrated in Figs. 3.15(a). For a fixed height of the core, the macroscopic strength of the sandwich structure increases with the width of the core. This edge effect is the result of the containment role of the skins. In contrast, for a constant sandwich width, an increase of the number of tubes in the height of the core results in a decrease of the macroscopic strength of the sandwich due to the lateral free edges of the structure as illustrated in Fig. 3.15(b). The decrease in macroscopic strength observed for sandwich structures with an aspect ratio of 1 when increasing the core size (Fig. 3.14) suggests that the boundary layer effect that mainly governs the sandwich structure behaviour is associated with the lateral free edges. For this particular stacking, a pronounced barrel shape is observed systematically under compression as illustrated in Fig. 3.16(a). If the HEM-based simulations are now considered for the square stacking (see Fig. 3.16(b)), they show rather satisfactory results for modelling the behaviour of the sandwich structures except for the smaller core size. Fig. 3.14 shows a convergence in terms of macroscopic mechanical response between the full-scale simulations and those HEM-based with respect to the core size of the sandwich structure. Such a conclusion is true not only in the case of a compressive load, but also in the case of a simple shear one.

The case of the sandwich structures made of a hexagonal stacking core is more complex. If the sandwich structure with a pseudo-periodic hexagonal core is considered first, the various full-scale simulations performed on this structure by varying its core size lead to the same conclusions as those aforementioned for the square stacking core (see Fig. 3.18). However, Fig. 3.19(a) shows an increasing strength for the sandwich structure when increasing the core size, for an aspect ratio close to one. Therefore, in contrast to the square stacking, the boundary layer effect that mainly influences the mechanical response of the sandwich structure is the confinement effect of the skins. Indeed, the barrel shape of the deformed structure under compression remains small compared to that one observed for the square stacking core (Figs. 3.17). The mechanical responses predicted by the HEM-based simulations converge to those obtained from the reference full-scale simulations (Fig. 3.19(a)).

The hexagonal stacking with whole peripheral tubes shows very different trends due to the additional non-periodicity of the core. The observation of the deformed maps reveals a strong localisation of the collapse of the tubes that mainly occurs in the peripheral tubes. This reduces significantly the strength of the core but the effect saturates when increasing the core size (see Fig. 3.19(b)). In that particular case, replacing the whole core with its HEM leads to overestimate the mechanical response by the HEM-based modelling, as illustrated in Fig. 3.19 in the case of a compressive load. In contrast, a rather good agreement is obtained between the results predicted by both the full-scale modelling and the HEM-based one if only the periodic domain of the core is replaced with its HEM and the half-tubes at the periphery are kept meshed. This modelling strategy is a little bit less efficient to reduce computation costs and despite the very good agreement with the full-scale model for the compressive load, it shows some limitations for the simple shear load. It might be due to the use of a too simple displacement boundary condition at the interface between the peripheral tubes and the HEM to avoid its indentation. This issue

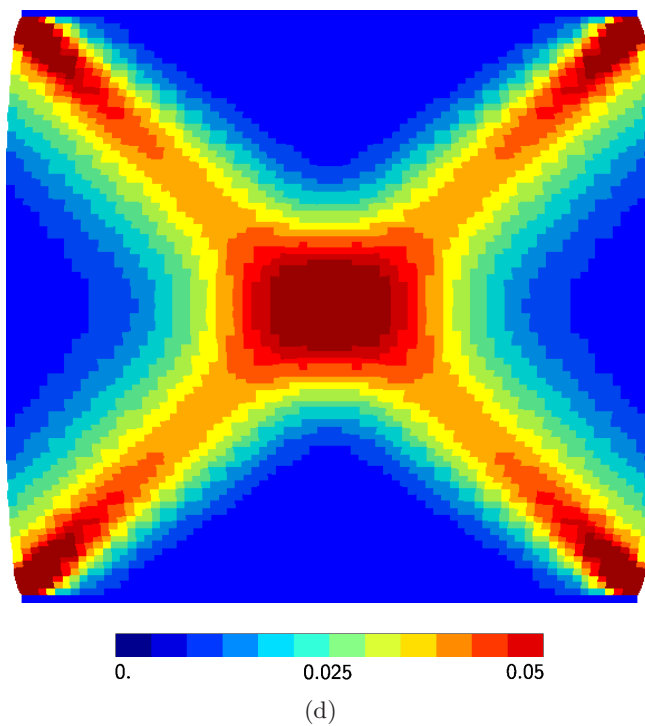
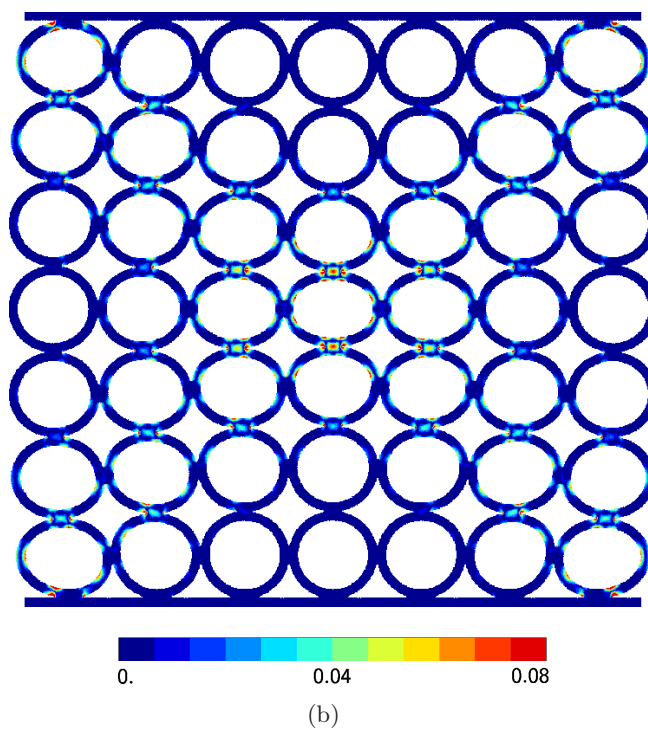
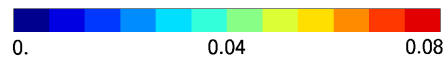
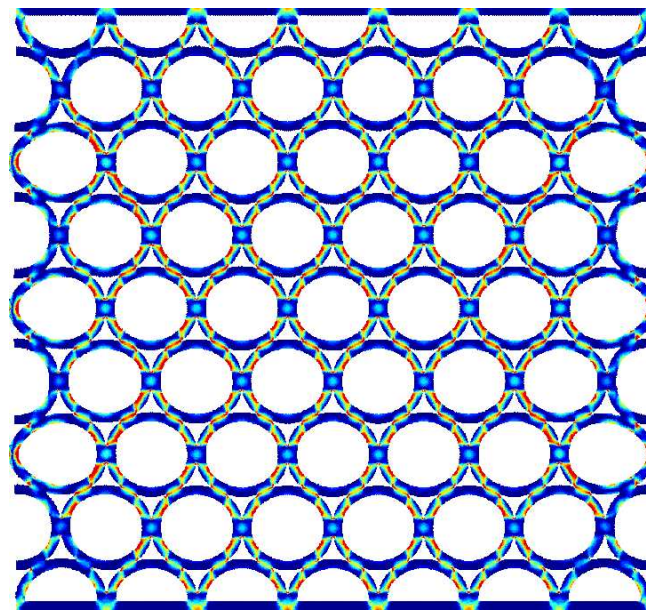
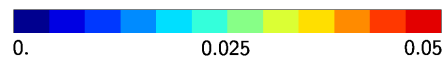
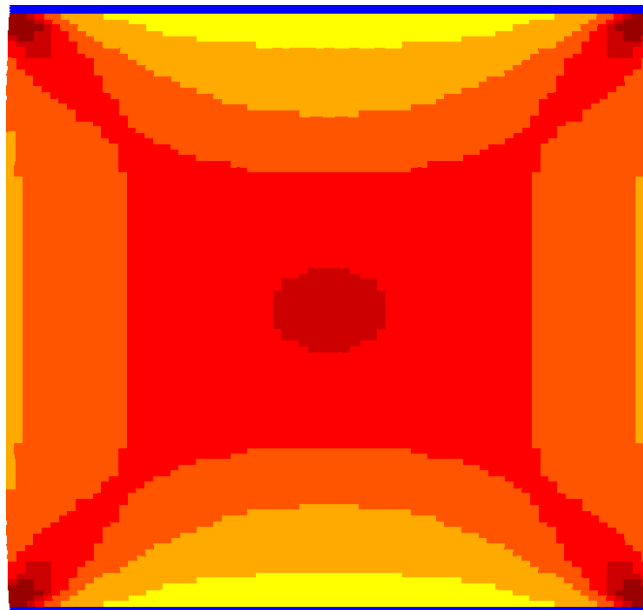


FIG. 3.16 – Deformed maps of cumulated plastic strain of square stacking sandwich structures of a 7×7 tubes; (a) Full scale model, (b) HEM model; Note that the two models have a different plastic strain measure as the full scale model has a very localised plastic strain and the HEM is homogeneous. The maps are plotted in terms of integration node values.



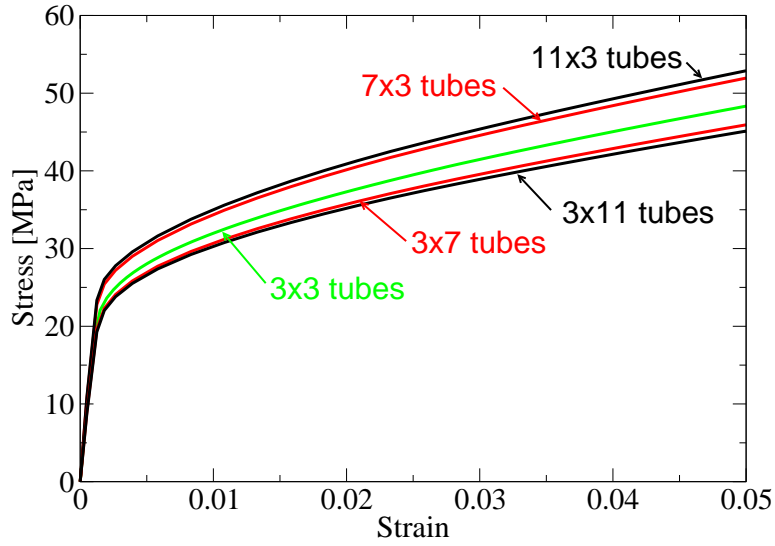
(b)



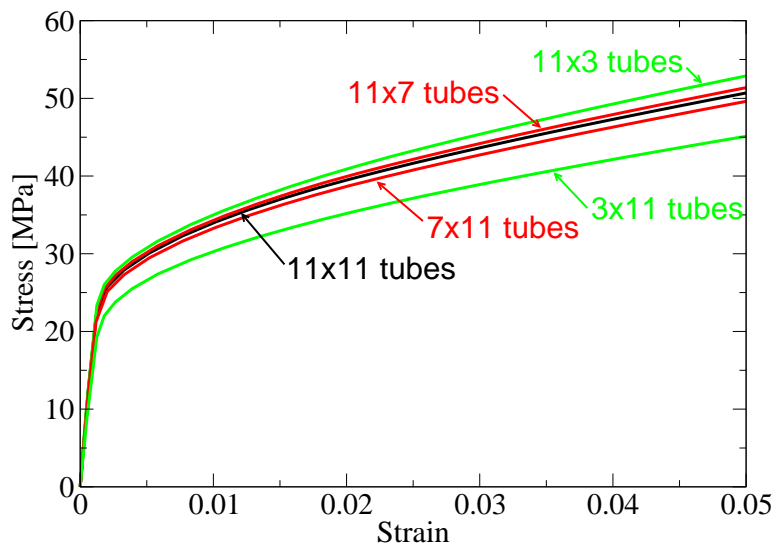
(d)

FIG. 3.17 – Deformed maps of cumulated plastic strain of hexagonal stacking sandwich structures of a 7×7 tubes; (a) Full scale model, (b) HEM model; Note that the two models have a different plastic strain measure as the full scale model has a very localised plastic strain and the HEM is homogeneous. The maps are plotted in terms of integration node values.

must be investigated deeper to improve our approach (Panasenko, 2002).

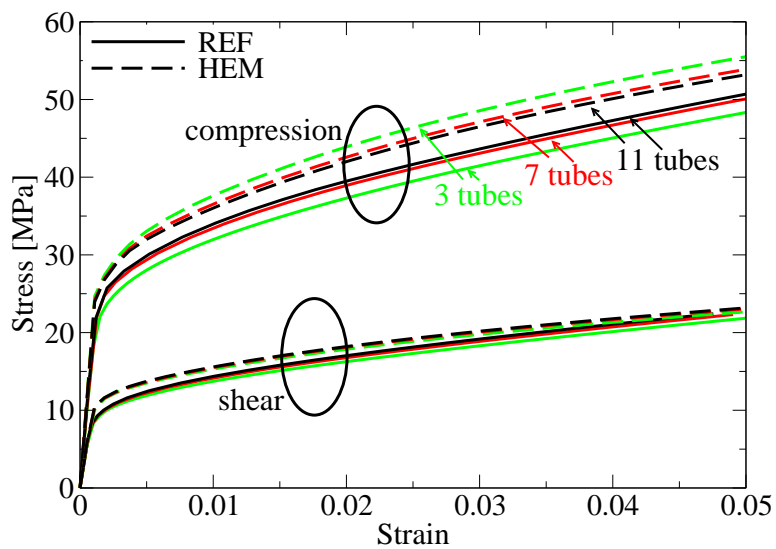


(a)

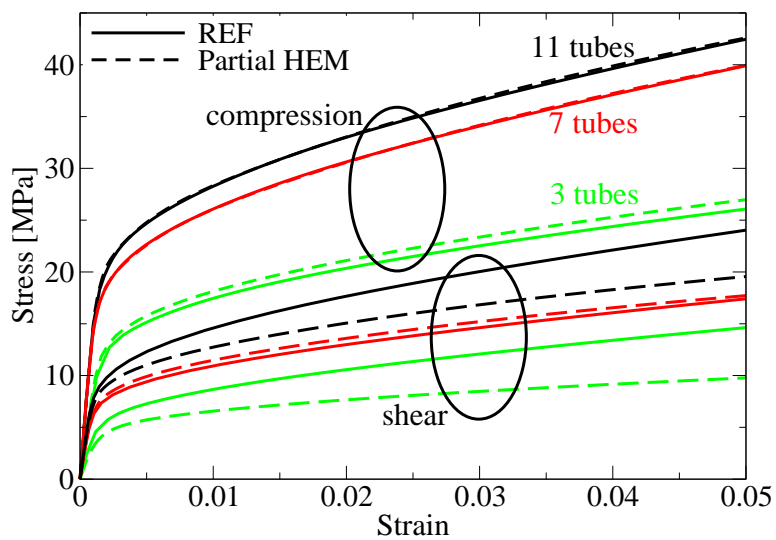


(b)

FIG. 3.18 – Stress-Strain curves predicted by the full-scale simulations for sandwich structures made of a finite periodic hexagonal stacking core (compressive load). Comparison with : (a) the 3×3 -tube core, (b) the 11×11 -tube core (width \times height).



(a)



(b)

FIG. 3.19 – Comparison between the mechanical responses predicted by both the full-scale modelling and the HEM-based one in the case of : (a) the fully periodic hexagonal stacking core (b) the non-fully periodic hexagonal stacking core for both compressive and simple shear loads.

3.4 Résultats complémentaires

Le travail de synthèse d'une publication laisse de côté certains résultats complémentaires qui sont présentés dans cette section dans l'optique d'un approfondissement de la discussion scientifique.

On présente d'abord les résultats de simulations réalisées sur le Volume Élémentaire Représentatif (VER) pour des chargements multi-axiaux. Une analyse des comportements observés est alors discutée. Puis, la Loi Homogène Equivalente (LHE) proposée dans ce chapitre est représentée plus en détail pour des chargements incluant une composante hors-plan, pour chaque type d'empilement. Dans le cas de l'empilement hexagonal, une comparaison entre le modèle proposé et un modèle plus simple est présentée. Ainsi, la comparaison critique des résultats permet de justifier le compromis sur le modèle utilisé. Finalement, un calcul en flexion 4 points sur une structure sandwich est introduit pour chaque type d'empilement afin de valider les Milieux Homogènes Equivalents (MHE) identifiés pour un cas de chargement complexe.

3.4.1 Calculs sur le Volume Élémentaire Représentatif

Chargement hydrostatique

En section 3.1, une analyse du comportement macroscopique sous chargements uni-axial et multi-axial du VER de chaque type d'empilement a été présentée. Dans cette partie, la réponse inélastique du VER est présentée pour des chargements hydrostatiques ($\underline{\Sigma} = \Sigma \underline{\mathbf{1}}$). L'utilisation de la déformation plane généralisée permet d'appliquer un chargement sphérique. Ainsi, comme cela a été observé sur les chargements uni-axiaux (figure 3.4) dans le plan transverse aux tubes, l'architecture de l'empilement influence fortement le comportement inélastique. En effet, c'est la concentration des contraintes au voisinage des joints de brasure qui gouverne la plasticité. Dans ces zones où se localise la déformation plastique, la composante de l'écoulement hors-plan est négative (dans le cas $\Sigma > 0$ présenté ici) au premier instant de la plasticité comme on le voit sur les cartographies 3.20(b,d) (l'instant du chargement présenté ici correspond au déclenchement de la plasticité à l'échelle mésoscopique). Ce comportement résulte de l'incompressibilité du matériau constitutif dans le régime plastique et du déclenchement précoce de la plasticité par rapport à la direction hors-plan. Comme la structure n'est pas libre de chargement dans la direction hors-plan, l'écoulement se fait d'abord dans une direction opposée au chargement. Ceci se traduit par une réponse mécanique plus raide comme illustré sur les figures 3.20(a,c). Puis, lorsque la limite d'élasticité est atteinte dans d'autres zones où l'écoulement plastique est gouverné par la composante hors-plan de la contrainte, le comportement inélastique macroscopique reprend la direction d'écoulement dans le sens du chargement. On en conclut que le matériau a un comportement compressible, mais principalement dans le plan. Un écoulement plastique se développe dans la direction hors-plan mais uniquement pour un niveau de contrainte élevé après un régime de raidissement dû aux effets de l'architecture. De plus, comme l'ont observé Sanders et Gibson (2003a,b), la modélisation par éléments finis volumiques permet de modéliser des phénomènes fins dans l'architecture à l'échelle mésoscopique qui n'auraient pas été capturés par des modèles simplifiant la géométrie tels

que les modèles poutres (Papka et Kyriakides, 1999a) ou coques (Coty *et al.*, 2008).

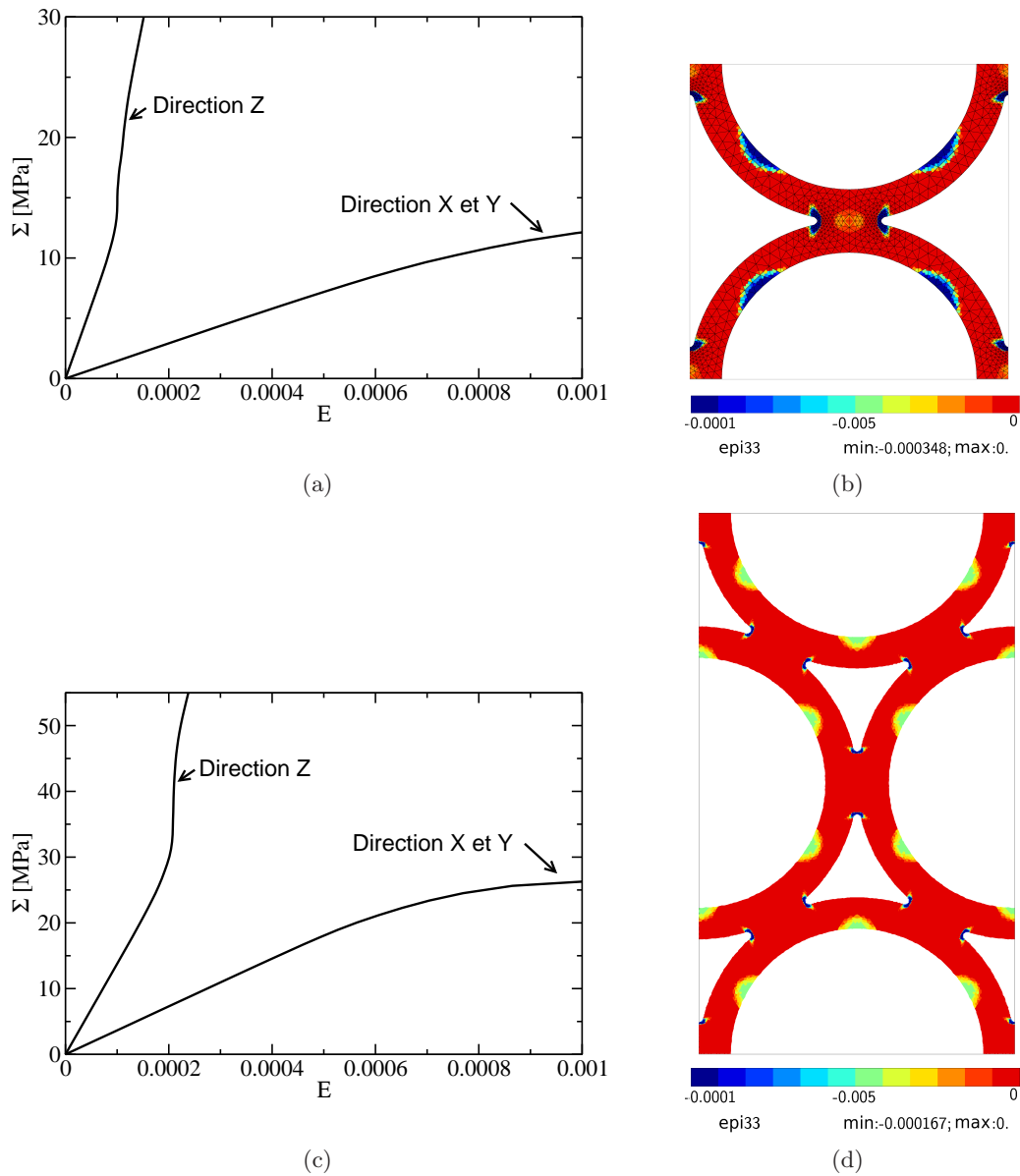


FIG. 3.20 – Chargements hydrostatiques sur le VER. courbes contraintes/déformations (a) de l'empilement carrée, (c) de l'empilement hexagonale. Cartographie de la composante hors-plan de déformation plastique (b) pour l'empilement carré à $E = 8.4 \times 10^{-5}$, (d) pour empilement hexagonal à $E = 1.7 \times 10^{-4}$

Chargements dans les plans déviatoriques

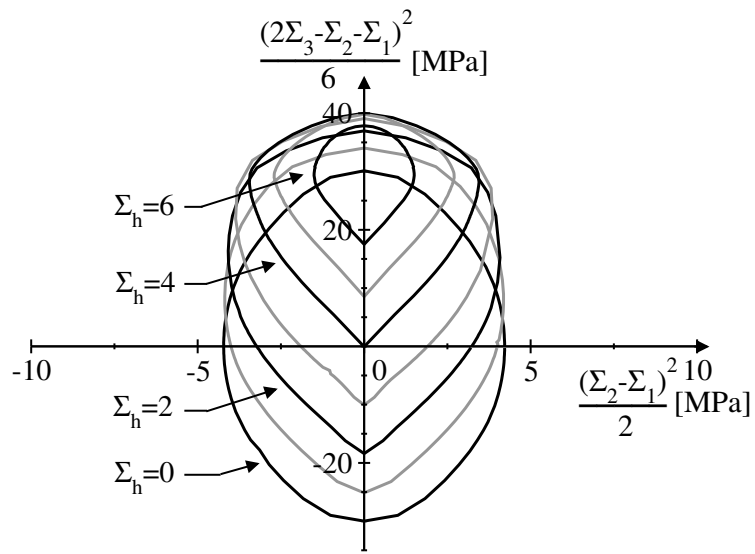
Une représentation complémentaire aux figures 3.8(a,b,c,d) est proposée pour mieux cerner la forme de l'anisotropie et la compressibilité du comportement homogénéisé du matériau cellulaire. En effet, les figures 3.21(a,b) illustrent le comportement dans le plan déviatorique pour des niveaux de contrainte hydrostatique croissant. On s'intéresse ici uniquement au seuil de plasticité. Les surfaces sont construites par un chargement hydrostatique initial puis par un balayage dans le plan déviatorique, plan de normale $(1, 1, 1)$ dans l'espace des contraintes principales. Cette méthode a été choisie pour étudier le comportement compressible du matériau cellulaire. On peut suivre des chargements non-proportionnels car on reste dans le régime élastique qui n'est pas dépendant du chemin de chargement. On fixe un seuil à $p = 0.002$, cela signifie qu'il se développe de la plasticité à l'échelle mésoscopique jusqu'au seuil macroscopique d'inélasticité, mais on la considère comme négligeable. Un balayage de l'espace des contraintes principales par des chargements proportionnels en coordonnées sphériques permettrait d'étudier l'évolution du comportement en 3D du VER. Cependant, ceci n'a pas été l'approche choisie au regard du très grand nombre de calculs que cette méthode nécessite. On retrouve dans les figures 3.21(a,b) le comportement compressible sous un chargement hydrostatique à l'endroit de l'intersection entre l'axe hors-plan de la figure et l'enveloppe de la surface de charge ; cette représentation dans le plan déviatorique donnerait dans le cas d'un matériau de type von Mises des cercles superposés. En revanche, le modèle de Green (1972) serait représenté par des cercles concentriques qui se refermeraient autour de l'axe hors-plan du graphique. Cette représentation dans le plan déviatorique permet donc une meilleure illustration de la compressibilité anisotrope du matériau cellulaire étudié.

3.4.2 Comportement inélastique multi-axial non-quadratique de l'empilement hexagonal

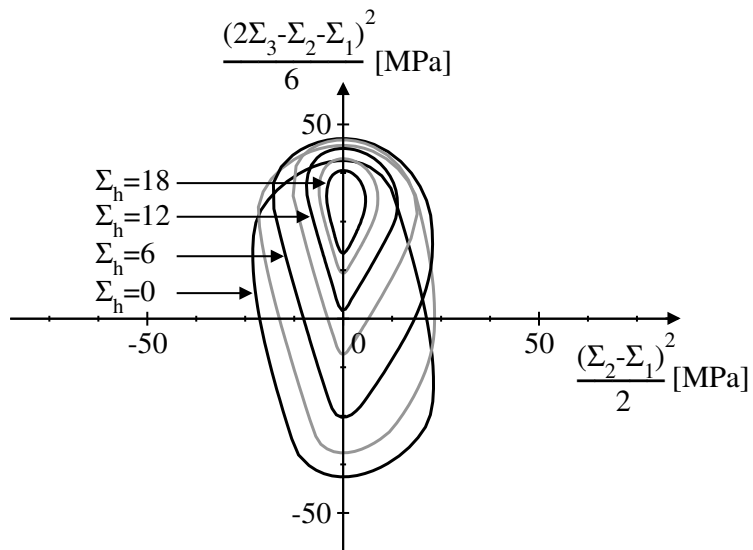
Etude de l'évolution de la forme du seuil de plasticité au cours du chargement

L'une des caractéristiques du comportement inélastique effectif de l'empilement hexagonal est sa forme non-quadratique. On trouve dans la littérature des études sur l'influence de l'architecture sur le comportement des matériaux cellulaires, notamment ceux de Sanders et Gibson (2003a) sur des empilements de sphères creuses ou ceux de Tsuda *et al.* (2010) sur des tôles gaufrées. Ainsi Sanders et Gibson (2003a) ont analysé les formes des surfaces de seuil de plasticité pour différents empilements cubiques. Des comportements fortement influencés par l'architecture sont observés, un motif peut présenter un comportement inélastique quadratique et un autre peut être non-quadratique. Néanmoins, les auteurs se sont restreints à l'analyse de la limite d'élasticité.

Lors de la caractérisation du milieu infini de l'empilement hexagonal, pour de très faibles déformations, le comportement inélastique prend une forme anisotrope dans les directions du plan et anguleuse avec des faces plutôt planes. Ce comportement est non-quadratique. Pour des déformations plus importantes, la forme de la surface d'iso-valeurs de déformations plastiques équivalentes change et tend à devenir plus elliptique ; elle tend à devenir quadratique. Cette évolution est illustrée par la figure 3.22. Elle est la conséquence de la



(a)



(b)

FIG. 3.21 – Surfaces d'iso-valeurs de déformation plastique équivalente pour des chargements dans les plans déviatoriques sur le VER ; (a) de l'empilement carré, (b) de l'empilement hexagonal

direction d'écoulement de la plasticité à l'échelle mésoscopique qui est générée par la forme du champ des contraintes dans le VER. Lorsque le chargement macroscopique augmente, d'autres zones dans la phase solide, notamment dans les parois des tubes, entrent dans le régime plastique.

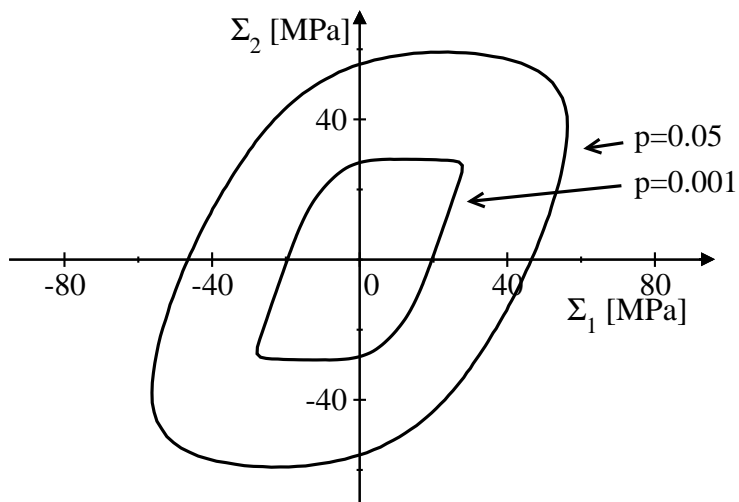


FIG. 3.22 – Surfaces d'iso-valeurs de la déformation plastique équivalente pour des chargements bi-axiaux dans l'espace des contraintes principales $\Sigma_1 - \Sigma_2$ sur le VER de l'empilement hexagonal pour de faibles et de fortes déformations macroscopiques.

Influence des paramètres géométriques sur le comportement inélastique

Grâce à une étude paramétrique, nous avons étudié l'influence des paramètres géométriques sur le comportement inélastique en modifiant l'épaisseur de paroi des tubes et la taille des joints de brasure. Le comportement inélastique multi-axial dans les directions du plan a été caractérisé pour une épaisseur de paroi et une taille de joint de brasure plus faibles que celles des cellules de l'empilement modèle utilisé tout au long de cette étude. Les géométries caractérisées sont récapitulées dans le tableau 3.4.2. On observe, pour des

| | E_p : Epaisseur de paroi [mm] | L_b : Largeur du joint de brasure [mm] |
|------------------------|------------------------------------|---|
| Matériau modèle étudié | 0.5 | 1.0 |
| Variation 1 | 0.5 | 0.6 |
| Variation 2 | 0.4 | 1.0 |

TAB. 3.5 – Géométries de VER de l'empilement hexagonal considérées lors de l'étude paramétrique

chargements bi-axiaux dans le plan, que la forme non-quadratique est conservée pour les deux variations de géométrie comme illustré sur la figure 3.23. On remarque que l'épaisseur de paroi a une influence importante (figure 3.23 courbes bleues), mais la forme de surface de charge reste similaire à celle de la géométrie modèle. En revanche, pour une épaisseur de paroi de tube fixée, la taille des joints de brasure modifie de manière importante non seulement le seuil de plasticité (figure 3.23 courbes rouges) mais également la forme de la surface de charge initiale. Le comportement dans la direction Y est celui qui est le plus influencé par une largeur de joint de brasure plus petite, en termes de seuil de plasticité et de normale d'écoulement. Le comportement de la géométrie rouge (épaisseur de paroi 0.5 mm, taille des joints de brasure, 0.6 mm) illustré sur la figure 3.23 est en accord avec les tendances observées précédemment (section 3.4.2) sur l'influence de l'architecture sur le comportement inélastique non-quadratique. En effet, une taille de joint de brasure qui diminue provoque une concentration de contrainte plus importante dans les joints de brasure. Ainsi, le comportement inélastique multi-axial est gouverné par l'intensité des concentrations de contrainte dans l'architecture. On en conclut que, pour l'architecture de l'empilement hexagonal, l'épaisseur de paroi influe sur le seuil de plasticité global et la taille du joint de brasure influe sur la forme du comportement inélastique de l'empilement. Nous nous sommes uniquement intéressés à une modification par paramètre géométrique pour connaître la direction et l'amplitude de leur influence sur le comportement macroscopique. De plus, nous nous sommes restreints à l'étude paramétrique de la géométrie de l'empilement hexagonal, pour caractériser le lien entre le comportement non-quadratique et la structure à l'échelle mésoscopique.

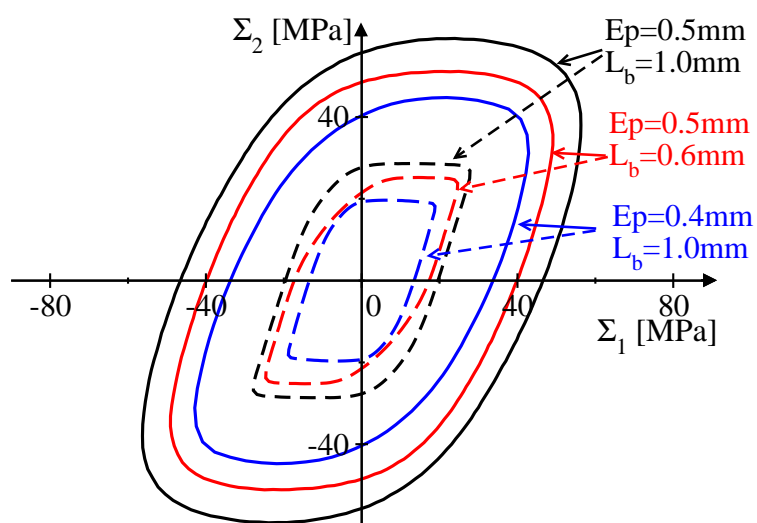


FIG. 3.23 – Surfaces d’iso-valeurs de la déformation plastique équivalente pour des chargements bi-axiaux sur les VER de 3 géométries d’empilements hexagonaux dans l’espace des contraintes principales $\Sigma_1 - \Sigma_2$ pour : de faibles ($p = 0.001$, traits en tirets) et fortes ($p = 0.05$, traits continus) déformations ; E_p : épaisseur de paroi des tubes, L_b : largeur des joints de brasure

3.4.3 Lois Homogènes Equivalentes et anisotropie hors-plan

La LHE identifiée pour chaque type d'empilement a été présentée en section 3.2 mais en privilégiant le comportement dans le plan transverse des tubes. Le comportement complet est présenté ici pour des chargements multi-axiaux rendant compte des effets hors-plans, ainsi que pour des chargements en tractions-cisaillements combinés.

Chargements multi-axiaux appliqués à la LHE de l'empilement carré

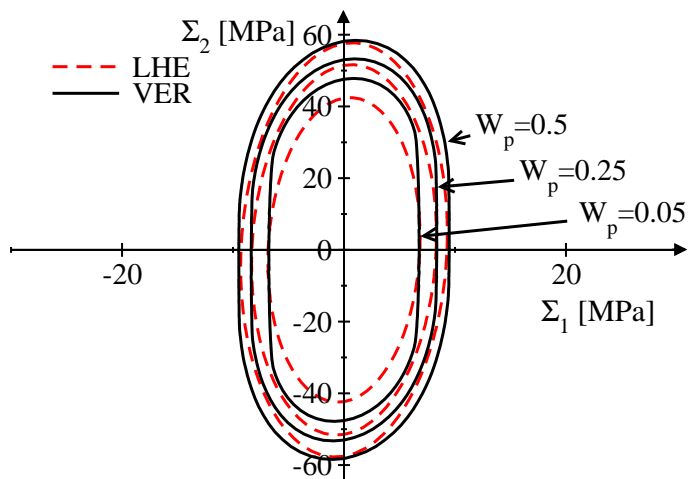
L'empilement carré a été caractérisé pour des chargements multi-axiaux, et la LHE utilisée pour modéliser le comportement effectif prend la forme d'une loi élastique orthotrope linéaire et d'un critère de plasticité compressible anisotrope quadratique de type Green (1972) (équations (3.13), 3.14 et (3.15)) avec une contrainte équivalente de Hill (1948). Le comportement a été identifié à partir des tractions uni-axiales et on observe un bon accord entre le comportement multi-axial du VER et celui de son MHE. La figure 3.24(a) compare le comportement inélastique du VER de l'empilement carré pour des chargements bi-axiaux dans la direction du plan Σ_1 (ou Σ_2) et la direction hors-plan Σ_3 . On remarque que la LHE capture correctement l'évolution de l'écroutissement mais le seuil de plasticité n'est pas bien modélisé comme cela a été mis en évidence sur la figure 3.4(a) (section 3.1). La nature différente des non-linéarités et donc des anisotropies est à nouveau montrée ici. En effet, la réponse mécanique sous chargement uni-axial dans la direction hors-plan est identique, à la fraction volumique de vide près, à celle du matériau constitutif car aucun effet d'architecture ne vient s'ajouter à l'effet du matériau constitutif.

Le comportement du MHE sous chargements combinés en traction et en cisaillement dans le plan est en bon accord avec le comportement du VER, comme illustré sur la figure 3.24(b). On remarque, comme à la figure 3.4(a) (section 3.1), que la raideur en cisaillement est plus élevée que pour la traction uni-axiale.

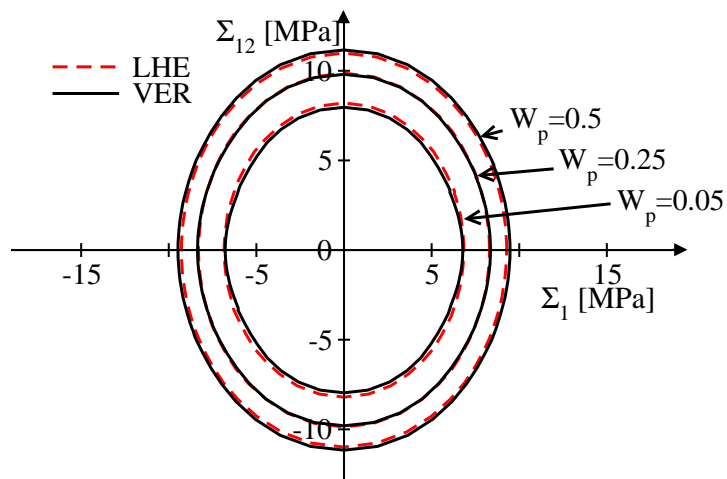
Chargements multi-axiaux appliqués à la LHE de l'empilement hexagonal

La LHE proposée en section 3.2 pour modéliser le comportement de l'empilement hexagonal est composée d'un comportement élastique linéaire orthotrope et d'un critère de plasticité anisotrope compressible non-quadratique de type Green (1972) ayant une contrainte équivalente de type Bron et Besson (2004) (équations (3.13), 3.14 et (3.18)). Cependant, en première approche le formalisme mis en oeuvre pour modéliser le comportement de l'empilement carré (Green + Hill) a été utilisé pour essayer de modéliser le comportement de l'empilement hexagonal. Ainsi, les comportements des MHE, résultant de l'identification de ces deux LHE, sont présentés sur les figures 3.25 et 3.26.

Il est important de rappeler ici l'objectif de ce travail de thèse pour expliquer le choix de la LHE qui est proposé dans les travaux soumis à publication (Iltchev *et al.*). La géométrie des structures sandwichs modèles proposées est destinée à être chargée uniformément sur toute sa profondeur, on ne s'intéresse donc pas aux chargements hors-plans. Par conséquent, une description fine du comportement dans le plan a été privilégiée. On remarque sur les figures 3.26(a,b) une mauvaise modélisation du comportement multi-axial hors-plan des MHE proposés pour l'empilement hexagonal. Les paramètres gouvernant l'anisotropie



(a)



(b)

FIG. 3.24 – Surfaces d'iso-valeurs de densité de travail plastique pour des chargements bi-axiaux sur VER et de la LHE de l'empilement carré dans l'espace des contraintes principales; (a) $\Sigma_1 - \Sigma_3$, (b) Σ_1 (équivalent Σ_2) - Σ_{12} . $W_p [N.mm^{-2}]$

ne permettent pas d'appréhender le très fort contraste entre les comportements inélastiques dans le plan et dans la direction hors-plan. On remarque sur la figure 3.25 que le comportement du modèle quadratique (Green + Hill) a une représentation médiocre du comportement dans le plan pour les critères que l'on s'est fixés pour ce travail de thèse. Mais le compromis dans les plans incluant la direction hors-plan est acceptable face aux résultats donnés par le critère non-quadratique (Green + Bron) (figures 3.26(a) et 3.26(b)). La figure 3.27 illustre le comportement inélastique du VER et le comportement de son

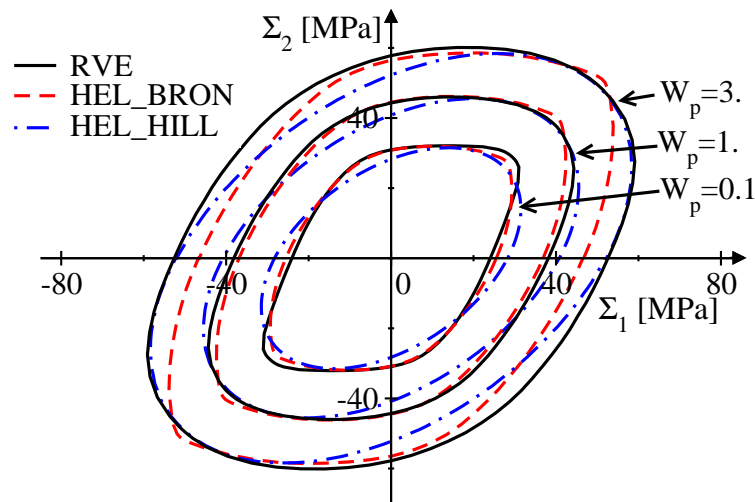
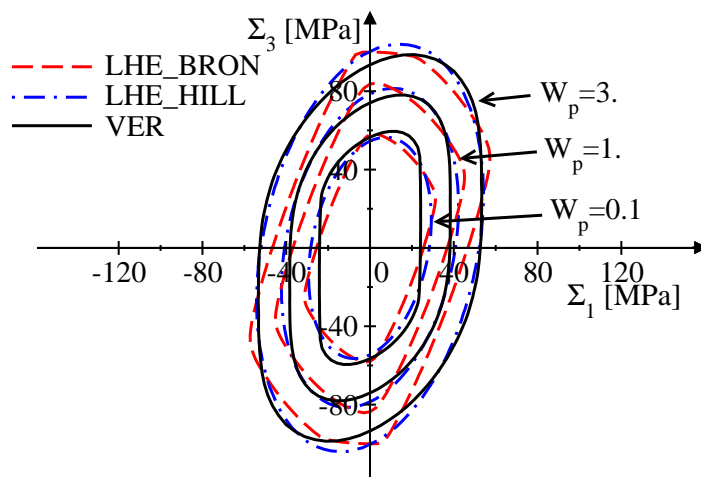
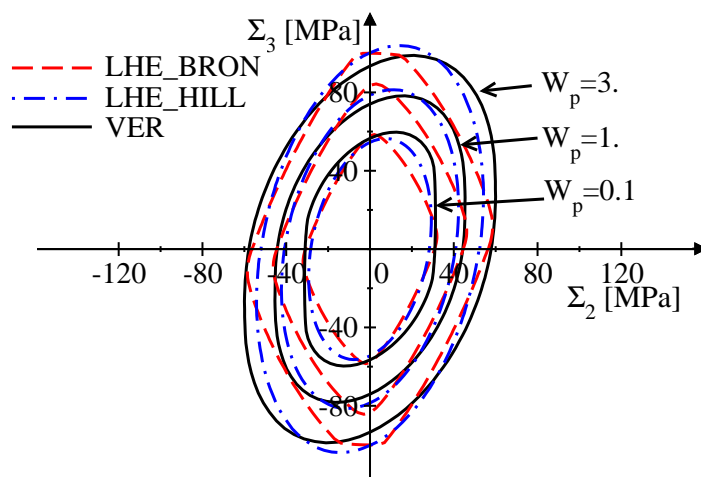


FIG. 3.25 – Surfaces d'iso-valeurs de densité de travail plastique pour des chargements bi-axiaux sur le VER et le MHE (critères de Green + Bron ou Hill) de l'empilement hexagonal dans l'espace des contraintes principales $\Sigma_1 - \Sigma_2$. W_p [$N.mm^{-2}$]

MHE (Green + Bron) correspondant pour des chargements qui combinent tractions uniaxiales et cisaillement dans le plan. On remarque que le comportement du VER est fortement influencé par la direction du chargement uni-axial. La figure 3.27(a) montre une forme d'écoulement gouvernée par la composante maximum du chargement en contrainte bi-axiale (type norme ∞ : $\|\mathbf{x}\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$). En effet, la surface a des faces plutôt droite horizontales ou verticales, indiquant que l'écoulement a une composante bien plus grande que l'autre. Ainsi, on en déduit que le champ de contrainte à l'échelle mésoscopique est différent entre le chargement dans la direction X et le cisaillement dans le plan du VER. En d'autres termes, les zones où se développe la plasticité à l'échelle mésoscopique sont différentes pour ces deux chargements. En revanche, la figure 3.27(b) montre une forme d'écoulement gouvernée par l'addition des composantes (type norme 1 : $\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$) dans ce cas. En effet, la surface a des faces plutôt obliques, indi-



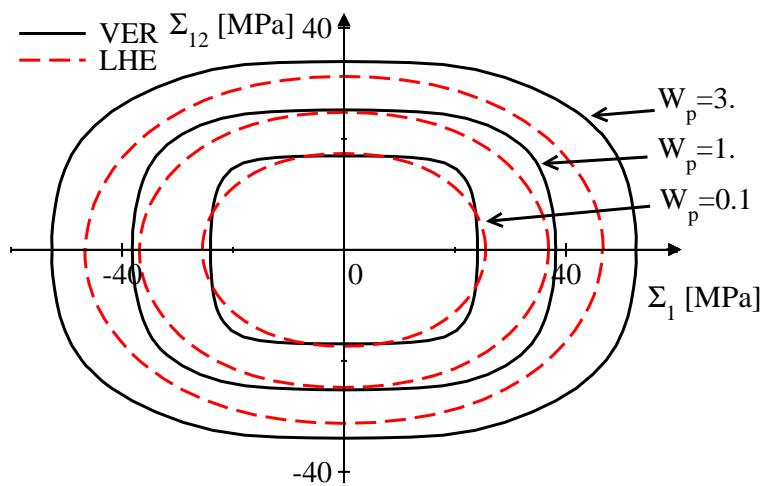
(a)



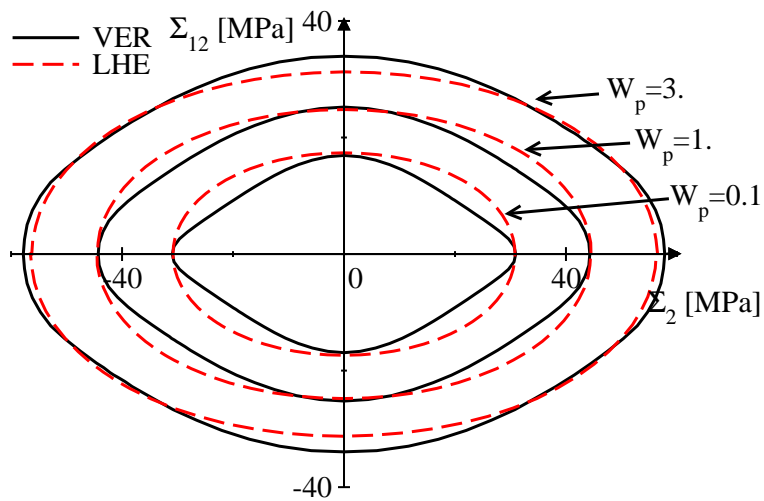
(b)

FIG. 3.26 – Surfaces d'iso-valeurs de densité de travail plastique pour des chargements biaxiaux sur le VER et le MHE (critères de Green + Bron ou Hill) de l'empilement hexagonal dans l'espace des contraintes principales ; (a) $\Sigma_1 - \Sigma_3$, (b) $\Sigma_2 - \Sigma_3$. W_p [$N.mm^{-2}$]

quant que, dès que le chargement est bi-axial, l'écoulement se fait avec des composantes de valeurs similaires dans le plan. On peut en déduire que les concentrations de contrainte se développent dans l'architecture dans les mêmes zones pour les deux chargements, et que le chargement uni-axial dans le direction Y provoque un fort cisaillement des joints de brasures. La LHE proposée (Green + Bron) a une forme quadratique dans ce plan. En effet, les paramètres matériaux identifiés qui modélisent le comportement en cisaillement, en particulier les paramètres de puissance des deux contraintes équivalentes dans le critère de Bron ($b_1 = 3.$ et $b_2 = 2.$) des équations (3.18) et (3.19) donnent une forme proche de l'ellipse. Le MHE modélise donc mal les chargements combinés de traction/cisaillement comme le montre les figures 3.27(a,b).



(a)



(b)

FIG. 3.27 – Surfaces d'iso-valeurs de densité de travail plastique pour des chargements bi-axiaux sur le VER et de la LHE (critères de Green + Bron) de l'empilement hexagonal dans l'espace des contraintes principales; (a) $\Sigma_1 - \Sigma_{12}$, (b) $\Sigma_2 - \Sigma_{12}$. W_p [$N.mm^{-2}$]

Loi Homogène Equivalente modélisant l'évolution de la surface d'écoulement

L'évolution de la surface des iso-valeurs de déformation plastique équivalente observée sur la figure 3.22 n'est pas correctement modélisée par un écrouissage isotrope qui ne prend en compte que des dilatations homothétiques des surfaces de charge. Comme décrit dans la section 3.4.2, le comportement multi-axial inélastique évolue avec la déformation. Ces changements de forme induisent une modification de la direction et de l'intensité de l'écoulement plastique. Ainsi, pour une description plus fine des normales d'écoulement et des seuils de plasticité au cours de la déformation, une évolution des paramètres du modèle en fonction de la plasticité cumulée permet de rendre compte du changement de forme du comportement inélastique multi-axial de la LHE. Nous avons choisi de faire porter l'influence de la plasticité sur le paramètre de puissance de la LHE a de l'équation (3.18), car c'est celui qui gouverne principalement la forme quadratique ou non-quadratique du comportement de la LHE identifiée. La loi d'évolution proposée prend la forme suivante :

$$a(p) = (a_s - a_0)(1 - \exp(-\tau p)) + a_0 \quad (3.23)$$

où a_0 et a_s sont respectivement les valeurs initiale et saturée du paramètre et τ est la vitesse d'évolution. La figure 3.28 montre la valeur du paramètre a en fonction de la plasticité cumulée pour $a_0 = 17.5$, $a_s = 2$, $\tau = 50$. Les conditions de convexité du critère sont respectées si la loi d'évolution sature au dessus de la valeur seuil $a = 1$ établie par Bron et Besson (2004). On propose de faire converger a vers 2 pour tendre vers une

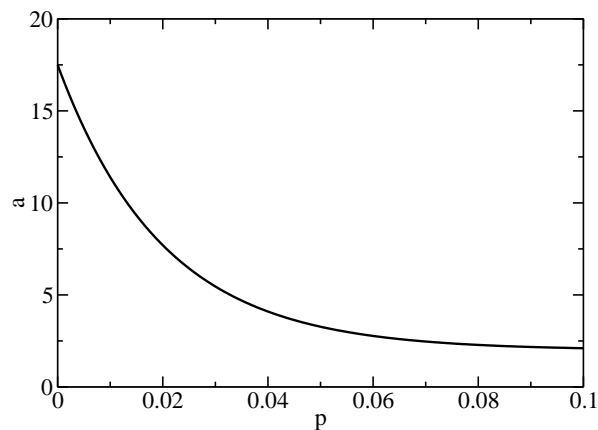


FIG. 3.28 – Loi d'évolution du paramètre de puissance du critère a en fonction de p la plasticité cumulée de la LHE proposée; $a_0 = 17.5$, $a_s = 2$, $\tau = 50$

forme quadratique du critère. On garde tous les autres paramètres de la LHE identifiée constants (tableau 3.4, section 3.2). On remarque sur la figure 3.29 que le seuil de plasticité est identique à la loi non modifiée car $a(0) = a_0$, il est donc non-quadratique. Pour une densité de travail plastique $W_p = 3 \text{ N.mm}^{-2}$, on observe une forme qui tend vers un

comportement quadratique. Les normales d'écoulement sont mieux modélisées par cette LHE modifiée, notamment pour des chargements bi-axiaux. Ce résultat n'a pas fait l'objet d'une nouvelle procédure d'identification des paramètres. Ainsi, il s'agit de proposer une voie d'amélioration de la modélisation du comportement macroscopique pour un matériau possédant cette caractéristique. En effet, ce degré de liberté supplémentaire permettrait d'identifier à nouveau les paramètres d'anisotropie qui étaient actuellement contraints de modéliser l'anisotropie initiale et son évolution. La remarque est également valide pour les paramètres d'écrouissage identifiés. Il faudrait alors identifier les paramètres matériau sur un nombre plus grand de chargements bi-axiaux dans le plan pour capturer les évolutions de la normale d'écoulement, comme illustré sur la figure 3.30.

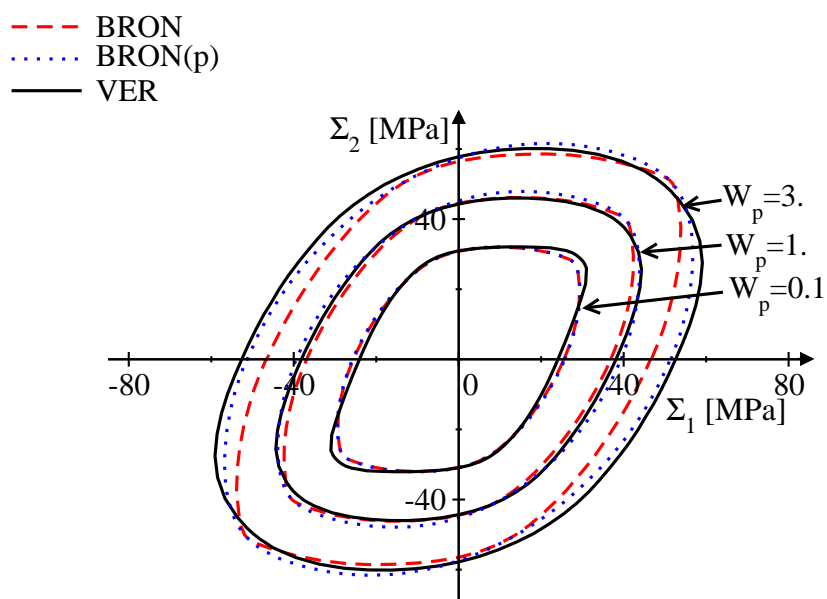


FIG. 3.29 – Surfaces d'iso-valeurs de densité de travail plastique pour des chargements bi-axiaux sur la VER et la LHE (Green + Bron fonction de la plasticité cumulée) l'espace des contraintes principales $\Sigma_1 - \Sigma_2$ pour de faibles et importantes déformations. W_p [$N.mm^{-2}$]

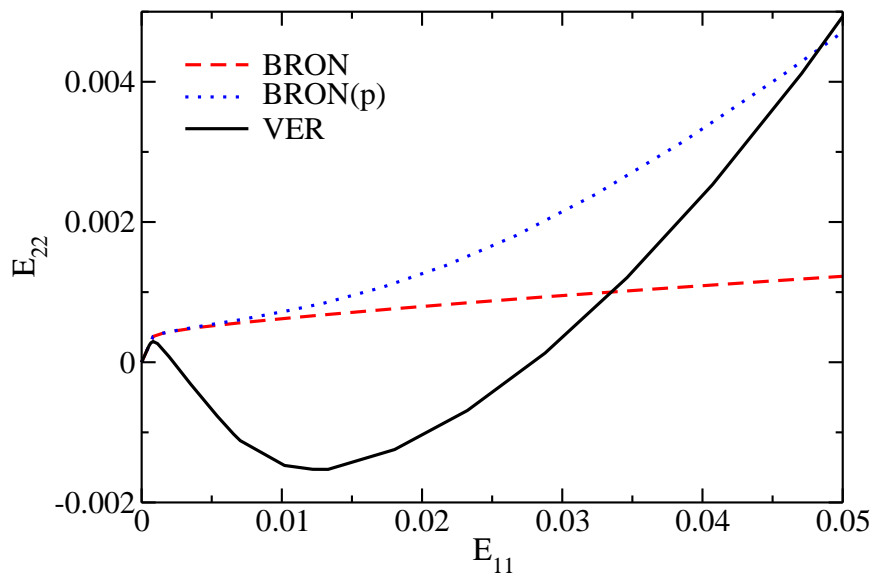


FIG. 3.30 – Déformations du plan sous un chargement bi-axial à 34 degrés sur le VER et les LHE (Green + Bron) et (Green + Bron modifié)

3.4.4 Modélisation de structures sandwichs sollicitées en flexion

Dans la section 3.3, des structures sandwichs finies de tailles de cœur variables ont été étudiées. Les deux types d'empilement ont été modélisés avec une peau de 0.5 mm et avec un cœur variant en largeur et en hauteur de 3, 7 et 11 tubes. Par la suite, une comparaison de ces calculs de référence avec les modèles homogénéisés a été réalisée afin de valider le MHE. Les structures sandwichs ont été sollicitées en compression uniforme normale aux peaux ainsi qu'en glissement. Ces chargements génèrent un état de contrainte proche des cas de chargement utilisés pour identifier les LHE. Cependant, l'état de contrainte est multi-axial dans le cœur du fait de l'hétérogénéité entre le cœur et les peaux. Ainsi, l'analyse de la convergence de la réponse macroscopique des structures sandwichs a permis de valider les LHE identifiées.

On propose ici d'étudier un cas de chargement non-uniforme afin d'obtenir des champs multi-axiaux plus riches et plus complexes dans le cœur qui ne favorisent pas ceux utilisés pour l'identification des LHE. Une flexion 4 points est appliquée à des structures sandwichs car ce cas de chargement sollicite la structure et donc le cœur de manière très hétérogène. Les symétries du problème permettent de ne modéliser qu'une moitié de la géométrie. De plus, une idéalisation de l'appui est choisie en appliquant un déplacement vertical sur une petite zone des peaux. Ces conditions aux limites sont appliquées de manière identique aux modèles de référence et avec MHE. On modéliser pour les deux types d'empilement une structure sandwichs de 32×5 tubes avec des peaux de 1 mm d'épaisseur. Les figures 3.31(a,b) et 3.32(a,b) montrent les cartographies de la déformation plastique cumulée dans le calcul de référence entièrement maillé et le calcul avec le MHE pour les deux types d'empilement. On observe une localisation de la déformation semblable entre les deux modélisations.

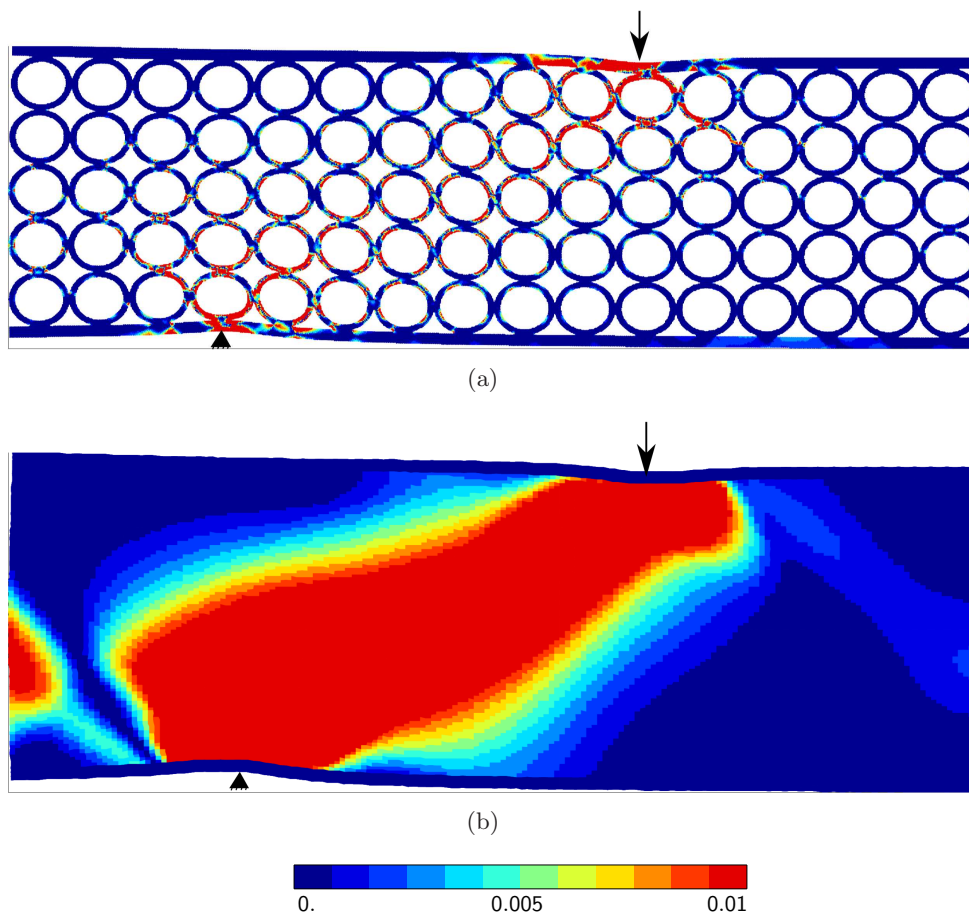


FIG. 3.31 – Cartographie de la déformation plastique cumulée résultats d'un calcul de flexion sur une structure sandwich (32×5 tubes) avec un cœur constitué d'un empilement carré; déplacement de l'appui supérieur égale à 2 mm; condition de symétrie à droite du modèle. (a) calcul de référence, (b) calcul en remplaçant le cœur par son MHE

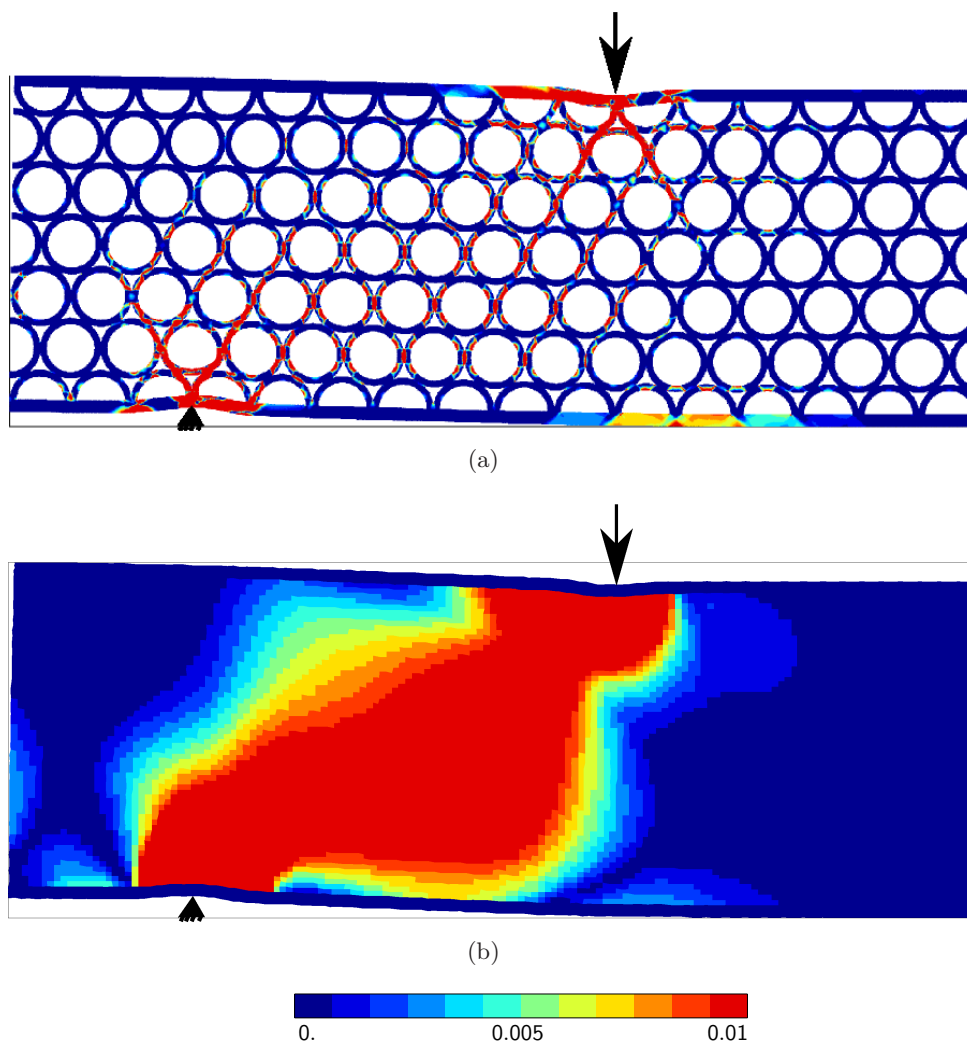
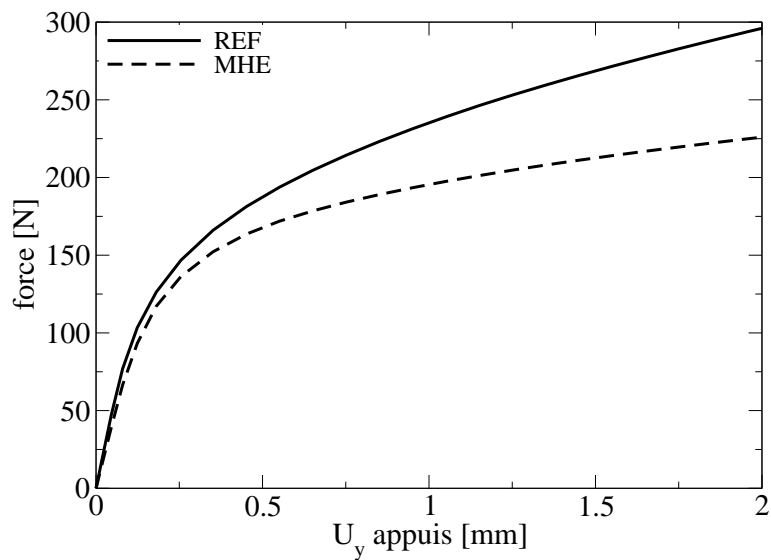


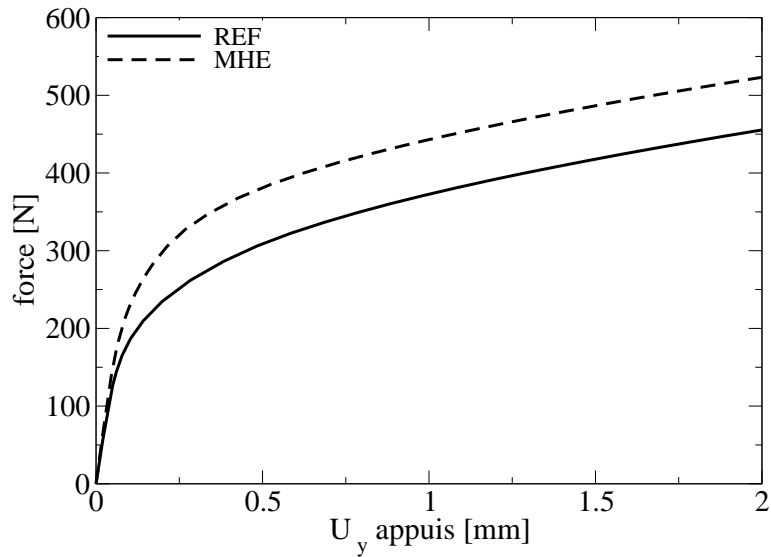
FIG. 3.32 – Cartographie de la déformation plastique cumulée résultats d'un calcul de flexion sur une structure sandwich (32×5 tubes) avec un cœur constitué d'un empilement hexagonal; déplacement de l'appui supérieur égale à 2 mm; condition de symétrie à droite du modèle. (a) calcul de référence, (b) calcul en remplaçant le cœur par son MHE

Les réponses macroscopiques sont présentées sur la figure 3.33. La modélisation de référence des structures sandwichs sollicitées en flexion est comparée à la modélisation avec le MHE. Ainsi, on remarque sur la figure 3.33(a) que, pour l'empilement carré, le modèle avec MHE sous-estime la réponse macroscopique avec une erreur de l'ordre de 20% en fin de chargement. La réponse est différente dès le régime élastique alors que les chargements uniformes appliqués aux structures sandwichs avec empilement carré ont donné des réponses mécaniques proches de celles du calcul de référence (figure 3.14). Dans le cas de la flexion, l'écart observé avec la modélisation avec MHE peut s'expliquer par le chargement local sous les appuis qui provoque des déformations non-homogènes dans les tubes du cœur sous-jacents aux peaux. En effet, nous utilisons un MHE du premier ordre, qui fait l'hypothèse de séparation stricte des échelles. En outre, un chargement macroscopique induisant une sollicitation dans le cœur ayant une longueur d'onde du même ordre de grandeur que la taille caractéristique de la mésosturcutre, provoque des modes de déformations d'ordre supérieur des tubes du cœur de la structure sandwich. Par conséquent, le MHE ne modélise pas de manière satisfaisante ce type de chargement.

La modélisation de la flexion de la structure sandwich avec empilement hexagonal donne également une erreur importante, de l'ordre de 10% en fin de chargement. La stratégie de modélisation avec un MHE surestime la réponse mécanique comme observé précédemment sur la figure 3.19 (section 3.3 pour des chargements uniformes. Une modélisation avec un MHE sur la base de la loi de comportement proposée en partie 3.4.3, rendant compte de l'évolution du comportement inélastique en fonction de la plasticité, ne donne pas un meilleur résultat. D'une part, car les déformations sont faibles et d'autre part, parce que l'état de contrainte multi-axial est globalement dominé par le cisaillement et la compression uni-axiale dans la direction Y, qui ne sont que peu modifiés par l'évolution de la LHE. La comparaison des réponses mécaniques en compression et en glissement entre les structures sandwichs de référence et les modèles avec leur MHE montre une surestimation faible du comportement par l'approche avec MHE. On a d'abord observé, dans le cas du chargement en flexion de la structure sandwich en empilement carré, une sous-estimation de la réponse mécanique (figure 3.33(a)). Ensuite, on remarque que la réponse en flexion de l'empilement hexagonal est surestimée. Ainsi, comme nous n'avons étudié qu'une seule géométrie de structure sandwich, on ne peut pas conclure sur l'origine de l'écart entre la modéliser de référence et celle avec MHE. Une étude paramétrique complète serait nécessaire afin de déterminer l'influence des effets des chargements locaux et des effets de taille. Cependant, ce cas de validation montre un accord raisonnable compte tenu de la forme des champs à l'échelle mésoscopique.



(a)



(b)

FIG. 3.33 – Réponses mécaniques de structures sandwichs en flexion 4 points, courbes force/déplacement au niveau de l'appui supérieur; (a) empilement carré, (b) empilement hexagonal

3.5 Conclusion

Le travail présenté ici a consisté à modéliser des structures sandwichs de tailles finies par une technique d'homogénéisation périodique. Dans cette optique, des structures sandwichs modèles, à base d'empilements carrés et hexagonaux de tubes ont été étudiés pour des chargements en compression normales et des glissements dans le plan. Ces sollicitations ont été appliquées afin d'étudier les effets de taille et l'influence des effets de bords, et dans le but de valider l'approche par homogénéisation utilisée. En outre, ces chargements se sont révélés intéressants d'un point de vue mésoscopique car la déformation macroscopique appliquée aux structures sandwichs provoque un état de contrainte multi-axial à cause de l'hétérogénéité entre le cœur et les peaux et des effets de bord.

Dans un premier temps, les VER des empilements carrés et hexagonaux de tubes ont été étudiés en détail pour des cas de chargements multi-axiaux à l'aide d'un modèle éléments finis sur une cellule périodique. Ces simulations jusqu'à des déformations macroscopiques de l'ordre de 5% ont montré un comportement très différent entre les deux types d'empilement en termes d'anisotropie et de forme des surfaces de charge. L'architecture joue un rôle significatif sur le comportement, notamment les joints de brasure qui déterminent la forme du champ de contrainte à l'échelle mésoscopique. Les calculs ont également mis en avant la forte anisotropie entre les directions du plan et la direction hors-plan pour ce type de matériau cellulaire extrudé. Les travaux de caractérisation du VER ont été menés en 3D, mais l'effort principal a été mené sur l'analyse des chargements dans le plan.

Une LHE a été identifiée sur la base des résultats de la caractérisation multi-axiale pour chaque empilement. L'empilement carré a ainsi été modélisé par une loi de comportement non-linéaire compressible anisotrope. L'accord entre le comportement du VER et celui du MHE est très satisfaisant pour tous les cas de chargement à l'exception des chargements multi-axiaux comportant une composante hors-plan. En effet, l'anisotropie n'est pas de même nature dans la direction longitudinale des tubes, sa modélisation nécessiterait de prendre en compte cette différence dans le modèle. L'ajout d'un deuxième critère de plasticité isotrope modélisant le comportement hors-plan permettrait de palier cette limitation de la LHE proposée.

Une LHE a également été identifiée pour l'empilement hexagonal. Son comportement non-quadratique est modélisé par un critère de plasticité proposé par Bron et Besson (2004) combiné à un terme de compressibilité anisotrope. La modélisation du seuil de plasticité dans le plan est satisfaisante, ce qui est un facteur important pour la modélisation de la tenue structurale considérée par la suite. L'évolution du comportement inélastique est également importante pour l'estimation de l'énergie dissipée lors de chargements multi-axiaux. Les cas de chargements auxquels nous nous sommes intéressés dans ce travail sont uniquement dans le plan. Ainsi, la LHE identifiée modélise avec succès le comportement dans le plan, mais on sait que la modélisation n'est pas satisfaisante dans la direction hors-plan. Une LHE quadratique peut être utilisée pour modéliser toutes les anisotropies observées avec un bon accord sur les seuils de plasticité pour des chargements uni-axiaux. Néanmoins, dans ce cas, les normales d'écoulement sont mal décrites et pour des chargements multi-axiaux l'accord avec le comportement du VER n'est pas satisfaisant, en termes de seuil de plasticité et de direction d'écoulement.

Les LHE proposées ont ensuite été utilisées pour la modélisation de structures sandwichs constituées d'un cœur cellulaire entre deux peaux. Le cœur a alors été remplacé par son MHE sur la base des LHE identifiées pour chaque motif d'empilement. Une étude de l'effet de taille et des effets de bords a été menée et a montré une faible sensibilité à la taille de la structure sandwich pour des chargements uniformes. La comparaison entre les calculs de référence et les modélisations avec le MHE a donné de bons résultats pour toutes les configurations étudiées. En effet, pour des tailles de sandwichs variant de 3×3 à 11×11 les tendances et les réponses mécaniques sont bien modélisées. L'empilement hexagonal a été étudié pour deux géométries de structures sandwichs : celle avec un cœur périodique fini (intéressant pour la mise en place de la méthode) et celle avec un empilement compact de tubes entiers dans le cœur (tel qu'il est fabriqué). La modélisation avec MHE des structures sandwichs avec un cœur en empilement hexagonal dit technologique a montré certaines limitations, notamment dans le cas de chargements en glissement. Finalement, la modélisation à l'aide de la technique de l'homogénéisation atteint son but de réduction du temps de calcul, avec en exemple de gain de temps, un facteur 300 a été obtenu pour le cas de la structure sandwich 7×7 en compression normale jusqu'à 5% de déformation macroscopique.

Les calculs sur le VER ainsi que sur les structures sandwichs ont montré que, localement, des déformations très importantes peuvent se développer. On souhaite maintenant abandonner l'hypothèse des petites déformations afin de modéliser des chargements plus sévères sur les empilements de tubes tout en restant dans le cadre de l'homogénéisation périodique.

