

Gestion du contact

Ce chapitre a pour objectif de présenter la manière dont les contacts piéton-piéton et piéton-obstacle sont gérés dans le modèle proposé. Seront détaillés dans ce chapitre :

- ★ La détection du contact*
 - ★ Le traitement du contact*
 - ★ La comparaison de plusieurs approches permettant de gérer le contact*
-

PLAN DU CHAPITRE 2

2.1	Introduction	59
2.2	Mouvement des particules	61
2.3	La détection du contact	62
2.4	Traitement du contact	65
2.4.1	<i>DEM</i>	65
2.4.2	<i>NSM1</i>	66
2.4.3	<i>NSM2</i>	67
2.5	Aspects numériques des trois approches	70
2.5.1	<i>DEM</i>	71
2.5.2	<i>NSM1</i>	72
2.5.3	<i>NSM2</i>	72
2.6	Comparaison des trois approches	74
2.6.1	<i>NSM1</i> vs <i>NSM2</i>	74
2.6.2	<i>DEM</i> vs <i>NSM2</i>	77
2.7	Synthèse du chapitre	78

2.1 Introduction

Le but de ce chapitre est d'expliquer la manière dont sont gérés les contacts piéton-piéton et piéton-obstacle dans le modèle de foule proposé. Dans la mesure où nous cherchons à réaliser un modèle 2D discret de mouvement de foule de niveau opérationnel, nous nous sommes inspirés des modèles existants de la littérature de cette catégorie qui sont, de notre point de vue, les plus intéressants : le modèle de force sociale de Helbing [2] qui reste simple d'utilisation et flexible, et le modèle mathématique de Venel [10] qui contrairement au modèle de Helbing, permet de modéliser efficacement les évacuations denses de piétons. Ces modèles étant des adaptations à la foule de modèles gérant le mouvement de grains, nous avons étudié certains modèles issus des milieux granulaires.

Un milieu granulaire est par définition un ensemble discret de particules qui interagissent par contacts avec ou sans frottement et avec ou sans cohésion. Les particules peuvent être de taille plus ou moins grande et de forme plus ou moins complexe. Pour étudier ces milieux, de nombreuses méthodes dynamiques de simulations de l'évolution de systèmes de solides parfaitement rigides ont été développées depuis plusieurs décennies. Les méthodes les plus performantes sont celles qui traitent simultanément les collisions multiples. Ces méthodes sont appelées "Discrete Element Methods". Elles consistent à suivre individuellement chaque particule et lorsqu'un contact interparticulaire se produit, une loi de comportement locale détermine les mouvements résultants des particules impliquées. Ces méthodes peuvent être classées en deux catégories : les méthodes régulières, dites "smooth", et les non-régulières dites "non-smooth".

Pour les méthodes régulières, des approximations régularisantes sont utilisées. Le calcul des forces de contact qui empêchent l'interpénétration se fait par un calcul direct, i.e. les forces sont proportionnelles à la distance entre les particules. L'utilisation de ces lois de répulsion raides conduit à une légère interpénétration numérique des particules, et oblige à garder un pas de temps petit pour assurer la stabilité du schéma d'intégration temporel. Deux méthodes "smooth" sont le plus utilisées : la première est la méthode "Distinct Element Method" (*DEM*) développée dans les années 70 par P.A.Cundall pour l'étude de systèmes composés de rocs [54] puis pour les milieux granulaires [97]. Cette méthode a inspiré par la suite d'autres méthodes telle que la "Granular Element method" (*GEM*) de Kishino [98]. La seconde méthode "smooth" est la méthode de dynamique moléculaire (MD : Molecular Dynamics) [99]. Comme son nom l'indique, c'est une extension des méthodes permettant de modéliser le comportement des molécules aux particules macroscopiques.

En ce qui concerne les méthodes non-régulières, le calcul des forces de contact se fait par la résolution de systèmes locaux non-linéaires. La non-régularité de la méthode se retrouve dans trois aspects : une non-linéarité spatiale à cause de la condition géométrique de non interpénétration (utilisation d'inégalités au lieu d'égalités), une non-linéarité temporelle due au chocs entre particules (discontinuités de vitesses) et une non-linéarité de la loi de contact de part l'utilisation de lois non-régulières pour lier les forces aux paramètres de configuration (contact unilatéral). La méthode la plus utilisée dans les simulations de milieux granulaires est la méthode de dynamique des contacts (NSCD : Non Smooth Contact Dynamics) développée par Moreau et Jean [100–104]. Ils introduisent la notion de pseudo-potential pour résoudre le problème de contact et utilisent la notion de coefficient de restitution pour gérer les rebonds entre particules. Une approche similaire basée sur la théorie des chocs a été proposée par Frémond [105–108], inspirée par les travaux de Moreau, où les particules peuvent être de forme polyédrique au lieu de circulaire. Les vitesses des particules après contact sont déterminées avec une contrainte sur les vitesses pour empêcher l'interpénétration des particules. Le système composé des particules est considéré comme déformable, ses équations de mouvement résultent du principe des travaux virtuels, et les lois de comportement sont données par un pseudo-potential de dissipation. Dans l'approche proposée par Frémond, le rebond est caractérisé par un coefficient de dissipation à la place d'un coefficient de restitution utilisé par Moreau. De nombreux comportements peuvent être décrits de cette manière, l'exception étant le frottement de Coulomb car le frottement ne relève pas d'un pseudo-potential. Ce type de problème est pourtant assez central lorsqu'on parle de contact. Cette limite s'explique par le fait que la théorie des collisions proposée par Frémond est seulement une déclinaison d'un cadre théorique bien plus large (qui couvre des problèmes tels que les changements de phase, l'endommagement, etc.). Toutefois, même le cas d'un frottement de type Coulomb peut être traité par la théorie proposée [108, 109]. Il convient de souligner que cette approche n'est pas la seule disponible dans la littérature, particulièrement lorsqu'on parle de frottement. En effet, à partir du concept de bipotential, De Saxcé [110, 111] a proposé une modélisation du contact unilatéral avec frottement qui abouti à un bipotential de contact. Cette formulation élargit le champ d'action du pseudo-potential tout en permettant de conserver les avantages d'une écriture de loi d'évolution à l'aide d'une fonction à variables scalaires et d'une loi de sous-normalité.

Une autre approche non régulière intéressante, inspirée par les travaux de Moreau, a été proposée par Maury [63]. Dans cette approche, les contacts sont traités par des collisions parfaitement inélastiques grâce à l'utilisation d'une contrainte sur la position des particules.

Nous retenons 3 de ces modèles. Helbing a appliqué l'approche régulière des éléments distincts (*DEM*) aux mouvements de foule [2, 7, 47]. La force de contact entre deux piétons en collision est proportionnelle à la distance d'interpénétration des piétons et le contact n'est jamais parfaitement inélastique.

Le modèle de foule mathématique de Venel [10] est inspiré de l'approche non régulière proposée par Maury [63], que l'on notera "*NSM1*". La force de contact entre deux piétons en collision est calculée avec une contrainte sur le positionnement des piétons pour qu'il n'y ait jamais de chevauchement entre eux, et le contact est parfaitement inélastique.

Nous avons décidé de proposer un modèle de foule dans lequel le frottement entre piétons n'est pas considéré. Ainsi nous avons choisi d'appliquer aux mouvements de foule l'approche non régulière proposée par Frémond [105–108], que l'on notera "*NSM2*". Cette approche a été préférée à la méthode de dynamique des contacts (NSCD) car il a été démontré que

l'utilisation du coefficient de restitution est appropriée pour gérer la collision de deux billes mais que son extension aux chocs multiples n'est pas nécessairement juste et nécessite des vérifications mécaniques et énergétiques [106]. La force de contact entre deux piétons en collision est calculée avec une contrainte sur la vitesse relative de déformation entre les piétons. Cette approche, qui permet de choisir le comportement des piétons en collision, est originale pour son adaptation aux mouvements de foule, et a fait l'objet de plusieurs publications [5, 112–114].

Dans la suite, nous présentons et comparons les trois approches existantes issues des milieux granulaires : *DEM*, *NSM1* et *NSM2*. Trois étapes permettant de gérer les contacts seront étudiées pour chaque approche : la détection du contact, le traitement du contact et le mouvement des particules (Figure 2.1).

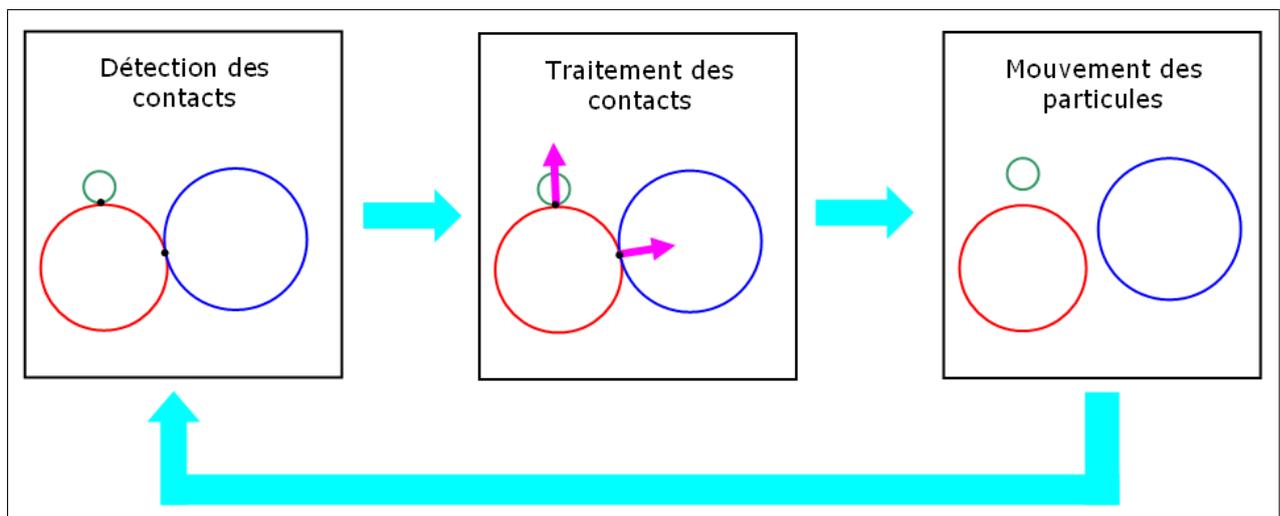


FIGURE 2.1 – Représentation des trois étapes permettant de gérer les contacts.

2.2 Mouvement des particules

Nous considérons un système constitué de N particules se déplaçant dans le plan. Nous notons ${}^t\mathbf{q}_i = (q_i^x, q_i^y) \in R^2$ et $\dot{\mathbf{u}}_i(t) = \frac{d\mathbf{q}_i(t)}{dt}$, respectivement la position et la vitesse du centre de la $i^{\text{ème}}$ particule. La rotation des particules est négligée (effets d'inertie négligés). Nous supposons que le vecteur de déplacement généralisé \mathbf{q} de taille $2N$, ${}^t\mathbf{q} = ({}^t\mathbf{q}_1, {}^t\mathbf{q}_2, \dots, {}^t\mathbf{q}_N)$, est suffisamment régulier pour nous permettre d'écrire l'équation de la dynamique pour chaque particule. Nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \underline{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) = \underline{f}(t) + \underline{g}(t) \\ \dot{\mathbf{q}}(t) = \dot{\mathbf{u}}(t) \end{cases} \quad (2.1)$$

où \underline{M} est la matrice de masse des particules de taille $2N \times 2N$; \underline{f} (resp. \underline{g}) est le vecteur de taille $2N$ des forces extérieures en l'absence de contact (resp. des forces de contact) appliquées au système.

Les trois approches s'appuient sur l'équation (2.1) mais en prenant toutes les trois des itinéraires différents pour déterminer le mouvement du système. L'équation (2.1) est discrétisée

en temps via un schéma d'intégration temporel. La détermination du mouvement des particules est liée au schéma d'intégration. Nous travaillons sur des intervalles de temps $[t^n, t^{n+1}]$, lorsque l'ensemble des forces est connu, nous cherchons à déterminer la position du système à l'instant t^{n+1} .

2.3 La détection du contact

Une méthode efficace de détection des contacts ou des proches voisins, dans un modèle 2D discret de mouvement de grains dans lequel les particules peuvent se déplacer continûment dans l'espace d'étude, est nécessaire quand le nombre de particules considérées est très grand, dans le but de réduire le temps de calcul numérique. Dans la suite, nous considérerons uniquement les interactions particule-particule dans la mesure où les interactions particule-obstacle sont gérées analogiquement.

Pour détecter les contacts entre particules, deux étapes sont à dissocier :

- la détermination des couples de particules susceptibles d'être en contact
- le calcul de la distance entre les deux particules

Cette seconde étape peut être plus ou moins complexe en fonction de la forme des particules modélisées. Les piétons étant représentés par des formes convexes, nous choisissons les particules de forme circulaire, de taille plus ou moins grande, pour deux raisons : d'une part, un disque représente assez bien un individu (vu de haut) et est une forme très simple ; d'autre part, d'un point de vue plus pratique, cette forme permet de réduire le coût de calcul des simulations numériques car elle permet de définir de façon simple certaines notions comme celle de normale à une particule par rapport à une autre ou encore de distance relative entre deux particules. Mais, il serait tout à fait envisageable de considérer d'autres représentations. Ainsi la distance relative D_{ij} entre les particules i et j , d'un système constitué de N particules se déplaçant dans le plan, est directement définie par :

$$D_{ij}(\underline{q}) = |\underline{q}_j - \underline{q}_i| - (r_i + r_j) \quad (2.2)$$

où r_i est le rayon de la particule i , et $|\underline{q}_j - \underline{q}_i| = \sqrt{(q_j^x - q_i^x)^2 + (q_j^y - q_i^y)^2}$

Il y a contact entre les particules i et j lorsque $D_{ij}(\underline{q}) = 0$, et un chevauchement lorsque $D_{ij}(\underline{q}) < 0$.

La difficulté est de proposer une méthode qui définisse la liste des contacts potentiels. Cette méthode doit être efficace pour ne pas consommer la majeure partie du temps de calcul. On trouve de nombreuses méthodes [21, 115–117] robustes, apparaissant souvent comme des extensions de celles présentées ci-dessous. Certaines possèdent des versions parallèles permettant de bénéficier des super-calculateurs [118]. Les différents algorithmes de détection ne seront pas détaillés ici même si ceux-ci sont d'un très grand intérêt.

Nous présentons quelques méthodes de détection du contact dans la suite.

Test de tous les contacts possibles :

La première idée est de tester tous les contacts possibles (Figure 2.2). Evidemment, cette méthode est la plus grossière car pour un système de N particules, il faudrait tester $\frac{N(N-1)}{2}$ couples de particules, soit un nombre d'opération de l'ordre de $O(N^2)$. Par exemple, quand le nombre de particules considérées est très grand, de l'ordre de 10^4 particules ou

plus, il faudrait calculer au minimum 49995000 distances à chaque pas de temps du schéma d'intégration, ce qui pourrait devenir très coûteux en temps de calcul.

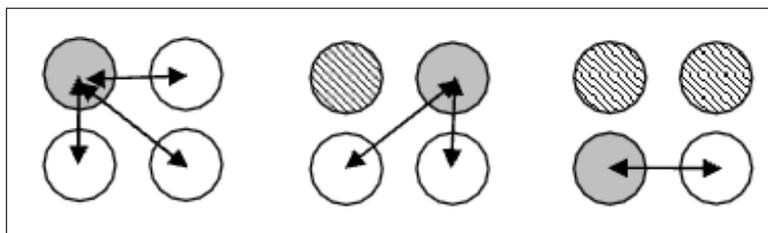


FIGURE 2.2 – Test de tous les contacts possibles [20].

Triangulation de Delaunay [118,119] :

Cette méthode consiste à réaliser un maillage triangulaire entre les centres des corps du système, nous permettant ainsi d'obtenir directement la liste des arêtes correspondant aux contacts potentiels (Figure 2.3). Les contacts sont alors recherchés en calculant la distance relative entre les particules en contact potentiel.

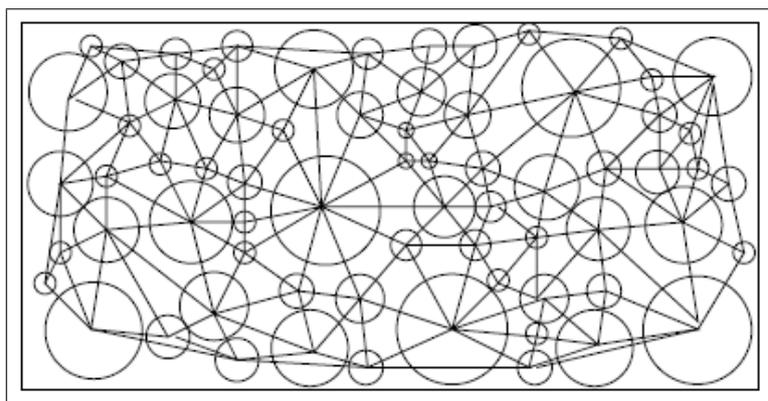


FIGURE 2.3 – Triangulation de Delaunay.

Linked Cell Method (LCM) ou Boîtes de Manhattan [20,120] :

Cette méthode consiste à découper l'espace d'évolution des particules en boîtes de mêmes tailles, en fonction de la taille des particules (Figure 2.4). Les particules sont ensuite réparties dans les boîtes correspondantes. Les contacts, entre les particules d'une même boîte, ainsi qu'entre les particules appartenant aux boîtes adjacentes, sont recherchés en calculant la distance relative entre particules. Suivant l'ordre de parcours des boîtes, toutes les boîtes adjacentes ne sont pas parcourues car des détections entre boîtes ont déjà pu être faites, ce qui permet de limiter le nombre de tests effectués. Cette méthode est plus adaptée aux systèmes composés de particules de tailles équivalentes. Dans une configuration optimale, le nombre d'opérations nécessaires pour trouver les contacts potentiels est de l'ordre de $O(N)$.

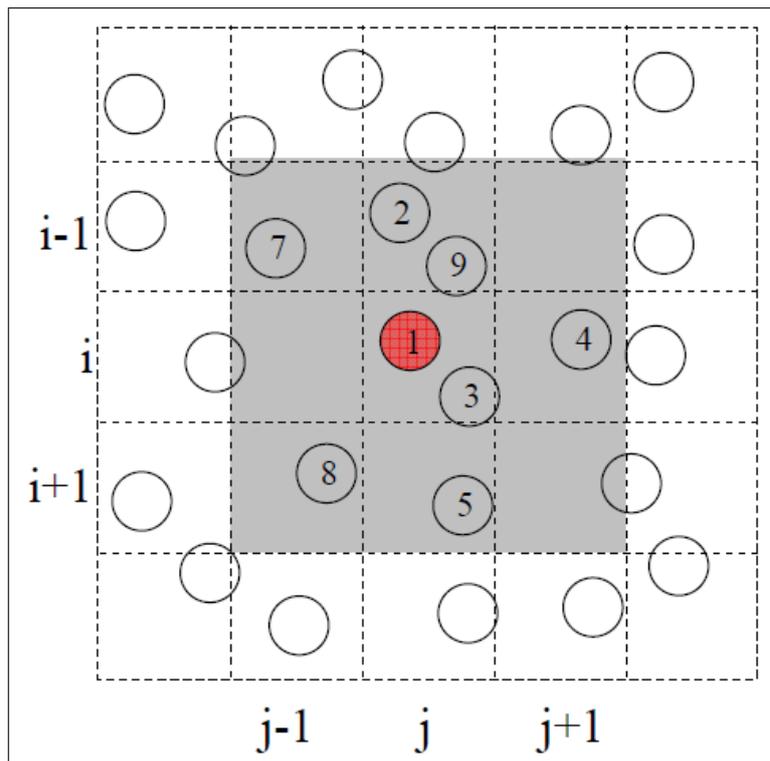


FIGURE 2.4 – Boîtes de Manhattan [20].

Verlet Neighbour List (VNL) [21, 99] :

Le principe de la méthode est de dessiner un cercle imaginaire autour de chaque particule du système puis de créer une liste des particules voisines se trouvant dans le cercle (Figure 2.5). Les distances relatives entre particules sont alors calculées. L'extension optimale de la zone circulaire autour des particules dépend de leur vitesse et de la densité de l'ensemble du système. La création de la liste de voisins nécessite $\frac{N(N-1)}{2}$ calculs, soit un nombre d'opérations de l'ordre de $O(N^2)$. Cette méthode est donc plus adaptée pour les systèmes quasi-statiques dans lesquels la liste n'est pas actualisée tous les pas de temps. La fréquence d'actualisation dépend de la densité du système, de la vitesse des particules et du rayon des cercles imaginaires.

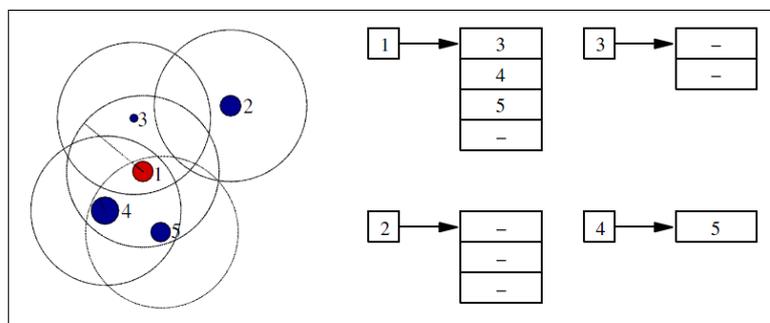


FIGURE 2.5 – VNL - Cercles imaginaires et stockage des particules dans des listes [21].

Linked Linear List (LLL) ou Sweep and Prune [20,21,121,122] :

Cette méthode fonctionne en trois étapes. La première consiste à créer des boîtes rectangulaires englobants parfaitement chaque particule, et ayant les côtés alignés parallèlement à un système d'axe. Dans la seconde étape, les boîtes sont projetées séparément sur le système d'axe. Enfin, pour les boîtes ayant leur projections se chevauchant sur les deux axes, un contact potentiel est déterminé (Figure 2.6). Cette méthode est difficile à implémenter,

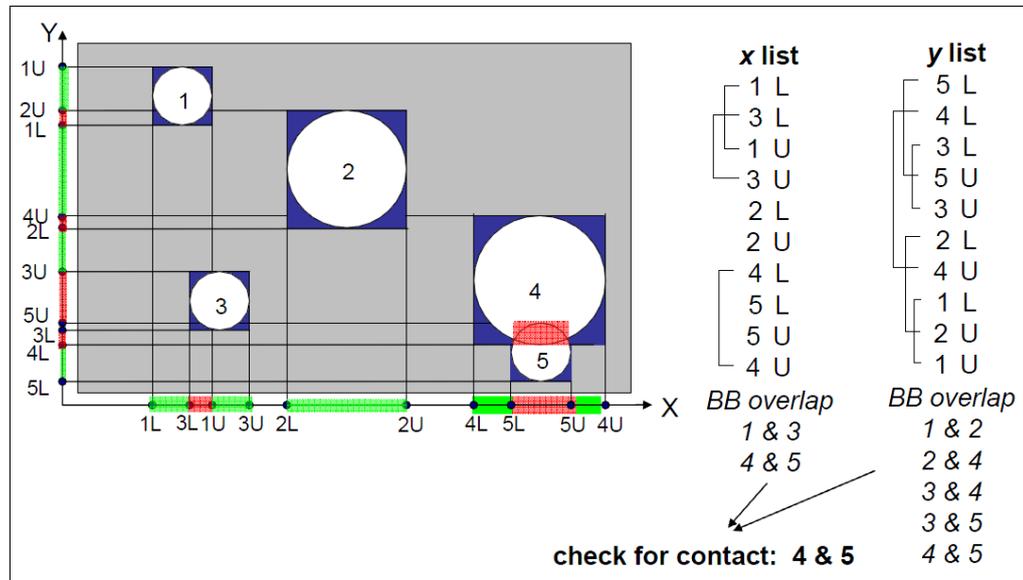


FIGURE 2.6 – LLL - Visualisation des boîtes englobantes, de leur projections sur le système d'axes, de la recherche du chevauchement des projections sur les axes, et de la détermination des contacts potentiels [20].

mais dans une configuration optimale [20], le nombre d'opérations nécessaires pour trouver les contacts potentiels est de l'ordre de $O(N)$. Cette méthode est bien adaptée aux systèmes composés de particules de tailles très différentes.

Conclusion :

Les performances de ces méthodes sont comparées dans [21,119]. Les méthodes des boîtes de Manhattan et de triangulation de Delaunay sont performantes. Nous avons retenu la méthode de triangulation de Delaunay pour cette thèse.

2.4 Traitement du contact

Nous présentons la manière dont est traité le contact dans les trois approches *DEM*, *NSM1* et *NSM2*.

2.4.1 *DEM*

Dans cette approche régulière introduite par P.A.Cundall dans les années 70 [54,97], le contact est traité par l'utilisation de forces régulières. L'expression de la force de répulsion

représentant l'interaction locale due au contact entre les particules i et j , appliquée sur la $i^{\text{ème}}$ particule, est donnée par :

$$\underline{g}_{ij}(t) = k \min(0, D_{ij}(\underline{q}(t))) \underline{e}_{ij}(t) \quad (2.3)$$

où k est une constante de raideur et $\underline{e}_{ij} = \frac{\underline{q}_j - \underline{q}_i}{|\underline{q}_j - \underline{q}_i|}$ est le vecteur directeur unitaire dirigé de la particule i vers la particule j . La valeur numérique de k , choisie par Helbing [2] pour ses simulations de foule, est $1.2 \times 10^5 \text{ kg.s}^{-2}$.

Avec cette approche, l'interpénétration des particules est nécessaire pour contrôler le contact. S'il n'y a pas d'interpénétration entre deux particules i et j ($D_{ij}(\underline{q}) \geq 0$), alors $\underline{g}_{ij} = \underline{0}$.

La force de contact totale appliquée sur la $i^{\text{ème}}$ particule est :

$$\underline{g}_i(t) = \sum_{j=1}^N \underline{g}_{ij}(t) . \quad (2.4)$$

2.4.2 NSM1

Cette approche [63] est une approche d'interactions granulaires dans laquelle les contacts entre les grains circulaires sont des collisions parfaitement inélastiques. Son adaptation aux autres types de collisions (inélastique ou élastique) n'est pas évidente [63]. Les positions des particules doivent être toujours admissibles, i.e. qu'il ne doit jamais y avoir de chevauchement entre les grains. A l'instant de la collision, il y a une discontinuité de la vitesse $\underline{\dot{u}}$. La vitesse après choc $\underline{\dot{u}}^+$ est alors déterminée pour que les positions des particules en collision soient possibles, i.e. $\underline{\dot{u}}^+$ a une signification "géométrique" plus que "physique".

Les vitesses des particules après contact $\underline{\dot{u}}^+$ doivent appartenir à l'ensemble des vitesses admissibles défini par :

$$C_{\underline{q}} = \{ \underline{\dot{v}} \in R^{2N} : \forall i < j, \quad {}^t \underline{G}_{ij}(\underline{q}) \underline{\dot{v}} \geq 0 \text{ dès que } D_{ij}(\underline{q}) = 0 \} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \text{où } \quad {}^t \underline{G}_{ij}(\underline{q}) &= \nabla D_{ij}(\underline{q}) \\ &= (0, \dots, 0, -\underset{\substack{\uparrow \\ \text{particule } i}}{t \underline{e}_{ij}}, 0, \dots, 0, \underset{\substack{\uparrow \\ \text{particule } j}}{t \underline{e}_{ij}}, 0, \dots, 0) \in R^{2N} . \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ainsi, comme le chevauchement est interdit en vertu de la condition ${}^t \underline{G}_{ij}(\underline{q}) \underline{\dot{u}}^+ \geq 0$, deux particules i et j déjà en contact peuvent seulement augmenter ou préserver leur distance relative. Le cône polaire $N_{\underline{q}}$ de $C_{\underline{q}}$ est introduit [63, 123] :

$$\begin{aligned} N_{\underline{q}} &= \left\{ \underline{\dot{w}} \in R^{2N}, \quad {}^t \underline{w} \underline{\dot{v}} \leq 0 \quad \forall \underline{\dot{v}} \in C_{\underline{q}} \right\} \\ &= \left\{ -\sum_{i < j} \mu_{ij} \underline{G}_{ij}(\underline{q}), \quad \mu_{ij} = 0 \text{ si } D_{ij}(\underline{q}) > 0, \mu_{ij} \in R^+ \text{ si } D_{ij}(\underline{q}) = 0 \right\} . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Le système (2.1) est réécrit dans cette approche à l'aide d'une inclusion différentielle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{M} \underline{\ddot{u}} + N_{\underline{q}} \ni \underline{f} \\ \underline{\dot{u}}^+ = \underline{P}_{C_{\underline{q}}} \underline{\dot{u}}^- \end{array} \right. \quad (2.8)$$

où P_{C_q} est la projection euclidienne sur le cône convexe fermé C_q . L'existence d'une solution à ce problème a été étudiée dans [124, 125].

Quand il n'y a pas de contact, la première équation de (2.8) se lit comme l'équation différentielle ordinaire $\underline{M} \ddot{\underline{u}} = \underline{f}$. Quand un contact est détecté, cette équation peut être lue comme : $\exists \underline{g} \in -N_q$ tel que $\underline{M} \ddot{\underline{u}} = \underline{f} + \underline{g}$ où l'expression de la force de contact totale est $\underline{g} = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mu_{ij} \underline{G}_{ij}(\underline{q})$. La seconde équation de (2.8) donne le modèle de collision. $\dot{\underline{u}}^+$ est alors définie comme la projection euclidienne de la vitesse avant choc $\dot{\underline{u}}^-$ sur l'ensemble C_q . Ce modèle conduit à résoudre le problème de minimisation sous contrainte suivant :

$$\dot{\underline{u}}^+ = \arg \min_{\dot{\underline{v}} \in C_q} \left[\frac{1}{2} \|\dot{\underline{v}} - \dot{\underline{u}}^-\|_{\underline{M}}^2 \right] \quad (2.9)$$

où $\|\dot{\underline{X}}\|_M^2 = {}^t \dot{\underline{X}} \underline{M} \dot{\underline{X}}$. La détection du contact est ici prise en compte dans la contrainte. Ce qui explique pourquoi la condition de non-interpénétration entre les particules est toujours respectée (voir Figure 2.7).

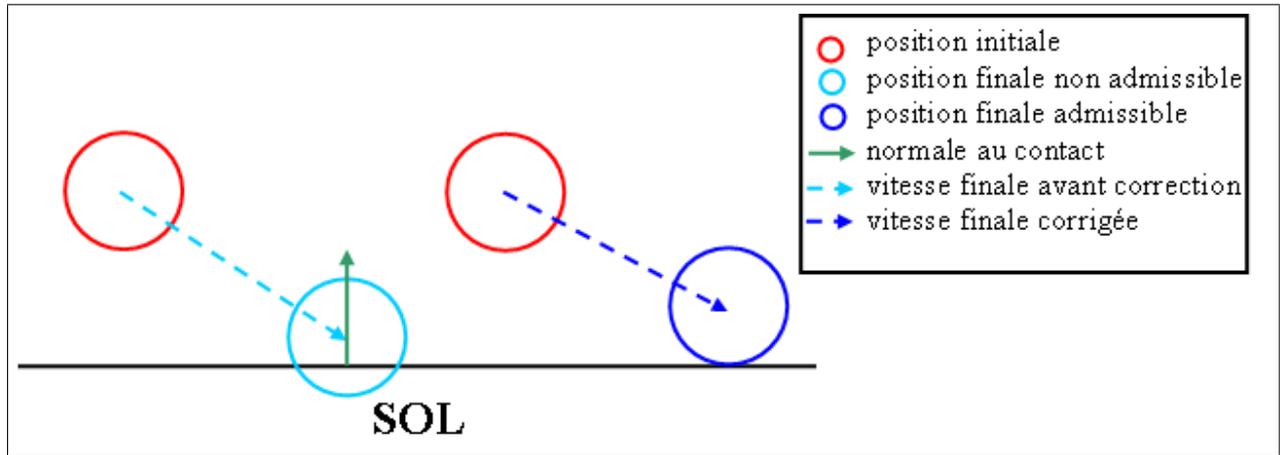


FIGURE 2.7 – Vitesse après contact toujours corrigée pour que la position de la particule soit admissible.

2.4.3 NSM2

NSM2 est une approche originale basée sur la théorie des collisions des corps rigides proposée par Frémond [105, 106] dans un cadre thermodynamique rigoureux, et inspirée des travaux de Moreau [126]. Les collisions entre particules peuvent être parfaitement inélastiques, inélastiques ou élastiques. Des forces de friction peuvent être considérées [108]. La description du comportement d'une collection de corps discrets est basée sur la considération que le système global est déformable même si les particules sont rigides. Les aspects numériques ont ensuite été proposés dans [107, 108].

Considérons l'ensemble des N particules comme un système déformable composé de solides rigides. Nous introduisons $\underline{\Delta}_{ij}(\dot{\underline{u}}(t))$, la vitesse de déformation locale (vitesse relative) entre les $i^{\text{ème}}$ et $j^{\text{ème}}$ particules en contact au point $A_{i,j}$:

$$\underline{\Delta}_{ij}(\dot{\underline{u}}(t)) = \dot{\underline{u}}_i(G_i) + \dot{\underline{\Omega}}_i \wedge \underline{G}_i A_{i,j} - \left(\dot{\underline{u}}_j(G_j) + \dot{\underline{\Omega}}_j \wedge \underline{G}_j A_{i,j} \right) \quad (2.10)$$

où G_i est le centre de masse de la particule i , et $\dot{\underline{\Omega}}_i$ sa vitesse angulaire.

La rotation des particules étant négligée (effets d'inertie négligés), l'équation (2.10) devient :

$$\begin{aligned}\underline{\Delta}_{ij}(\dot{\underline{u}}(t)) &= \dot{\underline{u}}_i(G_i) - \dot{\underline{u}}_j(G_j) \\ &= \dot{\underline{u}}_i(t) - \dot{\underline{u}}_j(t) .\end{aligned}\quad (2.11)$$

La description de l'évolution du système multi-particules doit être réalisée aussi bien pendant l'évolution régulière que pendant l'évolution non-régulière des particules, à savoir à l'instant de la collision. La discontinuité de la vitesse des particules à l'instant de la collision ne permet pas de résoudre l'équation régulière de mouvement classique car la vitesse n'est pas différentiable. Le système (2.1) est réécrit dans cette approche :

$$\begin{cases} \underline{M} \ddot{\underline{u}}(t) = -\underline{f}^{int}(t) + \underline{f}^{ext}(t) & \text{presque partout} \\ \underline{M}(\dot{\underline{u}}^+(t) - \dot{\underline{u}}^-(t)) = -\underline{p}^{int}(t) + \underline{p}^{ext}(t) & \text{partout} \end{cases}\quad (2.12)$$

où \underline{f}^{ext} (resp. \underline{f}^{int}) est le vecteur de dimension $2N$ des forces extérieures (resp. forces intérieures) appliquées au système. Une solution à ce système existe [106, 108, 127].

La première équation du système (2.12), qui décrit l'évolution régulière du système multi-particules, est appliquée presque partout, excepté à l'instant de la collision où elle est remplacée par la seconde. Quand le contact est détecté, les vitesses des particules en collision sont discontinues, et nous introduisons dans la seconde équation de (2.12) des percussions intérieures \underline{p}^{int} et des percussions extérieures \underline{p}^{ext} au système. Par définition, ces percussions ont la dimension d'une force multipliée par un temps. Les percussions intérieures \underline{p}^{int} sont des inconnues du problème. Des lois de comportement sont utilisées pour décrire les différents comportements collisionnels des différentes particules et assurer leur non interpénétration lors d'une collision. Afin de distinguer ces deux aspects, les percussions intérieures sont divisées en deux parties, les percussions dissipatives \underline{p}^d qui prennent en compte les interactions dissipatives entre les particules qui collisionnent, et les percussions réactives \underline{p}^r qui comprennent les forces de réaction qui empêchent l'interpénétration entre particules : $\underline{p}^{int} = \underline{p}^d + \underline{p}^r$. Frémond a montré dans [105, 106] que ces percussions intérieures sont définies en dualité avec la vitesse de déformation à l'instant du choc $\underline{\Delta} \left(\frac{\dot{\underline{u}}^+ + \dot{\underline{u}}^-}{2} \right)$, au sens du travail des efforts intérieurs. Il utilise la notion de pseudo-potential de dissipation, qui est une fonction positive, convexe et nulle à l'origine [128], pour définir les percussions intérieures. Les percussions dissipatives \underline{p}^d sont définies par :

$$\underline{p}^d \in \partial \Phi^d \left(\frac{\dot{\underline{u}}^+ + \dot{\underline{u}}^-}{2} \right) \quad (2.13)$$

où l'opérateur ∂ est le sous différentiel qui généralise la dérivée pour les fonctions convexes [106] (voir C), et Φ^d est le pseudo-potential de dissipation qui permet de définir les percussions intérieures dissipatives.

Les percussions réactives \underline{p}^r sont les réactions à la condition de non-interpénétration qui s'écrit : ${}^t\dot{\underline{u}}^+ \underline{N} \geq 0$, où \underline{N} est la normale sortante au contact. \underline{p}^r sont nulles lorsque ${}^t\dot{\underline{u}}^+ \underline{N} > 0$, sont actives lorsque ${}^t\dot{\underline{u}}^+ \underline{N} = 0$ et empêchent que la solution de l'équation du choc vérifie ${}^t\dot{\underline{u}}^+ \underline{N} < 0$.

Ainsi nous pouvons écrire [106, 109] :

$$\underline{p}^r \in \partial \Phi^r \left(\frac{\dot{\underline{u}}^+ + \dot{\underline{u}}^-}{2} \right) \quad (2.14)$$

où Φ^r est le pseudo-potentiel de dissipation qui permet de définir les percussions intérieures réactives. Il est défini par $\Phi^r = I_K(\frac{{}^t\dot{u}^+ + {}^t\dot{u}^-}{2}N)$, où K est l'ensemble convexe $K = [\frac{{}^t\dot{u}^-N}{2}, +\infty[$ et I_K est son indicatrice.

Nous pouvons donc exprimer la percussion intérieure sous la forme d'un seul pseudo-potentiel :

$$\underline{p}^{int} \in \partial\Phi\left(\frac{\dot{u}^+ + \dot{u}^-}{2}\right) \quad (2.15)$$

avec $\Phi = \Phi^d + \Phi^r$.

Dans la seconde équation du système (2.12), pour déterminer \dot{u}^+ , il faut résoudre le problème de minimisation sous contraintes suivant :

$$\dot{X} = \underset{\dot{Y} \in \mathbf{R}^{2N}}{\arg \min} \left[{}^t\dot{Y} \underline{M} \dot{Y} + \Phi(\Delta(\dot{Y})) - {}^t(2\dot{u}^- + \underline{M}^{-1}\underline{p}^{ext})\underline{M} \dot{Y} \right] \quad (2.16)$$

où la solution $\dot{X} = \frac{\dot{u}^+ + \dot{u}^-}{2}$.

Dans cette approche, la vitesse d'une particule après contact (\dot{u}^+) a une signification physique. Une démonstration de l'existence et de l'unicité des vitesses après la collision simultanée de plusieurs solides rigides, ainsi que de la dissipativité de la collision, est faite dans [105–108].

Loi de comportement

Pour contrôler le comportement après contact de particules en collisions, une loi de comportement doit être établie pour définir Φ^d [106, 129]. Le pseudo-potentiel Φ^d permet de choisir un type de collision : parfaitement inélastique, inélastique ou élastique. Pendant la collision, les percussions intérieures ont des composantes normale et tangentielle. Pour le cas des piétons, nous choisissons la même loi de comportement pour exprimer les deux composantes. Ainsi, pour déterminer la percussion intérieure normale, la loi de comportement suivante peut être choisie [129] :

$$\underline{p}_N^{int,d}(\dot{z}) \in \partial\Phi^d(\dot{z}) = K_N \dot{z} |\dot{z}|^{p-2} \text{ pour } p > 1 \text{ avec } \Phi^d(\dot{z}) = \frac{K_N}{p} |\dot{z}|^p \quad (2.17)$$

où K_N est le coefficient de dissipation pour la composante normale de la percussion.

L'influence de p sur le comportement après contact des particules est étudié sur un exemple de collision entre une particule circulaire rigide et le sol (plan). La particule tombe sur le sol avec une vitesse avant contact \dot{u}^- . La Figure 2.8 représente le graphe de la vitesse normale après contact \dot{u}_N^+ , calculée avec l'équation (2.16), en fonction de la vitesse normale avant contact \dot{u}_N^- pour différentes valeurs de p . Des résultats similaires à ceux obtenus par Cholet [129] sont trouvés avec $\dot{z} = \underline{\Delta}(\dot{Y}_N) = \underline{\Delta}\left(\frac{\dot{u}_N^+ + \dot{u}_N^-}{2}\right)$ et $K_N = 4m$.

Le choix de $p = 2$, i.e. un pseudo-potentiel quadratique, permet de redonner les résultats classiques du coefficient de restitution de Newton. Les autres choix de Φ^d [106, 109, 129] permettent d'obtenir une large variété de comportements après contact [106, 129].

Pour $p < 2$, le choc peut être modélisé avec écrasement, i.e. il y a rebond quand la valeur de \dot{u}_N^- est petite et contact maintenu quand cette valeur est grande.

Pour $p > 2$, le choc peut être modélisé avec adhésion, i.e. il y a contact maintenu quand la valeur de \dot{u}_N^- est en dessous d'une valeur critique et rebond quand la valeur de \dot{u}_N^- augmente.

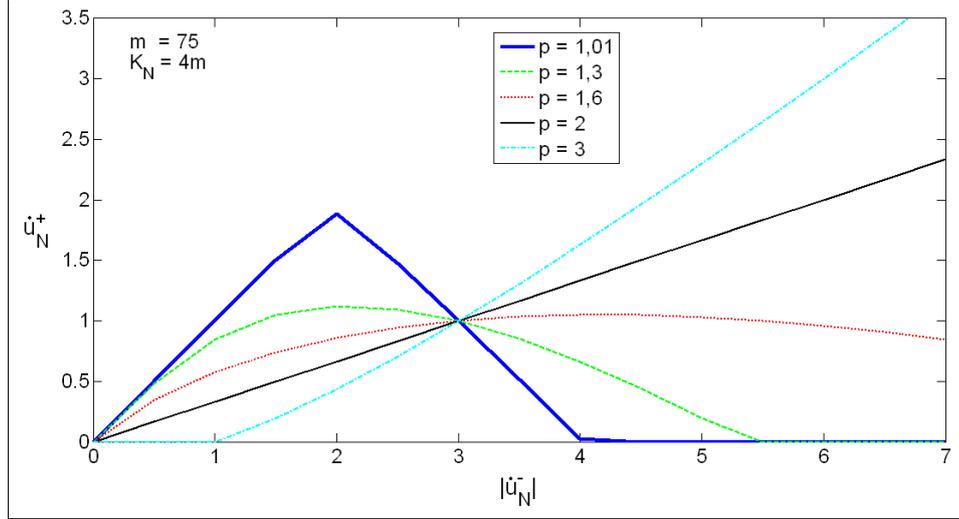


FIGURE 2.8 – Vitesse normale après contact \dot{u}_N^+ en fonction de la valeur absolue de la vitesse normale avant contact \dot{u}_N^- pour différentes valeurs de p , avec $m = 75 \text{ kg}$ et $K_N = 4m$.

Dans la suite, le pseudo-potentiel quadratique est préféré pour utiliser une loi constitutive linéaire :

$$\Phi^d(\underline{q}, \dot{\underline{Y}}) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{1}{2} K_T \left({}^t \Delta_{ij}(\dot{\underline{Y}}) \cdot {}^\perp \underline{e}_{ji} \right)^2 + \frac{1}{2} K_N \left({}^t \Delta_{ij}(\dot{\underline{Y}}) \underline{e}_{ji} \right)^2 \quad (2.18)$$

où \underline{e}_{ji} est la normale au contact ; ${}^\perp \underline{e}_{ji}$ est la tangente au contact ; K_T est le coefficient de dissipation pour la composante tangentielle de la percussion. K_N reflète la nature inélastique des collisions entre les particules et K_T peut être associé aux effets de type visqueux. K_T est pris égal à zéro dans la suite. Pour déterminer la valeur de K_N pour les simulations numériques, la vitesse normale après contact \dot{u}_N^+ est déterminée et tracée en fonction de la valeur absolue de la vitesse normale avant contact \dot{u}_N^- , pour plusieurs valeurs de K_N (Figure 2.9). Une valeur infinie de K_N correspond au cas d'une loi de collision parfaitement élastique [106]. En pratique, pour les valeurs de $K_N > 10^4 \text{ kg}$, nous constatons que les courbes se superposent. Ainsi, une valeur de $K_N = 10^5 \text{ kg}$ est suffisante pour nos simulations [5].

2.5 Aspects numériques des trois approches

La difficulté liée à la résolution numérique des trois approches porte sur le fait que plusieurs collisions peuvent se produire en même temps. Deux types de méthodes permettent de résoudre les problèmes exposés. Celles du premier type sont les méthodes gérées par les événements (*event-driven methods*). Elles consistent à identifier l'instant de la prochaine collision, à faire avancer le système jusqu'à cet instant, et à calculer les vitesses des particules après contact. Ces méthodes deviennent rapidement inefficaces numériquement lorsque le nombre de particules augmente. Le second type de méthodes porte sur l'approche proposée par Moreau et Jean [102, 130], dite de *time-stepping*. Dans ce cas, le pas de temps ne dépend pas des événements, et l'ensemble des forces de contact du système est déterminé de manière itérative. C'est cette deuxième option que nous avons retenue.

L'intervalle de temps $[0, T]$ est discrétisé en N_{int} intervalles réguliers $[t^n, t^{n+1}]$ de longueur $h = \frac{T}{N_{int}}$. Soit $\underline{q}^0 = \underline{q}(0)$ et $\underline{\dot{u}}^0 = \underline{\dot{u}}(0)$ respectivement les positions et vitesses initiales des

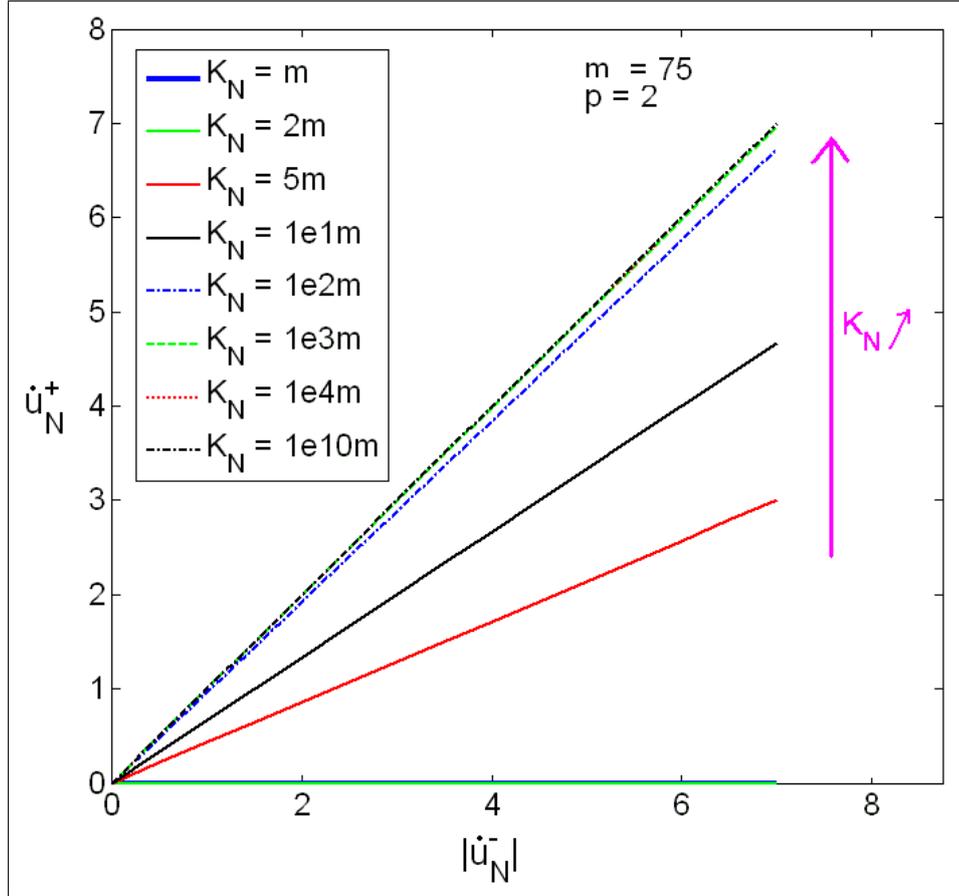


FIGURE 2.9 – Vitesse normale après contact \dot{u}_N^+ en fonction de la valeur absolue de la vitesse normale avant contact $|\dot{u}_N^-|$ pour différentes valeurs de K_N , avec $m = 75 \text{ kg}$ et $p = 2$.

particules.

Connaissant \underline{q}^n et \underline{u}^n au temps t^n , nous devons déterminer \underline{q}^{n+1} et \underline{u}^{n+1} au temps t^{n+1} pour chaque approche.

2.5.1 DEM

Les positions et les vitesses des particules sont données par le schéma explicite suivant :

$$\begin{cases} \dot{\underline{u}}^{n+1} &= \dot{\underline{u}}^n + h \underline{M}^{-1} (\underline{f}^n + \underline{g}^n) \\ \underline{q}^{n+1} &= \underline{q}^n + h \underline{u}^{n+1} \end{cases} \quad (2.19)$$

où \underline{f}^n est le vecteur des forces extérieures en l'absence de contact (ou forces à distance) et \underline{g}^n est le vecteur des forces de contact à l'instant t^n (Equation (2.1)). A partir des équations (2.4) et (2.3), la force de contact appliquée sur la particule i à l'instant t^n peut être exprimée par :

$$\underline{g}_i^n = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N k \min(0, D_{ij}(\underline{q}^n)) \underline{e}_{ij}^n. \quad (2.20)$$

Le choix du pas de temps h est essentiel car le chevauchement entre les particules en dépend [5, 54], et par suite la stabilité du schéma d'intégration.

2.5.2 NSM1

La position des particules à l'instant t^{n+1} est donnée par l'équation :

$$\underline{q}^{n+1} = \underline{q}^n + h\underline{\dot{u}}^{n+1} \quad (2.21)$$

$\underline{\dot{u}}^{n+1}$ doit être trouvée tel que $D_{ij}(\underline{q}^{n+1}) \geq 0$.

Comme D_{ij} est convexe, la relation suivante peut être établie :

$$D_{ij}(\underline{q}^{n+1}) = D_{ij}(\underline{q}^n + h\underline{\dot{u}}^{n+1}) \geq D_{ij}(\underline{q}^n) + h {}^t\underline{G}_{ij}(\underline{q}^n)\underline{\dot{u}}^{n+1} \geq 0 \quad (2.22)$$

$D_{ij}(\underline{q}^n)$ est une condition sur les distances. ${}^t\underline{G}_{ij}(\underline{q}^n)\underline{\dot{u}}^{n+1}$ est une condition sur les vitesses. Elles sont liées par l'approximation de $D_{ij}(\underline{q}^{n+1})$ donnée par l'équation (2.22).

On cherche donc $\underline{\dot{u}}^{n+1}$ tel que l'approximation de la distance finale entre chaque couple de particules $D_{ij}(\underline{q}^n) + h\underline{G}_{ij}(\underline{q}^n)\underline{\dot{u}}^{n+1}$ soit positive ou nulle.

Pour calculer $\underline{\dot{u}}^{n+1}$, il faut résoudre le problème de minimisation sous contraintes suivant :

$$\underline{\dot{u}}^{n+1} = \underset{\underline{\dot{u}}^{n+1} \in R^{2N}}{\arg \min} \left[\frac{1}{2} \|\underline{\dot{u}}^{n+1} - \underline{\dot{V}}_{trial}\|_{\underline{M}}^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mu_{ij}^{n+1} (D_{ij}(\underline{q}^n) + h {}^t\underline{G}_{ij}(\underline{q}^n)\underline{\dot{u}}^{n+1}) \right] \quad (2.23)$$

avec $\underline{\dot{V}}_{trial} = \underline{\dot{u}}^n + h\underline{M}^{-1}\underline{f}^n$

où μ_{ij}^{n+1} est un multiplicateur de Lagrange et a la dimension d'une force ; μ_{ij}^{n+1} et $\underline{\dot{u}}^{n+1}$ vérifient les inégalités de Kuhn-Tucker :

$$\begin{cases} \mu_{ij}^{n+1} \geq 0 \\ D_{ij}(\underline{q}^n) + h {}^t\underline{G}_{ij}(\underline{q}^n)\underline{\dot{u}}^{n+1} \geq 0 \\ \mu_{ij}^{n+1} (D_{ij}(\underline{q}^n) + h {}^t\underline{G}_{ij}(\underline{q}^n)\underline{\dot{u}}^{n+1}) = 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Ce problème est résolu en utilisant l'algorithme d'Uzawa classique (voir A). La convergence du schéma (2.21), (2.23), (2.24) est prouvée dans [124]. La loi de collision inélastique est implicitement contenue dans la contrainte de minimisation. La contrainte affecte les positions des particules à la fin du pas de temps considéré ; les vitesses finales $\underline{\dot{u}}^{n+1}$ sont telles que les positions sont admissibles.

Les expressions de $\underline{\dot{u}}^{n+1}$ et μ_{ij}^{n+1} sont liées par :

$$\underline{M} \underline{\dot{u}}^{n+1} = \underline{M} \underline{\dot{u}}^n + h\underline{f}^n + h \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mu_{ij}^{n+1} \underline{G}_{ij}(\underline{q}^n) \quad (2.25)$$

quand μ_{ij}^{n+1} et $\underline{\dot{u}}^{n+1}$ satisfont les conditions de Kuhn-Tucker (2.24).

2.5.3 NSM2

Sur chaque intervalle de temps $[t^n, t^{n+1}]$, les forces extérieures régulières sont atomisées, i.e. remplacées par des percussions appliquées à l'instant $\theta^n = t^n + \frac{h}{2}$, et toutes les forces non-régulières, ou les percussions appliquées durant les collisions, sont appliquées sur le système à l'instant θ^n . Les percussions exercées aux instants θ^n sont les percussions résultant de l'atomisation des efforts réguliers qui s'exercent pendant $[t^n, t^{n+1}]$ ainsi que les percussions dues aux collisions survenant pendant $[t^n, t^{n+1}]$. Il en découle que les vitesses sont discontinues aux instants θ^n où des percussions sont exercées et qu'elles sont constantes partout ailleurs.

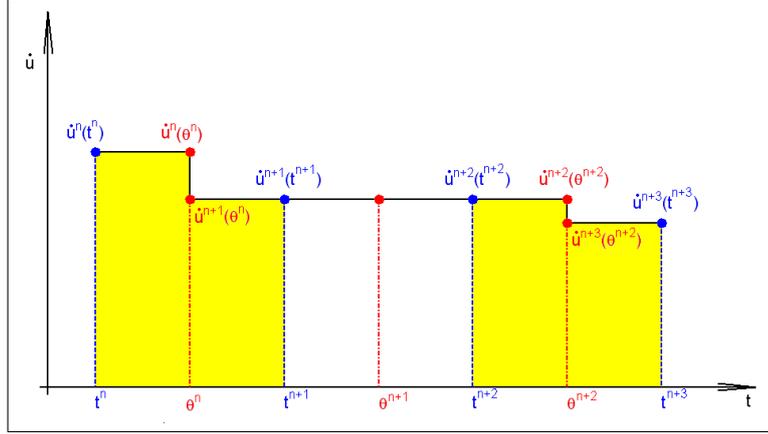


FIGURE 2.10 – Exemple de la representation de la vitesse de la $i^{\text{ème}}$ particule. Les intervalles de temps en jaune sont ceux où il y a un contact et/ou une force extérieure régulière non nulle appliquée sur la $i^{\text{ème}}$ particule ; on y trouve une discontinuité de la vitesse.

La fonction $\underline{\dot{u}}^n(t)$ est une fonction en escalier qui subit des discontinuités aux instants θ^n (Figure 2.10). L'équation régissant une discontinuité sur $[t^n, t^{n+1}]$ est :

$$\underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta^n) - \underline{\dot{u}}^n(\theta^n) = \underline{\underline{M}}^{-1} \left(-\underline{\underline{p}}^{int} \left(\frac{\Delta(\underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta^n)) + \Delta(\underline{\dot{u}}^n(\theta^n))}{2} \right) + \underline{\underline{p}}^{ext}(\theta^n) \right) . \quad (2.26)$$

Soit $\underline{\dot{X}}^{n+1} = \frac{\underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta^n) + \underline{\dot{u}}^n(\theta^n)}{2}$. L'équation (2.26) devient :

$$2\underline{\dot{X}}^{n+1} + \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{p}}^{int}(\Delta(\underline{\dot{X}}^{n+1})) = 2\underline{\dot{u}}^n(\theta^n) + \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{p}}^{ext}(\theta^n) . \quad (2.27)$$

D'après les équations (2.16) et (2.27), l'obtention de $\underline{\dot{X}}^{n+1}$ s'effectue par la résolution d'un problème de minimisation sous contrainte :

$$\underline{\dot{X}}^{n+1} = \underset{\underline{\dot{Y}}^{n+1} \in \mathbf{R}^{2N}}{\arg \min} \left[{}^t \underline{\dot{Y}}^{n+1} \underline{\underline{M}} \underline{\dot{Y}}^{n+1} + \Phi(\underline{q}^n, \Delta(\underline{\dot{Y}}^{n+1})) - {}^t (2\underline{\dot{u}}^n(\theta^n) + \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{\underline{p}}^{ext}(\theta^n)) \underline{\underline{M}} \underline{\dot{Y}}^{n+1} \right] \quad (2.28)$$

avec $\underline{\dot{Y}}^{n+1} = \frac{\underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta^n) + \underline{\dot{u}}^n(\theta^n)}{2}$.

La loi constitutive utilisée est la loi linéaire correspondant au pseudo-potentiel quadratique :

$$\Phi^d(\underline{q}^n, \Delta(\underline{\dot{Y}}^{n+1})) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{1}{2} K_N \left({}^t \Delta_{ij}(\underline{\dot{Y}}^{n+1}) \underline{e}_{ji}^n \right)^2 . \quad (2.29)$$

La contrainte qui doit être vérifiée quand il y a un contact entre deux particules i et j , est l'inégalité suivante :

$$- {}^t \Delta_{ij}(\underline{\dot{Y}}^{n+1}) \underline{e}_{ji}^n + {}^t \Delta_{ij} \left(\frac{\underline{\dot{u}}^n(\theta^n)}{2} \right) \underline{e}_{ji}^n \leq 0 . \quad (2.30)$$

Ainsi

$$\Phi^r(\underline{q}^n, \Delta(\underline{\dot{Y}}^{n+1})) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mu_{ij}^{n+1} \left[- {}^t \Delta_{ij}(\underline{\dot{Y}}^{n+1}) \underline{e}_{ji}^n + {}^t \Delta_{ij} \left(\frac{\underline{\dot{u}}^n(\theta^n)}{2} \right) \underline{e}_{ji}^n \right] \quad (2.31)$$

où μ_{ij}^{n+1} est un multiplicateur de lagrange et a la dimension d'une percussion ; μ_{ij}^{n+1} et $\underline{\dot{u}}^{n+1}$ satisfont les conditions de Kuhn-Tucker :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_{ij}^{n+1} \geq 0 \\ {}^t \underline{\Delta}_{ij}(\underline{\dot{Y}}^{n+1}) \underline{e}_{ji}^n - {}^t \underline{\Delta}_{ij}(\frac{\underline{\dot{u}}^n(\theta^n)}{2}) \underline{e}_{ji}^n \geq 0 \\ \mu_{ij}^{n+1} \left[{}^t \underline{\Delta}_{ij}(\underline{\dot{Y}}^{n+1}) \underline{e}_{ji}^n - {}^t \underline{\Delta}_{ij}(\frac{\underline{\dot{u}}^n(\theta^n)}{2}) \underline{e}_{ji}^n \right] = 0 . \end{array} \right. \quad (2.32)$$

Le problème de minimisation (2.28) est résolu en utilisant l'algorithme d'Uzawa classique [106, 108, 109, 131] (voir A). La convergence du schéma numérique a été prouvée dans [109] pour le cas d'une loi de Coulomb.

Les vitesses et positions en fin de pas de temps sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta^n) = \underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta^{n+1}) = 2\underline{\dot{X}}^{n+1} - \underline{\dot{u}}^n(\theta^n) \\ \underline{q}^{n+1} = \underline{q}^n + h \frac{\underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta^n) + \underline{\dot{u}}^n(\theta^n)}{2} . \end{array} \right. \quad (2.33)$$

2.6 Comparaison des trois approches

Après avoir présenté les schémas numériques des approches étudiées, nous allons mettre en évidence leurs points communs et différences. Les approches n'étant pas adaptées aux mêmes types de collision, nous comparerons *NSM1-NSM2* puis *DEM-NSM2*.

2.6.1 NSM1 vs NSM2

Dans cette partie, les deux approches non-régulières *NSM1* et *NSM2* sont comparées. Ces approches semblent différentes lorsqu'on examine leurs problèmes de minimisation sous contraintes (2.23) et (2.28) respectifs. Pourtant, ils peuvent être réécrits sous une forme identique à celle de la plasticité en faisant quelques hypothèses et simplifications. Rappelons le problème de minimisation dans le cas de la plasticité [132] :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma}}^{n+1} &= \arg \min_{\underline{\underline{\sigma}}} \left[\frac{1}{2} \|\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{\sigma}}_{trial}\|_{\underline{\underline{C}}^{-1}}^2 + \Delta\lambda f(\underline{\underline{\sigma}}) \right] \\ \text{avec } \underline{\underline{\sigma}}_{trial} &= \underline{\underline{\sigma}}^n + \underline{\underline{C}} : \Delta\underline{\underline{\varepsilon}} \end{aligned} \quad (2.34)$$

où $\|\underline{\underline{X}}\|_{\underline{\underline{C}}^{-1}}^2 = {}^t \underline{\underline{X}} : \underline{\underline{C}}^{-1} : \underline{\underline{X}}$; $\underline{\underline{C}}$ est le tenseur élastique ; $\Delta\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{n+1} - \underline{\underline{\varepsilon}}^n$ est l'incrément de déformation totale ; $\Delta\lambda$ est le multiplicateur de plasticité ; $f(\underline{\underline{\sigma}})$ est le domaine élastique ; $\Delta\lambda$ et $\underline{\underline{\sigma}}$ satisfont les inégalités :

$$\left\{ \begin{array}{l} f(\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}) \leq 0 \\ \Delta\lambda \geq 0 \\ \Delta\lambda f(\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}) = 0 . \end{array} \right. \quad (2.35)$$

En d'autres termes, après simplifications, les problèmes de minimisation obtenus avec *NSM1* et *NSM2* peuvent aussi être résolus en utilisant des algorithmes connus de résolution proposés (par exemple dans [132]).

Le problème de minimisation (2.23) obtenu avec *NSM1* est déjà exprimé sous la forme recherchée. Pour écrire l'équation (2.28) avec le même formalisme que les équations (2.34) et

(2.23), seules les collisions parfaitement inélastiques doivent être considérées, comme dans l'approche *NSM1*. Nous choisissons $K_T = K_N = 0$, ainsi l'équation (2.28) devient (voir D) :

$$\underline{\dot{u}}^{n+1} = \underset{\underline{\dot{u}}^{n+1} \in R^{2N}}{\arg \min} \left[\frac{1}{2} \|\underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta^n) - \underline{\dot{V}}_{trial}\|_{\underline{M}}^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mu_{ij}^{n+1} {}^t \underline{G}_{ij}(\underline{q}^n) \underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta^n) \right] \quad (2.36)$$

avec $\underline{\dot{V}}_{trial} = \underline{\dot{u}}^n(\theta^n) + \underline{M}^{-1} \underline{p}^{ext}(\theta^n)$.

En conséquence, avec $K_N = K_T = 0$, les expressions de $\underline{\dot{u}}^{n+1}$ et de μ_{ij}^{n+1} sont liées par :

$$\underline{M} \underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta^n) = \underline{M} \underline{\dot{u}}^n(\theta^n) + \underline{p}^{ext}(\theta^n) + \sum_{1 \leq i < j \leq N} \mu_{ij}^{n+1} \underline{G}_{ij}(\underline{q}^n) \quad (2.37)$$

avec μ_{ij}^{n+1} et $\underline{\dot{u}}^{n+1}$ satisfaisant les conditions de Kuhn-Tucker (2.32).

En introduisant $\underline{\mu}^{n+1}$ le vecteur de taille $N_{contact} \times 1$ où chaque ligne contient un multiplicateur de Lagrange μ_{ij}^{n+1} , et \underline{G}^n la matrice de taille $N_{contact} \times 2N$ où chaque ligne contient un vecteur ${}^t \underline{G}_{ij}(\underline{q}^n)$ et où $N_{contact}$ est le nombre de contacts détectés à chaque instant, les expressions (2.25) et (2.37) peuvent être respectivement réécrites :

$$\underline{M} \underline{\dot{u}}^{n+1} = \underline{M} \underline{\dot{u}}^n + h \underline{f}^n + h {}^t \underline{G}^n \underline{\mu}^{n+1} \quad (2.38)$$

et

$$\underline{M} \underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta^n) = \underline{M} \underline{\dot{u}}^n(\theta^n) + \underline{p}^{ext}(\theta^n) + {}^t \underline{G}^n \underline{\mu}^{n+1}. \quad (2.39)$$

Les équations (2.38) et (2.39) ont des expressions similaires ; pourtant, le calcul du multiplicateur de lagrange μ_{ij}^{n+1} est différent. Pour *NSM1*, la contrainte est sur la position de la particule et dépend du pas de temps h , ainsi l'interpénétration entre particules est toujours évitée. La vitesse de la particule a une "signification géométrique" parce qu'elle est calculée à partir de la position précédemment déterminée. Par contre pour *NSM2*, la contrainte est sur la vitesse de la particule et est indépendante du pas de temps h , ainsi le chevauchement de particules est possible. La vitesse ici a une signification physique, et il est accepté que la position de la particule après un contact "viole" la condition de non interpénétration.

Le tableau 2.1 montre les analogies entre les problèmes de minimisation dans le cas de la plasticité, et lors de l'utilisation des approches *NSM1* et *NSM2* (Equations (2.34), (2.23) et (2.36)).

Nous pouvons illustrer sur un exemple les différences du traitement du contact pour les deux approches *NSM1* et *NSM2*. Dans le plan xy , nous considérons une particule de rayon $r = 0.22 \text{ m}$, de position initiale $\underline{q}_{initiale} = {}^t (0.5, 0.5)$ et de vitesse initiale $\underline{\dot{u}}_{initiale} = {}^t (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Le sol est délimité par $y \leq 0$. On choisit $K_N = 0 \text{ kg}$, $T = 0.8 \text{ s}$ et $h = 10^{-2} \text{ s}$. Aucune force extérieure est appliquée à la particule. La position dans le plan xy et la vitesse selon l'axe y de la particule après collision avec le sol, en fonction du temps, sont données pour les deux approches *NSM1* et *NSM2* dans la figure 2.11.

Considérant la trajectoire du centre de la particule dans le plan xy , les remarques faites à partir des équations (2.25) et (2.37), ainsi que la différence entre les équations (2.21) et (2.33), sont illustrées sur les figures 2.11b. et d. La figure 2.11b. (zoom d'une partie de la figure 2.11a.) montre qu'avec *NSM2*, une faible erreur numérique peut exister sur la position de la particule. En effet, nous avons choisi comme approximation numérique que, lorsqu'un contact existe, il est réalisé au milieu de l'intervalle de temps considéré. Dans le cas étudié,

	Plasticité	<i>NSM1</i>	<i>NSM2</i>
Variable inconnue	$\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}$	$\underline{\dot{u}}^{n+1}$	$\underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta^n)$
Valeur trial	$\underline{\underline{\sigma}}_{trial} = \underline{\underline{\sigma}}^n + \underline{\underline{C}} : \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}$	$\underline{\dot{V}}_{trial} = \underline{\dot{u}}^n + h \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{f}^n$	$\underline{\dot{V}}_{trial} = \underline{\dot{u}}^n(\theta^n) + \underline{\underline{M}}^{-1} \underline{p}^{ext}(\theta^n)$
“action” extérieure	$\Delta \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{n+1} - \underline{\underline{\varepsilon}}^n$	$h \underline{f}^n$	$\underline{p}^{ext}(\theta^n)$
Contrainte	$f(\underline{\underline{\sigma}}^{n+1}) \leq 0$	$D_{ij}(\underline{q}^n) + h {}^t G_{ij}(\underline{q}^n) \underline{\dot{u}}^{n+1} \geq 0 \quad (m)$	${}^t G_{ij}(\underline{q}^n) \underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta^n) \geq 0 \quad (m.s^{-1})$
Multiplicateur de Lagrange	$\Delta \lambda$	$\mu_{ij}^{n+1} \quad (N)$	$\mu_{ij}^{n+1} \quad (N.s)$

TABLE 2.1 – Analogies entre les problèmes de minimisation dans le cas de la plasticité, et lors de l’utilisation des approches *NSM1* et *NSM2*.

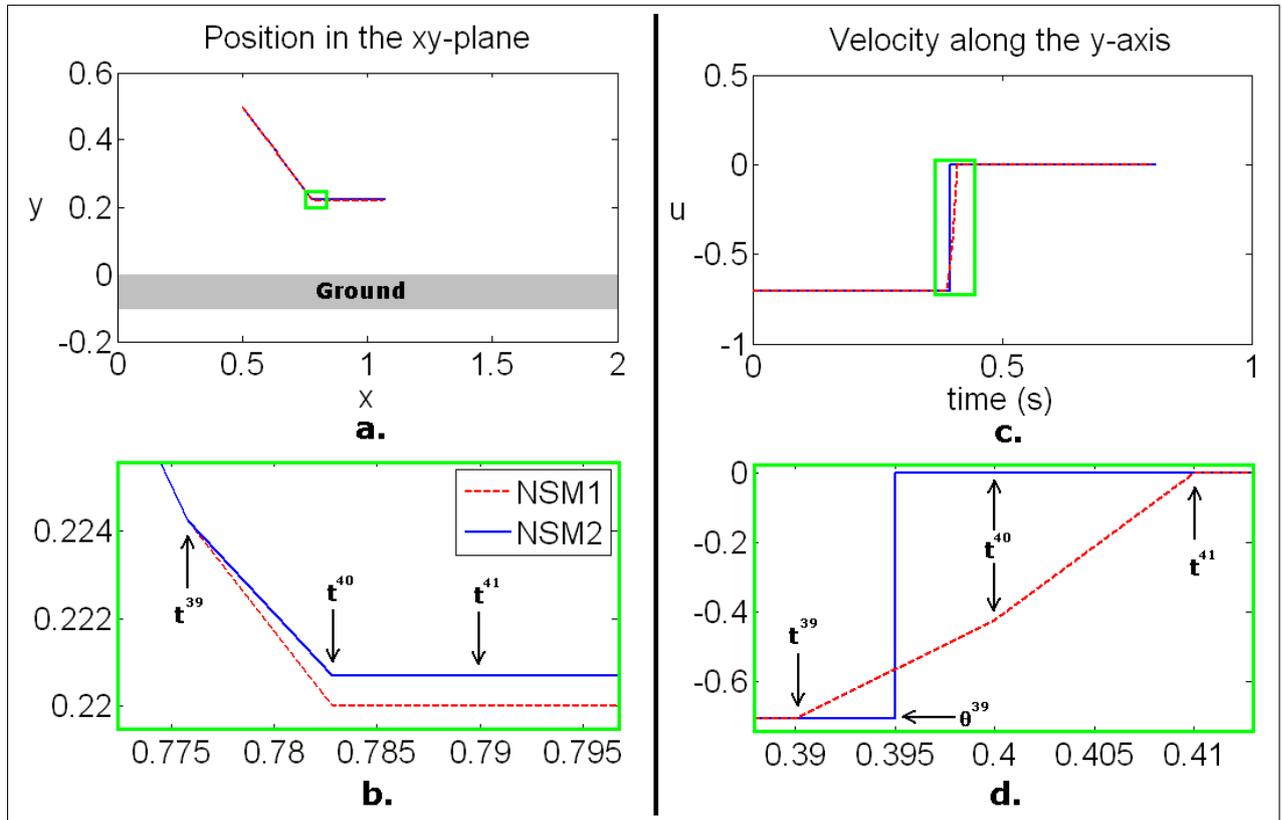


FIGURE 2.11 – Collision d’une particule avec le sol pour les approches *NSM1* et *NSM2*. Les figures a. et b. représentent la trajectoire dans le plan xy du centre de la particule (de rayon $r = 0.22 \text{ m}$) après une collision avec le sol. Les figures c. et d. représentent l’évolution de la vitesse du centre de la particule selon l’axe y en fonction du temps. Les figures b. et d. sont des zooms des rectangles verts qui sont dessinés dans les figures a. et c. respectivement. Les résultats pour *NSM1* sont les lignes de pointillés rouges et ceux pour *NSM2* sont les lignes bleues ; le sol est en gris.

le collision a lieu dans l'intervalle $[t^{39}, t^{40}]$. Si l'instant réel de la collision est θ^{39} , le contact particule-sol est parfait, il se fait en un point, et donc le centre de la particule a pour ordonnée $0.22 m$ (rayon de la particule) en t^{40} . Si l'instant réel de la collision est dans l'intervalle de temps $[t^{39}, \theta^{39}[$, une faible interpénétration numérique existe en t^{40} . Dans le cas présenté en figure 2.11b, l'instant réel de la collision a lieu dans l'intervalle $]\theta^{39}, t^{40}]$, et donc une erreur numérique ne permet pas à la particule d'être en contact avec le sol à partir de t^{40} . Avec *NSM1*, nous remarquons que la particule reste parfaitement en contact avec le sol à partir de t^{40} . La figure 2.11d. (zoom d'une partie de la figure 2.11c.) montre que quand le contact est détecté, une vitesse intermédiaire sans signification physique est trouvée avec le modèle *NSM1* en t^{40} . On vérifie aussi que la discontinuité de vitesse, pour l'approche *NSM2* est en θ^{39} .

2.6.2 DEM vs NSM2

Pour comparer les approches régulière *DEM* et non-régulière *NSM2*, qui permettent de gérer des collisions inélastiques, nous avons écrit les expressions de $\underline{\dot{u}}^{n+1}$ sous un même formalisme. Ainsi, pour l'approche *DEM*, l'expression recherchée est

$$\underline{\underline{M}} \underline{\dot{u}}^{n+1} = \underline{\underline{M}} \underline{\dot{u}}^n + h \underline{f}^n + h \underline{g}^n \text{ avec } \underline{g}_i^n = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N k \min(0, D_{ij}(\underline{q}^n)) \underline{e}_{ij}^n, \quad (2.40)$$

et pour l'approche *NSM2*, elle est (voir D)

$$\left[\underline{\underline{M}} + \frac{1}{2} K_N \underline{\underline{G}}^n \underline{\underline{G}}^n \right] \underline{\dot{u}}^{n+1}(\theta^n) = \left[\underline{\underline{M}} - \frac{1}{2} K_N \underline{\underline{G}}^n \underline{\underline{G}}^n \right] \underline{\dot{u}}^n(\theta^n) + \underline{p}^{ext}(\theta^n) + \underline{\underline{G}}^n \underline{\mu}^{n+1}. \quad (2.41)$$

Nous remarquons dans l'équation (2.40), d'une part que l'interpénétration est nécessaire pour gérer le rebond, et d'autre part que les gestions de l'interpénétration et du rebond sont réalisées par le même terme $h \underline{g}^n$. Ainsi, il ne peut pas y avoir de contrôle sur le rebond sauf si la situation est quasi-statique. En revanche, dans l'équation (D.11) le terme $\underline{\underline{G}}^n \underline{\mu}^{n+1}$ permet de gérer la non-interpénétration des particules alors que les termes $\frac{1}{2} K_N \underline{\underline{G}}^n \underline{\underline{G}}^n$ permettent de gérer le type de collision choisie. Quand $K_N = 0$, nous retrouvons l'équation (2.39) permettant de gérer des collisions parfaitement inélastiques; et quand $K_N \rightarrow \infty$, nous retrouvons que la vitesse normale après contact est de même amplitude mais de direction opposée à la vitesse normale avant contact.

Sur le même exemple que précédemment, nous illustrons les différences du traitement du contact pour ces deux approches. Nous rappelons que la particule est dans le plan xy, son rayon est $r = 0.22 m$, sa position initiale est $\underline{q}_{initial} =^t (0.5, 0.5)$ et sa vitesse initiale est $\underline{\dot{u}}_{initial} =^t (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. Le sol est délimité par $y \leq 0$. On choisit $k = 1.2 \times 10^5 kg.s^{-2}$ [2], $K_N = 10^4 kg$, $T = 0.8 s$ et $h = 10^{-2} s$. La position dans le plan xy et la vitesse selon l'axe y de la particule après collision avec le sol, en fonction du temps, sont données pour les deux approches *DEM* et *NSM2* dans la figure 2.12. Nous remarquons sur la figure 2.12b. et de l'équation (2.33) que pour l'approche *NSM2*, la somme des vitesses normales avant et après contact se neutralisant pour la collision élastique, il n'y aura jamais d'interpénétration entre la particule et le plan. De plus, pour qu'il n'y ait pas de faible erreur numérique due au choix du pas de temps, i.e. un contact parfait entre le sol et la particule, il faudrait que le contact réel détecté dans l'intervalle $[t^{39}, t^{40}]$ ait lieu à l'instant t^{39} .

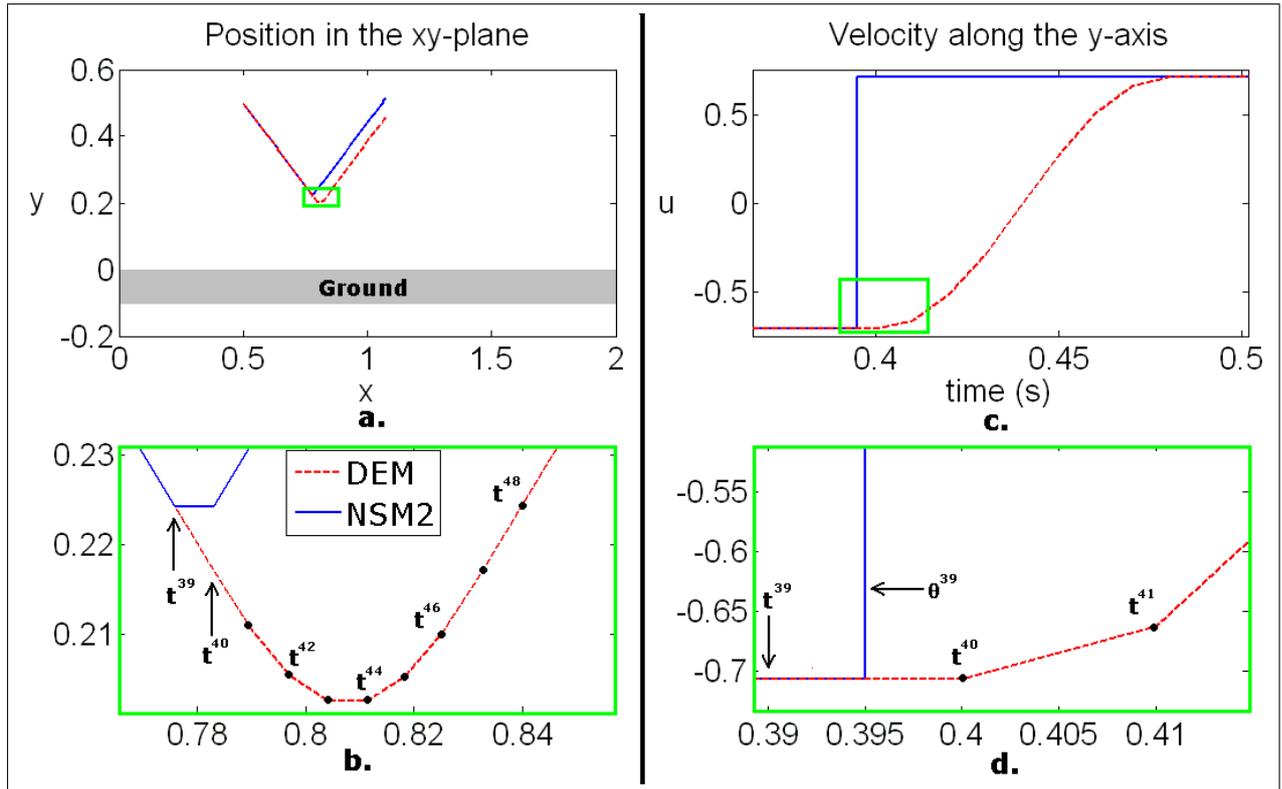


FIGURE 2.12 – Collision d’une particule avec le sol pour les approches *DEM* et *NSM2*. Les figures a. et b. représentent la trajectoire dans le plan xy du centre de la particule (de rayon $r = 0.22\text{ m}$) après une collision avec le sol. Les figures c. et d. représentent l’évolution de la vitesse du centre de la particule selon l’axe y en fonction du temps. Les figures b. et d. sont des zooms des rectangles verts qui sont dessinés dans les figures a. et c. respectivement. Les résultats pour *DEM* sont les lignes de pointillés rouges et ceux pour *NSM2* sont les lignes bleues ; le sol est en gris.

En ce qui concerne l’approche *DEM*, l’utilisation d’une force régularisante nécessite de nombreux pas de temps pour corriger l’interpénétration de la particule dans le sol avant d’obtenir le rebond élastique. La collision a lieu durant l’intervalle $[t^{39}, t^{40}]$ et il n’y a plus d’interpénétration dans l’intervalle $[t^{47}, t^{48}]$.

2.7 Synthèse du chapitre

Nous gérons les interactions piéton-piéton et piéton-obstacle en nous inspirant des milieux granulaires. La gestion de l’interaction particule-particule est présentée dans ce chapitre. Elle se décompose en trois étapes : la détection du contact, le traitement du contact et la gestion du mouvement des particules. Trois approches, une régulière et deux non-régulières, sont présentées théoriquement et numériquement. Pour les deux approches non-régulières, en faisant quelques hypothèses (collisions parfaitement inélastiques, etc.), le problème de contact est écrit avec le même formalisme que celui utilisé dans la plasticité. Les approches *NSM1-NSM2* et *DEM-NSM2* sont comparées entre elles sur des types de collision identiques. L’avantage majeur de l’approche *NSM2* est qu’elle n’est pas limitée à un type de collision,

comme le sont DEM et $NSM1$.

Chapitre 3

Gestion du comportement des piétons

Ce chapitre a pour objectif de présenter la manière dont un comportement est affecté à chaque piéton :

- ★ une “volonté” est donnée à chaque piéton*
 - ★ les interactions entre un piéton et son environnement proche sont gérées*
-