

Guidage et pilotage de la dynamique longitudinale

Résumé. À partir du modèle de comportement obtenu, nous proposons de synthétiser un contrôleur sur le modèle de dynamique longitudinale du véhicule hypersonique (HSV). Le problème posé est de stabiliser une trajectoire de croisière, en respectant les différentes contraintes de saturation sur la commande, et avec un objectif de robustesse aux incertitudes de modélisation. Pour cela nous montrons d’abord que la dynamique de guidage du véhicule est celle d’un oscillateur dissipatif. Puis nous mettons à profit cette propriété pour la synthèse de la loi de guidage. La loi de pilotage est obtenue par rétropropagation. Différentes simulations illustrent le résultat obtenu.

3.1 Introduction

Le domaine aéronautique distingue habituellement différents niveaux de commande pour le contrôle des véhicules : guidage¹ et pilotage²; chacun de ces niveaux de commande ayant des contraintes et méthodologies spécifiques. En pratique, les différences de constantes de temps impliquées entre la dynamique de pilotage et la dynamique de guidage justifient une telle conception hiérarchisée. Cela permet de réduire la complexité de la synthèse de commande.

Toutefois, ce choix de conception implique généralement de spécifier des marges de conceptions qui ne sont généralement pas souhaitables dans un domaine fortement contraint par les performances. Par ailleurs, partant du constat que les HSV évoluent sur des trajectoires différentes de la plupart des systèmes aérospatiaux existants (fusées, avions), il apparaissait intéressant de ne pas restreindre le pilote à la seule stabilisation de l’attitude³.

Nous avons donc posé le problème de la commande du vecteur vitesse, directement à partir des actionneurs de bas niveau. Il apparaît également que c’est au niveau du guidage que les spécificités du vol aérobie à grande vitesse sont les plus manifestes.

C’est pourquoi nous proposons dans notre démarche une synthèse de contrôleur non hiérarchisé, c’est-à-dire dont l’objet est de contrôler une trajectoire de croisière directement par les actionneurs. Pour ce faire, nous posons dans la Section 3.2 ce problème de

1. Le guidage concerne l’élaboration de la trajectoire et son suivi. Il s’agit généralement de poser un problème de commande optimale.

2. Le pilotage est une loi de commande destinée à l’orientation du véhicule. Le pilote est généralement la commande de « bas niveau » qui agit directement sur les actionneurs du véhicule de façon à orienter le véhicule par rapport à la trajectoire. Cette orientation est généralement calculée pour réaliser l’accélération nécessaire à la mise en œuvre de la consigne de guidage.

3. Dès le début de nos travaux la question de l’*objectif* du pilote était posée de façon préalable à notre démarche — quelle est la consigne ? Nous ne disposons pas de résultats disponibles à ce sujet.

commande comme un problème de régulation de la sortie d'un procédé invariant et nous abordons la construction d'une fonction de Lyapunov strictement continument assignable au système⁴. Nous construisons cette fonction de façon itérative en exploitant la structure triangulaire du modèle mise en évidence au Chapitre 2. Pour cela, la Section 3.4 est dédiée à l'étude de la structure d'oscillateur du sous-système (h, V, γ) . Cette étude est ensuite mise à profit pour construire une loi de guidage dans la Section 3.5 afin d'en dériver une loi de guidage/pilotage dans la Section 3.6. Afin d'illustrer la robustesse de la loi de commande proposée, des simulations montrent le comportement des solutions sur le modèle de simulation développé au Chapitre 2.

3.2 Définition du problème

Définition 3.1 (Guidage). Nous appelons guidage l'objectif de commande de la trajectoire (le vecteur vitesse).

Définition 3.2 (Pilotage). Nous appelons pilotage l'objectif de commande de l'attitude (le vecteur rotation).

À partir du modèle (2.48), dans le Chapitre 2, nous nous intéressons à la synthèse de commande pour le modèle suivant :

$$\dot{h} = V \sin \gamma, \quad (3.1a)$$

$$\dot{V} = e(h, V, \alpha, \delta, \eta) - g(V) \sin \gamma, \quad (3.1b)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\rho(h)(\theta - \gamma)C_{l_a}V^2S(V) - g(V) \cos \gamma}{V}, \quad (3.1c)$$

$$\dot{\theta} = q, \quad (3.1d)$$

$$J\dot{q} = \frac{1}{2}\rho(h)V^2S_{\text{ref}}l_{\text{ref}}C_m(\alpha, \delta), \quad (3.1e)$$

où h désigne l'altitude, V la vitesse, γ est la pente de vitesse, θ l'attitude et q la vitesse de rotation du véhicule. Les commandes du véhicule sont l'angle des gouvernes δ ainsi que η , correspondant au ratio poussée commandée sur poussée disponible. Les sorties considérées du modèle sont l'altitude h et la vitesse V . Nous supposons que des consignes de vol h_0 et V_0 sont définies *a priori*.

Ce modèle est représentatif de toute une classe de véhicules aériens à voilure fixe, propulsés, et évoluant dans un plan vertical dans un environnement faiblement perturbé : il suffit par exemple de poser $g(V) = g_0$ et $S(V) = 1$ pour obtenir le modèle de la dynamique d'un avion.

Dans notre étude, le problème de commande se pose alors de la façon suivante : contrôler le véhicule en utilisant le couple (η, δ) de façon à faire converger la sortie (h, V) vers une référence (h_0, V_0) .

Notre contrôleur devra être robuste aux incertitudes de modélisation contenues dans e , C_{l_a} et C_m , être tolérant à des saturations sur α et η , et ne pas exciter les dynamiques rapides négligées.

3.3 Discussion sur la structure du modèle

Une structure bloc-triangulaire

Abstraction faite de la définition de e donnée par (2.46), on remarque que le modèle (3.1) possède une structure bloc-triangulaire, séparant la dynamique de guidage (h, V, γ) de la dynamique de rotation (θ, q) . Cette structure a été largement étudiée au cours des années 1990, avec en particulier l'introduction des techniques de rétropropagation (*backstepping*; voir Krstic et al. (1995) pour une présentation) et de *forwarding* (pour

4. Voir l'Annexe A.

une présentation de différentes techniques de *forwarding*, voir Teel (1996); Jankovic et al. (1996); Mazenc et Praly (1996)). Ces différentes techniques permettent une construction itérative de contrôleurs en étendant à chaque étape la dimension du modèle. Offrant un cadre méthodologique pour la synthèse de lois de commande non linéaires et l'obtention de fonction de Lyapunov assignables au systèmes, ces techniques sont devenues très populaires.

C'est cette logique que nous allons suivre, en considérant en premier lieu la stabilisation de l'équilibre du sous-système (h, V, γ) par l'intermédiaire du bilan aéro-propulsif e et de l'angle d'incidence aérodynamique $\alpha = \theta - \gamma$. Deux étapes de *backstepping* seront ensuite nécessaires pour commander le système (θ, q) sur la consigne de guidage obtenue à l'étape précédente.

Une dynamique de guidage dissipative

Nous montrerons de plus que le sous-système (h, V, γ) possède un équilibre stable lorsque ses entrées sont définies comme $e = 0$ et $\alpha = \alpha_0 > \sqrt{R_t/g_0} > 0$. Cette propriété de dissipativité⁵ est une *propriété clé* du système considéré qui a orienté l'ensemble de nos travaux. En effet, elle offre l'opportunité de conclure en présence de contraintes pratiques telles que :

- le problème des saturations d'actionneur et contraintes sur l'état ;
- la quantité d'information *a priori* embarquée dans le contrôleur ;
- la complexité du contrôleur embarqué ;
- la robustesse aux dynamiques négligées ;
- la question du sens physique donné à la loi de commande obtenue.

Ces contraintes sont courantes dans le domaine de la commande, mais difficiles à prendre en compte en pratique. C'est pourquoi nous entreprenons dans la suite d'exploiter cette propriété de dissipativité afin de contribuer à faire progresser les techniques de synthèse de commande dans le domaine aéronautique.

Définition 3.3 (Phugoïde). Une phugoïde est le mouvement oscillatoire d'un avion, durant lequel l'appareil oscille en montant puis en piquant du nez.

La dissipativité du mode (h, V, γ) — dit phugoïde — fut déjà mise en évidence⁶ et exploitée pour la conception de commande non linéaire, dans un contexte de rentrée atmosphérique dans Praly et Coron (2001). En ce qui concerne le modèle (3.1), nous établirons dans la section suivante que la dissipativité du sous-système (h, V, γ) lorsque $e = 0$ et $\alpha = \alpha_0 > 0$ est une conséquence directe du fait qu'il s'agit d'une version modifiée de l'oscillateur de Zhukovskii.

3.4 L'oscillateur de Zhukovskii

3.4.1 Présentation

En 1891, Nikolai E. Zhukovskii résout le problème du mouvement d'un corps suffisamment fin volant dans une atmosphère homogène, résultat publié sous le titre *Sur le vol des oiseaux*. Par la suite, Frederick William Lanchester étudia également la stabilité de ce même oscillateur dans Lanchester (1908). Nous nous inspirons ici des éléments de l'analyse présentée dans Andronov et al. (1987) pour présenter succinctement l'oscillateur.

Le modèle dynamique considéré est le suivant :

$$\dot{v} = -\sin \phi - av^2, \quad \dot{\phi} = \frac{v^2 - \cos \phi}{v}, \quad (3.2)$$

où $v \in \mathbb{R}^+$ et $\phi \in \mathbb{S}$ sont respectivement, à un changement de variable près, la vitesse et la pente, tandis que a est inversement proportionnel à la finesse. Ce modèle

5. Voir l'Annexe A.

6. Voir également Svirezhev (1966), découvert au cours de la rédaction de ces lignes, qui résout les trajectoires phugoïdes de véhicules suffisamment fins avec une atmosphère de densité exponentielle.

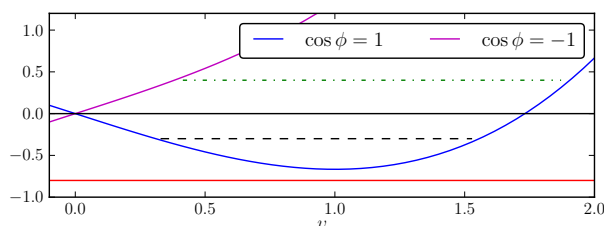


FIGURE 3.1 – Tracé de la fonction $y(y^2/3 - \cos \phi)$ pour $\cos \phi = \pm 1$. Différentes configurations de trajectoires sont possibles selon les valeurs de c . ($c < -2/3$ en rouge; $-2/3 < c < 0$ en trait discontinu noir; $c > 0$ en trait d'axe vert)

possède une singularité définie par $v = 0$ ainsi que des points d'équilibre $(v_0, \phi_0) = (\pm\sqrt{\cos(\arctan a)}, -\arctan a)$. Du fait de la singularité du modèle, on s'intéresse par la suite au cas où v est strictement positif.

Nous restreignons notre étude au vol non trainé. Il s'agit du cas où $a = 0$, qui peut être considéré comme l'approximation à la limite d'un vol à grande finesse. On peut alors poser

$$\frac{dv}{d\phi} = \frac{v \sin \phi}{\cos \phi - v^2}, \quad (3.3)$$

dont on peut vérifier que la solution est donnée par la relation

$$\frac{1}{3}v^3 - v \cos \phi = c, \quad (3.4)$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une constante dépendante des conditions initiales de l'équation différentielle (3.2). La Figure 3.1 illustre l'évolution des solutions en fonction des valeurs de c . D'après Andronov et al. (1987), différents types de trajectoire sont possibles :

- $c < -2/3$: il n'existe pas de trajectoire avec $v \geq 0$.
- $c = -2/3$: l'orbite est réduite au point d'équilibre $(v_0, \phi_0) = (1, 0)$.
- $-2/3 < c < 0$: l'orbite entoure l'équilibre et est contractible à ce point.
- $c = 0$: l'orbite est l'union de deux ensembles $\{(v, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S} : v = 0\}$ et $\{(v, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{S} : v^2 = 3 \cos \phi\}$ qui se coupent en $(v = 0, \phi = \pm \frac{\pi}{2})$.
- $c > 0$: l'orbite n'entoure plus l'équilibre et n'est plus contractible à un point.

À partir de l'équation (3.4), nous pouvons aisément tracer les orbites correspondantes. La Figure 3.2 illustre différentes trajectoires possibles dans l'espace des phases, et la Figure 3.3 montre leur réalisation dans l'espace physique : les courbes phugoïdes⁷. Le domaine d'évolution du véhicule est un ouvert, contenu dans le demi-cylindre défini par $v > 0$. Cependant, l'orbite définie par la solution lorsque $c = 0$ coupe ce demi-cylindre en deux composantes connexes.

Définition 3.4 (Domaine de stabilité). Nous appelons domaine de stabilité la composante connexe du domaine d'évolution du système, qui contient le point d'équilibre, qui est positivement invariante et telle que la fermeture des orbites positives est dans le domaine d'évolution.

En pratique, le domaine de stabilité de l'oscillateur de Zhukovskii est délimité par une orbite singulière qui intersecte les points $(v = 0, \phi = \pm \frac{\pi}{2})$.

7. L'anecdote veut que ce nom ait été choisi par Lanchester, recherchant un nom classique pour sa théorie des oscillations se produisant pendant le vol. Il est avéré que la racine grecque *phug* ($\phi\nu\gamma$) et la racine latine *fug* correspondent toutes deux au mot *flight* anglais; d'où le choix de courbe *phugoïde* : "From the Greek $\phi\nu\gamma\eta$ and $\epsilon\iota\delta\omicron\varsigma$ (*flight-like*)" (Lanchester, 1908, Preface, p. viii). Malheureusement, le grec *phug* comme le latin *fug* signifient en réalité *flight* au sens de *prendre la fuite*.

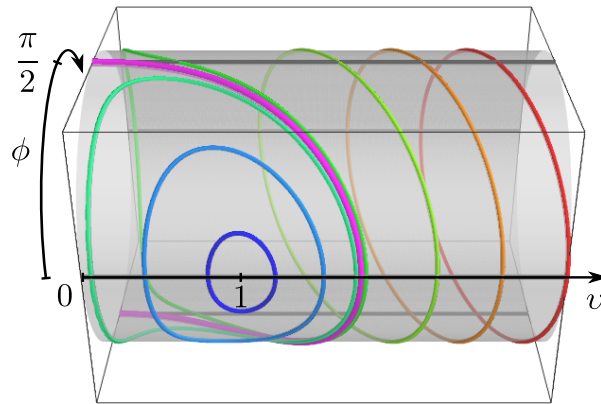


FIGURE 3.2 – Illustration de différentes orbites dans l'espace $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}$. La trajectoire magenta représente le cas où $c = 0$, l'orbite passe alors par la singularité $v = 0$.

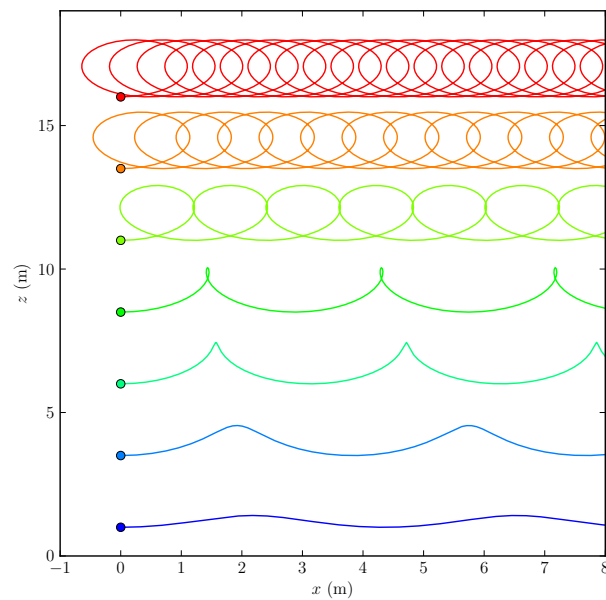


FIGURE 3.3 – Illustration de différentes trajectoires phugoides intégrées dans l'espace physique.

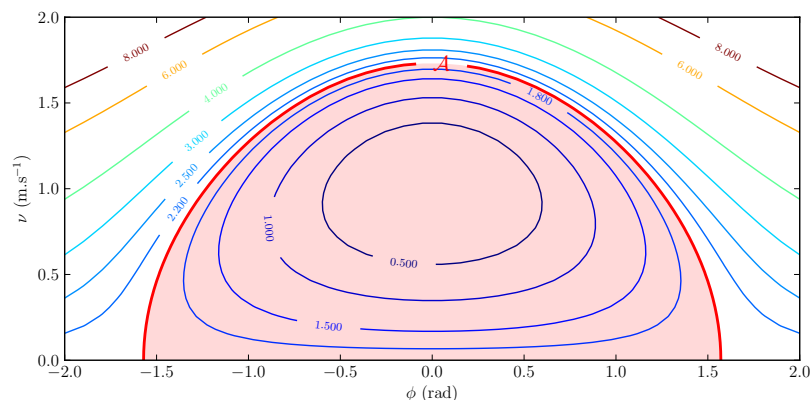


FIGURE 3.4 – Tracé de lignes de niveau de la fonction $3W(v, \phi)$. L'ensemble \mathcal{A} , défini par (3.5) est délimité par $3W(v, \phi) < 2$.

3.4.2 Stabilité de l'oscillateur de Zhukovskii

La proposition qui suit montre la stabilité de l'équilibre *via* la méthode directe de Lyapunov.

Proposition 3.1 (Stabilité de l'oscillateur de Zhukovskii). *L'oscillateur de Zhukovskii est dissipatif. L'équilibre $(v_0, \phi_0) = (1, 0)$ est stable et son domaine de stabilité est l'ouvert*

$$\mathcal{A} = \left\{ (v, \phi) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{S} : W(v, \phi) < \frac{2}{3} \right\}. \quad (3.5)$$

Démonstration. Considérons la fonction $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$W(v, \phi) = \frac{1}{3}(v-1)^2(v+2) + v(1-\cos\phi) = \frac{1}{3}v^3 + \frac{2}{3} - v\cos\phi, \quad (3.6)$$

dont on remarque que les lignes de niveau vérifient (3.4). Puisque les termes $(v-1)^2(v+2)$ et $v(1-\cos\phi)$ sont positifs ou nuls sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}$, W est nul sur cet ensemble si et seulement si chacun des termes est nul, donc si et seulement si $(v_0, \phi_0) = (1, 0)$, et W est positive partout ailleurs sur l'ouvert $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{S}$.

Par définition, l'ensemble \mathcal{A} contient l'équilibre $(1, 0)$ et ne contient aucun point où $v = 0$. Par ailleurs, W est définie positive sur \mathcal{A} . De plus, le gradient de W n'est jamais nul sur \mathcal{A} ailleurs qu'en $(1, 0)$. Donc les épigraphes de W sont contractibles à un point, et l'ensemble \mathcal{A} est connexe.

Ensuite, un calcul simple montre que la dérivée de $W(v, \phi)$ le long des trajectoires est nulle pour tout couple (v, ϕ) à valeurs initiales dans \mathcal{A} , ce qui nous permet d'établir la stabilité de l'équilibre, et la dissipativité de l'oscillateur. De plus, les trajectoires de l'oscillateur restent sur des niveaux constants de la fonction $W(v, \phi)$. La fermeture de leur orbite est donc dans \mathcal{A} . \square

La restriction au domaine \mathcal{A} se justifie dans la mesure où nous avons pour objectif la réalisation d'une croisière hypersonique. Il n'est nullement possible d'y faire des boucles en *looping* ou bien de s'approcher de l'orbite intersectant la singularité $v = 0$. La Figure 3.4 illustre le domaine \mathcal{A} .

3.4.3 Stabilité du mode phugoïde hypersonique

Après avoir mis en évidence quelques aspects de l'oscillateur de Zhukovskii, nous pouvons poursuivre en montrant que le système (h, V, γ) de (3.1) possède une structure très proche de l'oscillateur de Zhukovskii, et établir par là l'existence d'un équilibre stable lorsque l'équilibre aéro-propulsif est maintenu et que l'incidence est fixée.

Pour cela, commençons par remarquer que le système

$$\dot{h} = V \sin \gamma, \quad (3.7a)$$

$$\dot{V} = -g(V) \sin \gamma, \quad (3.7b)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{\alpha_0 \rho(h) C_{l_a} V^2 S(V) - g(V) \cos \gamma}{V}, \quad (3.7c)$$

est constitué de deux systèmes indépendants.

Une version modifiée de l'oscillateur de Zhukovskii

Proposition 3.2. *Le système (3.7), avec (h, V, γ) évoluant dans $\mathcal{O} = \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{S}$, où $\mathcal{V} =]0; \sqrt{R_t g_0}[$, est équivalent à deux systèmes indépendants : une version modifiée de l'oscillateur de Zhukovskii et une dynamique d'énergie.*

Ceci est une conséquence du maintien de l'équilibre aéro-propulsif (c'est-à-dire $e = 0$ dans (3.1)) : l'altitude et la vitesse sont géométriquement liées. Les trajectoires du système (3.7) évoluent donc sur une variété de dimension 2 incluse dans \mathbb{R}^3 , et nous pouvons découpler (3.7) pour obtenir la somme de deux systèmes indépendants.

Démonstration. D'après (2.24), nous avons

$$g(V) = g_0 - \frac{V^2}{R_t}. \quad (3.8)$$

Puisque

$$\frac{dh}{dV} = \frac{V}{g(V)}, \quad (3.9)$$

définissons la fonction $\sigma : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$ par

$$\sigma(V) = \int_0^V \frac{s}{g(s)} ds = -\frac{R_t}{2} (\ln g(V) - \ln g_0). \quad (3.10)$$

Nous avons

$$\overline{\sigma(V) + h} = 0, \quad (3.11)$$

donc la fonction $\sigma(V) + h$ est constante le long des trajectoires.

Par ailleurs, nous avons $h - h_0 = -R_t/2 \ln(g(V)/g_0)$ le long des solutions du système (3.7), avec $h_0 \in \mathbb{R}$ dépendant des conditions initiales. À partir de là et de (2.25), nous pouvons exprimer la relation

$$\rho(h) = \exp(-ah + b) = \exp\left(-ah_0 + b - a \frac{R_t}{2} \ln \frac{g(V)}{g_0}\right) = \rho(h_0) \left(1 - \frac{V^2}{g_0 R_t}\right)^{-a \frac{R_t}{2}}. \quad (3.12)$$

Considérons alors d'une part la fonction $\Lambda_\rho : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ définie par

$$\Lambda_\rho(V) = \frac{\rho(h_0) C_{l_a} V^2 S(V)}{g(V) \left(1 - \frac{V^2}{g_0 R_t}\right)^{a \frac{R_t}{2}}}, \quad (3.13)$$

et notons qu'elle est strictement croissante pour $V \in \mathcal{V}$ puisque $V^2 S(V)$ est strictement croissante par rapport à V et que, a étant positif et g étant strictement positive et décroissante, $g(V)^{-1-aR_t/2}$ est strictement croissante.

Considérons d'autre part le changement d'échelle de temps $d\tau = g(V)dt$, et notons le $\circ = \frac{d}{d\tau}$. On peut alors récrire le système (3.7) comme :

$$\overline{\sigma(V) + h} = 0, \quad \overset{\circ}{V} = -\sin \gamma, \quad \overset{\circ}{\gamma} = \frac{\alpha_0 \Lambda_\rho(V) - \cos \gamma}{V}. \quad (3.14)$$

□

Stabilité de l'oscillateur de Zhukovskii modifié

De façon identique à celle de la sous-section 3.4.2, nous pouvons étudier la stabilité de l'équilibre de (3.14) par la méthode directe de Lyapunov.

Proposition 3.3 (Stabilité du vol hypersonique à incidence fixe). *Pour tout $\alpha_0 \in]1/\Lambda_\rho(\sqrt{R_t g_0}) ; +\infty[$, le système*

$$\begin{aligned} \dot{V} &= -\sin \gamma, & \dot{\gamma} &= \frac{\alpha_0 \Lambda_\rho(V) - \cos \gamma}{V} \end{aligned} \quad (3.15)$$

est dissipatif, possède un unique équilibre $(\Lambda_\rho^{-1}(1/\alpha_0), 0)$ stable et son domaine de stabilité est un ouvert, défini par la composante connexe de l'ensemble

$$\left\{ (V, \gamma) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{S} : W(V, \gamma) < \bar{W} = \alpha_0 \int_{V_0}^0 \Lambda_\rho(s) ds + V_0 \right\} \quad (3.16)$$

contenant le point $(V_0, 0)$.

Démonstration. Puisque $V \mapsto \Lambda_\rho(V)$ est continue et strictement croissante sur \mathcal{V} , elle est bijective. Donc l'équation $\alpha_0 \Lambda_\rho(V) = 1$ possède une solution unique $V_0 = \Lambda_\rho^{-1}(1/\alpha_0)$, ce qui établit l'unicité de l'équilibre $(V_0, 0)$ sur le domaine considéré.

Considérons la fonction $W : \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$W(V, \gamma) = \int_{V_0}^V \left(\frac{\Lambda_\rho(s)}{\Lambda_\rho(V_0)} - 1 \right) ds + V(1 - \cos \gamma) = \alpha_0 \int_{V_0}^V \Lambda_\rho(s) ds + V_0 - V \cos \gamma, \quad (3.17)$$

nulle pour la valeur d'équilibre $(V, \gamma) = (V_0, 0)$ et positive pour $(V, \gamma) \in \mathcal{V} \times \mathbb{S}$. La fonction $W(V, \gamma)$ est constante le long des trajectoires du système, ce qui établit la stabilité de l'équilibre (3.7) et la dissipativité du système.

Caractérisons désormais l'ensemble \mathcal{A} . Puisque $W(V, \gamma)$ est constante le long des trajectoires, et puisque les trajectoires sont des arcs continus, \mathcal{A} est positivement invariant. De plus, l'ensemble \mathcal{A} est borné.

Pour montrer cela, on remarque premièrement que $V > 0$, car $V_0 > 0$, or $V = 0$ violerait la contrainte $W(V, \gamma) < \bar{W}$. Deuxièmement, puisque $V_0 > 0$ et $\Lambda_\rho(V) > 0$ pour $V \in \mathcal{V}$, l'équation

$$W(V, \gamma) = \bar{W} + \alpha_0 \int_0^V \Lambda_\rho(s) ds - V \cos \gamma = c, \quad (3.18)$$

où $0 \leq c < \bar{W}$, n'a de solution possible que si $\cos \gamma > 0$. D'où $\gamma \in]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}[$. Troisièmement, d'après la définition de Λ_ρ , nous avons

$$\lim_{V \nearrow \sqrt{R_t g_0}} \frac{1}{V} \int_{V_0}^V \Lambda_\rho(s) ds = +\infty. \quad (3.19)$$

De plus, puisque $V \mapsto \Lambda_\rho$ est continue, strictement croissante et à valeurs positives sur \mathcal{V} , alors l'application

$$V \mapsto \frac{1}{V} \int_0^V \Lambda_\rho(s) ds \quad (3.20)$$

est continue, strictement croissante⁸, et réalise une bijection de \mathcal{V} vers \mathbb{R}_*^+ . Or, puisque

$$W(V, \gamma) = \bar{W} + \alpha_0 \int_0^V \Lambda_\rho(s) ds - V \cos \gamma, \quad (3.21)$$

8. En effet, $\frac{d}{dV} \left(\frac{1}{V} \int_0^V \Lambda_\rho(s) ds \right) = 0$ implique $\int_0^V \Lambda_\rho(s) ds = V \Lambda_\rho(V)$. Or Λ_ρ est strictement croissante, ce qui implique $\int_0^V \Lambda_\rho(s) ds < V \Lambda_\rho(V)$. D'où la monotonie et la croissance de (3.20).

pour chaque $\gamma \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, il existe un $V^+(\gamma)$ vérifiant

$$\alpha_0 \frac{1}{V^+(\gamma)} \int_0^{V^+(\gamma)} \Lambda_\rho(s) ds < \cos \gamma \leq 1, \quad (3.22)$$

du fait de la monotonie de (3.20). Par conséquent, il existe un $\bar{V} \in \mathcal{V}$ défini par

$$\bar{V} = \max_{\gamma \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[} V^+(\gamma) \quad (3.23)$$

et tel que $(V, \gamma) \in \mathcal{A}$ implique $V < \bar{V}$. De plus, il n'existe qu'une seule composante connexe de l'ensemble défini par (3.16) restreint à $\mathcal{V} \times \mathbb{S}$, et elle contient l'équilibre $(V_0, 0)$.

Nous pouvons finalement préciser la définition de \mathcal{A} :

$$\mathcal{A} = \{(V, \gamma) \in \mathcal{V} \times \mathbb{S} : W(V, \gamma) < W(0, 0)\}. \quad (3.24)$$

□

3.4.4 Application à la stabilité du vol hypersonique

Pour terminer cette section, on peut déduire des Propositions 3.2 et 3.3 une propriété bien connue des pilotes d'avions : la stabilité asymptotique de l'équilibre du mode phugode lorsque l'appareil est maintenu cabré avec une attitude constante. Cette propriété, notamment développée localement dans (Wanner, 1983, Chapitre IV), est en fait mise en œuvre par tous les pilotes qui commandent manuellement les avions sur un palier stabilisé. Le Théorème 3.1 établit le résultat pour le vol hypersonique⁹, qui se caractérise par une aérodynamique dépendante du Mach et par la présence de l'accélération de Coriolis dans le modèle.

Théorème 3.1 (Stabilité du vol hypersonique à attitude fixe). *Le système défini par*

$$\dot{h} = V \sin \gamma, \quad (3.25a)$$

$$\dot{V} = -g(V) \sin \gamma, \quad (3.25b)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{(\theta_0 - \gamma)\rho(h)C_{l_a}V^2S(V) - g(V)\cos \gamma}{V}, \quad (3.25c)$$

où $\theta_0 \in]1/\Lambda_\rho(\sqrt{R_t g_0}); +\infty[$, possède une variété d'équilibre \mathcal{E} attractive et invariante dont le bassin d'attraction contient $\mathbb{R} \times \mathcal{C} \subset \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{S}$, où

$$\mathcal{C} = \{(V, \gamma) \in \mathcal{V} \times \mathbb{S} : W_\theta(V, \gamma) \leq W_\theta(0, 0) - \epsilon\}, \quad (3.26)$$

avec $0 < \epsilon < W_\theta(0, 0)$. De plus, chaque trajectoire demeure bornée sur \mathcal{E} .

Démonstration. En reprenant la démarche de la Proposition 3.2, et sachant que $\gamma + \alpha = \theta$, on se ramène à l'étude de

$$\overbrace{\sigma(V) + h}^\circ = 0, \quad \overset{\circ}{V} = -\sin \gamma, \quad \overset{\circ}{\gamma} = \frac{(\theta_0 - \gamma)\Lambda_\rho(V) - \cos \gamma}{V}. \quad (3.27)$$

Considérons alors la fonction $W_\theta : \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$W_\theta(V, \gamma) = \psi(\sigma(V) + h - \sigma(V_0) - h_0) + \theta_0 \int_{V_0}^V \Lambda_\rho(s) ds + V_0 - V \cos \gamma, \quad (3.28)$$

avec $V_0 = \Lambda_\rho^{-1}(1/\theta_0)$ et $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction définie positive et radialement non bornée. La dérivée de W_θ par rapport à τ le long des trajectoires vérifie

$$\overbrace{W_\theta(V, \gamma)}^\circ = -\gamma \Lambda_\rho(V) \sin \gamma \leq 0. \quad (3.29)$$

9. Il suffit de poser $S(V) = 1$ pour retrouver le résultat analogue pour un vol subsonique.

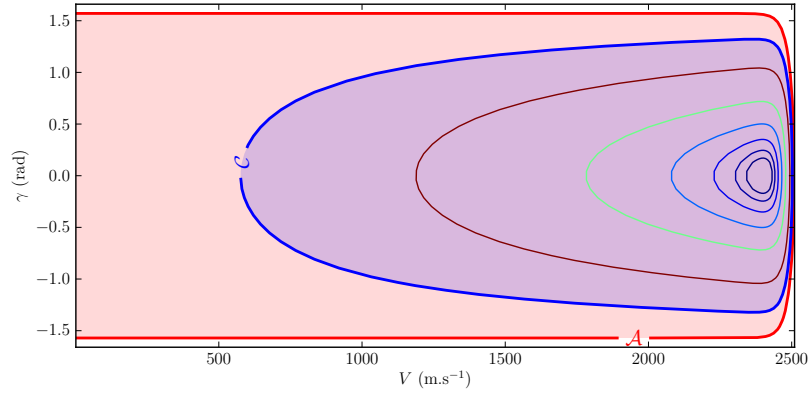


FIGURE 3.5 – Tracé de lignes de niveau de la fonction $W(V, \gamma)$, pour $V_0 = 2400 \text{ m.s}^{-1}$. L'ensemble \mathcal{A} , défini par (3.24) est délimité en rouge. L'ensemble \mathcal{C} , défini par (3.30) est délimité en bleu.

En considérant l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ positivement invariant où \mathcal{C} est défini par

$$\mathcal{C} = \{(V, \gamma) \in \mathcal{V} \times \mathbb{S} : W_\theta(V, \gamma) \leq W_\theta(0, 0) - \epsilon\}, \quad (3.30)$$

avec $0 < \epsilon < W_\theta(0, 0)$, et étant donné que $(V, \gamma) \in \mathcal{C}$ implique $\gamma \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, alors en appliquant le principe d'invariance, on montre que les trajectoires initialisées dans $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ convergent vers le plus grand ensemble invariant inclus dans

$$\{(h, V, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C} : \gamma \Lambda_\rho(V) \sin \gamma = 0\}. \quad (3.31)$$

C'est-à-dire

$$\mathcal{E} = \{(h, V, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathcal{C} : \theta_0 \rho(h) C_{l_a} V^2 S(V) - g(V) = 0, \gamma = 0\}. \quad (3.32)$$

La bornitude des trajectoires est conséquence de la relation $\sigma(V) + h = \text{constante}$. \square

Remarque 3.1. En pratique, la fonction Λ_ρ n'est pas un modèle représentatif de la réalité à faible Mach¹⁰. Il est donc judicieux de poser $\epsilon = W_0 - W_\theta(V, 0)$, en prenant par exemple $V = 600 \text{ m.s}^{-1}$, pour restreindre \mathcal{C} au domaine où le modèle est représentatif de la réalité.

La Figure 3.5 montre les domaines \mathcal{A} et \mathcal{C} pour $V_0 = 2400 \text{ m.s}^{-1}$, et la Figure 3.6 montre ces mêmes domaines dans le cas d'un véhicule subsonique, avec $V_0 = 100 \text{ m.s}^{-1}$ et $S(V) = 1$, à fin de comparaisons. Comme nous pouvons l'observer, la présence du terme

$$\left(1 - \frac{V^2}{g_0 R_t}\right)^{-a \frac{R_t}{2}} \quad (3.33)$$

dans (3.13), où $a R_t \approx 974$, rend Λ_ρ fortement croissante à grande vitesse. Cette tendance non linéaire du mouvement phugôïde hypersonique est conséquence des possibles variations d'altitude dès la moindre variation d'angle de pente. Elle se retrouve également dans les Figures 2.18 et 2.19, où les oscillations phugôïdes semblent « en dents de scie ».

10. Les propriétés de monotonie de Λ_ρ ne sont pas vérifiées autour de Mach 1, du fait de la singularité de Prandtl-Glauert (mur du son).

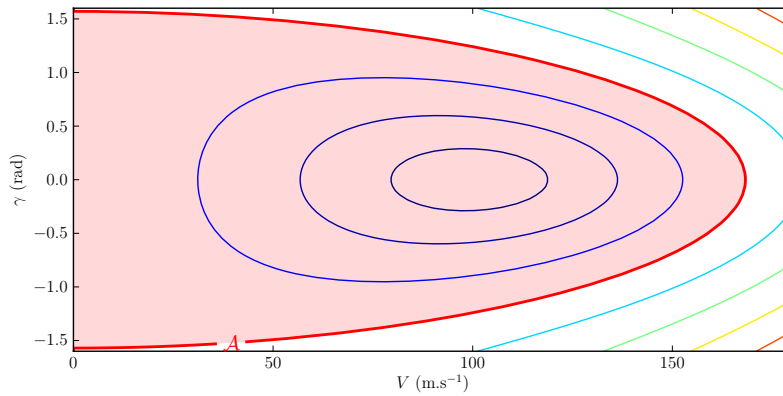


FIGURE 3.6 – Tracé de lignes de niveau de la fonction $W(V, \gamma)$, pour $V_0 = 100 \text{ m.s}^{-1}$ et $S(V) = 1$. L'ensemble \mathcal{A} , défini par (3.24) est délimité en rouge.

3.5 Extension à un vol à énergie non constante

La conservativité du mouvement phugoïde est une propriété particulièrement intéressante à exploiter pour réaliser une loi de commande. Mais la stabilité de l'équilibre du système n'est pas suffisante pour assurer la stabilisation asymptotique de l'équilibre (h_0, V_0) . C'est une loi de commande poursuivant cet objectif que nous allons étudier dans ce qui suit.

Avant de donner la synthèse complète de la loi de commande, nous ferons une hypothèse supplémentaire puis nous détaillerons séparément différents termes qui seront présents dans la commande.

3.5.1 Modèle de comportement

L'analyse développée à la section précédente suppose l'équilibre aéro-propulsif, impliquant la stabilité du mode énergétique du véhicule. Or, ceci est une hypothèse qui n'a pas de raison d'être maintenue le long du vol, *a fortiori* si le but est de contrôler les trajectoires du véhicule. Par conséquent, nous avons besoin d'un nouveau résultat, au prix d'une nouvelle hypothèse.

Approximation 3.1 (Atmosphère homogène). On suppose la force de portance indépendante de l'altitude. En conséquence, on considère, en lieu et place de Λ_ρ , la fonction $\Lambda : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, définie par

$$\Lambda(V) = \frac{C_{l_a} V^2 S(V) \rho(h_0)}{g(V)}, \quad (3.34)$$

avec C_{l_a} défini par (2.43), $S(V)$ définie par (2.7) et $g(V)$ définie par (3.8).

La conséquence de cette hypothèse est que l'équation de variété (3.12) n'est plus vérifiée. La dynamique de guidage considérée est désormais définie par

$$\dot{h} = V \sin \gamma, \quad \dot{V} = e - g(V) \sin \gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{g(V)}{V} (\alpha \Lambda(V) - \cos \gamma), \quad (3.35)$$

qui possède une structure triangulaire.

Par ailleurs, l'ensemble \mathcal{C} défini par

$$\mathcal{C} = \{(V, \gamma) \in \mathcal{V} \times \mathbb{S} : W_\theta(V, \gamma) \leq W_\theta(0, 0) - \epsilon\}, \quad (3.36)$$

avec $0 < \epsilon < W_\theta(0, 0)$, est changé en raison de la substitution de Λ_ρ par Λ . Celui-ci est illustré dans la Figure 3.7, pour $V_0 = 2400 \text{ m.s}^{-1}$. En comparaison avec la Figure 3.5, la non-linéarité du modèle pour $V > V_0$ est beaucoup moins marquée.

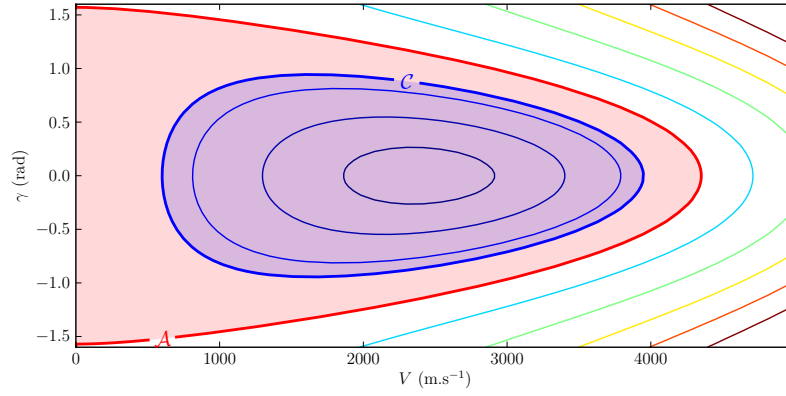


FIGURE 3.7 – Tracé des lignes de niveau de la fonction $W(V, \gamma)$, pour $V_0 = 2400 \text{ m.s}^{-1}$. L'ensemble \mathcal{A} , défini par (3.24) est délimité en rouge. L'ensemble \mathcal{C} , défini par (3.36) est délimité en bleu.

3.5.2 Commande du vecteur vitesse par commande gradient

Comme nous l'avons vu, (3.36) définit un domaine \mathcal{C} sur lequel la fonction

$$W(V, \gamma) = \alpha_0 \int_{V_0}^V \Lambda(s) ds + V_0 - V \cos \gamma \quad (3.37)$$

est strictement positive sauf en $(V_0, 0)$. De plus, nous avons montré l'invariance de W le long des trajectoires lorsque $e = 0$ et $\alpha = \alpha_0$. Cette fonction est donc une candidate idéale pour construire une loi de commande pour la dynamique de guidage. En effet, sa dérivée vérifie

$$\dot{W}(V, \gamma) = \left(\frac{\Lambda(V)}{\Lambda(V_0)} - \cos \gamma \right) e + \Lambda(V)g(V) (\alpha - \Lambda(V_0)^{-1}) \sin \gamma. \quad (3.38)$$

Dans le but de stabiliser asymptotiquement l'équilibre $(V_0, 0)$, le choix le plus simple est de prendre la commande gradient ¹¹

$$e = -k_V \left(\frac{\Lambda(V)}{\Lambda(V_0)} - \cos \gamma \right), \quad \alpha = \alpha_0 - k_\gamma \frac{\Lambda(V)g(V)}{\Lambda(V_0)g(V_0)} \sin \gamma. \quad (3.39)$$

Cette commande est proche d'un simple contrôle proportionnel, où k_V et k_γ sont des gains de réglage, strictement positifs. Cependant, puisqu'il nous suffit d'avoir une commande de signe adaptée pour assurer la stabilisation de l'équilibre, il est également possible de mettre en œuvre une commande bornée. Par exemple, nous pouvons choisir

$$e = \text{sat} \left(k_V \left(\cos \gamma - \frac{\Lambda(V)}{\Lambda(V_0)} \right), \underline{e}, \bar{e} \right), \quad \alpha = \text{sat} \left(\alpha_0 - k_\gamma \frac{\Lambda(V)g(V)}{\Lambda(V_0)g(V_0)} \sin \gamma, \underline{\alpha}, \bar{\alpha} \right), \quad (3.40)$$

où $s \mapsto \text{sat}(s, \underline{s}, \bar{s})$ désigne n'importe quelle fonction monotone, croissante, à valeurs comprises entre \underline{s} et \bar{s} . Les différents paramètres

$$\underline{e} < 0 < \bar{e}, \quad \underline{\alpha} < \alpha_0 < \bar{\alpha}, \quad (3.41)$$

représentent alors les limites d'excursion de la commande.

Remarque 3.2. L'intérêt principal d'une commande gradient telle que (3.40) est qu'elle assure la stabilisation du point d'équilibre avec $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$ comme bassin d'attraction, en exploitant pleinement la plage d'excursion des variables de commande. En comparaison, des lois de commandes plus classiques ne sont applicables que dans le voisinage de l'équilibre où elles sont assurées d'être réalisables.

¹¹. Voir l'Annexe A.

Remarque 3.3. Un autre intérêt de la commande (3.40) est qu'elle nécessite peu d'information *a priori* sur le modèle, ce qui permet de garantir un niveau de robustesse élevé. En effet, de nombreux paramètres de modélisation incertains apparaissent linéairement dans la définition de $\Lambda(V)$ donnée par (3.34). La commande peut donc être implantée par

$$e = \text{sat} \left(k_V \left(\cos \gamma - \frac{V^2 S(V) g(V_0)}{V_0^2 S(V_0) g(V)} \right), \underline{e}, \bar{e} \right), \quad \alpha = \text{sat} \left(\alpha_0 - k_\gamma \frac{V^2 S(V)}{V_0^2 S(V_0)} \sin \gamma, \underline{\alpha}, \bar{\alpha} \right), \quad (3.42)$$

dans laquelle le seul paramètre de modélisation potentiellement mal connu est $S(V)$.

3.5.3 Commande de l'altitude

La commande de l'altitude h est effectuée en étendant la fonction de Lyapunov. Du fait de la structure triangulaire de notre modèle (3.35), structure introduite par l'Approximation 3.1, nous suggérons d'utiliser deux approches différentes : une synthèse par domination utilisant la technique de *forwarding*¹² décrite dans Mazenc et Praly (1996) ; ainsi qu'une synthèse par annulation.

Synthèse par domination

Pour appliquer la technique de *forwarding*, nous devons trouver l'équation d'une variété M vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial M}{\partial h} V \sin \gamma - \frac{\partial M}{\partial V} g(V) \sin \gamma + \frac{\partial M}{\partial \gamma} \frac{g(V)}{V} (\alpha \Lambda(V) - \cos \gamma) = V \sin \gamma. \quad (3.43)$$

Or, en considérant $\frac{\partial M}{\partial h} = 0$ et $\frac{\partial M}{\partial \gamma} = 0$, l'équation de variété devient $\frac{\partial M}{\partial V} = -\frac{g(V)}{V}$, qu'il suffit d'intégrer. Rappelons alors la fonction $\sigma : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\sigma(V) = \int_0^V \frac{s}{g(s)} ds = -\frac{R_t}{2} (\ln g(V) - \ln g_0), \quad (3.44)$$

avec $g(V)$ définie par (3.8). Considérons alors $\psi_V(h + \sigma(V) - E_0)$, avec $E_0 = h_0 + \sigma(V_0)$ qui s'apparente à un objectif d'énergie totale à mg près, et $\psi_V : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction C^1 et définie positive. La dérivée de ψ_V le long des trajectoires vérifie

$$\frac{d}{dt} \psi_V(h + \sigma(V) - E_0) = \psi'_V(h + \sigma(V) - E_0) \left(V \sin \gamma + \frac{V}{g(V)} (e - g(V) \sin \gamma) \right), \quad (3.45)$$

$$= \psi'_V(h + \sigma(V) - E_0) \frac{V}{g(V)} e(h, V, \alpha, \delta, \eta). \quad (3.46)$$

Elle est ainsi affine en la commande e , c'est-à-dire le bilan aéro-propulsif. Nous pouvons donc stabiliser l'équilibre à une altitude de référence donnée en utilisant la poussée comme vecteur de contrôle de l'énergie totale du véhicule. En effet, considérons la fonction

$$W_1(h, V, \gamma) = W(V, \gamma) + \psi_V(h + \sigma(V) - E_0). \quad (3.47)$$

Sa dérivée, le long des trajectoires de (3.35) vérifie

$$\begin{aligned} \overline{W_1(h, V, \gamma)} &= \left(\frac{\Lambda(V)}{\Lambda(V_0)} - \cos \gamma + \frac{V}{g(V)} \psi'_V(h + \sigma(V) - E_0) \right) e \\ &\quad + \Lambda(V) g(V) (\alpha - \alpha_0) \sin \gamma. \end{aligned} \quad (3.48)$$

La commande

$$e = \text{sat} \left(-k_V \left(\frac{\Lambda(V)}{\Lambda(V_0)} - \cos \gamma + \frac{V}{g(V)} \psi'_V(h + \sigma(V) - E_0) \right), \underline{e}, \bar{e} \right), \quad (3.49a)$$

$$\alpha = \alpha_0 - \Lambda(V) g(V) \sin \gamma, \quad (3.49b)$$

stabilise donc un équilibre du système vérifiant $\gamma = 0$ et $h + \sigma(V) = E_0$.

12. Pour une présentation succincte du *forwarding*, voir également la Section 5.4.

Synthèse par annulation

L'utilisation du *forwarding* permet de commander l'altitude, mais dans notre cas, cela mène à un comportement très conservatif car le terme $\psi'_V(h + \sigma(V) - E_0)$ laisse libre les transferts d'énergie entre la vitesse et l'altitude. Cette conservativité est une caractéristique intéressante si notre intérêt est d'économiser de l'énergie, mais cette stratégie de commande est insuffisante pour réguler l'altitude de façon contraignante. Une autre technique de synthèse permet de commander l'altitude de façon moins conservative. En combinant les deux techniques nous pouvons arranger un compromis.

Pour cela, il faut remarquer que $\frac{\partial W}{\partial \gamma}$ est \dot{h} . C'est un facteur qui nous permet une synthèse, par l'annulation d'un objectif de commande sur h , en utilisant α . En effet, considérons le terme $\psi_\gamma(h - h_0)$, où $\psi_\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction C^1 et définie positive. Sa dérivée le long des trajectoires est

$$\overbrace{\psi_\gamma(h - h_0)}^\cdot = \psi'_\gamma(h - h_0)V \sin \gamma = \psi'_\gamma(h - h_0) \frac{\partial W}{\partial \gamma}. \quad (3.50)$$

Considérons maintenant la fonction

$$W_2(h, V, \gamma) = W(V, \gamma) + \psi_V(h + \sigma(V) - E_0) + \psi_\gamma(h - h_0). \quad (3.51)$$

Sa dérivée, le long des trajectoires de (3.35) vérifie

$$\begin{aligned} \overbrace{W_2(h, V, \gamma)}^\cdot &= \left(\frac{\Lambda(V)}{\Lambda(V_0)} - \cos \gamma + \frac{V}{g(V)} \psi'_V(h + \sigma(V) - E_0) \right) e \\ &\quad + \Lambda(V)g(V) \left(\alpha - \alpha_0 + V \frac{\psi'_\gamma(h - h_0)}{\Lambda(V)g(V)} \right) \sin \gamma, \end{aligned} \quad (3.52)$$

ce qui suggère, pour l'incidence, la commande

$$\alpha = \text{sat} \left(\alpha_0 - k_\gamma \frac{\Lambda(V)g(V)}{\Lambda(V_0)g(V_0)} \sin \gamma, \underline{\alpha}, \bar{\alpha} \right) - V \frac{\psi'_\gamma(h - h_0)}{\Lambda(V)g(V)}. \quad (3.53)$$

3.5.4 Synthèse finale de la loi de guidage

Pour tirer avantage des différentes approches précédentes, nous les combinons. Pour cela, nous considérons donc la fonction de Lyapunov

$$W_2(h, V, \gamma) = \alpha_0 \int_{V_0}^V \Lambda(s) ds + V_0 - V \cos \gamma + \psi_\gamma(h - h_0) + \psi_V(h + \sigma(V) - E_0), \quad (3.54)$$

avec $E_0 = h_0 + \sigma(V_0)$. Les fonctions ψ_\star sont définies comme

$$\psi_\gamma(s) = \int_0^s \text{sat}(k_{\psi_\gamma} r, \underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha) dr, \quad \psi_V(s) = \int_0^s \text{sat}(k_{\psi_V} r, \underline{E}, \bar{E}) dr. \quad (3.55)$$

Par ailleurs, e étant défini par (2.46) comme

$$e(h, V, \alpha, \delta, \eta) = \frac{\rho(h)\varepsilon(\alpha)}{m} \left(\eta - \frac{C_d(\alpha, \delta)}{2\varepsilon(\alpha)} S_{\text{ref}} S(V) V^2 \right), \quad (3.56)$$

nous devons en déduire une loi de commande sur η .

Nous choisissons la commande (α_c, η_c) définie par

$$\alpha_c = \text{sat} \left(\alpha_0 - k_\gamma \frac{\Lambda(V)g(V)}{\Lambda(V_0)g(V_0)} \sin \gamma, \underline{\alpha}, \bar{\alpha} \right) - V \frac{\psi'_\gamma(h - h_0)}{\Lambda(V)g(V)}, \quad (3.57a)$$

$$\eta_c = \frac{C_d(\alpha, \delta)}{2\varepsilon(\alpha)} S_{\text{ref}} S(V) V^2 + e_c, \quad (3.57b)$$

où

$$e_c = \text{sat} \left(-k_V \frac{\rho(h)\varepsilon(\alpha)}{m} \left(\frac{\Lambda(V)}{\Lambda(V_0)} - \cos \gamma + \frac{V}{g(V)} \psi'_V(h + \sigma(V) - E_0) \right), \eta, \bar{\eta} \right). \quad (3.58)$$

Les gains pour le réglage du correcteurs sont $(k_\gamma, k_V, k_{\psi_\gamma}, k_{\psi_V})$, strictement positifs. Les limites de saturation sont

$$\eta < \min_{(V, \alpha, \delta)} \frac{C_d(\alpha, \delta)}{2\varepsilon(\alpha)} S_{\text{ref}} S(V) V^2 < \max_{(V, \alpha, \delta)} \frac{C_d(\alpha, \delta)}{2\varepsilon(\alpha)} S_{\text{ref}} S(V) V^2 < \bar{\eta}, \quad (3.59a)$$

$$\alpha < \alpha_0 + \min_{(h, V)} V \frac{\psi'_\gamma(h - h_0)}{\Lambda(V)g(V)} < \alpha_0 + \max_{(h, V)} V \frac{\psi'_\gamma(h - h_0)}{\Lambda(V)g(V)} < \bar{\alpha}, \quad (3.59b)$$

ainsi que

$$\underline{h}_\alpha < 0 < \bar{h}_\alpha, \quad \underline{E} < 0 < \bar{E}. \quad (3.59c)$$

La proposition qui suit établit la stabilisation de l'équilibre $(h_0, V_0, 0)$ du système (3.35) commandé par (3.57).

Théorème 3.2. *Pour tout couple $(h_0, V_0) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V}$, le système défini par (3.35) et commandé par (3.57) possède un équilibre $(h_0, V_0, 0)$ asymptotiquement stable, avec un bassin d'attraction contenant la composante connexe de l'ensemble*

$$\mathcal{D} = \{(h, V, \gamma) \in \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{S} : W_2(h, V, \gamma) < \bar{W}_2 - \epsilon\} \subset \mathbb{R} \times \mathcal{C} \quad (3.60)$$

contenant l'équilibre, avec $W_2 : \mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par (3.54), $\bar{W}_2 = \alpha_0 + \int_{V_0}^0 \Lambda(s) ds + V_0$, ϵ un réel strictement positif tel que $\epsilon < \bar{W}_2$ et \mathcal{C} défini par (3.36).

Démonstration. Considérons la fonction (3.54). Elle est nulle en $(h_0, V_0, 0)$ et positive partout ailleurs sur $\mathbb{R} \times \mathcal{V} \times \mathbb{S}$. Sa dérivée, le long des trajectoires du système (3.35) commandé par (3.57), vérifie

$$\begin{aligned} \overline{W_2(h, V, \gamma)} &= \frac{\partial W_2}{\partial V} \frac{\rho(h)\varepsilon(\alpha)}{m} \left[\text{sat} \left(-k_V \frac{\rho(h)\varepsilon(\alpha)}{m} \frac{\partial W_2}{\partial V} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{C_d(\alpha, \delta)}{2\varepsilon(\alpha)} S_{\text{ref}} S(V) V^2, \eta, \bar{\eta} \right) - \frac{C_d(\alpha, \delta)}{2\varepsilon(\alpha)} S_{\text{ref}} S(V) V^2 \right] \\ &\quad + \Lambda(V)g(V) \left(\text{sat} \left(\alpha_0 - k_\gamma \frac{\Lambda(V)g(V)}{\Lambda(V_0)g(V_0)} \sin \gamma, \alpha, \bar{\alpha} \right) - \alpha_0 \right) \sin \gamma, \end{aligned} \quad (3.61)$$

avec

$$\frac{\partial W_2}{\partial V} = \frac{\Lambda(V)}{\Lambda(V_0)} - \cos \gamma + \frac{V}{g(V)} \psi'_V(h + \sigma(V) - E_0). \quad (3.62)$$

D'après les contraintes (3.59), l'équation (3.61) est nécessairement nulle ou négative.

Par ailleurs, l'ensemble \mathcal{D} défini par (3.60) est borné. En effet, W_2 étant composée d'une somme de termes positifs ou nul, pour h fixé l'ensemble des couples (V, γ) vérifiant $W_2(h, V, \gamma) < \bar{W}_2 - \epsilon$ est inclus dans \mathcal{C} , défini par (3.36). De plus, ψ_γ et ψ_V étant radialement non bornées, il existe nécessairement $\bar{h} > 0$ tel que pour tout $(V, \gamma) \in \mathcal{V} \times \mathbb{S}$, nous ayons $W_2(\bar{h}, V, \gamma) \geq \bar{W}_2$ et $W_2(-\bar{h}, V, \gamma) \geq W(0, 0)$.

Par conséquent, \mathcal{D} contient l'origine et est inclut dans $\mathbb{R} \times \mathcal{C}$. De plus, avec (3.61) \mathcal{D} est positivement invariant. D'après le principe d'invariance, les solutions du système (3.35) commandé par (3.57) et initialisées dans \mathcal{D} convergent vers le plus grand ensemble invariant inclus dans

$$\mathcal{E} = \left\{ (h, V, \gamma) \in \mathcal{D} : \overline{W_2(h, V, \gamma)} = 0 \right\}, \quad (3.63)$$

c'est-à-dire, l'équilibre $(h_0, V_0, 0)$, d'après (3.35) et (3.57). \square

Cette commande (3.57) intègre la commande gradient telle que définie en (3.40), ainsi que des termes d'annulation, qui sont la conséquence de la commande en altitude et de la réalisation du bilan aéro-propulsif par compensation de la traînée. Elle peut être vue comme une version non linéaire d'un contrôle proportionnel pour la régulation de V et proportionnel-dérivé pour la régulation de h . En ajustant les gains k_* , il est possible de placer les pôles du linéarisé tangent du système en boucle fermée de sorte à obtenir un comportement asymptotique identique à celui d'un contrôleur linéaire de structure équivalente mais localement optimal. L'intérêt majeur du contrôleur non linéaire étant l'étendue de son bassin d'attraction.

Remarque 3.4. Étant donné que les différentes limites de saturation décrites par (3.59) peuvent varier dans le temps, il est par ailleurs possible de leur soustraire les termes d'annulation introduits dans la commande. Les contrôles obtenus η et θ peuvent ainsi être globalement bornés, si l'engin évolue dans un domaine tel que les termes de dérive sont bornés et que les contraintes sur les entrées sont choisies de façon à permettre l'équilibrabilité du point de vol — c'est-à-dire l'existence d'une commande, dans les limites d'excursion possible, permettant le maintien de l'équilibre. En effet, en posant

$$\underline{\alpha} = \underline{\alpha}^* + \alpha_0 + V \frac{\psi'_\gamma(h - h_0)}{\Lambda(V)g(V)}, \quad \bar{\alpha} = \bar{\alpha}^* + \alpha_0 + V \frac{\psi'_\gamma(h - h_0)}{\Lambda(V)g(V)}, \quad (3.64a)$$

$$\underline{\eta} = \underline{\eta}^* - \frac{C_d(\alpha, \delta)}{2\varepsilon(\alpha)} S_{\text{ref}} S(V) V^2, \quad \bar{\eta} = \bar{\eta}^* - \frac{C_d(\alpha, \delta)}{2\varepsilon(\alpha)} S_{\text{ref}} S(V) V^2, \quad (3.64b)$$

alors on assure que les contraintes

$$\underline{\alpha}^* \leq \alpha \leq \bar{\alpha}^*, \quad \underline{\eta}^* \leq \eta \leq \bar{\eta}^*, \quad (3.65)$$

seront respectées au cours du vol, si les paramètres $(\underline{\alpha}^*, \bar{\alpha}^*, \underline{\eta}^*, \bar{\eta}^*)$ sont correctement dimensionnés. Pour cela, il suffit que l'excursion possible des commandes η et α permette de réaliser le point d'équilibre $(h_0, V_0, \gamma = 0)$, avec suffisamment de marge pour assurer la stabilité de l'équilibre sur un domaine défini dès la conception ; c'est-à-dire

$$\underline{\eta}^* < \min_{(V, \alpha, \delta)} \frac{C_d(\alpha, \delta)}{2\varepsilon(\alpha)} S_{\text{ref}} S(V) V^2, \quad \bar{\eta}^* > \max_{(V, \alpha, \delta)} \frac{C_d(\alpha, \delta)}{2\varepsilon(\alpha)} S_{\text{ref}} S(V) V^2, \quad (3.66a)$$

$$\underline{\alpha}^* < \alpha_0 + \min_{(h, V)} V \frac{\psi'_\gamma(h - h_0)}{\Lambda(V)g(V)}, \quad \bar{\alpha}^* > \alpha_0 + \max_{(h, V)} V \frac{\psi'_\gamma(h - h_0)}{\Lambda(V)g(V)}. \quad (3.66b)$$

3.6 Pilotage par backstepping

La commande du mode phugôide suppose que l'incidence α soit directement disponible en tant que commande. En réalité, α est elle-même la sortie d'un système dynamique, en l'occurrence un oscillateur. Du fait de la structure triangulaire du système, qui montre une hiérarchie de commande, nous proposons donc de rendre α convergente vers $\alpha_c(h, V, \gamma)$ définie par l'équation (3.57a) pour stabiliser l'équilibre du système complet. Le *backstepping*, défini dans Krstic et al. (1995), permet d'étendre notre loi de commande à cette fin étant donnée la hiérarchie de contrôle *gouvernes* \rightarrow *tangage* \rightarrow *attitude*. Cette technique a déjà été mise en œuvre dans plusieurs travaux dans le domaine aéronautique ; citons par exemple Thiele (1999) ; Harkegard et Torkel Glad (2000) ; Fiorentini et al. (2009) ; Poulain et al. (2010).

Reprenons le modèle (3.1) et considérons la dynamique de rotation

$$\dot{\theta} = q, \quad \dot{q} = \frac{1}{2J} \rho(h) V^2 S_{\text{ref}} l_{\text{ref}} C_m(\alpha, \delta), \quad (3.67)$$

ainsi que la fonction de Lyapunov (3.54). Sa dérivée le long des trajectoires est

$$\overbrace{W_2(h, V, \gamma)}^\cdot = \overbrace{W_2(h, V, \gamma)}^\cdot \Big|_{\alpha=\alpha_c} + g(V) \Lambda(V) (\theta - \gamma - \alpha_c) \sin \gamma. \quad (3.68)$$

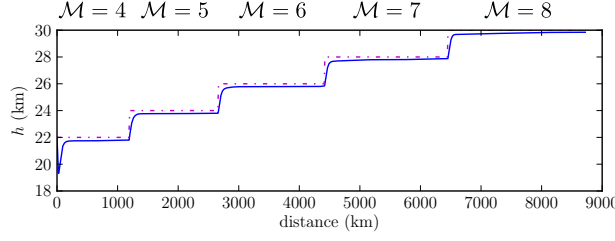


FIGURE 3.8 – Trajectoire simulée durant le vol. Il s'agit d'une succession de paliers stabilisés à altitude et vitesse constante. Le véhicule contrôlé suit la trajectoire de référence (en traits d'axe) sur plus de 8000 km.

À partir de là, en étendant la fonction (3.54) comme

$$W_3(h, V, \gamma, \theta) = W_2(h, V, \gamma) + \frac{1}{2}(\theta - \gamma - \alpha_c)^2, \quad (3.69)$$

sa dérivée est

$$\overbrace{W_3(h, V, \gamma, \theta)}^{\cdot} = \overbrace{W_2(h, V, \gamma)}^{\cdot} \Big|_{\alpha=\alpha_c} + (\theta - \gamma - \alpha_c) (g(V)\Lambda(V) \sin \gamma + q - \dot{\gamma} - \dot{\alpha}_c). \quad (3.70)$$

Si nous sommes capables d'assurer la convergence de q vers

$$q_c = -\text{sat}(k_q(\theta - \gamma - \alpha_c), q, \bar{q}) + \dot{\gamma} + \dot{\alpha}_c - g(V)\Lambda(V) \sin \gamma, \quad (3.71)$$

alors l'équilibre du sous-système (h, V, γ, θ) sera stable. Ceci constitue la première étape de *backstepping*. L'étape suivante est la stabilisation de l'équilibre du système complet. En définissant la fonction de Lyapunov

$$W_4(h, V, \gamma, \theta, q) = W_3(h, V, \gamma, \theta) + \frac{1}{2}(q - q_c)^2, \quad (3.72)$$

sa dérivée le long des trajectoires vérifie

$$\overbrace{W_4(h, V, \gamma, \theta, q)}^{\cdot} = \overbrace{W_3(h, V, \gamma, \theta)}^{\cdot} \Big|_{q=q_c} + (q - q_c) \left(\theta - \gamma - \alpha_c + \frac{1}{2J} \rho(h) V^2 S_{\text{ref}} l_{\text{ref}} C_m(\alpha, \delta) - \dot{q}_c \right). \quad (3.73)$$

Finalement, une loi de commande qui stabilise l'équilibre désiré de notre véhicule décrit par (3.1) est

$$\delta = -\text{sat}(Q, \bar{\delta}, \delta) - \frac{C_{m0}(\alpha)}{C_{m\delta}(\alpha)} + (\dot{q}_c + \alpha_c + \gamma - \theta) \frac{2J}{\rho(h) V^2 S_{\text{ref}} l_{\text{ref}} C_{m\delta}(\alpha)}, \quad (3.74)$$

avec $Q = \frac{k_\delta}{2J} \rho(h) V^2 S_{\text{ref}} l_{\text{ref}} C_{m\delta}(\alpha) (q - q_c)$.

3.7 Simulations et discussion

3.7.1 Le modèle de simulation

La simulation est réalisée en utilisant le contrôleur (3.74). Rappelons que le véhicule simulé possède un rapport poussée/masse d'environ 3 à Mach 8 et une finesse d'environ 3,7 dans ces conditions. La masse initiale du véhicule est de 5 tonnes, dont près de la moitié (2350 kg) est du carburant. Tout l'état est mesuré, et les mesures de l'état sont supposées parfaites.

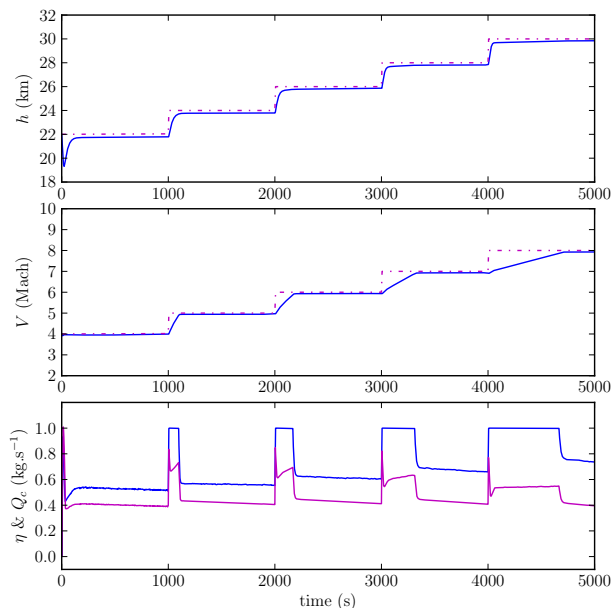


FIGURE 3.9 – Simulation : convergence de h et V vers la consigne. La commande en poussée est saturée à sa valeur maximale à chaque fois que le véhicule doit réaliser une accélération pour poursuivre la référence. À η constant, la quantité de carburant injectée (courbe magenta en trait plein) dépend en permanence de l'incidence du véhicule.

En ce qui concerne les actionneurs, les gouvernes sont simulées par le système dynamique (2.4). La dynamique du débit de carburant est négligée. La simulation prend en compte l'ensemble des connaissances discuté dans le Chapitre 2, y compris les phénomènes mal connus (poussée asymétrique, variation des masses), modélisés sur des considérations empiriques. L'aérodynamique du véhicule est donnée par un modèle polynomial, et la simulation de la propulsion est faite selon le modèle présenté à la Section 2.5.

Les différences existantes entre le modèle de comportement et le modèle de simulation participent à la méconnaissance générale que nous avons des paramètres de modélisation du véhicule. De plus, nous avons introduit une large dispersion sur le modèle pour rendre compte de la robustesse de notre loi de commande à une mauvaise connaissance de l'aérodynamique du véhicule. Ainsi, dans la condition d'un palier stabilisé à Mach 8 et à 30 km, les erreurs suivantes sont présentes :

- le moment aérodynamique qui sert de modèle au contrôleur est prédit avec un facteur entre 0,8 et 1,5 comparé au moment utilisé dans le modèle de simulation ;
 - les coefficients de portance sont modélisés environ 70% au delà de leur valeurs relevées en simulation ;
 - la propulsion est modélisée environ 50% au delà de la valeur relevée en simulation.
- Dans l'implantation de la commande, la caractéristique $\Phi_i I_{sp}^{\Phi_i}(\mathcal{M}, \Phi_i)$ est approchée par une fonction linéaire.

3.7.2 Croisière à différents paliers

La Figure 3.8 montre la trajectoire du vol simulée utilisant la loi de commande (3.74). Cette trajectoire consiste en une succession de paliers (h_0, V_0) . Le même contrôleur est utilisé durant toute la phase de vol. La convergence de l'altitude et de la vitesse dans le temps est présentée à la Figure 3.9, où on peut constater que la propulsion est mise à contribution à son maximum dès que nécessaire. Ainsi, on peut limiter la poussée dans une plage de fonctionnement qui garantit l'intégrité du superstatoréacteur, sans diminuer les performances asymptotiques du système. De larges incertitudes ayant été maintenues entre les différents modèles, des erreurs de poursuite significative existent,

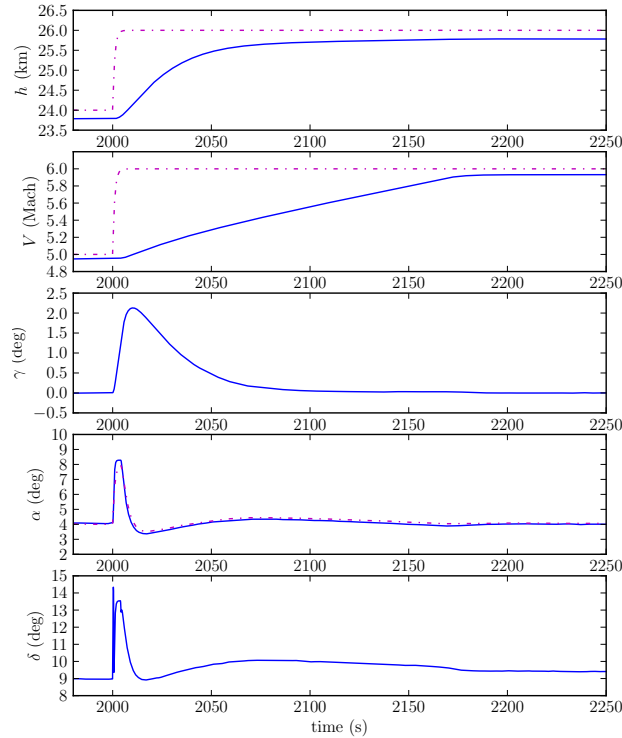


FIGURE 3.10 – Simulation : zoom sur un changement de consigne de point de vol. La convergence de l’altitude est plus rapide que la convergence de la vitesse vers la consigne. La consigne intermédiaire en incidence ne dépasse pas une valeur limite proche de 8° .

sans pour autant affecter la propriété de stabilité de l’équilibre du système. Ainsi, l’erreur de poursuite sur la consigne en altitude est proche de 250 m, tandis que l’erreur de poursuite sur la vitesse est de l’ordre de $20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

La Figure 3.10 montre plus en détail le comportement du véhicule sujet à un changement de consigne en altitude et en Mach, rencontré à $t = 2000 \text{ s}$. Pour rallier la consigne en altitude, la prise d’incidence est significative, mais reste tout de même limitée à une valeur maximale durant l’ascension, ici 8° . Cette borne est ici donnée arbitrairement, mais a pour sens de permettre une limitation liée aux flux thermiques, au facteur de charge, ou afin de protéger l’entrée d’air pour qu’elle ne soit pas exposée à un flux d’air trop important.

3.7.3 Sensibilité à l’augmentation de poussée

La Figure 3.11 montre un résultat de simulation où deux changements de consigne en Mach sont réalisés, à altitude constante. Le but est d’observer la conséquence sur le guidage/pilotage d’une augmentation de la poussée.

On remarque assez peu la conséquence du « moment piqueur » induit par la poussée : toutes choses égales par ailleurs, la valeur de gouverne à l’équilibre est peu différente pour une augmentation de la propulsion commandée de 60% à 100%.

Les variations locales d’incidence durant les quelques secondes suivant le changement de consigne, que l’on retrouve sur la consigne α_c de la loi de guidage, ne sont pas une conséquence d’un moment piqueur. Il s’agit plutôt d’une conséquence de la méconnaissance des paramètres de modélisation. Pour mettre en évidence ce constat, nous avons commandé successivement deux changements de consigne : un échelon de Mach 7 à Mach 7,05 au temps $t = 0$, puis un échelon de Mach 7,05 à Mach 8 au temps $t = 100 \text{ s}$. On constate que, alors que les conditions de sollicitation du pilote sont proches entre les

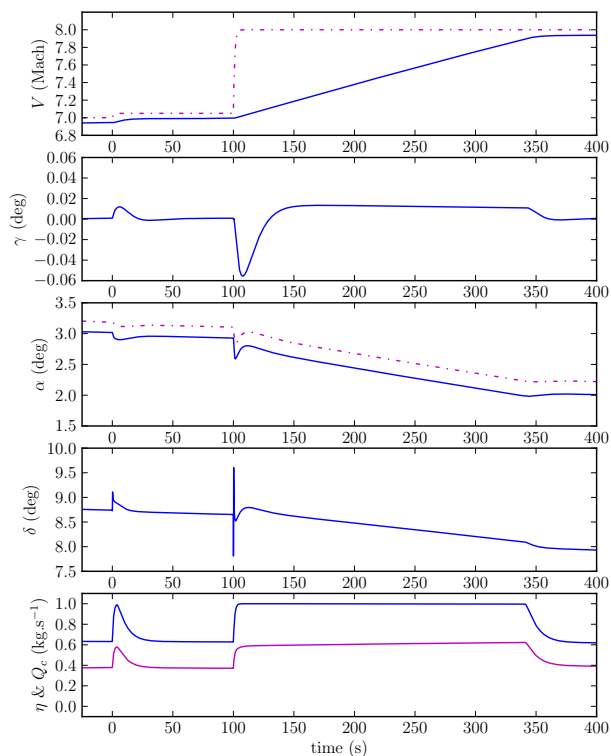


FIGURE 3.11 – Simulation : zoom sur un changement de consigne en Mach. On note que l’influence de l’augmentation de la poussée sur l’incidence du véhicule demeure faible. En pratique, elle est dominée par d’autres effets provenant des erreurs de modélisation.

deux changements de consigne, la conséquence sur le pilotage est de nature différente.

Le vol étant effectué à altitude constante, l’incidence décroît progressivement, à partir de $t = 110$ s et au fur et à mesure que V augmente, jusqu’à convergence de V dans un voisinage de la consigne.

3.7.4 Sensibilité aux conditions initiales

La Figure 3.12 montre le résultat de différents tirages en faisant varier les conditions initiales pour une consigne de vol en palier stabilisé à Mach 8 à l’altitude de 30 km. Les conditions initiales sont tirées aléatoirement dans les limites suivantes :

- l’altitude entre 28 et 32 km ;
- la vitesse entre 2200 et 2600 m.s^{-1} ;
- la pente de vitesse entre $\pm 0,05$ rad ($\pm 2,8^\circ$) ;
- l’incidence entre 0 et 0,15 rad ($8,6^\circ$) ;
- la vitesse de rotation entre $\pm 0,05$ rad.s^{-1} ($\pm 2,8^\circ.\text{s}^{-1}$).

Certaines valeurs initiales sont particulièrement élevées, dans le but principal d’illustrer ce comportement éloigné de l’objectif de vol de croisière.

Pour assurer un balayage maximal du volume concerné, un tirage dit « orthogonal » est réalisé. Il s’agit de découper l’espace en hypercubes puis de tirer un point dans chacun. De la sorte, chaque hypercube considéré est échantillonné de façon équiprobable. En l’occurrence, un tirage est réalisé dans chaque portion de l’espace, pour un total de 32 tirages.

On remarque en premier lieu que l’ensemble des solutions converge vers un équilibre proche de la consigne. Le temps de convergence est plus ou moins long, selon l’accélération nécessaire pour atteindre le point de vol.

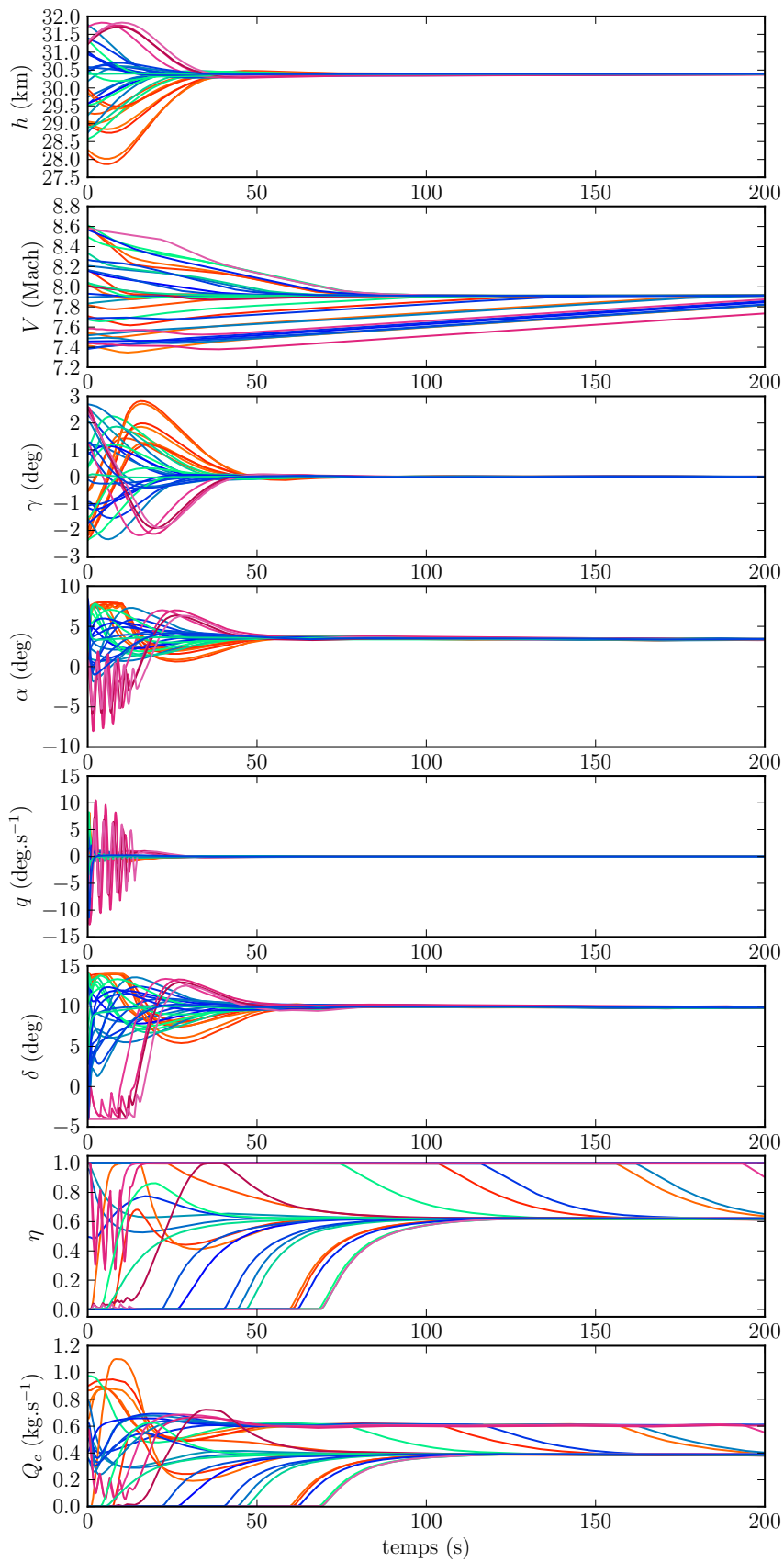


FIGURE 3.12 – Simulation : tirages Monte-Carlo sur les conditions initiales. Les trajectoires convergent toutes, mais les tirages ayant de fortes oscillations sont hors de contrôle.

En ce qui concerne la commande en vitesse, on peut vérifier que celle-ci s'effectue dans le respect de contraintes sur le taux de poussée. On remarque aussi que, au delà de 50 s de vol, le débit de carburant injecté pour un taux de poussée donné est relativement constant au cours de la trajectoire. C'est notamment une conséquence du modèle de captation d'air (2.18), dont le comportement est dominé par l'incidence α et la masse volumique de l'air $\rho(h)$. En effet, le véhicule ayant une altitude et une incidence stabilisées pour chaque tirage à partir de 50 s de vol, il est logique que le rapport Q_c/η devienne quasi-constant.

En ce qui concerne la commande en altitude, on peut vérifier que celle-ci s'effectue avec des prises d'incidences limitées. Ceci apparaît même à l'occasion de valeurs initiales particulièrement éloignées de l'équilibre, pour autant que ces dernières soient équilibrables. Cette contrainte de conception que nous posons au niveau du guidage en vue de préserver l'intégrité du véhicule est donc vérifiée par notre contrôleur.

Lorsque la pente de vitesse et l'écart d'altitude sont fortement négatives¹³, la commande introduit une prise d'incidence nécessaire pour rattraper la chute, mais en conservant celle-ci dans le domaine d'excursion autorisé. Ce cabrage corrige assez rapidement la chute, jusqu'à ce que la pente de vitesse soit suffisamment positive pour corriger l'altitude. On remarque dans cette situation que, pendant toute la période où la prise d'incidence sature, le braquage des gouvernes est amené près de sa limite d'excursion.

Il y a également des configurations qui sont en limite d'être équilibrées par le véhicule. Celles-ci¹⁴ amènent les gouvernes en état de saturation, situation dans laquelle le véhicule évolue en boucle ouverte, avec de fortes oscillations sur la dynamique de rotation. Cette situation — ici temporaire — est périlleuse pour le véhicule, mais son étude — relevant de la caractérisation du domaine d'équilibrabilité et de sécurité du véhicule — sort du périmètre de nos travaux. Nous pouvons néanmoins faire l'observation suivante. Dans la mesure où l'incidence et le braquage des gouvernes sont très liées lorsque le véhicule est à l'équilibre, limiter au sein du contrôleur les prises d'incidences augmente le domaine d'excursion nominale du véhicule commandé.

3.7.5 Sensibilité aux paramètres de modélisation

La Figure 3.13 montre le résultat de différents tirages en faisant varier des paramètres de modélisation pour une consigne de vol en palier stabilisé à Mach 8 à l'altitude de 30 km. Les paramètres de modélisation variables sont les suivants :

- le coefficient de traînée ;
- le coefficient de portance ;
- le coefficient de moment aérodynamique ;
- la surface d'air captée ;
- l'impulsion spécifique du moteur.

Chacun des paramètres subit une variation de $\pm 30\%$. Il ne s'agit pas ici d'évaluer l'ensemble des possibilités de configurations possibles qui peuvent affecter le fonctionnement du véhicule. Le volume de configurations balayé ici est simplement de nature à illustrer les propriétés de robustesse du contrôleur.

Comme dans le cas précédent, un tirage orthogonal est réalisé. L'espace est découpé en hypercubes, puis un point est tiré dans chaque hypercube, pour un total de 32 tirages.

On remarque en premier lieu que la plupart des solutions convergent vers un équilibre proche de la consigne. Ces trajectoires convergent chacune vers un équilibre stable, défini par une altitude et une pente de vitesse.

Les quelques trajectoires qui ne convergent pas vers la consigne, divergent au niveau de la vitesse de croisière. En fait, il apparaît clairement que celle-ci sature totalement la poussée disponible. Le véhicule n'est donc potentiellement pas équilibrable au point de vol commandé. C'est une situation qui peut logiquement arriver du fait du tirage Monte-Carlo auquel nous avons procédé : le véhicule peut effectivement se trouver de façon concurrente avec une traînée augmentée, une poussée diminuée, voire même avec une

13. Cette situation est observable sur les tirages orangés.

14. Cette situation est observable sur les tirages violacés.

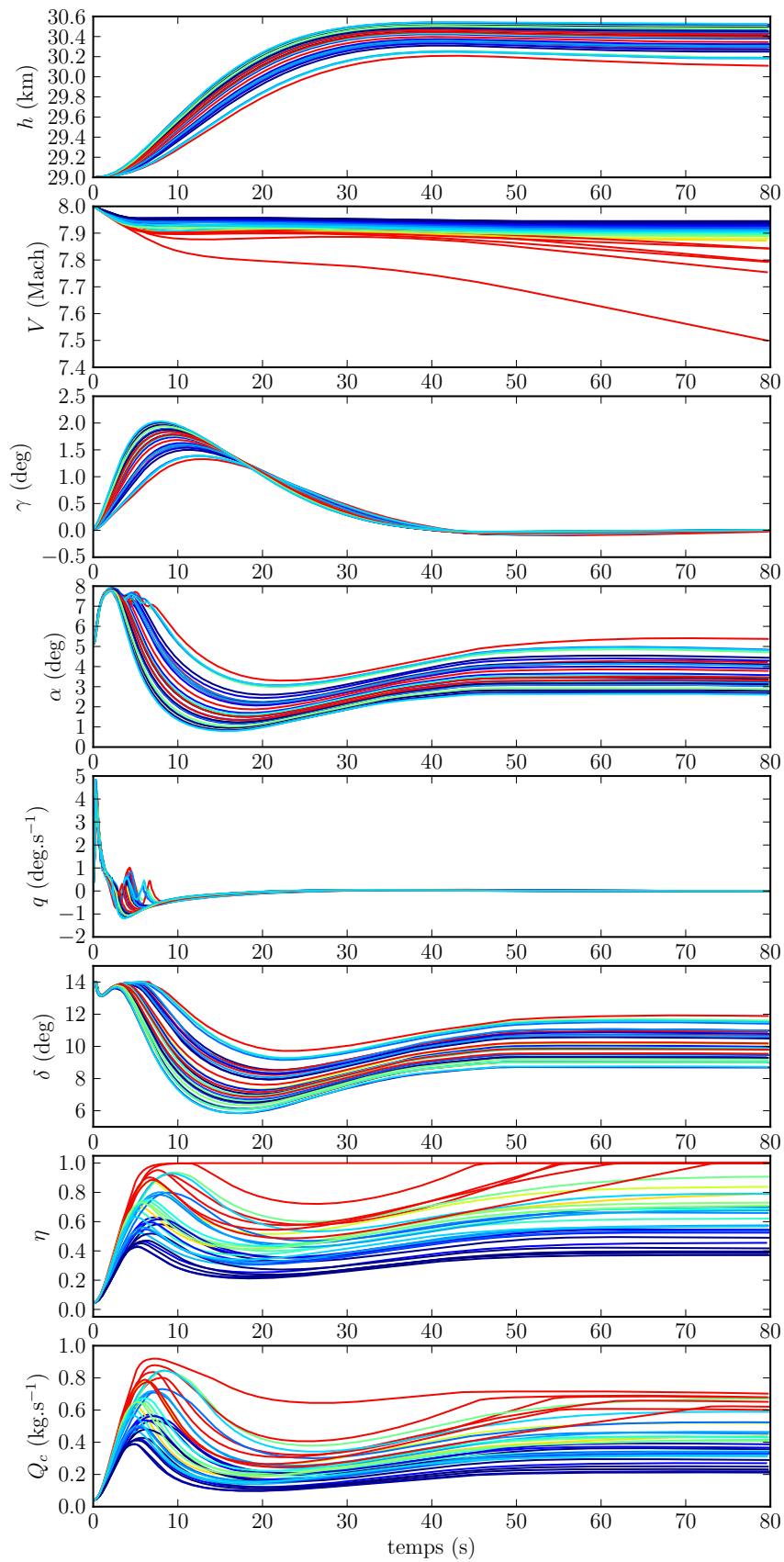


FIGURE 3.13 – Simulation : tirages Monte-Carlo sur les paramètres de modélisation. Les tirages qui ne convergent pas sont ceux qui ne sont pas équilibrables : à poussée maximale, le véhicule décélère en deçà de la consigne.

portance réduite impliquant des prises d'incidence plus élevées pour équilibrer l'altitude. Comme nous l'avons rappelé, l'objectif de ce test n'est pas de passer au crible un ensemble de scénarios probables mais d'illustrer les propriétés de robustesse du contrôleur.

On remarque ensuite une dispersion sensiblement élevée des équilibres stabilisés. Ainsi, l'altitude et la vitesse présentent une erreur de poursuite par rapport à la consigne. Ce fait est caractéristique d'un système commandé de façon « proportionnelle », lorsqu'apparaissent des erreurs de modélisation. Ce manque de robustesse a motivé les développements faits au Chapitre 5, dont l'objet est l'étude de la régulation asymptotique robuste à l'aide d'un terme intégral supplémentaire ajouté à notre commande.

En fait, des erreurs de modélisation sont déjà présentes dans notre cas, du fait de la réduction de complexité entre le modèle de comportement et le modèle de simulation. Il n'y a donc pas besoin de faire varier artificiellement les paramètres pour faire apparaître des erreurs de poursuite (voir sous-section 3.7.2). Mais cette variation supplémentaire met en évidence le phénomène à plus large échelle.

3.7.6 Désamorçage d'entrée d'air

Présentation

Nous avons insisté dans le Chapitre 2 sur l'importance de piloter le véhicule en tenant compte d'une limite sur la combustion, donc sur la poussée, afin de minimiser les risques de désamorçage d'entrée d'air. Cependant, inspiré par les travaux de Bolender et al. (2009), il semble intéressant de tester notre loi de commande dans le contexte décrit par les auteurs. L'hypothèse est donc faite qu'un désamorçage se produit pendant le vol de croisière. Pendant un tel désamorçage, on peut supposer qu'il n'y aura pas ou peu de combustion, résultant en une perte de poussée. On peut également espérer qu'en commandant le véhicule sur une trajectoire dégradée dédiée, alors on pourrait hypothétiquement réamorcer l'entrée d'air pour redémarrer une croisière nominale.

C'est cette capacité à conserver la commandabilité du véhicule qu'on souhaite illustrer ici. Bien sûr, nous ne disposons d'aucune expérience qui nous permette d'établir avec certitude les conséquences d'un tel scénario, l'intérêt est plutôt de mettre en évidence des comportements possibles du véhicule dans ce cas de figure.

Modélisation

Le désamorçage est provoqué par la progression en avant des chocs internes à la propulsion, due à une élévation de la pression en aval. En fait le superstatoréacteur possède un dégagement de chaleur maximal, au delà duquel la combustion peut générer une obstruction, dite « obstruction thermique », pouvant provoquer un blocage de l'écoulement amont. Dans ce cas, l'air ne pénètre plus dans le moteur : l'entrée d'air se désamorce.

Il résulte en une augmentation significative de la pression d'entrée d'air, de sorte que le véhicule subit une augmentation de portance appliquée sur l'avant du corps, ce qui lui relève le nez. La portance et la traînée sont donc augmentées de façon significative, provoquant une impulsion forte sur la dynamique longitudinale du véhicule. Par ailleurs, des simulations numériques présentes dans Bolender et al. (2009) laissent supposer, du fait la modification de l'écoulement autour du véhicule, une réduction significative de $\frac{\partial C_m}{\partial \delta}$ ainsi qu'une réduction (voir une inversion locale) de $\frac{\partial C_m}{\partial \alpha}$. Cette dernière a pour effet de réduire la marge de stabilité du mode rapide, alors que la réduction de $\frac{\partial C_m}{\partial \delta}$ a plutôt pour effet de réduire le domaine d'équilibrabilité de l'appareil.

Les effets pris en compte dans notre simulation sont donc les suivants :

- extinction totale de la propulsion ;
- augmentation globale de la portance de 13% ;
- augmentation globale de la traînée de 23% ;
- décalage négatif du couple ;
- réduction du $\frac{\partial C_m}{\partial \alpha}$ de 45% ;
- réduction du $\frac{\partial C_m}{\partial \delta}$ de 45%.

Les chiffres sont choisis pour illustrer deux principaux comportements à attendre en simulation : la perte de l'équilibrabilité de la dynamique de rotation, puis celle du mode phugoïde.

Simulation

La simulation est présentée Figure 3.14. Les cinquante premières secondes correspondent à un vol normal initié depuis un point proche de l'équilibre, le désamorçage intervient à la cinquantième seconde.

Dans une première phase, l'engin est perturbé du fait de l'impulsion de force violente reçue au niveau de l'entrée d'air. Il n'équilibre plus son incidence à cause de la limite d'excursion de gouvernes, alors saturées. Du fait de cette saturation, des oscillations rapides (0,2 Hz) se produisent, ce qui est la réponse normale de ce type de véhicule, en boucle ouverte. Par ailleurs, remarquons que pendant cette période, le véhicule perd de l'altitude qu'il recouvrera une fois équilibré. Ce recouvrement pourrait tout à fait ne pas être possible, en fonction des marges prévues à la conception aérodynamique de l'engin.

Dans une seconde phase, on constate essentiellement l'effet de la perte de vitesse. Celle-ci induit une augmentation progressive de l'incidence nécessaire à l'équilibre. Après trois cent cinquante secondes environ, le contrôleur sature la consigne d'incidence, parce que la vitesse devient trop faible pour permettre l'équilibrage de l'engin à cette altitude. À supposer que l'incidence soit maintenue à son maximum, la suite devrait être une descente phugoïde amortie, mais notre modèle de simulation n'est pas considéré réaliste pour des valeurs de Mach inférieur à 3.

Globalement, on peut donc considérer que le contrôleur atténue correctement le phénomène, du fait de sa robustesse. Le principal phénomène qui pourrait le rendre manifestement défectueux serait d'inverser soit le signe de C_{l_a} , soit le signe de $\frac{\partial C_m}{\partial \delta}$. Ces deux paramètres sont essentiels car ils déterminent le *sens* de la commande. En revanche, en fonction de l'effet du désamorçage sur l'aérodynamique du véhicule, il se peut tout à fait que la consigne sorte du domaine équilibrable ; cette situation est même inévitable à long terme, du fait de la perte de vitesse induite par la perte de la propulsion.

Pour pallier les problèmes induits par le désamorçage d'entrée d'air, il conviendrait probablement de détecter la situation de désamorçage ; corriger en urgence la consigne du pilote pour rendre la trajectoire suivie équilibrable ; puis corriger la consigne de guidage pour placer le véhicule sur une hypothétique trajectoire qui soit propice au redémarrage de l'entrée d'air. Ces décisions devant raisonnablement être déléguées à un système de navigation plutôt qu'un simple pilote.

3.8 Conclusion

Ce Chapitre détaille la première approche suivie au cours de nos travaux dédiés à l'étude de la synthèse de commande des HSV sur une trajectoire de croisière, à partir des considérations de modélisation effectuées au Chapitre 2. Notre méthodologie s'appuie sur une analyse du mode phugoïde, faite sous des hypothèses que nous avons discutées. Le point de vue alors adopté est de considérer le vol comme un mouvement dissipatif, dans le but de réaliser une commande gradient.

Les commandes gradients offrent de très bonnes propriétés de robustesse, sans avoir recours à des méthodes de type « grand gain ». Nous arrivons à ce résultat du fait que ce type de commande tire fortement parti de la structure de notre modèle. En effet, là où beaucoup de lois de commande cherchent en fait à dominer ou annuler la totalité du comportement (non linéaire) de dérive des modèles, nous pensons qu'il y a un intérêt à comprendre et exploiter les propriétés de notre modèle — en particulier la dissipativité de la phugoïde. Par ailleurs, et contrairement à une logique qui mène généralement à des systèmes commandés à dynamique linéaires, il apparait que la non-linéarité du système commandé est une *propriété clé* à exploiter dans la commande afin d'obtenir des résultats de stabilité sous contraintes d'état ou d'entrées.

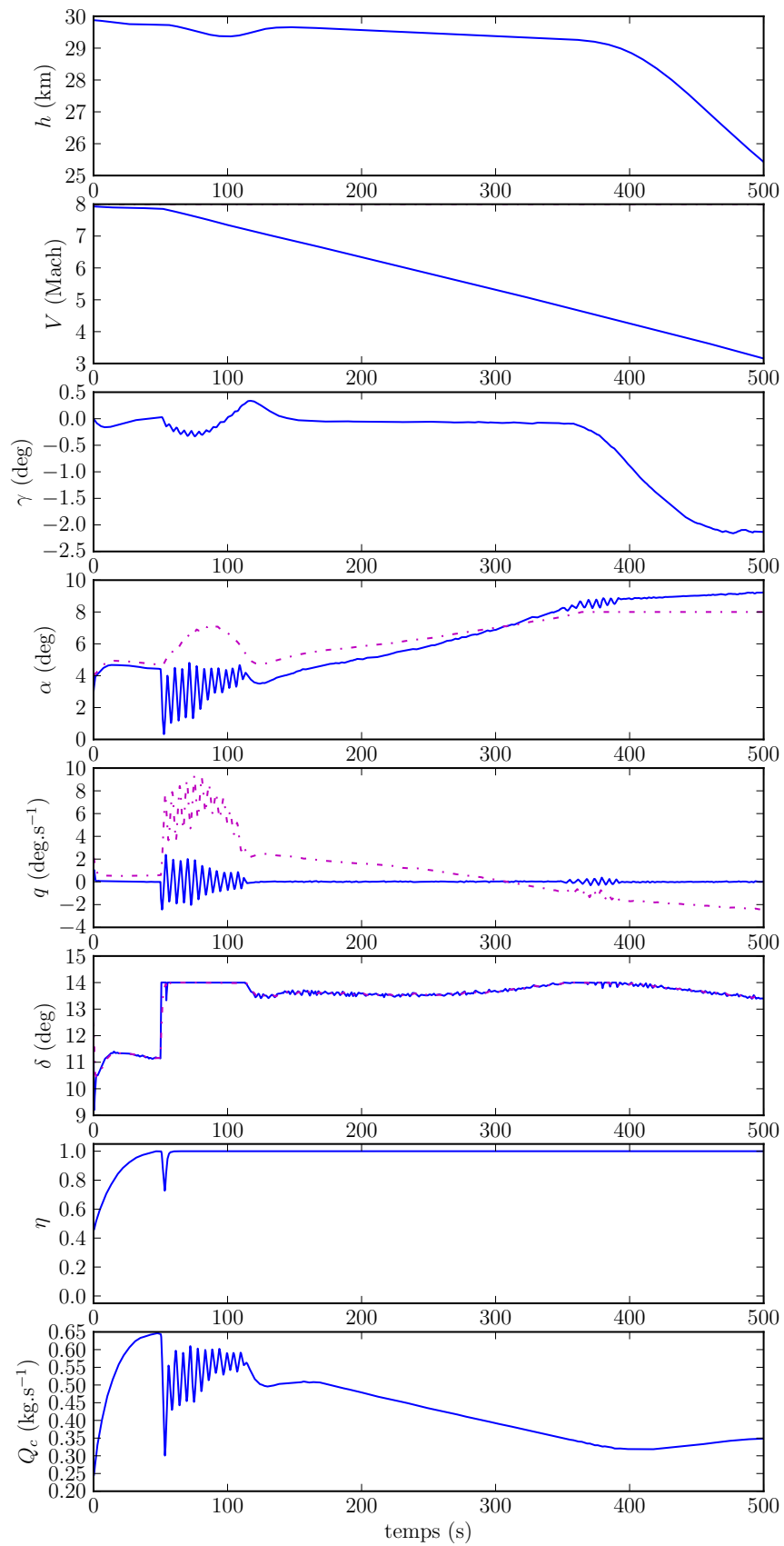


FIGURE 3.14 – Simulation : scénario hypothétique de désamorçage d'entrée d'air.

Ainsi, le résultat à ce stade est une loi de commande non linéaire qui permet d'assurer une propriété de stabilité sur un domaine qui couvre le domaine de vol du véhicule. Cette loi de commande agit directement sur les actionneurs de « bas niveau » du véhicule, ainsi elle accomplit simultanément l'effort de guidage et celui de pilotage, en poursuivant le seul objectif de stabilisation d'un vol de croisière.

Des simulations réalisées dans différentes configurations illustrent les qualités et les limites de la loi de commande proposée. Après avoir soumis notre véhicule à une trajectoire de test, nous avons mis en œuvre des tirages pour différentes situations d'initialisation et de dispersion de modèle afin de tester un maximum de situations possibles. Nous avons également testé le fonctionnement du contrôleur dans un hypothétique scénario de désamorçage d'entrée d'air. Le contrôleur fonctionne selon nous de façon satisfaisante dans l'ensemble des configurations testées.

Pour arriver à ce résultat, une part de la complexité de la propulsion, et une approche globale de la structure de l'aérodynamique du véhicule sont directement prises en compte au niveau du contrôleur. Les principales difficultés que nous souhaitions prendre en compte étaient alors au niveau de la robustesse de la commande, du respect de contraintes physiques, de l'embarquabilité de la commande, et du sens physique qu'on peut lui donner.

Le problème de robustesse posé par les incertitudes de modélisation

La façon dont nous avons choisi de rendre robuste notre contrôleur consiste en une désensibilisation de notre loi de commande par rapport aux incertitudes, en réduisant tant que possible le nombre de paramètres de modélisation embarqués dans la loi de commande. C'est vrai en particulier pour la loi intermédiaire de guidage (3.57), qui assure la stabilisation de l'équilibre du mode phugoïde sans reposer sur une connaissance totale des phénomènes en jeu.

Le respect des contraintes sur l'état et les entrées du véhicule

La commande est effectuée le long des trajectoires en respectant les bornes sur l'incidence et sur la poussée. Nous ne disposons pas à ce jour de résultat de stabilité semi-globale respectant des bornes sur les gouvernes, mais un premier pas est franchi dans la mesure où il est possible, en saturant l'incidence, de vérifier que la consigne intermédiaire d'attitude demeure dans le domaine équilibrable du véhicule.

L'embarquabilité d'une commande non linéaire

La loi de commande obtenue reste assez simple comparée aux propriétés qu'elle offre, ce qui est important pour permettre d'embarquer le contrôleur en pratique. De plus, ce contrôleur offre beaucoup de degrés de liberté, ce qui permet de façonner localement son comportement, par exemple en l'identifiant localement à une structure de contrôleur dont les gains seraient synthétisés par optimisation. En revanche, la commande proposée nécessite une mesure complète de l'état.

La question du sens physique donné à la commande

À l'image de la façon dont les pilotes humains commandent un vol de croisière, la méthode par rétropropagation (*backstepping*) associée à la consigne d'incidence exploite une « hiérarchie » de contrôle donnée par l'enchaînement *gouvernes* → *tangage* → *attitude* → *pente de vitesse* → *altitude*. Cette hiérarchie, intuitive au regard de la mécanique du vol, se traduit dans notre modèle par une structure triangulaire.

3.9 Perspectives

À ce stade, cette loi de commande possède trois principales limites.

D'une part, nous devons étendre cette stratégie de commande à un vol à six degrés de liberté (DDL). Nous verrons que cette extension peut être réalisée au niveau du

guidage, avec la contrainte imposée d'un vol non dérapé, inhérente à la classe de véhicule considérée. Cette extension est examinée en détail dans le Chapitre 4.

D'autre part, en dépit des propriétés de robustesse obtenues, la commande de notre mode phugoïde n'assure pas une convergence asymptotique des signaux mesurés vers la consigne désirée. Ce manque de robustesse quantitative a donc motivé les développements faits au Chapitre 5 dans le but de pallier ce manque à l'aide d'un terme intégral supplémentaire ajouté à notre commande.

Enfin, le *backstepping* tel que pratiqué ici réintroduit une certaine complexité, au travers des termes de dérivées, et ceux-ci reposent sur des éléments de modèle mal connus. De plus, notre pilote ne tire pas profit de la potentielle dissipativité de la dynamique de rotation, et de ce fait il ne permet pas, tel que nous l'employons, de conclure sur le comportement du véhicule, sous une contrainte de saturation des gouvernes. Or ce résultat important nous semble atteignable dans le cas d'un véhicule disposant d'une marge statique garantissant la stabilité en boucle ouverte. En effet, en fonction du dimensionnement relatif des gouvernes par rapport au véhicule considéré, si celui-ci permet de perturber singulièrement le modèle, nous devrions pouvoir synthétiser une commande hiérarchique exploitant la dissipativité de la dynamique de rotation. Cette étude reste cependant à mener.

Par ailleurs, poursuivre cette étude sur un modèle de comportement toujours plus proche de la réalité présente un intérêt théorique pour l'étude du vol et un intérêt pratique pour la synthèse de commande. Parmi les extensions possibles pour des travaux futurs, nous pouvons notamment suggérer les points suivants.

- Reprendre l'étude et la synthèse de loi de commande avec une hypothèse d'atmosphère hétérogène, c'est-à-dire revenir sur l'Approximation 3.1. L'atmosphère a en effet une influence majeure sur les propriétés du vol au niveau global, et sa prise en compte est nécessaire pour caractériser au plus juste le domaine de stabilité du véhicule.
- Reprendre la synthèse en travaillant à masse variable (reconsidérer l'Approximation 2.9). La variation de masse joue un rôle majeur dans l'évolution de l'énergie du véhicule, et sa prise en compte au niveau du guidage devrait améliorer l'efficacité énergétique de la commande.
- Reprendre la synthèse en considérant une poussée non alignée avec le vecteur vitesse (réviser l'Approximation 2.5). Il semble que des configurations de véhicules ayant une poussée fortement asymétrique peuvent présenter un intérêt en terme de performance aéro-propulsive. Or, la prise en compte d'une telle poussée peut constituer une extension directe de la synthèse déjà réalisée.
- Reprendre l'étude et la synthèse en considérant une poussée disponible variable en fonction du Mach (revenir sur l'Approximation 2.4). En pratique, la poussée maximale disponible s'effondre avec le Mach, même en supposant une compensation *via* l'adaptation de l'entrée d'air. La prise en compte de ce phénomène devrait constituer une extension directe de la synthèse déjà réalisée.

Il semble par ailleurs que ces améliorations dépendent plus en détails des catégories et modèles des véhicules considérés, et soient par conséquent difficiles à développer ou à appliquer sur un modèle générique.