

Groupe symétrique infini et processus ponctuels déterminantaux

Ce chapitre est consacré à deux thèmes qui ne joueront pas un rôle crucial dans l'exposé des résultats que nous avons obtenus, mais qui permettront une compréhension plus subtile des dits résultats : la théorie des représentations du **groupe symétrique infini** (§4.1), et la théorie des **mesures de Schur** (§4.2). Si $n < N$ sont deux entiers, on peut plonger le groupe symétrique \mathfrak{S}_n dans \mathfrak{S}_N en le faisant agir sur les n premiers entiers de $\llbracket 1, N \rrbracket$. On dispose ainsi d'une famille dirigée de morphismes de groupes $(i_{n,N})_{n \leq N}$, et la limite inductive

$$\mathfrak{S}_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{S}_n$$

correspondant à cette famille consiste en les permutations de \mathbb{N}^* qui déplacent un nombre fini d'entiers. Les caractères irréductibles de ce groupe infini ont été déterminés dans les années 60 (cf. [Tho64]), et cette théorie a été précisée par les travaux de Kerov, Olshanski et Vershik ([KV81, Ols90, KOV04]) et par la thèse d'Okounkov ([Ok097a]). La première partie du chapitre est consacrée à un exposé succinct de cette théorie. L'analyse harmonique sur le groupe \mathfrak{S}_∞ conduit à l'étude des z -mesures, qui sont un particulier de mesures de Schur (§4.2). Ces mesures de probabilité portent sur l'ensemble des diagrammes de Young, et on peut leur associer des processus ponctuels à corrélations déterminantales ([Ok003a, Ok003b, OR03, Bor10]). De plus, la plupart des mesures issues de la théorie des représentations des groupes symétriques ou de leurs algèbres d'Hecke sont des mesures de Schur. Ainsi, les résultats de la section 4.2 s'appliqueront aux mesures de Plancherel des groupes symétriques (chapitre 5), aux mesures de Plancherel des groupes linéaires finis (chapitre 6), aux mesures des algèbres d'Iwahori-Hecke (chapitre 7) et aux mesures de Schur-Weyl (chapitre 10).

4.1 Représentations du groupe symétrique infini

Comme $G = \mathfrak{S}_\infty$ est un groupe infini, sa théorie des représentations doit prendre en compte les représentations unitaires $U : G \rightarrow \mathcal{U}(H)$ sur des espaces de Hilbert de dimension infinie. Fixons plus généralement un groupe G infini, séparable et localement compact. L'**algèbre de von Neumann** $\mathcal{M}(G, U)$ associée à une représentation unitaire de G est la clôture pour l'une des topologies faibles¹ de $\mathcal{L}(H)$ de l'algèbre engendrée par les $U(g)$, $g \in G$. On dit

1. La clôture d'une sous- $*$ -algèbre de $\mathcal{L}(H)$ est la même pour toutes les topologies suivantes : topologie faible d'opérateur, topologie ultra-faible, topologie ultra-forte, topologie forte d'opérateur, topologie $*$ -forte d'opérateur

que la représentation est irréductible si H n'admet pas de sous-espace fermé H' non trivial et stable par G ; et que c'est une représentation facteur si $\mathcal{M}(G, U)$ est un facteur, c'est-à-dire une algèbre de von Neumann de centre trivial. Toute algèbre de von Neumann séparable s'écrit de manière unique comme intégrale directe de facteurs, et d'autre part, il est bien connu que les facteurs de von Neumann sont classifiés en trois types I, II et III. On peut montrer que :

1. Une représentation facteur de type I s'écrit de manière essentiellement unique comme intégrale directe de représentations irréductibles.
2. À l'inverse, une représentation facteur de type II ou III admet deux décompositions en intégrales directes de représentations irréductibles telles qu'aucune composante de la première décomposition n'apparaisse dans la seconde.

Le groupe G est dit **modéré** s'il n'admet que des représentations facteurs de type I; dans le cas contraire, on parle de groupe **sauvage**. Un résultat majeur de la théorie d'Harish-Chandra est le caractère modéré des groupes de Lie semi-simples, cf. [Var89] — ce résultat est également valable pour les groupes semi-simples p -adiques (Bernstein) et les groupes algébriques réels (Dixmier). Au contraire, la plupart des groupes infinis discrets sont sauvages. Ainsi, un groupe infini discret est modéré si et seulement s'il est virtuellement abélien, et si toutes ses classes de conjugaison sauf $\{e_G\}$ sont infinies, alors :

1. La représentation régulière gauche de G sur $\ell^2(G)$ est un facteur de type II_1 .
2. La représentation régulière bilatère de $G \times G$ sur $\ell^2(G)$ est irréductible.

En particulier, \mathfrak{S}_∞ est un groupe sauvage, et la classification de toutes les représentations de \mathfrak{S}_∞ n'est pas un objectif raisonnable, puisqu'on ne dispose pas de décomposition unique en représentations irréductibles.

Un objectif plus raisonnable est la classification de tous les **facteurs finis** de \mathfrak{S}_∞ , c'est-à-dire les représentations unitaires de \mathfrak{S}_∞ dont l'algèbre de von Neumann est un facteur qui admet une trace fidèle finie, *i.e.*, telle que $\tau(1) < \infty$. À renormalisation près, on peut supposer $\tau(1) = 1$, et le facteur fini est alors entièrement déterminé par l'application $\tau \circ U : \mathfrak{S}_\infty \rightarrow \mathbb{C}$. Cette application est ce qu'on appelle un **caractère** de $G = \mathfrak{S}_\infty$, c'est-à-dire une application $\chi : G \rightarrow \mathbb{C}$ qui est normalisée, centrale et définie positive :

$$\begin{aligned} \chi(1) = 1 \quad ; \quad \forall g, h, \chi(hgh^{-1}) = \chi(g) \quad ; \\ \forall (g_1, \dots, g_n), (\chi(g_i g_j^{-1}))_{i,j} \text{ est hermitienne et définie positive.} \end{aligned}$$

On parle de **caractère virtuel** si l'on ôte la condition de positivité; d'autre part, un caractère est dit **irréductible** s'il n'est pas barycentre non trivial de caractères. Si $(U, \mathcal{L}(H), \tau)$ est un facteur fini de \mathfrak{S}_∞ , alors $\chi = \tau \circ U$ est un caractère irréductible, et la classification des facteurs finis de \mathfrak{S}_∞ se ramène donc à celle des caractères irréductibles.

Ce problème a été résolu par E. Thoma (voir [Tho64]), qui a montré qu'on pouvait paramétrer l'ensemble des caractères irréductibles par un simplexe de dimension infinie. S. Kerov et A. Vershik ont ensuite retrouvé la théorie de Thoma en étudiant l'asymptotique des caractères

et topologie $*$ -ultra-forte. On renvoie à [Kir94] pour une présentation de la théorie des représentations des groupes infinis, et au monumental [Tak79] pour la théorie générale des algèbres de von Neumann.

des groupes finis \mathfrak{S}_n , cf. [KV81]. Fixons un caractère virtuel χ de \mathfrak{S}_∞ . Pour tout entier n , la restriction χ_n de χ au groupe \mathfrak{S}_n est une fonction centrale vérifiant $\chi(\text{id}) = 1$. Cette restriction est donc un barycentre des caractères irréductibles χ^λ :

$$\forall n, \chi_n = \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_n} M_{\chi,n}(\lambda) \chi^\lambda \quad \text{avec} \quad \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}_n} M_{\chi,n}(\lambda) = 1.$$

De plus, comme toutes les restrictions proviennent d'un même caractère de \mathfrak{S}_∞ , les χ_n vérifient la condition de compatibilité $\text{Res}_{\mathfrak{S}_n}^{\mathfrak{S}_{n+1}}(\chi_{n+1}) = \chi_n$, d'où :

$$\forall \lambda \in \mathcal{Y}, M_{\chi,n}(\lambda) = \sum_{\lambda \nearrow \Lambda} \frac{\dim \lambda}{\dim \Lambda} M_{\chi,n+1}(\Lambda).$$

On dit que les mesures $(M_{\chi,n})_{n \in \mathbb{N}}$ forment un **système cohérent de mesures de probabilité** sur le graphe de Young $\mathcal{Y} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{Y}_n$. En d'autres termes, la fonction $\phi_\chi(\lambda) = M_\chi(\lambda) / \dim \lambda$ est **harmonique** sur le graphe de Young de la figure 1.2, c'est-à-dire que

$$\forall \lambda \in \mathcal{Y}, \phi_\chi(\lambda) = \sum_{\lambda \nearrow \Lambda} \phi_\chi(\Lambda).$$

Réciproquement, toute fonction harmonique sur \mathcal{Y} donne une famille $(\chi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de caractères compatibles entre eux, donc un caractère virtuel de \mathfrak{S}_∞ . De plus, le caractère est positif si et seulement si les poids $M_\chi(\lambda)$ sont tous positifs, d'où une bijection :

$$\left\{ \text{caractères (positifs) de } \mathfrak{S}_\infty \right\} \leftrightarrow \left\{ \text{fonctions harmoniques positives sur le graphe } \mathcal{Y}, \text{ et telles que } f(\emptyset) = 1 \right\}.$$

Notons $\mathcal{H}^+(\mathcal{Y})$ cet ensemble de fonctions harmoniques ; il est convexe et compact pour la topologie de la convergence simple. Par le théorème de représentation intégrale de Choquet, toute fonction de $\mathcal{H}^+(\mathcal{Y})$ s'écrit comme barycentre intégral des points extrémaux du convexe ; nous noterons Ω leur ensemble. Cet ensemble peut être vu comme la **frontière de Martin** du graphe de Young : ainsi, il existe une compactification $X = \mathcal{Y} \sqcup \partial \mathcal{Y} \hookrightarrow \mathcal{H}^+(\mathcal{Y})$ du graphe de Young à base de noyaux de Martin (cf. [KOO97]), et cette compactification est telle que $\partial \mathcal{Y} = \Omega$.

Théorème 4.1 (Simplexe de Thoma, [Tho64, KV81]). *L'ensemble Ω s'identifie au simplexe de dimension infinie constitué des couples*

$$\omega = (\alpha = (\alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_r \geq \dots \geq 0), \beta = (\beta_1 \geq \dots \geq \beta_s \geq \dots \geq 0))$$

de suites positives décroissantes telles que $\gamma = 1 - \sum_{i=1}^{\infty} (\alpha_i + \beta_i) \geq 0$. Si ϕ est une fonction harmonique positive sur \mathcal{Y} , elle s'écrit sous forme intégrale

$$\phi(\lambda) = \int_{\Omega} s_\lambda(\omega) m_\phi(d\omega),$$

avec m_ϕ mesure de probabilité sur Ω , et $s_\lambda(\omega)$ fonction de Schur généralisée définie par la spécialisation de Λ :

$$p_1(\omega) = 1 \quad ; \quad p_{n \geq 2}(\omega) = p_n(\alpha - (-\beta)) = \sum_{i \geq 1} (\alpha_i)^n + (-1)^{n-1} \sum_{i \geq 1} (\beta_i)^n$$

On renvoie à [KOV04, théorème 9.6.1] et aux articles originaux [Tho64, KV81] pour des détails sur la preuve de ce résultat. Dans le contexte précédent, le caractère virtuel χ a donc pour restrictions :

$$\begin{aligned}\chi_n(\sigma_\mu \in \mathfrak{S}_n) &= \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \phi_\chi(\lambda) (\dim \lambda) \chi^\lambda(\mu) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} \left(\int_{\Omega} s_\lambda(\omega) \zeta^\lambda(\mu) \mu_\chi(d\omega) \right) \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{\lambda \in \mathcal{P}_n} s_\lambda(\omega) \zeta^\lambda(\mu) \right) m_\chi(d\omega) = \int_{\Omega} p_\mu(\omega) m_\chi(d\omega).\end{aligned}$$

En particulier, les caractères irréductibles, qui correspondent aux points extrémaux du convexe compact $\mathcal{P}(\Omega) = \mathcal{H}^+(\mathcal{Y})$, sont paramétrés par le simplexe de Thoma Ω , et s'écrivent

$$\chi^\omega(\mu) = p_\mu(\omega) = \prod_{k \geq 2} \left(\sum_{i \geq 1} (\alpha_i)^k + (-1)^{k-1} \sum_{i \geq 1} (\beta_i)^k \right)^{m_k(\mu)}.$$

Ils sont donc multiplicatifs, c'est-à-dire que si σ et τ sont deux permutations à supports disjoints, alors $\chi^\omega(\sigma\tau) = \chi^\omega(\sigma) \chi^\omega(\tau)$. Cette propriété est à rapprocher de la proposition 3.5.

Le théorème de Thoma est en réalité très naturel si l'on souhaite réaliser Ω comme frontière « géodésique » de \mathcal{Y} . Pour réaliser cette compactification alternative, on plonge \mathcal{Y} dans $\Omega \times [0, 1]$ par

$$\omega_n : \lambda \in \mathcal{Y}_n \mapsto \left\{ \left(\frac{a_1}{n}, \dots, \frac{a_d}{n}, 0, \dots ; \frac{b_1}{n}, \dots, \frac{b_d}{n}, 0, \dots \right), \frac{1}{n} \right\}$$

où les a_i et les b_i sont les coordonnées de Frobenius de λ . Alors, si ω est un point du simplexe de Thoma et si $(\lambda^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de partitions telle que $\omega_n(\lambda^{(n)}) \rightarrow (\omega, 0)$ dans $\Omega \times [0, 1]$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \chi^{\lambda^{(n)}}(\sigma) = \chi^\omega(\sigma)$$

pour toute permutation σ . Ainsi :

Théorème 4.2 (Kerov-Vershik, [KV81, KOV04]). *Les coordonnées d'un point $\omega \in \Omega$ correspondent aux fréquences limites des coordonnées de Frobenius de partitions $\lambda^{(n)}$ telles que $\chi^{\lambda^{(n)}}$ approche χ^ω . De plus, si m est une mesure de probabilité sur Ω correspondant au caractère (positif) χ , et si $M_\chi = (M_{\chi,n})_{n \in \mathbb{N}}$ est le système cohérent de mesures de probabilité associé à χ , alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\omega_n)_* M_{\chi,n} = m$$

au sens de la convergence en loi, étant entendu que l'on identifie Ω et $\Omega \times \{0\}$.

En d'autres termes, compte tenu des propositions 4.1 et 4.2, on voit que la frontière de Martin du graphe \mathcal{Y} est aussi sa frontière géodésique ; ce phénomène est courant en analyse harmonique (cf. [BL06]).

Exemples. Considérons le point $\omega = ((0, 0, \dots), (0, 0, \dots))$. Il correspond au caractère

$$\tau(\mu) = \prod_{k \geq 2} 0^{m_k(\mu)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \mu = 1^n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le système cohérent de mesures de probabilité correspondant est celui des mesures de Plancherel, car $\tau_{|\mathfrak{S}_n}$ est la trace normalisée usuelle de $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n$. D'après le théorème 4.2, les fréquences limites des diagrammes de Young tirés aléatoirement sous la mesure de Plancherel tendent en probabilité vers 0. Ce résultat est corroboré par le théorème 3.3 : la plus grande ligne et la plus grande colonne d'un diagramme tiré sous la mesure de Plancherel sont de l'ordre de $2\sqrt{n} = o(n)$.

De même, considérons le point $\omega = ((0, 0, \dots), (1, 0, 0, \dots))$; il correspond au caractère signature

$$\varepsilon(\mu) = \prod_{\substack{k \geq 2 \\ k \equiv 0 \pmod{2}}} (-1)^{m_k(\mu)}.$$

La restriction de ε à \mathfrak{S}_n est encore la signature, donc le système cohérent de mesures de probabilité associé à ε est constitué des Dirac en les partitions 1^n , $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas particulier, les fréquences des partitions sont exactement $((0, 0, \dots), (1, 0, 0, \dots))$, et ce pour tout n .

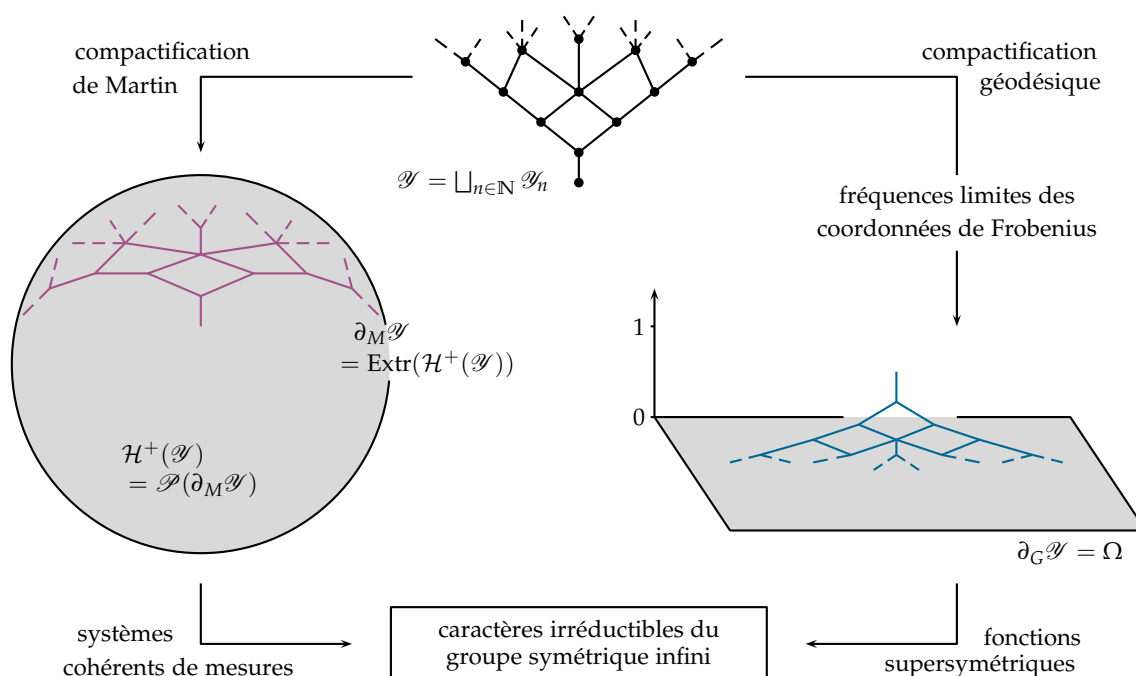


FIGURE 4.1 – La compactification de Martin et la compactification géodésique du graphe de Young mènent aux caractères irréductibles du groupe symétrique infini.

Dans la section 8.2, nous expliquerons comment ces résultats s'adaptent au cas de l'algèbre d'Hecke infinie $\mathcal{H}_{\infty, q}$, et nous en déduirons une preuve alternative de la loi des grands nombres pour la q -mesure de Plancherel. Évoquons maintenant d'autres classes de représentations du groupe symétrique infini. Dans ce qui suit, nous noterons $\mathfrak{S}_{\infty}(n)$ le sous-groupe de \mathfrak{S}_{∞} constitué des permutations qui laissent fixes les n premiers entiers ; et $\overline{\mathfrak{S}_{\infty}}$ le groupe de toutes les permutations de \mathbb{N}^* . Les sous-groupes $(\mathfrak{S}_{\infty}(n))_{n \in \mathbb{N}}$ forment un système de voisinages de l'identité pour la topologie sur \mathfrak{S}_{∞} qui correspond à la convergence simple des permutations — c'est la seule topologie raisonnable en dehors de la topologie discrète. On doit à A. Lieberman (voir [Lie72, Ols85]) une caractérisation des représentations unitaires

$U : \mathfrak{S}_\infty \rightarrow \mathcal{U}(H)$ qui sont continues pour la topologie précédemment décrite sur \mathfrak{S}_∞ , et pour la topologie faible d'opérateur sur $\mathcal{U}(H)$. Ainsi, les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) La représentation U est continue pour la topologie de la convergence simple.
- (ii) La représentation U se prolonge par continuité en une représentation de $\overline{\mathfrak{S}_\infty}$.
- (iii) La représentation U est **modérée**, i.e., $\mathcal{M}(\mathfrak{S}_\infty, U)$ est une algèbre de von Neumann de type I.
- (iv) Tout vecteur $\xi \in H$ est limite d'une suite de vecteurs $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec ξ_n laissé fixe par $\mathfrak{S}_\infty(n)$.

La dernière assertion revient à dire que $H = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} H^{\mathfrak{S}_\infty(n)}}$, et le **niveau** d'une représentation modérée est défini comme le plus petit entier N tel que $H^{\mathfrak{S}_\infty(N)} \neq \{0\}$.

Proposition 4.3 (Représentations modérées du groupe symétrique infini, [Ok097a]). *Toute représentation modérée de \mathfrak{S}_∞ s'écrit de manière unique comme somme directe (hilbertienne) de représentations modérées irréductibles. Ces représentations irréductibles sont indexées par tous les diagrammes de Young de $\mathcal{Y} = \bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{Y}_n$, et de plus, la k -ième puissance tensorielle de la représentation modérée « canonique »*

$$\mathfrak{S}_\infty \rightarrow \mathcal{U}(\ell^2(\mathbb{N}^*))$$

par permutations des coordonnées met en jeu tous les diagrammes de Young de poids compris entre 1 et k . En particulier, la représentation canonique $\mathfrak{S}_\infty \rightarrow \mathcal{U}(\ell^2(\mathbb{N}^*))$ correspond à la partition (1) et est modérée irréductible, de type I_∞ .

Dans un contexte d'analyse harmonique non commutative, la proposition 4.3 rapproche $K = \mathfrak{S}_\infty$ des groupes topologiques compacts, puisqu'on dispose d'une décomposition en sommes d'irréductibles pour toute représentation modérée. Partant, il est naturel d'étudier les représentations de **paires de Gelfand** (G, K) avec $\mathfrak{S}_\infty = K \subset G$. Ces paires de groupes discrets peuvent être caractérisées par la propriété suivante : si $U : G \rightarrow \mathcal{U}(H)$ est une représentation unitaire irréductible de G telle que $H^K \neq \{0\}$ (auquel cas on parle de **représentation sphérique**), alors H^K est de dimension 1. Autrement dit, la multiplicité de la représentation triviale de K dans la restriction d'une représentation irréductible de G est toujours² 0 ou 1.

Exemple. Compte tenu du théorème de branchement 1.4, $\mathfrak{S}_n \subset \mathfrak{S}_{n+1}$ est une paire de Gelfand forte pour tout entier n , cf. [OV04, §2].

On appelle **représentation admissible** d'une paire de Gelfand (G, K) une représentation unitaire $U : G \rightarrow \mathcal{U}(H)$ telle que $\text{Res}_K^G(U)$ soit modérée. Ces représentations admissibles s'écrivent de manière unique comme intégrales directes de représentations admissibles irréductibles, et pour $K = \mathfrak{S}_\infty$, elles forment la troisième classe de représentations pour lesquelles des résultats de classification sont connus. Ainsi, dans [Ols90, Ok097a], diverses paires de Gelfand $\mathfrak{S}_\infty \subset G$ sont décrites. La plus naturelle est

$$G = \mathfrak{S}_\infty \times \mathfrak{S}_\infty \quad ; \quad K = \text{diag}(G) = \mathfrak{S}_\infty,$$

et les représentations admissibles de cette paire sont exactement celles qui s'étendent par continuité au groupe (modéré, non localement compact)

$$\overline{G} = \{(\sigma, \tau) \in \overline{\mathfrak{S}_\infty} \times \overline{\mathfrak{S}_\infty} \mid \sigma\tau^{-1} \in K = \mathfrak{S}_\infty\}.$$

2. On parle de **paire de Gelfand forte** si l'on a cette propriété de multiplicité simple pour toutes les représentations irréductibles de K , et pas seulement la représentation triviale.

D'autre part, ces représentations admissibles sont stables par somme directe, produit tensoriel, et restriction ou induction à partir des sous-groupes $\mathfrak{S}_\infty(n) \times \mathfrak{S}_\infty(n)$.

Proposition 4.4 (Représentations admissibles du groupe symétrique infini, [Ok097a]). *On identifie un point $\omega = (\alpha, \beta)$ du simplexe de Thoma à une partie $\mathcal{I}(\omega) = \alpha \cup -\beta \cup \{0\}$ de l'intervalle $[-1, 1]$, avec pour chaque point x de cette partie une multiplicité $n(x) \in \llbracket 1, \infty \rrbracket$. Une distribution de Young Λ adaptée à un point $\omega \in \Omega$ est la donnée de diagrammes de Young $\lambda(x)$ pour tout $x \in \mathcal{I}(\omega)$, de telle sorte que $|\Lambda| = \sum_{x \in \mathcal{I}(\omega)} \lambda(x)$ soit fini, voir la figure 4.2. Alors, une représentation admissible irréductible de (G, K) de niveau N est entièrement déterminée par la donnée d'un point $\omega \in \Omega$ et de deux distributions de Young Λ et Π adaptées à ce point, et telles que*

$$|\Lambda| = |\Pi| = N \quad ; \quad \forall x \in [-1, 1], \quad \ell(\lambda(x)) + \ell(\pi(x)) \leq n(x).$$

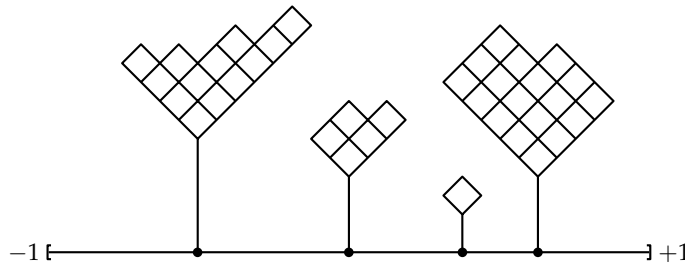


FIGURE 4.2 – Distribution de Young Λ de niveau $1 + 5 + 13 + 18 = 37$ adaptée à un point du simplexe de Thoma.

Les représentations sphériques de (G, K) sont précisément les représentations admissibles irréductibles de niveau 0, c'est-à-dire que $\Lambda = \Pi = \emptyset$; elles sont donc en bijection avec les points du simplexe de Thoma, et étant donnée une représentation sphérique, la donnée d'un vecteur sphérique fournit effectivement un caractère irréductible de \mathfrak{S}_∞ , voir [Ok097a, §0.2, p. 6].

Exemple. On considère la représentation régulière bilatère de G sur $H = \ell^2(\mathfrak{S}_\infty)$; elle est donnée par $(g, h) \cdot \sigma = g \sigma h^{-1}$, et est irréductible. La restriction de cette représentation à $K = \mathfrak{S}_\infty$ est l'action par conjugaison de K sur lui-même; en particulier,

$$H^{\mathfrak{S}_\infty(n)} = \ell^2(\mathfrak{S}_n)$$

pour tout n , et $H^K = \mathbb{C}1$. La représentation régulière bilatère est donc une représentation sphérique, et comme la fonction sphérique correspondante est

$$f(g, h) = \mathbb{1}_{g=h^{-1}},$$

elle correspond à la trace régulière de \mathfrak{S}_∞ , c'est-à-dire le caractère irréductible de paramètre de Thoma $\omega = ((0, 0, \dots), (0, 0, \dots))$.

Pour conclure ce paragraphe, évoquons les **systèmes cohérents de z-mesures**, qui sont parmi les premiers à avoir été décrits par des systèmes de particules à corrélations déterminantales, cf. [BO98, BO00]. Un résultat classique d'analyse harmonique non commutative est

le théorème de Peter-Weyl, qui assure que si K est un groupe topologique compact, alors la représentation régulière bilatère de $G = K \times K$ sur $L^2(K)$ se décompose en

$$(L^2(K), L \otimes R) = \bigoplus_{\lambda \in \widehat{G}} V^\lambda \otimes V^{\lambda*},$$

voir [JS91, §1] et [Var89, §2]. Pour le groupe symétrique infini $K = \mathfrak{S}_\infty$, ce résultat tombe malheureusement en défaut, car la représentation régulière bilatère est irréductible. Néanmoins, on peut construire des représentations régulières « généralisées » de $G = \mathfrak{S}_\infty \times \mathfrak{S}_\infty$ qui sont des intégrales directes de représentations irréductibles sphériques, et qui correspondent à des mesures non triviales sur le simplexe de Thoma. L'idée est de construire une limite projective de G -ensembles³ $X = \varprojlim_{n \rightarrow \infty} \mathfrak{S}_n$, de munir X d'une mesure limite projective μ_t qui est K -invariante et G -quasi-invariante, et de tordre l'action usuelle

$$(g, h) \in G, \sigma \in K \mapsto (g, h) \cdot \sigma = g\sigma h^{-1}$$

par le cocycle additif qui mesure la G -quasi-invariance de la mesure μ_t , cf. [KOV04, §3]. Ainsi, pour tout nombre complexe non nul z , si $t = |z|^2$, alors on peut construire une représentation unitaire $T_z : G \rightarrow \mathcal{U}(L^2(X, \mu_t))$, avec les propriétés suivantes :

Proposition 4.5 (Systèmes cohérents de z -mesures, [KOV04]). *Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, la représentation T_z est l'intégrale directe de représentations sphériques :*

$$T_z = \int_{\Omega} S^\omega P_z(d\omega),$$

où S^ω désigne la représentation sphérique associée au caractère irréductible χ^ω . Le système cohérent de mesures de probabilité associé à T_z et P_z est

$$M_{z,n}(\lambda) = \frac{(\dim \lambda)^2}{n! (t)_n} \prod_{(i,j) \in \lambda} |z + i - j|^2$$

où $(t)_n = t(t+1)(t+2)\cdots(t+n-1)$ est le symbole de Pochhammer. On retrouve le système des mesures de Plancherel lorsque z tend vers l'infini, et un autre système cohérent limite lorsque z tend vers 0, avec $M_{0,n}(\lambda) = 1/n$ si λ est une partition équerre, et 0 sinon.

Pour compléter la proposition 4.5, décrivons les **mesures spectrales** P_z des représentations régulières généralisées. Pour tout $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, les représentations T_z et $T_{\bar{z}}$ sont équivalentes, et les représentations T_z et $T_{-z} \otimes (\text{sgn} \times \text{sgn})$ sont équivalentes, cf. [KOV04, propositions 3.6.1 et 4.5.1]. Deux mesures spectrales P_z et $P_{z'}$ sont étrangères sauf si $z' = z$ ou $z' = \bar{z}$. On doit ensuite distinguer deux cas :

1. Si $z = k$ est un entier relatif non nul, alors T_k est somme directe de représentations T_{pq} avec $k = p - q$ et $p, q \in \mathbb{N}$. Les mesures spectrales de ces représentations sont équivalentes aux mesures de Lebesgue des faces $(p + q - 1)$ -dimensionnelles

$$\Omega(p, q) = \{(\alpha, \beta) \in \Omega \mid \alpha_1 + \cdots + \alpha_p + \beta_1 + \cdots + \beta_q = 1\}$$

du simplexe de Thoma, avec des densités explicitement calculables. La mesure M_k est portée par les diagrammes de Young ayant moins de k lignes si $k > 0$ (resp., par les diagrammes de Young ayant moins de k colonnes si $k < 0$).

3. L'ensemble X est constitué des **permutations virtuelles**, voir [KOV04, §1] pour une définition précise. Le défaut majeur de la construction est que X n'est pas un (semi-)groupe.

2. Si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, alors P_z ne charge pas les faces $\Omega(p, q)$, et est portée par la face $\Omega(0) = \{\omega \in \Omega \mid \gamma = 0\}$. La mesure M_z charge tous les diagrammes de Young.

Compte tenu de ces résultats, on peut estimer que les représentations régulières généralisées T_z « engendrent » suffisamment de représentations sphériques, et pallient le défaut de la représentation régulière bilatère de \mathfrak{S}_∞ observé précédemment.

4.2 Processus ponctuels déterminantaux et mesures de Schur

Si z est un paramètre complexe, les mesures $M_{z,n}$ des diagrammes de Young sont explicitement calculables, mais les valeurs du caractère normalisé χ_z n'ont pas d'expression simple, même en un cycle — par exemple, les premières valeurs sont

$$\chi_z(1) = 1 \quad ; \quad \chi_z(2) = \frac{2 \operatorname{Re}(z)}{|z|^2 + 1} \quad ; \quad \chi_z(3) = \frac{|z|^2 + 4(\operatorname{Re}(z))^2 + 1}{(|z|^2 + 1)(|z|^2 + 2)}.$$

Par conséquent, les techniques d'observables de diagrammes présentées dans le chapitre 2 ne permettent pas l'étude asymptotique des z -mesures. Ceci a conduit à l'élaboration d'une seconde technique d'étude asymptotique des diagrammes aléatoires, qui repose sur la théorie des **processus ponctuels déterminantaux** ([BO98, BO00, BO00a, BO05a, BO05b]). Si X est un espace topologique séparable localement compact, on appelle **configuration de points** dans X un multi-ensemble⁴ $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots\}$ tel que $\operatorname{card}(\xi \cap A) < \infty$ pour toute partie compacte de X . L'ensemble $\Xi(X)$ des configurations de points est muni de la tribu engendrée par les fonctions $\xi \mapsto \operatorname{card}(\xi \cap A)$, et on appelle **processus ponctuel** à valeurs dans X une application mesurable ξ d'un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vers $\Xi(X)$. On obtient ainsi une mesure de probabilité $\xi_* \mathbb{P}$ sur l'espace $\Xi(X)$, qu'on étudie grâce aux **mesures de corrélation** μ^k :

$$\mu^k(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) = \mathbb{E} \left[\sum_{i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_k} \mathbb{1}_{A_1}(\xi_{i_1}) \times \mathbb{1}_{A_2}(\xi_{i_2}) \times \dots \times \mathbb{1}_{A_k}(\xi_{i_k}) \right].$$

Chaque μ^k est une mesure sur X^k , et lorsque X est une partie de \mathbb{R} , on appelle **fonctions de corrélation** du processus les densités $\rho^k(x) = d\mu^k(x)/dx^k$ par rapport aux mesures de Lebesgue (en supposant que les μ^k sont absolument continues par rapport aux mesures de Lebesgue).

Exemple. La première fonction de corrélation ρ^1 peut être vue comme la densité du processus ponctuel : ainsi, pour toute fonction f , $\int_X f(x) \rho^1(x) dx = \mathbb{E}[\sum_i f(\xi_i)]$.

Lorsque X est un espace discret (dénombrable), la donnée d'un processus ponctuel est équivalente à la donnée d'une probabilité π sur l'ensemble dénombrable des parties finies de X , et les mesures de corrélation sont données par :

$$\mu^k(\{x_1\} \times \{x_2\} \times \dots \times \{x_k\}) = \mathbb{P}[\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset \xi].$$

On appellera dans ce cas fonction de corrélation l'application $\rho(A) = \mathbb{P}[A \subset \xi] = \sum_{A \subset B} \pi(B)$, et on notera $\rho^k(x_1, \dots, x_k) = \rho(\{x_1, \dots, x_k\})$.

4. Ainsi, on autorise des répétitions dans la suite $\{\xi_1, \xi_2, \dots\}$, et ces points ne sont pas ordonnés.

Un processus ponctuel à valeurs dans une partie de \mathbb{R} ou dans un espace discret est dit **déterminantal** si ses fonctions de corrélation sont données par des déterminants, c'est-à-dire qu'il existe un noyau (symétrique) $K : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ tel que

$$\rho^k(x_1, \dots, x_k) = \det((K(x_i, x_j))_{1 \leq i, j \leq k}).$$

Ces processus déterminantaux sont associés à des **opérateurs à trace** \mathcal{K} positifs sur des espaces de Hilbert. Ainsi, si X est une partie de \mathbb{R} et si ξ est un processus ponctuel déterminantal de noyau K , l'opérateur $\mathcal{K} : L^2(X) \rightarrow L^2(X)$ défini par

$$\mathcal{K}f(x) = \int_X K(x, y)f(y) dy$$

et ses restrictions à des sous-espaces $L^2(A \subset X)$ jouent un rôle important dans de nombreux calculs de probabilités du processus ξ . De même, si X est un ensemble dénombrable et si \mathcal{L} est un opérateur à trace sur $\ell^2(X)$, notant p_A la projection sur le sous-espace $\ell^2(A)$ pour toute partie $A \subset X$, et $\mathcal{L}_A = p_A \mathcal{L} p_A$, on peut définir un processus ponctuel déterminantal en posant⁵ :

$$\det(\text{id} + \mathcal{L}) = \sum_{k=0}^{\infty} \text{tr}(\wedge^k \mathcal{L}) = \sum_{\substack{A \subset X \\ \text{card } A < \infty}} \det(\mathcal{L}_A) \quad ; \quad \pi(A) = \frac{\det(\mathcal{L}_A)}{\det(\text{id} + \mathcal{L})}.$$

Dans ce contexte, les fonctions de corrélation du processus ponctuel sont déterminantales : si $\mathcal{K} = \mathcal{L}(\text{id} + \mathcal{L})^{-1}$, alors $\rho(X) = \det(\mathcal{K}_X)$, cf. [BO00, §2]. On renvoie à [DVJ88] pour un traitement plus complet de la théorie des processus ponctuels.

Si λ est un diagramme de Young aléatoire, on peut lui associer un processus ponctuel à valeurs dans $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z} + 1/2$ en considérant l'ensemble $\mathcal{F}(\lambda) = A(\lambda) \cup -B(\lambda)$ des coordonnées de Frobenius. Un autre processus ponctuel est obtenu en regardant les coordonnées de descente de la fonction ω_λ :

$$\mathcal{D}(\lambda) = \mathbb{Z}'_- \Delta \mathcal{F}(\lambda) = \{\lambda_i - i + 1/2\}_{i \geq 1}.$$

Exemple. Si $\lambda = (5, 4, 4, 1)$, alors $\mathcal{D}(\lambda) = (\frac{9}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{9}{2}, -\frac{11}{2}, -\frac{13}{2}, \dots)$.

Avec ces conventions, un processus de croissance de diagrammes tel que le processus de Plancherel peut être interprété comme un système de particules s'excluant mutuellement et partant de la configuration initiale \mathbb{Z}'_- , voir la figure 4.3.

D'autre part, si $\omega = (\alpha, \beta)$ est un point du simplexe de Thoma, on peut lui associer comme précédemment une configuration de points $\alpha \cup (-\beta)$ sur l'intervalle épointé $I^* = [-1, 1] \setminus \{0\}$. Par conséquent, une mesure spectrale P sur Ω correspond à un processus ponctuel à valeurs dans I^* , que nous noterons $\mathcal{I}_*(P)$. Dans le contexte des z -mesures, les deux constructions de processus ponctuels précédemment décrites peuvent être reliées comme suit. Si $M_\chi = (M_{\chi, n})_{n \in \mathbb{N}}$ est un système cohérent de mesures de probabilité sur le graphe de Young \mathcal{Y} , et si μ est une mesure de probabilité sur \mathbb{N} , notons $M_{\chi, \mu}$ la mesure de probabilité sur \mathcal{Y} définie par :

$$M_{\chi, \mu}(\lambda) = \mu(|\lambda|) M_{\chi, |\lambda|}(\lambda).$$

5. Ici, $\det(\text{id} + \mathcal{L})$ est un déterminant au sens de Fredholm.

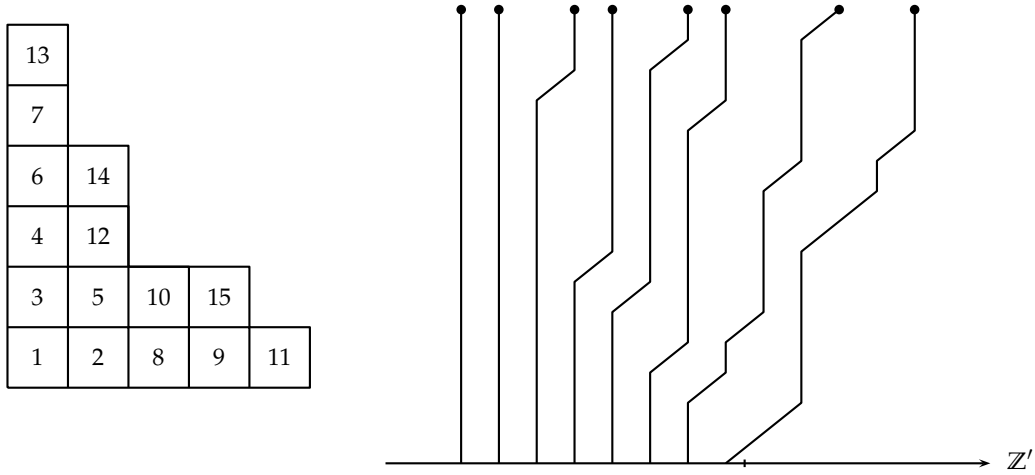


FIGURE 4.3 – Codage d'un tableau par l'évolution d'un système de particules s'excluant mutuellement.

Exemple. Pour $\theta > 0$, la mesure de Plancherel poissonisée de paramètre θ est définie par

$$M_{\mathcal{P}(\theta)}(\lambda) = \frac{\theta^{|\lambda|} e^{-\theta}}{|\lambda|!} \times \frac{(\dim \lambda)^2}{|\lambda|!}.$$

Les processus ponctuels correspondants sont $\mathcal{F}_*(M_{\mathcal{P}(\theta)})$ et $\mathcal{D}_*(M_{\mathcal{P}(\theta)})$, et l'asymptotique des mesures de Plancherel peut être retrouvée en étudiant la limite $\theta \rightarrow \infty$, voir [BO00] et la section 5.2.

Plus généralement, étant donnée une mesure spectrale P_χ sur Ω , si $(M_{\chi,n})_{n \in \mathbb{N}}$ est le système cohérent de mesures et si $(\mu_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}_+}$ est une famille de mesures de probabilité sur \mathbb{N} telle que $n \rightarrow \mu_\theta + \infty$, alors compte tenu du théorème 4.2, on peut s'attendre à ce que les processus ponctuels $\mathcal{F}_*(M_{\chi,\mu_\theta})$ correctement renormalisés approchent le processus ponctuel $\mathcal{I}_*(P_\chi)$. Dans le cas des z -mesures, cette intuition peut être rendue rigoureuse, et tous les processus mis en jeu sont déterminantaux. Fixons un paramètre complexe $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$; on rappelle que la mesure P_z est portée par la face $\Omega(0) = \{\omega \in \Omega \mid \gamma = 0\}$ du simplexe de Thoma. On note $\Omega^* = \Omega(0) \times \mathbb{R}_+^*$; via l'application $(\omega, s) \mapsto (s\alpha, s\beta)$, on peut identifier Ω^* et

$$\left\{ (a, b) = (a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq 0, b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq 0) \mid \sum_{i=1}^{\infty} a_i + \sum_{i=1}^{\infty} b_i = s \in \mathbb{R}_+^* \right\}.$$

Les éléments de Ω^* sont associés à des configurations de points dans l'intervalle épointé $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Proposition 4.6 (z -mesures et processus ponctuels déterminantaux, [BO00]).

1. Soit P_z^* la loi produit $P_z \otimes \{s^{t-1} e^{-s} ds / \Gamma(t)\}$ sur Ω^* . Le processus ponctuel $\mathcal{I}_*(P_z^*)$ est déterminantal, de fonctions de corrélation données par le noyau de Whittaker, cf. [BO00, §5].
2. Soit $\mathcal{B}(t, \zeta)$ la loi binomiale négative de paramètre (t, ζ) , c'est-à-dire que

$$\mathcal{B}(t, \zeta)(\{k\}) = \frac{\binom{t}{k}}{k!} (1 - \zeta)^t \zeta^k.$$

Les processus ponctuels $\mathcal{F}_*(M_{z,B(t,\zeta)})$ sont déterminantaux, de noyaux donnés par des fonctions hypergéométriques, cf. [BO00, §3]. De plus, lorsque ζ tend vers 1, le processus renormalisé $(1 - \zeta) \mathcal{F}_*(M_{z,B(t,\zeta)})$, qui est à valeurs dans \mathbb{R}^* , converge en loi vers $\mathcal{I}_*(P_z^*)$.

On renvoie aux articles [BO98, BO00, BO05b] pour des précisions sur ce résultat, qui se généralise d'ailleurs à une famille de mesures spectrales à trois paramètres (z, z', θ) . L'asymptotique des mesures de Plancherel est un cas dégénéré de la proposition 4.6 ; nous expliquerons ceci dans la section 5.2.

Ainsi, en s'appuyant sur l'exemple des z -mesures, nous avons présenté une seconde technique d'étude des diagrammes de Young aléatoires de grande taille. Notons que le caractère déterminantal des fonctions de corrélation joue un rôle essentiel dans la preuve de résultats asymptotiques tels que la proposition 4.6, car les calculs sont ramenés à des fonctions de deux variables. Il convient dès lors de se demander quelles mesures \mathcal{M} sur \mathcal{Y} donnent lieu à des processus ponctuels déterminantaux. Si $\mathcal{D}_*(\mathcal{M})$ est un processus ponctuel déterminantal, alors un principe de complémentation (cf. [BO000, p. 39]) assure que $\mathcal{F}_*(\mathcal{M}) = \mathcal{D}_*(\mathcal{M}) \Delta \mathbb{Z}'_-$ est aussi déterminantal, les noyaux vérifiant la relation

$$K_{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad ; \quad K_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} A & B \\ -C & 1 - D \end{pmatrix},$$

si les matrices sont découpées suivant la décomposition $\mathbb{Z}' = \mathbb{Z}'_+ \sqcup \mathbb{Z}'_-$. Ainsi, on peut toujours se ramener aux coordonnées de descente \mathcal{D} , et une classe très générale de mesures \mathcal{S} telles que $\mathcal{D}_*(\mathcal{S})$ soit déterminantal est décrite par A. Okounkov dans [Ok001, Ok003a, Ok003b]. Cette classe contient les mesures de Plancherel et les z -mesures, et nous verrons dans la seconde partie qu'elle contient aussi les q -mesures de Plancherel et les limites des « lois marginales » des mesures de Plancherel des groupes $GL(n, \mathbb{F}_q)$ (cf. [Dudo8, Fulo6]). L'idée est de partir de l'**identité de Cauchy** pour les fonctions de Schur

$$\forall a = (a_i)_i, b = (b_j)_j, \sum_{\lambda \in \mathcal{Y}} s_\lambda(a) s_\lambda(b) = \prod_{i,j} \frac{1}{1 - a_i b_j}$$

cette identité étant valable formellement et pour tous paramètres a et b finis ou sommables. Alors,

$$\mathcal{S}(\lambda) = \mathcal{S}_{a,b}(\lambda) = s_\lambda(a) s_\lambda(b) \prod_{i,j} (1 - a_i b_j)$$

est une mesure de probabilité sur \mathcal{Y} , qu'on appellera **mesure de Schur** de paramètres a et b . Dans ce qui suit, on exprimera plutôt les mesures de Schur en fonction des paramètres de Miwa

$$t_k = p_k(a)/k \text{ et } t'_k = p_k(b)/k.$$

La formule de Frobenius et l'identité de Cauchy permettent de récupérer les fonctions de Schur et la constante de normalisation $Z^{-1} = \prod_{i,j} (1 - a_i b_j)$:

$$s_\lambda = \sum_{\mu \in \mathcal{Y}_n} \zeta^\lambda(\mu) \prod_{k \geq 1} \frac{(t_k)^{m_k(\mu)}}{m_k(\mu)!} \quad ; \quad \log Z = \sum_{k \geq 1} k t_k t'_k.$$

Exemples. Si $t = t' = (\sqrt{\theta}, 0, 0, \dots)$, alors $Z = e^\theta$, $s_\lambda(a) = s_\lambda(b) = (\dim \lambda) \theta^{n/2}/n!$, et $\mathcal{S}(\lambda) = M_{\mathcal{P}(\theta)}(\lambda)$ est la mesure de Plancherel modulée selon une loi de Poisson ([Pyn73, p. 63]) de paramètre θ .

De même, si $t_k = \frac{\zeta^{k/2} z}{k}$ et si $t_{k'} = \frac{\zeta^{k/2} \bar{z}}{k}$, alors $Z^{-1} = (1 - \zeta)^t$ et $s_\lambda(a) s_\lambda(b) = \zeta^{|\lambda|} s_\lambda(1^z) s_\lambda(1^{\bar{z}})$, où par $s_\lambda(1^z)$ on entend

$$s_\lambda(\underbrace{1, 1, \dots, 1}_z \text{ termes}) = \prod_{(i,j) \in \lambda} \frac{z + c(i,j)}{h(i,j)},$$

voir [Mac95, §1.3, exemple 4]. On en déduit que $\mathcal{S}(\lambda) = M_{z, \mathcal{B}(t, \bar{z})}(\lambda)$.

Théorème 4.7 (Mesures de Schur, [Okoo1]). *Si $\mathcal{S} = \mathcal{S}_{a,b}$ est une mesure de Schur, alors les processus ponctuels $\mathcal{D}_*(\mathcal{S})$ et $\mathcal{F}_*(\mathcal{S})$ sont déterminantaux, et les noyaux correspondants $K_{\mathcal{D}}$ et $K_{\mathcal{F}}$ ont des expressions explicites en termes des paramètres de Miwa. En particulier, si $T(z) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k z^k - \sum_{k=1}^{\infty} t'_k z^{-k}$, alors*

$$K_{\mathcal{D}}(x, y) = \frac{1}{(2i\pi)^2} \iint_{|w| < |z|} \frac{e^{T(z)-T(w)}}{(z-w)\sqrt{zw}} \frac{dz dw}{z^x w^{-y}}.$$

Ce résultat peut être obtenu en utilisant le formalisme du **produit extérieur infini**, voir [Okoo1]. Soit V un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, et $(\underline{z})_{z \in \mathbb{Z}'}$ une base orthonormale de V . Le produit extérieur infini $\bigwedge^{\infty} V$ est l'espace de Hilbert de base orthonormale

$$\underline{D} = \underline{d}_1 \wedge \underline{d}_2 \wedge \underline{d}_3 \wedge \dots$$

où $D = \{d_1 > d_2 > d_3 > \dots\} \subset \mathbb{Z}'$ est une suite décroissante infinie telle que $D \Delta \mathbb{Z}'_-$ soit fini — autrement dit, D contient une demi-droite infinie. L'espace de départ V agit sur $\bigwedge^{\infty} V$ par produit extérieur : $\forall k \in \mathbb{Z}'$, $\psi_k(v) = \underline{k} \wedge v$. Les opérateurs ψ_k et leurs adjoints ψ_k^* vérifient les relations d'anti-commutation des **fermions libres** :

$$\psi_k \psi_l^* + \psi_l^* \psi_k = \delta_{kl} \quad ; \quad \psi_k \psi_l + \psi_l \psi_k = 0 \quad ; \quad \psi_k^* \psi_l^* + \psi_l^* \psi_k^* = 0.$$

Autrement dit, l'algèbre engendrée par ces opérateurs est l'algèbre de Clifford de la forme bilinéaire non dégénérée définie sur $V \oplus V^*$ par $\langle \psi_k^* | \psi_l \rangle = \delta_{kl}$, $\langle \psi_k | \psi_l \rangle = 0$ et $\langle \psi_k^* | \psi_l^* \rangle = 0$. Notons $:\psi_k \psi_l^*:$ le produit ordonné défini par :

$$:\psi_k \psi_l^*: = \begin{cases} \psi_k \psi_l^* & \text{if } l > 0, \\ -\psi_l^* \psi_k & \text{if } l < 0. \end{cases}$$

L'opérateur d'énergie, ou **hamiltonien**, est $H = \sum_{k \in \mathbb{Z}'} k : \psi_k \psi_k^* :$. Les opérateurs de **charge** et de **translation** sont pour leur part définis par

$$C = \sum_{k \in \mathbb{Z}'} : \psi_k \psi_k^* : \quad ; \quad R(\underline{D}) = \underline{D} + 1 = (\underline{d}_1 + 1) \wedge (\underline{d}_2 + 1) \wedge \dots$$

Ces divers opérateurs permettent une décomposition spectrale du produit extérieur infini. Ainsi, la base (\underline{D}) diagonalise la charge :

$$C(\underline{D}) = (\text{card } D_+ - \text{card } D_-) \underline{D},$$

où $D_+ = D \cap \mathbb{Z}'_+$ et $D_- = \mathbb{Z}'_- \setminus D$. Le noyau de C , noté $\bigwedge_0^{\infty} V$, a pour base l'ensemble des coordonnées de descente⁶ $\underline{\mathcal{D}}(\lambda)$ des partitions $\lambda \in \mathcal{P}$. Dans ce qui suit, on notera $\underline{\lambda} = \underline{\mathcal{D}}(\lambda)$; en particulier, $\emptyset = \underline{\mathbb{Z}'_-}$. La conjugaison par R translate les fermions libres :

$$R^l \psi_k R^{-l} = \psi_{k+l} \quad ; \quad R^l \psi_k^* R^{-l} = \psi_{k+l}^*.$$

6. Plus généralement, un élément de base \underline{D} peut être vu comme une fonction affine par morceaux égale à $|s|$ pour s positif assez grand, et égale à $|s| + c$ pour s négatif assez grand, c désignant la charge. Les éléments de base sont donc des généralisations des partitions.

Par conséquent, $R^l H R^{-l} = H + lC + l^2/2$ et $R^l C R^{-l} = C + l$, de sorte que le sous-espace $\Lambda_c^\infty V = \ker(C - c)$ est aussi $R^c(\Lambda_0^\infty V)$. L'espace $\Lambda^\infty V$ est la somme directe hilbertienne $\bigoplus_{c \in \mathbb{Z}} \Lambda_c^\infty V$, et dans chaque sous-espace $\Lambda_c^\infty V$, le vecteur $R^c(\underline{\emptyset})$ est un vecteur propre pour H de valeur propre minimale.

Les **bosons libres** $\alpha_n = \sum_{k \in \mathbb{Z}'} : \psi_k \psi_{k+n}^*$: apportent un autre point de vue sur le produit extérieur infini. Ils satisfont les relations de commutation

$$[\alpha_n, \alpha_m] = n \delta_{n,-m} \quad ; \quad [\alpha_n, \psi_k] = \psi_{k-n} \quad ; \quad [\alpha_n, \psi_k^*] = -\psi_{k+n}^*$$

et ils engendrent l'**algèbre d'Heisenberg** (ou algèbre d'oscillation) \mathcal{A} . Fixons un paramètre $c \in \mathbb{R}$. L'algèbre \mathcal{A} agit sur l'espace de Fock symétrique $S = \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots] = \bigotimes^\infty \mathbb{C}[x]$:

$$\alpha_{n>0}(P) = \frac{\partial P}{\partial x_n} \quad ; \quad \alpha_{n<0} = (-n)x_{-n} P \quad ; \quad \alpha_0(P) = cP.$$

Autrement dit, les $\alpha_{n>0}$ agissent comme opérateurs d'annihilation et les $\alpha_{n<0}$ agissent comme opérateurs de création. On peut montrer que pour chaque entier $c \in \mathbb{Z}$, l'action de \mathcal{A} sur $\Lambda_c^\infty V$ est irréductible et équivalente à l'action $\mathcal{A} \curvearrowright S$ de paramètre c . L'action de \mathcal{A} sur le produit extérieur infini est donc équivalente à la représentation $\mathcal{A} \curvearrowright \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots; q, q^{-1}] = S \otimes \mathbb{C}[q, q^{-1}]$ donnée par

$$\alpha_{n>0}(P) = \frac{\partial P}{\partial x_n} \quad ; \quad \alpha_{n<0} = (-n)x_{-n} P \quad ; \quad \alpha_0(P) = q \frac{\partial P}{\partial q}.$$

Le vecteur vide correspond au polynôme 1 ; l'opérateur de charge correspond à α_0 , et l'opérateur de translation correspond à la multiplication par q .

Cette théorie du produit extérieur infini est complétée par la **correspondance boson-fermion** et la théorie des **opérateurs vertex**. Notons $\psi(z)$, $\psi^*(z)$ et $\alpha(z)$ les fonctions génératrices des fermions et des bosons :

$$\psi(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}'} z^n \psi_n \quad ; \quad \psi^*(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}'} z^{-n} \psi_n^* \quad ; \quad \alpha(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^n \alpha_{-n}.$$

Pour toute suite $t = (t_1, t_2, \dots)$, les opérateurs vertex de paramètre t sont définis par $\Gamma_+(t) = \exp(\sum_{n \geq 1} t_n \alpha_n)$ et $\Gamma_-(t) = \exp(\sum_{n \geq 1} t_n \alpha_{-n}) = \Gamma_+(t)^*$. Avec ces conventions, si

$$[z] = \left\{ z, \frac{z^2}{2}, \frac{z^3}{3}, \dots \right\},$$

alors la relation $\alpha(z) = : \psi(z) \psi^*(z) :$ peut être inversée :

$$\psi(z) = z^C R \Gamma_-([z]) \Gamma_+([z^{-1}])^{-1} \quad ; \quad \psi^*(z) = R^{-1} z^{-C} \Gamma_-([z])^{-1} \Gamma_+([z^{-1}])$$

cf. le dernier chapitre de [Kac94] pour une preuve de ces formules à l'aide d'algèbres de Lie infini-dimensionnelles. Cette correspondance boson-fermion⁷ est complétée par les relations

7. Tous ces résultats ont une interprétation physique naturelle. Ainsi, si V désigne l'espace d'états (quantiques) d'une particule de type fermion, alors l'espace d'états d'une infinité de particules identiques est $\Lambda^\infty V$, et les opérateurs ψ_k et ψ_k^* correspondent à la création et à l'annihilation d'un fermion en position k . Compte tenu des propriétés du produit extérieur, les configurations avec plusieurs particules dans le même état k sont interdites ; c'est exactement ce que l'on attend de fermions. La correspondance boson-fermion est l'identification canonique entre $\Lambda^\infty V$ et l'espace de Fock symétrique $S \otimes \mathbb{C}[q, q^{-1}]$ décrite précédemment ; ainsi, on peut traiter virtuellement le système de particules comme une infinité de bosons, et l'identification conserve la charge du système. De plus, à charge c fixée, il existe un unique état $R^c(\underline{\emptyset})$ d'énergie minimale, et les autres états sont obtenus en appliquant l'opérateur vertex négatif sur cet état.

de commutation

$$\begin{aligned}\Gamma_{\pm}(t)\psi(z) &= H(t, z^{\pm 1}) \psi(z) \Gamma_{\pm}(t) \\ \Gamma_{\pm}(t)\psi^*(z) &= H(t, z^{\pm 1})^{-1} \psi^*(z) \Gamma_{\pm}(t) \\ \Gamma_+(t) \Gamma_-(t') &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} n t_n t'_n\right) \Gamma_-(t') \Gamma_+(t)\end{aligned}$$

où $H(t, z) = \exp(\sum_{n=1}^{\infty} t_n z^n)$ est aussi $\sum_{n=0}^{\infty} h_n(x) z^n$ si les $t_n = t_n(x)$ sont les paramètres de Miwa d'un ensemble de variables x . En supposant que c'est le cas, on en déduit l'action des opérateurs vertex sur les vecteurs de base de $\Lambda^{\infty} V$:

$$\Gamma_+(t)(\underline{\varnothing}) = \underline{\varnothing} \quad ; \quad \Gamma_-(t)(\underline{\varnothing}) = \sum_{\lambda \in \mathcal{D}} s_{\lambda}(x) \underline{\lambda} \quad ; \quad \Gamma_-(t)(\underline{\mu}) = \sum_{\lambda \supset \mu} s_{\lambda/\mu}(x) \underline{\lambda}.$$

Ici, $s_{\lambda/\mu}$ désigne la fonction de Schur gauche définie par la relation d'orthogonalité

$$\forall v \in \mathcal{D}, \quad \langle s_{\lambda} | s_{\mu} s_v \rangle = \langle s_{\lambda/\mu} | s_v \rangle,$$

ou, de façon équivalente, par la formule de Jacobi-Trudi $s_{\lambda/\mu}(x) = \det(h_{\lambda_i - \mu_j + j - i}(x))_{i,j}$, cf. [Mac95, §1.5]. Ces relations permettent de calculer les fonctions de corrélation d'une mesure de Schur de paramètre (t, t') . En effet, si l'on remarque que $\psi_k \psi_k^*(\underline{\lambda})$ vaut $\underline{\lambda}$ lorsque $k \in \mathcal{D}(\lambda)$ et 0 sinon, alors :

$$\begin{aligned}\rho(A) &= \sum_{A \subset \mathcal{D}(\lambda)} Z^{-1} s_{\lambda}(a) s_{\lambda}(b) = Z^{-1} \left\langle \left(\prod_{k \in A} \psi_k \psi_k^* \right) \Gamma_-(t) \underline{\varnothing} \middle| \Gamma_-(t') \underline{\varnothing} \right\rangle \\ &= \left\langle \left(Z^{-1} \Gamma_+(t') \Gamma_-(t) \right) \Gamma_-(t)^{-1} \left(\prod_{k \in A} \psi_k \psi_k^* \right) \Gamma_-(t) \underline{\varnothing} \middle| \underline{\varnothing} \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\Gamma_-(t) \Gamma_+(t') \right) \Gamma_-(t)^{-1} \left(\prod_{k \in A} \psi_k \psi_k^* \right) \Gamma_-(t) \Gamma_+(t')^{-1} \Gamma_+(t') \underline{\varnothing} \middle| \underline{\varnothing} \right\rangle \\ &= \left\langle G \left(\prod_{k \in A} \psi_k \psi_k^* \right) G^{-1} \Gamma_+(t') \underline{\varnothing} \middle| \Gamma_+(t) \underline{\varnothing} \right\rangle = \left\langle \left(\prod_{k \in A} \Psi_k \Psi_k^* \right) \underline{\varnothing} \middle| \underline{\varnothing} \right\rangle\end{aligned}$$

où $G = \Gamma_+(t') \Gamma_-(t)^{-1}$, $\Psi_k = G \psi_k G^{-1}$ et $\Psi_k^* = G \psi_k^* G^{-1}$. Finalement, en utilisant une forme de la formule de Wick, on conclut que les fonctions de corrélations sont les déterminants du noyau $K_{\mathcal{D}}(x, y) = \langle \Psi_x \Psi_y^* \underline{\varnothing} | \underline{\varnothing} \rangle$. De façon plus explicite, si l'on introduit les fonctions génératrices

$$A(z, w) = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}'} K_{\mathcal{D}}(k, l) z^k w^{-l} \quad ; \quad J(x) = \frac{H(t, x)}{H(t', x^{-1})} = \exp\left(\sum_{n \geq 1} t_n x^n - \sum_{n \geq 1} t'_n x^{-n}\right)$$

alors $A(z, w) = \langle G \psi(z) \psi^*(w) G^{-1} \underline{\varnothing} | \underline{\varnothing} \rangle$, et $G \psi(z) \psi^*(w) G^{-1} = (J(z)/J(w)) \psi(z) \psi^*(w)$. Par conséquent :

$$A(z, w) = \frac{J(z)}{J(w)} \langle \psi(z) \psi^*(w) \underline{\varnothing} | \underline{\varnothing} \rangle = \frac{J(z)}{J(w)} \sum_{k \in \mathbb{Z}'_+} (w/z)^k = \frac{\sqrt{zw}}{z-w} \frac{J(z)}{J(w)}$$

Comme $J(x) = \exp(T(x))$, on en déduit l'expression donnée dans l'énoncé du théorème 4.7 par une intégrale de Cauchy sur deux contours. Alternativement, si l'on décompose $J(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} J_n(t, t') x^n$ en série de Laurent, alors :

$$K_{\mathcal{D}}(x, y) = \sum_{m \in \mathbb{Z}'_+} J_{x+m}(t, t') J_{-y-m}(-t, -t')$$

et nous verrons plus loin que les fonctions J_n sont des généralisations des fonctions de Bessel. Ainsi, les mesures de Schur donnent bien lieu à des processus ponctuels déterminantaux, et on dispose d'une expression du noyau $K_{\mathcal{D}}$ sous forme d'intégrale de Cauchy ou de série de fonctions. Plus loin, nous détaillerons cette expression dans le cas de la mesure de Plancherel (§5.2) et de la q -mesure de Plancherel (§7.1).

Pour conclure ce chapitre, notons que les mesures de Schur ont originalement été étudiées pour comprendre l'asymptotique de surfaces aléatoires, en particulier les partitions tridimensionnelles, voir la figure 4.4.

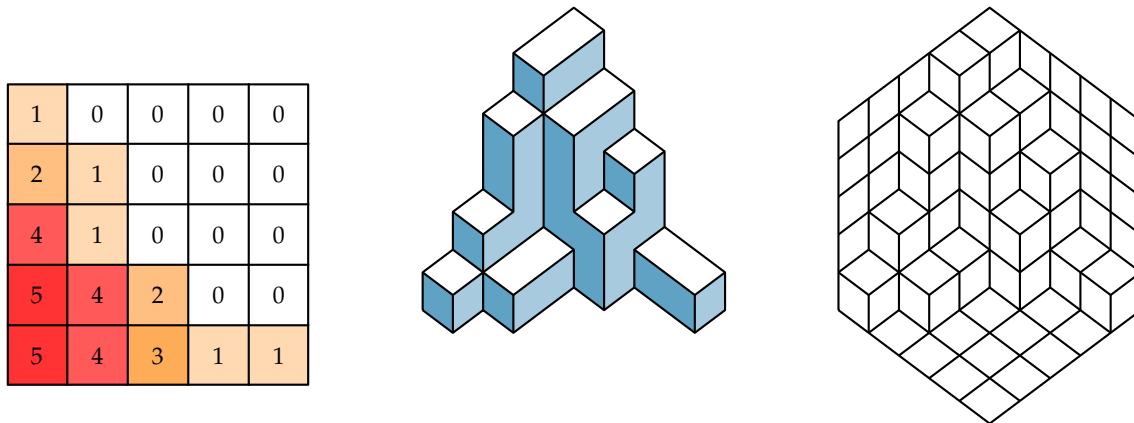


FIGURE 4.4 – Partition plane, diagramme tridimensionnel et pavage par des losanges.

Ces diagrammes 3d sont caractérisés par l'une des assertions équivalentes suivantes :

- (i) Écrites dans un plan, les hauteurs du diagramme sont décroissantes suivantes les lignes et les colonnes — on obtient ce qu'on appelle une **partition plane**.
- (ii) Les suites d'entiers $\{\lambda(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ obtenues en considérant les tranches diagonales sont des partitions, et elles sont entrelacées :

$$\dots \prec \lambda(-2) \prec \lambda(-1) \prec \lambda(0) \succ \lambda(1) \succ \lambda(2) \succ \lambda(3) \succ \dots$$

où $\lambda \succ \mu$ signifie que $\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \dots$

- (iii) Le diagramme 3d correspond au pavage d'un hexagone par des losanges.

On peut construire des suites aléatoires $\{\lambda(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ de diagrammes de Young qui sont des analogues dépendant en temps des mesures de Schur, et qui correspondent à des partitions planes : il s'agit des **processus de Schur**, cf. [OR03, Bor10]. Dans ce cadre, les fonctions de corrélation des descentes des partitions $\lambda(t)$ sont déterminantales, y compris pour des descentes prises en des instants t différents. Autrement dit, les corrélations des losanges du pavage sont déterminantales quelques soient les coordonnées choisies. Pour un choix adéquat des paramètres du processus de Schur, la partition plane aléatoire π est tirée suivant une probabilité proportionnelle à $q^{\text{vol}(\pi)}$ avec $q \in]0, 1[$. En faisant tendre q vers 1 et en renormalisant correctement les partitions planes obtenues, on en déduit la forme limite des pavages par des losanges d'un grand hexagone, tous les pavages étant tirés équiprobablement, voir [OR03] — d'autre part, il est connu depuis les travaux de Kasteleyn que les corrélations des losanges d'un tel pavage sont données par des déterminants, voir [Ok09] pour une généralisation de ce résultat.