

Guidage des dynamiques longitudinale et latérale

Résumé. Le Chapitre précédent était consacré à l'étude et la stabilisation de la dynamique longitudinale du véhicule. Ce chapitre propose une extension de cette étude pour la stabilisation de trajectoires de croisière du véhicule dans un environnement à 3 dimensions. De cette façon nous obtenons un système de guidage qui est i) tolérant aux saturations d'incidence et de poussée et ii) robuste aux incertitudes de modélisation. Différentes simulations illustrent le résultat obtenu.

4.1 Introduction

La complexité du vol d'un véhicule hypersonique (HSV) en trois dimensions, faisant intervenir des difficultés intrinsèques du fait de couplages multiples et de difficultés de modélisation, implique que la grande majorité des études à ce sujet se concentre sur la commande de la dynamique longitudinale du véhicule. Cependant, les travaux développés au Chapitre 3 seraient d'un intérêt pratique très limité s'ils n'étaient pas transposables au cas plus réaliste d'un véhicule qui évolue dans un environnement en 3 dimensions. C'est cette extension que nous développons dans ce chapitre.

Nous allons procéder en différentes étapes. En premier lieu, nous commençons par établir dans la Section 4.2 les équations dynamiques du vol d'un véhicule dans le cas particulier d'un vol, dans le cas particulier où l'on considère une symétrie des efforts aéro-propulsifs dans le repère aérodynamique. Cette contrainte, qui est étroitement liée au fonctionnement de la propulsion aérobie à grande vitesse, nous mène à considérer dissociés deux dynamiques faiblement couplés : la dynamique longitudinale — c'est-à-dire le mode phugoïde — et la dynamique latérale. Il se trouve que cela simplifie la synthèse de commande et permet de réutiliser les travaux du Chapitre 3. De plus, l'incidence du véhicule étant également contrainte, il se pose un problème d'allocation de commande. Pour illustrer cela, nous présentons dans la Section 4.4 la commande du vecteur vitesse, ainsi qu'une façon d'allouer la consigne en incidence pour concilier les différentes exigences de commande. Cela nous permettra de formuler les contraintes à considérer pour la synthèse de commande de la dynamique latérale, étudiée dans la Section 4.5. Dans la Section 4.6, nous combinons les développements précédents à ceux du Chapitre 3 afin de proposer une loi de guidage 3D *Bank To Turn* (BTT). Le comportement de la loi de guidage obtenue sera alors illustré par des simulations. Enfin, nous discutons dans la Section 4.6 d'autres lois de commande pour la dynamique latérale qui ont retenu notre attention au cours de nos recherches.

4.2 Dynamique d'un vol à symétrie d'efforts

Définition 4.1 (Virage incliné). Un virage incliné est un changement de direction dans lequel le véhicule penche, habituellement vers l'extérieur du virage. On parle également de *banked turn* et de stratégie *Bank To Turn* (BTT).

La Section 2.9 rappelle les équations dynamiques du vol dans le cas général. Dans la mesure où notre véhicule évolue tant que possible à dérapage nul, il nous est imposé pour la synthèse du guidage la contrainte $\Sigma \mathbf{F}|_{\text{Aero}} \cdot \mathbf{y}_A = 0$ dans (2.33). Cela consiste à contraindre l'orientation latérale de la résultante des forces aéro-propulsives en repère aérodynamique, dans le plan de symétrie latérale $(O, \mathbf{x}_a, \mathbf{z}_a)$. De la sorte, il faut orienter le véhicule en roulis pour générer des efforts latéraux permettant un virage. En cela, le vol va se rapprocher d'un vol de type « avion » avec une stratégie de commande en virage incliné, dont la pratique implique un vol non dérapé.

Remarque 4.1. Dans le cas d'un palier stabilisé, une autre façon d'aborder le guidage consisterait à fixer $\Sigma \mathbf{F}|_{\text{Aero}} \cdot \mathbf{y}_A = -g(V) \sin \mu \cos \gamma$ dans (2.33); c'est-à-dire que la force induite par le dérapage compenserait la composante latérale de la gravité exprimée dans le repère aérodynamique. Cette technique est en fait souvent utilisée dans le cas des engins démunis de prise d'air, ou ayant une prise d'air axi-symétrique. En effet, l'orientation de la résultante des forces aérodynamiques sur ce type de véhicule est peu couplé à l'orientation de l'engin.

Nous faisons l'hypothèse d'un véhicule dont la masse est constante. Le modèle dynamique déduit de (2.33) est alors

$$\dot{V} = e - g(V) \sin \gamma, \quad (4.1a)$$

$$V \dot{\gamma} = -g(V) \sin^2 \mu \cos \gamma + \cos \mu \left(\frac{1}{m} \Sigma \mathbf{F}|_{\text{Aero}} \cdot \mathbf{z}_A - g(V) \cos \mu \cos \gamma \right), \quad (4.1b)$$

$$V \cos \gamma \dot{\chi} = g(V) \cos \mu \sin \mu \cos \gamma - \sin \mu \left(\frac{1}{m} \Sigma \mathbf{F}|_{\text{Aero}} \cdot \mathbf{z}_A - g(V) \cos \mu \cos \gamma \right). \quad (4.1c)$$

Nous pouvons y adjoindre les équations de position (h, x, y) , intégrales du vecteur vitesse :

$$\dot{h} = V \sin \gamma, \quad \dot{x} = V \cos \chi \cos \gamma, \quad \dot{y} = V \sin \chi \cos \gamma. \quad (4.2)$$

4.3 Modèle de comportement

Suite aux modèles développés dans les Chapitres 2 et 3, remplaçons $\frac{1}{m} \Sigma \mathbf{F}|_{\text{Aero}} \cdot \mathbf{z}_A$ par $g(V)\Lambda(V)\alpha$ avec $\Lambda : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$\Lambda(V) = \frac{C_{l_a} V^2 S(V) \rho(h_0)}{g(V)}, \quad (4.3)$$

avec C_{l_a} défini par (2.43), $S(V)$ définie par (2.7) et $g(V)$ définie par (3.8). Considérons de plus le changement d'entrées

$$\alpha_\gamma = \alpha \cos \mu, \quad \alpha_\chi = \alpha \sin \mu. \quad (4.4)$$

Le modèle dynamique du comportement en guidage du véhicule considéré est donc le suivant :

$$\dot{V} = e - g(V) \sin \gamma, \quad \dot{h} = V \sin \gamma, \quad (4.5a)$$

$$\dot{\gamma} = \frac{g(V)}{V} (\alpha_\gamma \Lambda(V) - \cos \gamma), \quad \dot{x} = V \cos \chi \cos \gamma, \quad (4.5b)$$

$$\dot{\chi} = -\frac{g(V)\Lambda(V)}{V \cos \gamma} \alpha_\chi, \quad \dot{y} = V \sin \chi \cos \gamma, \quad (4.5c)$$

contrôlé par le vecteur $(e \ \alpha_\gamma \ \alpha_\chi)^\top$.

Il apparaît alors que les équations de la dynamique de guidage sont l'agrégation d'un mode phugoïde tel que celui étudié dans le Chapitre 3 et d'une dynamique latérale :

$$\dot{y} = V \sin \chi \cos \gamma, \quad \dot{\chi} = -\frac{g(V)\Lambda(V)}{V \cos \gamma} \alpha_\chi. \quad (4.6)$$

La contrainte de vol à dérapage nul ouvre ici une opportunité, dans la mesure où on peut aborder ce système comme une extension faiblement couplée de la dynamique longitudinale. La commande de cette dernière ayant déjà été étudiée dans le Chapitre 3, il suffit de concentrer notre étude sur la commande de la dynamique latérale (4.6).

L'objectif final pour réaliser un vol de croisière est de faire converger le vecteur d'état $(h \ y \ V \ \gamma \ \chi)^\top$ à la consigne $(h_0 \ y_0 \ V_0 \ 0 \ 0)^\top$, indépendamment des conditions initiales, et sous contrainte de bornitudes des commandes en bilan aéro-propulsif e et incidence α .

Pour cela, nous commencerons par aborder le cas de la commande du vecteur vitesse $(V, \gamma, \chi)^\top$. Ensuite, nous proposerons une loi de commande pour la dynamique latérale. Enfin, nous combinerons les résultats obtenus afin de commander simultanément les dynamiques latérale et longitudinale.

4.4 Commande du vecteur vitesse

On s'intéresse à la stabilisation de l'équilibre $(V_0, 0, 0)$, afin d'exposer la logique de commande.

4.4.1 Synthèse d'une commande gradient

Dans un premier temps, on s'intéresse à la stabilisation de l'équilibre $(V_0, 0, 0)$. La dynamique du vecteur vitesse est donnée par le système

$$\dot{V} = e - g(V) \sin \gamma, \quad \dot{\gamma} = \frac{g(V)}{V} (\alpha_\gamma \Lambda(V) - \cos \gamma), \quad \dot{\chi} = -\frac{g(V)\Lambda(V)}{V \cos \gamma} \alpha_\chi. \quad (4.7)$$

En suivant la même démarche que la Section 3.5, nous pouvons commander le vecteur vitesse par commande gradient. En effet, considérons la fonction $Z : \mathbb{R} \times \mathbb{S} \times \mathbb{S} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$Z(V, \gamma, \chi) = \alpha_0 \int_{V_0}^V \Lambda(s) ds + V_0 - V \cos \gamma + (1 - \cos \chi), \quad (4.8)$$

où $\alpha_0 = \Lambda(V_0)^{-1}$. Celle-ci est nulle en $(V_0, 0, 0)$ et strictement positive partout ailleurs sur $\mathcal{C} \times \mathbb{S}$, avec \mathcal{C} défini par (3.36). La dérivée de Z le long des trajectoires est

$$\begin{aligned} \overbrace{\dot{Z}(V, \gamma, \chi)}^{\cdot} &= \left(\frac{\Lambda(V)}{\Lambda(V_0)} - \cos(\gamma) \right) e \\ &\quad + g(V) (\alpha_\gamma - \Lambda(V_0)^{-1}) \sin \gamma - \sin \chi \frac{g(V)\Lambda(V)}{V \cos \gamma} \alpha_\chi. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Dans le but de stabiliser asymptotiquement l'équilibre $(V_0, 0, 0)$, et dans la mesure où $V \cos \gamma$, $g(V)$ et $\Lambda(V)$ sont positifs, le choix le plus simple est de prendre la commande gradient

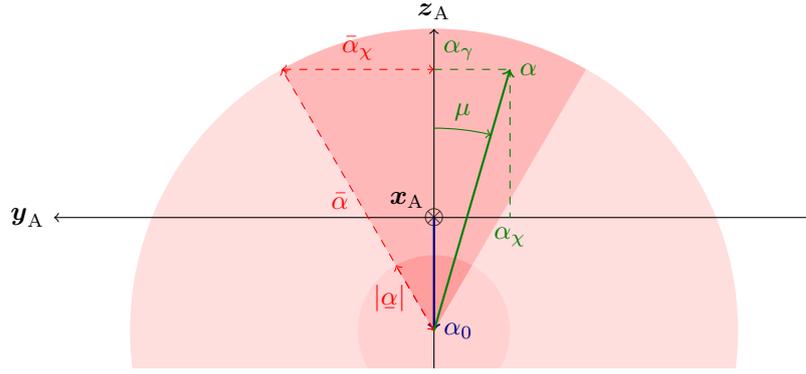
$$e = -k_V \left(\frac{\Lambda(V)}{\Lambda(V_0)} - \cos \gamma \right), \quad \alpha_\gamma = \alpha_0 - k_\gamma \frac{\Lambda(V)g(V)}{\Lambda(V_0)g(V_0)} \sin \gamma, \quad \alpha_\chi = k_\chi \sin \chi. \quad (4.10)$$

4.4.2 Prise en compte des saturations d'incidence

Motivation

Les variables utilisées pour le contrôle sont $(e, \alpha_\gamma, \alpha_\chi)$, avec

$$\alpha_\gamma = \alpha \cos \mu, \quad \alpha_\chi = \alpha \sin \mu, \quad (4.11)$$

FIGURE 4.1 – Schéma illustrant les possibilités de d'excursion du couple (α, μ) .

et nous devons préciser les limites d'excursion de ces différentes variables, car l'incidence du véhicule, liée aux contrôles α_χ et α_γ par $\alpha = \sqrt{\alpha_\chi^2 + \alpha_\gamma^2}$, est soumise à des contraintes.

Pour cela, gardons à l'esprit que les coordonnées originales de commande pour le système de guidage sont (e, α, μ) . Il serait donc inapproprié de commander le véhicule avec les variables $(e, \alpha_\gamma, \alpha_\chi)$, en faisant l'hypothèse que celles-ci doivent appartenir à un cube. En pratique, les contraintes physiques sur e et α sont plutôt de nature à définir un cylindre voire un tube dans l'espace $(e, \alpha_\gamma, \alpha_\chi)$.

Approche choisie

La Figure 4.1 montre l'ensemble des forces transversales au repère aérodynamique qu'il est possible d'engendrer sous une hypothèse d'incidence α bornée. Il s'agit du disque extérieur, de rayon $\bar{\alpha}$. Il nous faut choisir comment allouer les variables de commande $(\alpha_\gamma, \alpha_\chi)$ tout en garantissant leur réalisabilité sous une contrainte de bornitude de α , notée ici $\bar{\alpha}$.

Le contrôle de la pente de vitesse est particulièrement critique à vitesse hypersonique. Nous faisons donc le choix d'allouer la commande en incidence de façon à utiliser *en priorité* la portance afin de commander la pente de vitesse γ . Supposons donc avoir défini

- une borne $\bar{\alpha}$ sur la prise d'incidence, de sorte que $0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}$;
- une commande α_γ bornée de telle sorte que $|\underline{\alpha}_\gamma| \leq \alpha_\gamma \leq \bar{\alpha}_\gamma$;

Alors nous pouvons déduire à tout moment un couple de bornes $(\underline{\alpha}_\chi, \bar{\alpha}_\chi)$ pour la commande de la dynamique latérale α_χ .

Nous proposons de définir une marge $\epsilon_\alpha > 0$ arbitrairement petite, et de poser $\max(|\underline{\alpha}_\gamma|, |\bar{\alpha}_\gamma|) = \bar{\alpha} - \epsilon_\alpha$. Alors nous déduisons

$$\alpha_\chi = \min_{(\alpha, \mu) \in [0, \bar{\alpha}] \times \mathbb{S}} \alpha \sin \mu, \quad \bar{\alpha}_\chi = \max_{(\alpha, \mu) \in [0, \bar{\alpha}] \times \mathbb{S}} \alpha \sin \mu, \quad (4.12)$$

sous la contrainte $\alpha_\gamma = \alpha \cos \mu$, avec $0 \leq \alpha_\gamma \leq \bar{\alpha} - \epsilon_\alpha$.

En résumé, à supposer l'existence d'une commande α_γ telle que $|\alpha_\gamma| \leq \bar{\alpha} - \epsilon_\alpha$, nous pouvons calculer

$$\begin{aligned} \text{d'abord} & \quad \bar{\alpha}_\chi = \sqrt{\bar{\alpha}^2 - \alpha_\gamma^2}, \\ \text{puis} & \quad \alpha_\chi, \\ \text{puis} & \quad \mu = \text{atan2}(\alpha_\chi, \alpha_\gamma), \\ \text{ainsi que} & \quad \alpha = \sqrt{\alpha_\gamma^2 + \alpha_\chi^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, dès que nous avons connaissance de α_γ , nous disposons d'un couple de bornes $(\underline{\alpha}_\chi, \bar{\alpha}_\chi) = (-\bar{\alpha}_\chi, \bar{\alpha}_\chi)$ permettant de calculer α_χ tel que $\alpha \leq \bar{\alpha}$ tout au long de la trajectoire du vol. De plus, puisque $\epsilon_\alpha > 0$, il se trouve que $\bar{\alpha}_\chi > 0$.

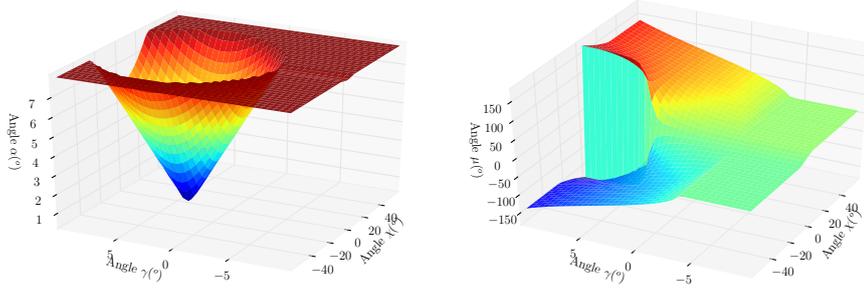


FIGURE 4.2 – Lois de commande en roulis aérodynamique μ et incidence α , fonctions de la pente γ et de l'erreur de cap χ .

Remarque 4.2. Pour l'étude du problème de stabilisation en croisière, nous imposons un dérapage nul ainsi qu'une incidence positive ou nulle. Ceci s'explique par le fait que dans le cadre d'un vol aérobic, les prises d'incidence négatives dégradent la disponibilité de la propulsion. Donc, puisque les prises d'incidences sont d'une part plus étendues dans le domaine positif, et d'autre part qu'elle favorisent la disponibilité du facteur de propulsion, elles sont systématiquement privilégiées ici. On peut cependant imaginer d'autres contextes, où, prendre de faibles incidences négatives et un faible dérapage peut être très bénéfique. C'est le cas par exemple pour une consigne de trajectoire balistique. Dans ce cas précis, l'incidence étant proche de zéro, le choix de l'allocation de commande est un problème beaucoup plus délicat que le cas que nous exposons ici.

4.4.3 Application : stabilisation du vecteur vitesse par commande gradient

Définition de la commande

À partir de (4.10), un contrôleur en (e, α, μ) stabilisant l'équilibre $(V_0 \ 0 \ 0)^\top$ est donné par

$$e = \text{sat} \left\{ -k_e \left(\frac{\Lambda(V)}{\Lambda(V_0)} - \cos \gamma \right), \underline{e}, \bar{e} \right\}, \quad \mu = \text{atan2}(\alpha_\chi, \alpha_\gamma), \quad (4.13a)$$

$$\alpha = \sqrt{\alpha_\gamma^2 + \alpha_\chi^2}, \quad \bar{\alpha}_\chi = \sqrt{\bar{\alpha}^2 - \alpha_\gamma^2}, \quad (4.13b)$$

$$\alpha_\chi = \text{sat}(k_\chi \sin \chi, -\bar{\alpha}_\chi, \bar{\alpha}_\chi), \quad \alpha_\gamma = \text{sat}(1/\Lambda(V_0) - k_\gamma \gamma, 0, \bar{\alpha} - \epsilon_\alpha), \quad (4.13c)$$

où k_e , k_γ et k_χ sont des gains de réglage, $\epsilon_\alpha > 0$ et \underline{e} , \bar{e} , et $\bar{\alpha}$ sont des bornes de commande.

Simulation

La Figure 4.2 illustre le comportement de la commande (4.13). Nous pouvons remarquer deux choses. La première est que nous avons bel et bien une excursion de la commande α qui est globalement bornée, ce qui était une de nos préoccupations initiales. La seconde est que nous pouvons observer une singularité dans la définition de μ dans le cas d'incidences faibles. C'est un problème inhérent à une stratégie de commande sans dérapage. Pour palier ce problème il faudrait combiner un vol à virage incliné avec un vol faiblement dérapé. Voir également la Remarque 4.2.

Les Figures 4.4 et 4.3 montrent un résultat de simulation avec des conditions d'initialisation illustrant l'allocation de commande qui donne priorité à la commande de la pente de vitesse. Le modèle de simulation utilisé est un modèle relativement simple, et proche du modèle de comportement :

$$\dot{V} = e - g(V) \sin \gamma, \quad \dot{\chi} = V \cos \chi \cos \gamma, \quad (4.14a)$$

$$V \dot{\gamma} = g(V)(\alpha \rho(h) \Lambda(V) \cos \mu - \cos \gamma), \quad \dot{h} = V \sin \gamma, \quad (4.14b)$$

$$V \cos \gamma \dot{\chi} = -\alpha \rho(h) g(V) \Lambda(V) \sin \mu, \quad \dot{\gamma} = V \sin \chi \cos \gamma. \quad (4.14c)$$

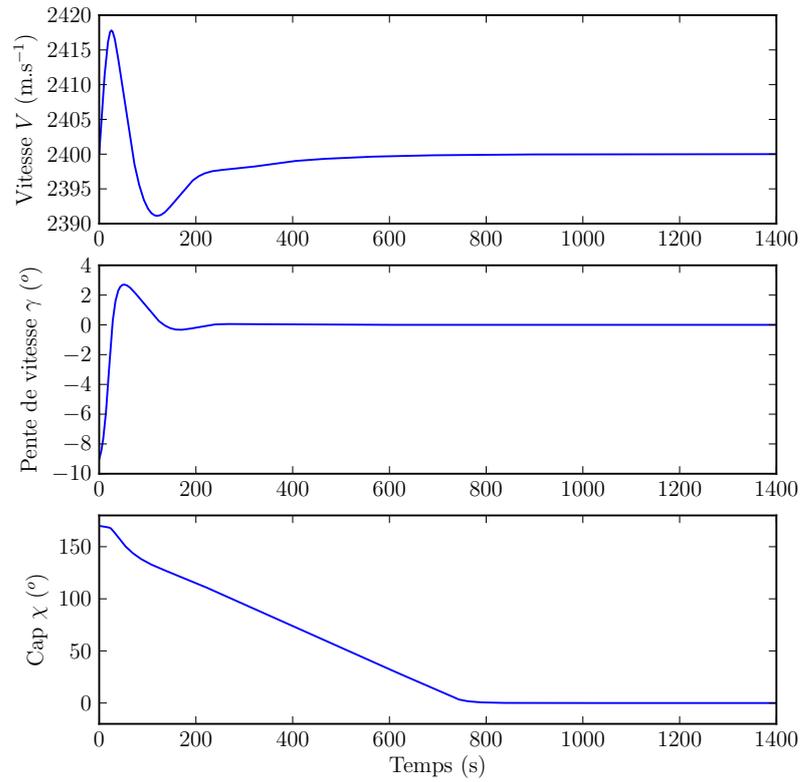
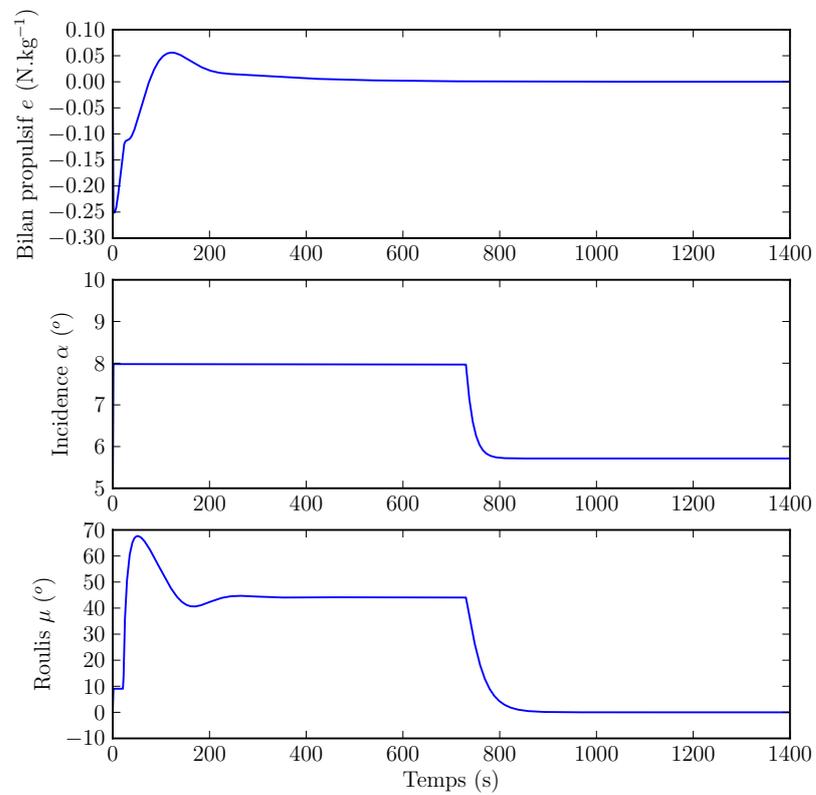


FIGURE 4.3 – Résultats de simulation : état (V, γ, χ) et commandes de vol (e, α, μ) . Notons la périodicité en χ .



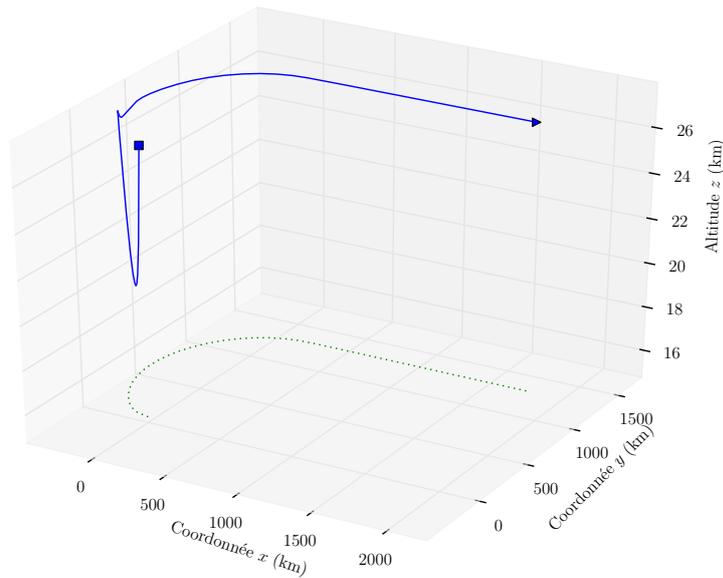


FIGURE 4.4 – Résultats de simulation : trajectoire du vol.

Le véhicule est initié avec une vitesse de 2400 m.s^{-1} , une pente de vitesse de -9° , un cap à 170° et une altitude de 27 km . La consigne en cap est 0° . Avec ce contrôleur, la convergence asymptotique de l'altitude et de l'écart de trajectoire n'est bien sûr pas assurée. On remarque que ce cas d'initialisation est tel que le vol commence par commander la pente en allouant l'essentiel de l'incidence disponible. C'est seulement ensuite, au bout de quelques secondes, qu'une prise de roulis est effectuée pour corriger le cap. De la sorte, on vérifie bien que la consigne d'incidence totale α reste bornée au cours du vol, ce qui était une de nos préoccupations initiales.

4.5 Stabilisation de la dynamique latérale du véhicule

Dans la mesure où nous nous intéressons à commander le véhicule avec une incidence bornée, le découplage des entrées α_χ et α_γ ne peut avoir de sens que si nous sommes en mesure de proposer une loi de commande qui stabilise l'équilibre de (4.6) à la consigne $(y_0, 0)$ avec une entrée dont l'amplitude est arbitrairement bornée. C'est ce que nous proposons dans cette section. Une fois cette loi de commande établie, il suffira d'allouer la commande en respectant la borne sur la valeur d'incidence.

4.5.1 Le modèle de comportement

Étant donné le domaine de vol considéré, $\cos \gamma$ n'est jamais nul et le changement de temps $d\tau = V \cos \gamma dt$ est admissible et permet de récrire (4.6) en

$$\overset{\circ}{y} = \sin \chi, \quad \overset{\circ}{\chi} = -\frac{g(V)\Lambda(V)}{(V \cos \gamma)^2} \alpha_\chi, \quad (4.15)$$

où $\overset{\circ}{}$ signifie $\frac{d}{d\tau}$. Ce système est un double intégrateur non linéaire. Notre objectif est d'assurer la stabilisation asymptotique de l'équilibre $(y_0, 0)$ avec α_χ arbitrairement borné. Dans cette section, nous considérons faiblement couplées les dynamiques longitudinales et latérales, et nous notons

$$\frac{g(V)\Lambda(V)}{(V \cos \gamma)^2} = a(t). \quad (4.16)$$

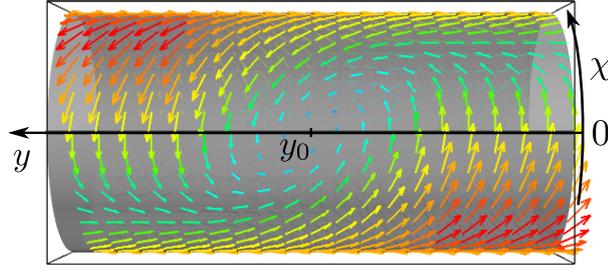
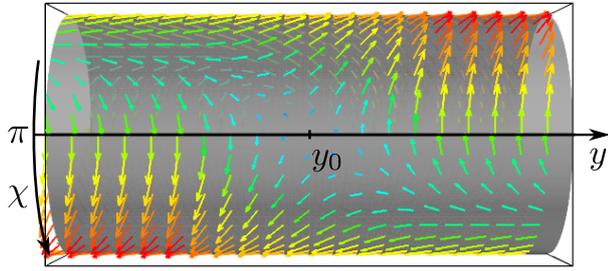


FIGURE 4.5 – Tracé du flot du système (4.17) commandé par la loi de guidage (4.18), dans l'espace des phases, pour $a(t) = 1$, $k(t) = 2$, $\lambda = 0,5$, $k_\phi = 1$ (face \mathbb{S}^+ ci-dessus ; face \mathbb{S}^- ci-dessous).



Le modèle de comportement considéré se résume donc à

$$\dot{y} = \sin \chi, \quad \dot{\chi} = -a(t)\alpha_\chi, \quad (4.17)$$

et nous avons pour objectif de commander ce système à la consigne $(y_0, 0)$.

4.5.2 Synthèse par domination

La structure de ce système autorise de nombreuses synthèses de loi de commande : par inversion, par rétropropagation, etc. Cependant, nous recherchons une loi de commande possédant une tolérance aux saturations de l'entrée et aux incertitudes de modèle. Nous proposons donc par la suite une technique de synthèse par commande gradient. D'autres propositions de commande sont discutées dans la Section 4.7.

Théorème 4.1. *Pour tout $\lambda \in]0 ; 1[$, $a(t) > \underline{a} > 0$ et $k(t) > \underline{k} > 0$, il existe un gain k_ϕ tel que le système (4.17) commandé par*

$$\alpha_\chi = k(t)(\lambda \sin \chi + (1 - \lambda)\phi(y) |\cos \chi|) < k(t), \quad (4.18)$$

où $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par $\phi(s) = \text{sat}(k_\phi(s - y_0), -1, 1)$ possède un équilibre $(y, \chi) = (y_0, 0)$ asymptotiquement stable avec $(\mathbb{R} \times \mathbb{S}^+)$ comme bassin d'attraction, où $\mathbb{S}^+ = \{\chi \in \mathbb{S} : \cos \chi > 0\}$.

La Figure 4.5 montre le flot du système (4.17) commandé par la loi de guidage (4.18) dans l'espace des phases.

Démonstration du Théorème 4.1. Considérons la fonction $Y : \mathbb{R} \times \mathbb{S}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par

$$Y(y, \chi) = -\lambda \ln(\cos(\chi)) + (1 - \lambda)\chi\phi(y) + l(1 - \lambda) \int_{y_0}^y \phi(s) ds. \quad (4.19)$$

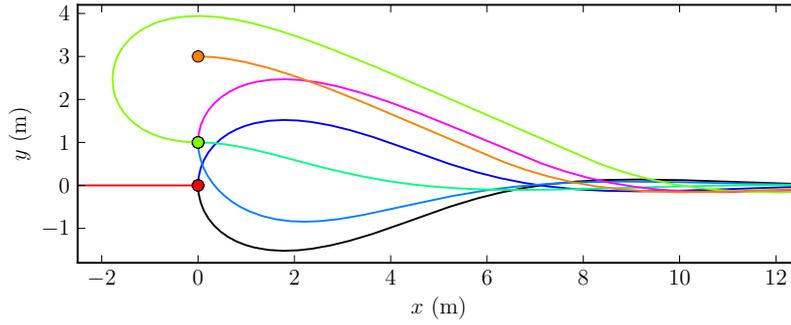


FIGURE 4.6 – Trajectoires, dans l'espace physique, d'un véhicule commandé par la loi de guidage (4.18). Le véhicule est initialisé à l'abscisse $x = 0$, pour différentes variations d'ordonnée y et de cap χ .

Elle est radialement non bornée, nulle en $(y, \chi) = (y_0, 0)$ et positive partout ailleurs si $k_\phi \leq \lambda l / (1 - \lambda)$, $\forall y \in \mathbb{R}$. En effet, son gradient défini par

$$\frac{\partial Y}{\partial \chi} = \lambda \tan(\chi) + (1 - \lambda)\phi(y), \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = (1 - \lambda)(\chi\phi'(y) + l\phi(y)) \quad (4.20)$$

est nul si $(1 - \lambda) \arctan(\phi(y))\phi'(y)/\lambda = l\phi(y)$, dont $\phi(y) = 0$ est l'unique solution si $l \geq (1 - \lambda)k_\phi/\lambda$.

La dérivée de $Y(y, \chi)$ le long des trajectoires est

$$\overline{Y(y, \chi)} = -a(t)(\lambda \tan(\chi) + (1 - \lambda)\phi(y))\alpha_\chi + (1 - \lambda)(\chi\phi'(y) + l\phi(y))\sin \chi. \quad (4.21)$$

Posons $\alpha_\chi = k(t)v$, avec $v = \lambda \sin \chi + (1 - \lambda) \cos \chi \phi(y)$. Nous avons

$$\overline{Y(y, \chi)} = -\frac{a(t)k(t)v^2}{\cos \chi} + \frac{lv \sin \chi}{\cos \chi} + \sin^2 \chi \left[(1 - \lambda) \frac{\chi\phi'(y)}{\sin \chi} - \frac{\lambda l}{\cos \chi} \right]. \quad (4.22)$$

Puisque, par l'inégalité de Young, $2lv \sin \chi \leq \underline{a}k v^2 + (\underline{a}k)^{-1}l^2 \sin^2 \chi$ et puisque¹ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $|\chi| < |\tan \chi|$, alors

$$\overline{Y(y, \chi)} \leq -\frac{1}{2} \frac{\underline{a}k v^2}{\cos \chi} + \frac{\sin^2 \chi}{\cos \chi} \left[\frac{l^2}{2\underline{a}k} + (1 - \lambda)k_\phi - \lambda l \right]. \quad (4.23)$$

On peut donc toujours fixer l et k_ϕ suffisamment petit pour garantir la négativité de la dérivée de $Y(y, \chi)$ le long des trajectoires. Il suffit par exemple de sélectionner

$$l < \frac{1}{2} \lambda \underline{a}k, \quad k_\phi < \frac{\lambda l}{4(1 - \lambda)} = \frac{\lambda^2 \underline{a}k}{8(1 - \lambda)}. \quad (4.24)$$

Dans ce cas, l'équilibre $(y_0, 0)$ est asymptotiquement stable, avec un bassin d'attraction contenant le demi cylindre $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^+$. \square

Une illustration du comportement du système (4.17) commandé par la loi de guidage (4.18) est donnée Figure 4.6, pour différentes configurations de départ. On remarque que les débattements sont amples, ce qui est une conséquence de la bornitude de la loi de commande. On remarque également que le respect de la périodicité du système à pour conséquence directe l'existence d'un point d'équilibre instable lorsque le véhicule est initialisé à $(y_0, (2n + 1)\pi)$, avec $n \in \mathbb{Z}$.

1. Sur $[0; \frac{\pi}{2}[$, $(x - \tan x)' = -\tan^2 x$ implique que $x - \tan x$ est strictement décroissante, sauf pour $x = 0$, où $x = \tan(x)$. Puisque $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \tan x = +\infty$, la monotonie de $x - \tan x$ implique que $|\tan x| \geq |x|$ sur l'ensemble du domaine considéré. Par symétrie, la propriété s'étend sur \mathbb{S}^+ .

4.6 Synthèse finale de la loi de guidage 3D *Bank To Turn*

À partir des résultats des sections précédentes, nous pouvons proposer une loi de guidage commandant simultanément les dynamiques longitudinale et latérale. Rappelons que l'objectif de commande en vol de croisière est de faire converger le vecteur d'état $(h \ y \ V \ \gamma \ \chi)^\top$ vers la consigne $(h_0 \ y_0 \ V_0 \ 0 \ 0)^\top$. Étant donné que nous découplons les dynamiques longitudinale et latérale par un changement de variable, il est aisé de contrôler une croisière par la combinaison des lois de commande (3.57) et (4.18).

Le modèle du véhicule considéré est

$$\dot{V} = e - g(V) \sin \gamma, \quad \dot{h} = V \sin \gamma, \quad (4.25a)$$

$$\dot{\gamma} = g(V) \frac{\alpha \cos \mu \Lambda(V) - \cos \gamma}{V}, \quad \dot{x} = V \cos \chi \cos \gamma, \quad (4.25b)$$

$$\dot{\chi} = -g(V) \frac{\alpha \sin \mu \Lambda(V)}{V \cos \gamma}, \quad \dot{y} = V \sin \chi \cos \gamma. \quad (4.25c)$$

La loi de guidage proposée est alors

$$\alpha_c = \alpha_\chi^2 + \alpha_\gamma^2, \quad \mu_c = \text{atan2}(\alpha_\chi, \alpha_\gamma), \quad \eta_c = \frac{C_d(\alpha, \delta)}{2\varepsilon(\alpha)} S_{\text{ref}} S(V) V^2 + e_c, \quad (4.26)$$

où

$$\alpha_\gamma = \text{sat} \left(\alpha_0 - k_\gamma \frac{\Lambda(V)g(V)}{\Lambda(V_0)g(V_0)} \sin \gamma, \underline{\alpha}_\gamma, \bar{\alpha}_\gamma \right) - V \frac{\psi'_\gamma(h - h_0)}{\Lambda(V)g(V)}, \quad (4.27a)$$

$$\alpha_\chi = \sqrt{\bar{\alpha}^2 - \alpha_\gamma^2} \left[\frac{k_\chi}{1 + k_\chi} \sin \chi + \frac{1}{1 + k_\chi} |\cos \chi| \psi'_\chi(y - y_0) \right], \quad (4.27b)$$

$$e_c = \text{sat} \left(-k_V \frac{\rho(h)\varepsilon(\alpha)}{m} \left(\frac{\Lambda(V)}{\Lambda(V_0)} - \cos \gamma + \frac{V}{g(V)} \psi'_V(h + \varrho(V) - E_0) \right), \underline{\eta}, \bar{\eta} \right). \quad (4.27c)$$

Les fonctions ψ'_\star sont définies par

$$\psi'_\gamma(s) = \text{sat}(k_{\psi_\gamma} s, \underline{h}_\alpha, \bar{h}_\alpha), \quad (4.28)$$

$$\psi'_V(s) = \text{sat}(k_{\psi_V} s, \underline{E}, \bar{E}), \quad (4.29)$$

$$\psi'_\chi(s) = \text{sat}(k_{\psi_\chi} s, -1, 1), \quad (4.30)$$

et les principaux degrés de liberté du contrôleur sont les gains $(k_V \ k_\gamma \ k_\chi \ k_{\psi_V} \ k_{\psi_\gamma} \ k_{\psi_\chi})$, strictement positifs. La marge ϵ_α peut être choisie arbitrairement petite. Les limites de saturation sont

$$\underline{\eta} < \min_{(V, \alpha, \delta)} \frac{C_d(\alpha, \delta)}{2\varepsilon(\alpha)} S_{\text{ref}} S(V) V^2 < \max_{(V, \alpha, \delta)} \frac{C_d(\alpha, \delta)}{2\varepsilon(\alpha)} S_{\text{ref}} S(V) V^2 < \bar{\eta}, \quad (4.31a)$$

$$\underline{\alpha}_\gamma < \alpha_0 + \min_{(h, V)} V \frac{\psi'_\gamma(h - h_0)}{\Lambda(V)g(V)} < \alpha_0 + \max_{(h, V)} V \frac{\psi'_\gamma(h - h_0)}{\Lambda(V)g(V)} < \bar{\alpha}_\gamma, \quad (4.31b)$$

avec $\bar{\alpha} = \max(|\underline{\alpha}_\gamma|, |\bar{\alpha}_\gamma|) - \epsilon_\alpha$, où $\epsilon_\alpha > 0$ peut être choisie arbitrairement petit. Aussi, nous avons les bornes

$$\underline{h}_\alpha < 0 < \bar{h}_\alpha, \quad \underline{E} < 0 < \bar{E}. \quad (4.31c)$$

Rappelons également que, conformément à la Remarque 3.4, les contrôles obtenus peuvent être globalement bornés sur tout le domaine de vol si les contraintes sur les entrées sont définies à cette fin.

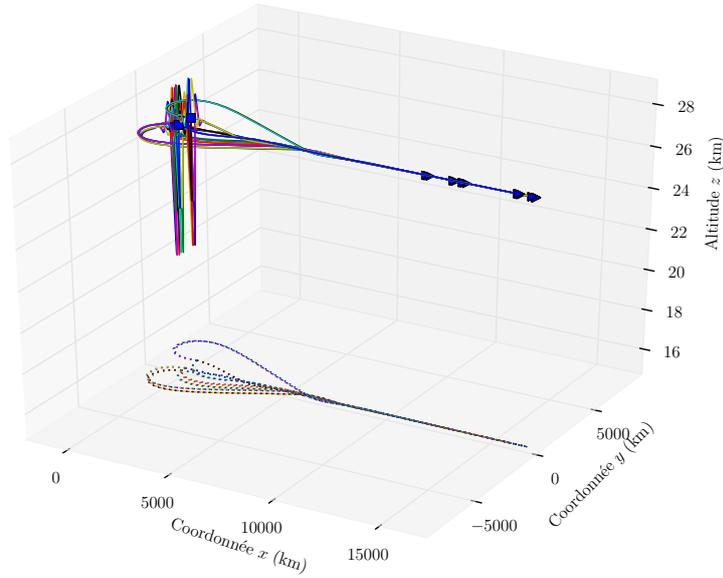


FIGURE 4.7 – Résultats de simulation : trajectoires commandées à la consigne $(h_0 ; V_0 ; y_0) = (27\,000 ; 2\,400 ; 0)$.

4.6.1 Simulation

Les Figures 4.7 et 4.8 montrent un résultat de simulation avec des conditions d'initialisation illustrant l'allocation de commande qui donne priorité à la commande de la pente de vitesse. Du fait de la complexité du contrôleur, l'étude précise des trajectoires est plus laborieuse que dans le cas de la Figure 4.3. Toutefois, la convergence des trajectoires sur le point de consigne, et la bornitude de l'excursion de l'incidence α apparaît très nettement.

4.7 Discussion sur la synthèse par d'autres approches

Les sections précédentes ont été basées sur la loi de commande (4.18). Celle-ci a une particularité, qui est de poser le problème de guidage comme un problème de régulation autonome. En effet, la plupart des travaux existants en matière de guidage reposent généralement soit sur un problème de poursuite (c'est le cas de la navigation proportionnelle), soit sur un problème de régulation linéaire autour d'une trajectoire.

Nous proposons dans cette section trois synthèses de commande qui ont retenu notre attention au cours de nos recherches, parce qu'elles tendent à poser le problème de guidage comme un problème de régulation² autonome. Il s'agit toute trois de synthèse Lyapunov, mais elles supposent des démarches et des propriétés sensiblement différentes.

4.7.1 Définition du problème

Le problème que nous considérons est le suivant : stabiliser l'équilibre $(y_0, 0)$ du système

$$\dot{y} = \sin \chi, \quad \dot{\chi} = -a_0 \alpha_\chi, \quad (4.32)$$

où $a_0 > 0$ est une constante mal connue, avec une commande u bornée par $\bar{\alpha}_\chi(t)$, et en préservant la nature périodique du système.

2. Dans un sens, il s'agit de créer un « modèle interne » décrivant le problème de guidage de façon plus complète que de la façon d'un problème de poursuite.

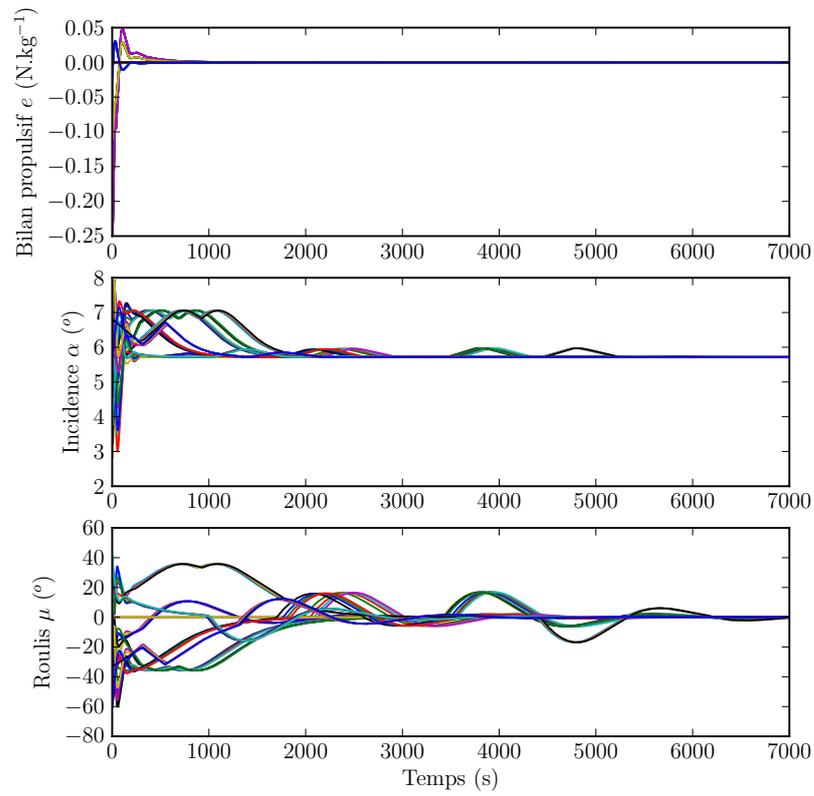
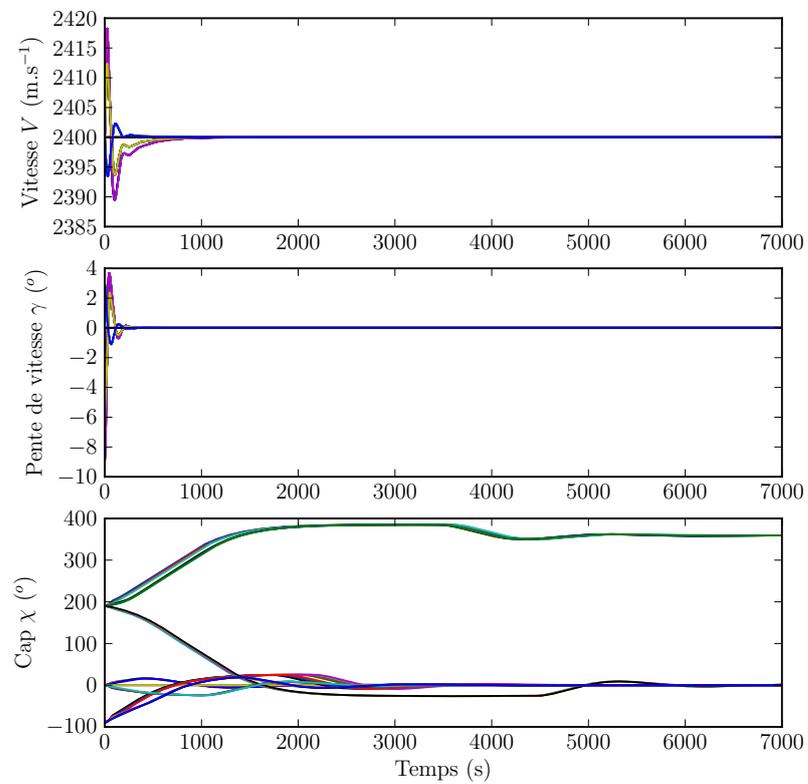


FIGURE 4.8 – Résultats de simulation : état et commandes de vol.



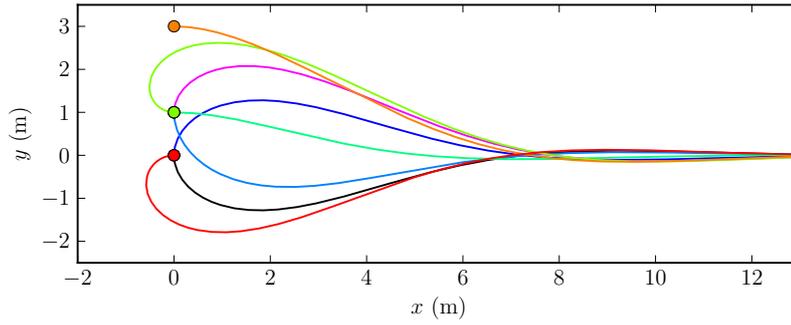


FIGURE 4.9 – Trajectoires, dans l'espace physique, d'un véhicule commandé par la loi de guidage (4.33). Le véhicule est initialisé à l'abscisse $x = 0$, pour différentes variations d'ordonnée y et de cap χ .

4.7.2 Synthèse Lyapunov

Dans Geri et Bertoni (2004), les auteurs proposent une loi de commande par assignation de fonction de Lyapunov. Leur objectif initial consiste à dépasser les techniques de navigation proportionnelle, en proposant une loi de guidage contrôlant un avion sur une orientation de référence plutôt que de poursuivre un point de passage. Celle-ci s'écrit

$$\alpha_\chi = k_0\chi + k_1 \arctan\left(\frac{y - y_0}{k_2}\right), \quad (4.33)$$

et fonctionne avec pour domaine d'attraction

$$\mathcal{A} = \{(y, \chi) : (y, \chi) \in]-\pi, \pi] \times]-\infty, \infty[\}, \quad (4.34)$$

si $k_0 > 0$, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$ et $k_0 > \frac{1}{2}k_1$. Cette dernière contrainte assure l'unicité de l'équilibre stabilisé.

Une illustration du comportement du véhicule commandé par la loi de guidage (4.33) est donnée Figure 4.9, pour différentes configurations de départ.

Cette loi de guidage ne résout pas tous les problèmes que nous nous posons ici. D'une part, elle n'offre pas de contrainte de bornitude pour toute valeur de χ , d'autre part, elle ne respecte pas la périodicité du système en χ .

Toutefois, poser le problème de guidage comme un problème de régulation plutôt qu'un problème de poursuite est une démarche dont l'étude a contribué à faire émerger les propositions qui suivent.

4.7.3 Synthèse par *forwarding*

La présence d'un terme de commande « dérivée » en $\sin \chi$ dans (4.13) nous invite à réfléchir à une synthèse par *forwarding*. En effet, à supposer $\alpha_\chi = \sin \chi$, il apparaît de façon directe que $\frac{d}{dt}(a_0 y + \chi) = 0$. C'est l'exploitation de cette propriété que nous proposons alors.

Considérons la fonction de Lyapunov

$$Y(y, \chi) = (1 - \cos \chi) + k_1 \psi_\chi(k_2(y - y_0) + k_3 \chi), \quad (4.35)$$

où $\psi_\chi(s) = \int_0^s \text{sat}(x, -1, 1) dx$, et posons $\alpha_\chi = k_0 \sin \chi + v$. La dérivée de Y le long des trajectoires vérifie

$$\widehat{Y}(y, \chi) = k_1 k_2 \psi'_\chi(k_2(y - y_0) + k_3 \chi) \sin \chi - a_0 (\sin \chi + k_1 k_3 \psi'_\chi(k_2(y - y_0) + k_3 \chi)) (k_0 \sin \chi + v). \quad (4.36)$$

En posant $a_0 = k_0 k_2 k_3$, nous obtenons

$$\widehat{Y}(y, \chi) = -a_0 k_0 \sin^2 \chi - a_0 (\sin \chi + k_1 k_3 \psi'_\chi(k_2(y - y_0) + k_3 \chi)) v. \quad (4.37)$$

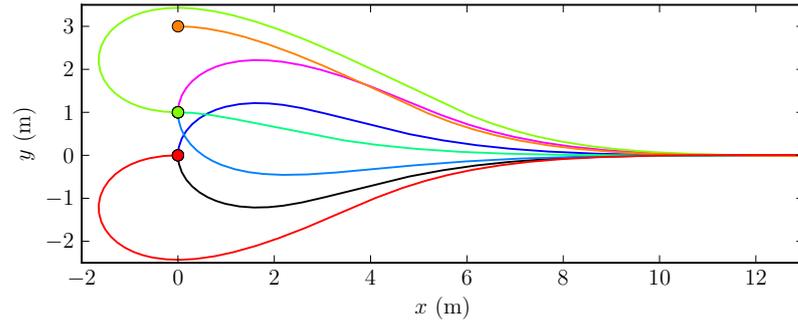


FIGURE 4.10 – Trajectoires, dans l’espace physique, d’un véhicule commandé par la loi de guidage (4.38). Le véhicule est initialisé à l’abscisse $x = 0$, pour différentes variations d’ordonnée y et de cap χ .

Une commande garantissant la négativité de la dérivée de Y le long des trajectoires est donc donnée par

$$\alpha_\chi = (k_0 + k_4) \sin \chi + k_1 k_3 k_4 ((a_0 k_0 k_3 (y - y_0) + k_3 \chi)), \quad (4.38)$$

avec k_0, k_1, k_3 et k_4 strictement positifs.

Une illustration du comportement du véhicule commandé par la loi de guidage (4.38) est donnée Figure 4.10, pour différentes configurations de départ.

Par rapport au problème que nous nous posons ici, cette loi de commande offre de bonnes propriétés de robustesse du fait de la synthèse par domination inhérente au *forwarding*, et elle permet des contraintes de borne sur χ . La conséquence de cette borne sur la commande est visible sur l’amplitude des trajectoires simulées, plus grandes que dans le cas de la Figure 4.9.

Cependant, la périodicité du système n’est pas respectée. De ce fait, il existe une infinité d’équilibres stables (y_e, χ_e) tels que $\chi_e = a_0 k_0 (y_e - y_0)$. La stabilisation de l’équilibre $(y_0, 0)$ n’est donc pas globale.

Par ailleurs, nous ne disposons pas d’un outil de synthèse permettant à la commande de respecter une borne arbitrairement petite $\bar{\alpha}_\chi$, évoluant arbitrairement au cours du temps. Dans le cas présent, le terme $k_0 \sin \chi$ dans (4.38) est indispensable à la commande et impossible à réduire arbitrairement au cours du temps.

4.7.4 Synthèse par annulation

Nous développons ici une approche originale, basée sur les fonctions de Lyapunov, et inspirée des synthèses précédentes.

Proposition 4.1. *Pour toute initialisation $(y, \chi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}$, il existe un équilibre $(y_0, 2n\pi)$ pour le système (4.17), avec $n \in \mathbb{Z}$, tel qu’il soit asymptotiquement stabilisé par la commande suivante :*

$$\alpha_\chi = k_\chi \sin \chi + k_{\psi_\chi} \psi'_\chi (y - y_0), \quad (4.39)$$

où ψ'_χ est donnée par $s \mapsto \text{sat}(s, -1, 1)$, avec k_χ et k_{ψ_χ} strictement positif.

Démonstration. À l’équilibre, le système commandé vérifie

$$\sin \chi = 0, \quad \psi'_\chi(0) = 0, \quad (4.40)$$

avec χ stabilisé à une valeur $\chi_e = 2n\pi$ ou $\chi_e = (2n + 1)\pi$ où $n \in \mathbb{Z}$. Cependant, seuls les équilibres donnés par $\chi_e = 2n\pi$ sont stables.

En effet, considérons ensuite la fonction de Lyapunov

$$Y(y, \chi) = k_{\psi_\chi} (1 - \cos \chi) + a_0 \psi_\chi (y - y_0), \quad (4.41)$$

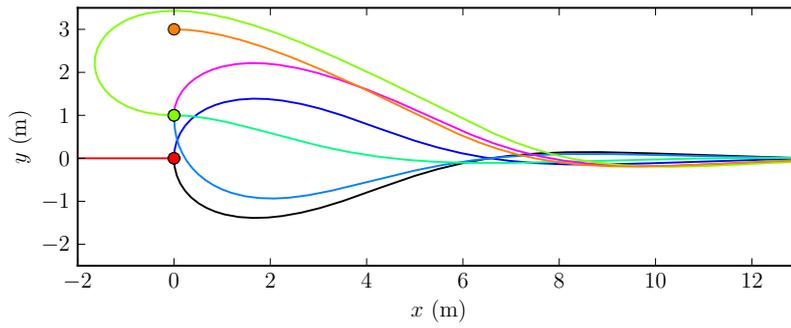


FIGURE 4.11 – Trajectoires, dans l'espace physique, d'un véhicule commandé par la loi de guidage (4.39). Le véhicule est initialisé à l'abscisse $x = 0$, pour différentes variations d'ordonnée y et de cap χ .

où $\psi_\chi(y - y_0) = \int_0^{y-y_0} \psi'_\chi(s) ds$. Sa dérivée le long des trajectoires vérifie

$$\widehat{Y}(y, \chi) = a_0 k_{\psi_\chi} \psi'_\chi(y - y_0) \sin \chi - a_0 \sin \chi (k_\chi \sin \chi + k_{\psi_\chi} \psi'_\chi(y - y_0)), \quad (4.42)$$

$$= -a_0 \sin^2 \chi, \quad (4.43)$$

ce qui établit la stabilité du point d'équilibre. L'instabilité des équilibres $(y_0, (2n + 1)\pi)$ s'établit directement à partir d'une étude locale. \square

Une illustration du comportement du véhicule commandé par la loi de guidage (4.39) est donnée Figure 4.11, pour différentes configurations de départ. On remarque que les débattements sont plus amples que dans le cas de la Figure 4.9, ce qui est une conséquence de la bornitude de la loi de commande. On remarque également que le respect de la périodicité du système à pour conséquence directe l'existence d'un point d'équilibre instable lorsque le véhicule est initialisé à $(y_0, (2n + 1)\pi)$, avec $n \in \mathbb{Z}$.

Cette synthèse par annulation résout une partie des contraintes du problème posé. Toutefois, elle ne possède pas la propriété de respecter une borne arbitrairement petite, évoluant en temps réel. Or, la Section 4.4 met en évidence la nécessité d'une telle propriété. Pour y parvenir, nous avons besoin de complexifier légèrement la commande (4.39) comme dans le résultat qui suit.

Proposition 4.2. *Pour toute initialisation $(y, \chi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}$, et quelque soit $\bar{\alpha}_\chi(t) > \epsilon > 0$, il existe un équilibre $(y_0, 2n\pi)$ pour le système (4.17), avec $n \in \mathbb{Z}$, tel qu'il soit asymptotiquement stabilisé par la commande suivante :*

$$\alpha_\chi = \bar{\alpha}_\chi(t)(1 - \lambda) \sin \chi + \psi'_\chi(y - y_0), \quad (4.44)$$

où ψ'_χ est donnée par $s \mapsto \text{sat}(k_{\psi_\chi} s, -\lambda \bar{\alpha}_\chi(t), \lambda \bar{\alpha}_\chi(t))$, avec k_χ et k_{ψ_χ} strictement positif, et $\lambda \in]0 ; 1[$. Par ailleurs, la commande α_χ reste à tout moment d'amplitude inférieure ou égale à $\bar{\alpha}_\chi(t)$.

Démonstration. Dans les situations où $k_{\psi_\chi} |y - y_0| < \lambda \bar{\alpha}_\chi(t)$, la preuve s'établit de la même façon que précédemment.

Le problème se pose dans le cas où $\psi'_\chi(y - y_0)$ sature. Puisque la valeur de saturation varie arbitrairement avec le temps, la preuve précédente ne s'applique pas. Toutefois, nous pouvons remarquer que lorsque $\psi'_\chi(y - y_0)$, les trajectoires sont à chaque instant de nature à attirer y vers l'ensemble $\{y \in \mathbb{R} : |\psi'_\chi(y - y_0)| < \lambda \bar{\alpha}_\chi(t)\}$. En effet, supposons $y > y_0$ avec $\psi'_\chi(y - y_0)$ saturé à la valeur $\lambda \bar{\alpha}_\chi(t)$. Alors, le système

$$\dot{\chi} = -a_0 \bar{\alpha}_\chi(t) ((1 - \lambda) \sin \chi + \lambda) \quad (4.45)$$

possède un unique équilibre stable vérifiant $\sin \chi = -\lambda/(1 - \lambda)$. De ce fait, il existe une durée dt au delà de laquelle y décroît, entraînant la désaturation de $\psi'_\chi(y - y_0)$.

Le raisonnement opposé s'applique dans le cas où $y < y_0$. \square

4.8 Conclusion

Nous avons montré dans ce Chapitre comment les travaux développés au Chapitre 3 peuvent être étendus afin de synthétiser une commande de guidage en virage incliné (BTT) amenant la trajectoire du véhicule sur une consigne de vitesse, altitude et cap. De fait, l'extension est directe dans l'hypothèse où le véhicule évolue à dérapage nul. Cette configuration nous permet, en effet, de découpler les dynamiques longitudinale et latérale par un changement de variable afin de pouvoir les commander de façon indépendante. En pratique, cette indépendance est toutefois remise en cause par la nature des bornes imposées sur la valeur des commandes, ce qui nous a imposé le développement d'une loi de commande originale pour commander la dynamique latérale.

Cette loi de commande est robuste aux incertitudes, ce qui est une façon possible de s'affranchir des effets de la méconnaissance du coefficient de portance. Elle possède également des propriétés de bornitude, et nous disposons d'une grande latitude pour choisir ses gains de réglage sans que des « grand gains » aient été imposés par la synthèse.

Les conclusions que nous pouvons faire à ce stade sont donc similaires à celles formulées dans le cas de la commande en dimension réduite ; à savoir que nous obtenons des propriétés de stabilité semi-globales, sous une contrainte de prise d'incidence totale, sans que notre synthèse ne repose sur la connaissance exhaustive et parfaite du modèle du véhicule. Le résultat obtenu est ainsi une extension directe de la commande présentée au Chapitre 3, et nous avons proposé suffisamment de degrés de liberté pour permettre un réglage fin des propriétés asymptotiques d'une telle commande.

4.9 Perspectives

La loi de commande obtenue à l'issue de ce travail est une loi de guidage BTT. Il reste des étapes à accomplir afin de réaliser une loi de pilotage commandant directement les gouvernes du véhicule et s'appuyant sur l'étude de guidage précédemment décrite.

Cette étape pourrait par exemple être accomplie par *backstepping*, ou par une synthèse de commande plus simple, basée sur une hypothèse d'une séparation d'échelle de temps entre le pilotage et le guidage. Ce genre d'hypothèse permet d'obtenir un modèle de comportement triangulaire par bloc, afin de réaliser un pilote qui se limite à réaliser les consignes (incidence, roulis, dérapage) données par le guidage développé dans le présent chapitre. Un pilote de ce type est développé dans (Astolfi et al., 2008, Chapitre 9.3). Cependant, la technique de synthèse de commande employée par les auteurs est une technique d'annulation. La limite de ce genre de technique réside dans la nécessité de connaître les termes qu'il faut annuler ; c'est pourquoi les auteurs proposent d'ajouter un estimateur pour s'affranchir de la méconnaissance sur le système. Néanmoins, dans la mesure où les véhicules aérospatiaux sont conçus avec une marge statique positive, donc avec une dynamique dissipative, il nous semble intéressant et nécessaire d'étudier la synthèse de commande gradient au niveau du pilote, poursuivant en cela la démarche que nous avons menée au niveau du guidage.

Par ailleurs, la question du déphasage non minimal du modèle, induit par les effets de force directes des gouvernes, devra être reposée. Il est probable que la méthode que nous développons dans la sous-section 2.10.1 ne soit pas transposable de façon directe à un modèle en trois dimension, sauf si les effets de forces directes induites par des gouvernes latérales se révèlent négligeables. Pour l'affirmer, une étude basée sur des données aérodynamiques plus complète est nécessaire.

Enfin, dans un contexte différent qui relève plutôt de vols avec une forte manœuvrabilité, il serait intéressant de poursuivre des recherches sur la base de la Remarque 4.2. En effet, dans ce contexte il est avéré qu'un vol purement dérapé n'est pas satisfaisant pour manœuvrer le véhicule avec performance, mais il s'avère également qu'un vol non dérapé possède une singularité de commande, à incidence faible. Il est probable que seul un compromis entre ces deux stratégies de commande permettrait de tirer parti du meilleur des performances de tels véhicules.