

# Formule de Pieri pour les polynômes de Grothendieck

Nous avons vu l'importance de l'anneau de Grothendieck dans les problèmes de géométrie algébrique. Cet anneau est isomorphe à un anneau de polynômes où les variétés de Schubert sont représentées par les polynômes de Grothendieck (cf. paragraphe 3.3.2). La structure multiplicative de ces polynômes est donc particulièrement intéressante à étudier. Dans le cas de l'anneau de cohomologie de la Grassmannienne, cette structure est donnée par la formule de Pieri sur les fonctions de Schur que nous avons décrites dans le paragraphe 3.2.3. On cherche à obtenir une description combinatoire similaire pour les polynômes de Grothendieck.

La formule de Pieri donne le produit d'une fonction de Schur par une fonction complète. Un équivalent pour les polynômes de Grothendieck est le produit

$$G_\sigma G_{s_k} \tag{4.1}$$

où  $\sigma$  est une permutation donnée et  $s_k$  une transposition simple. En termes de codes, cela donne

$$G_v G_{[0^{k-1}, 1]} \tag{4.2}$$

où  $v$  est le code de Lehmer de la permutation  $\sigma$ . Le polynôme  $G_{s_k} = G_{[0^{k-1}, 1]}$  se développe simplement par les règles décrites dans le paragraphe 3.3.2. On a que

$$G_{[0^{k-1}, 1]} = G_{[k, 0^{k-1}]} \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_{k-1}. \tag{4.3}$$

Calculons par exemple  $G_{s_3}$ ,

$$G_{[3,0,0]}\pi_1\pi_2 = \left(1 - \frac{y_1}{x_1}\right)\left(1 - \frac{y_2}{x_1}\right)\left(1 - \frac{y_3}{x_1}\right)\pi_1\pi_2 \quad (4.4)$$

$$= \left(1 - \frac{e_1(y_1, y_2, y_3)}{x_1} + \frac{e_2(y_1, y_2, y_3)}{x_1^2} - \frac{e_3(y_1, y_2, y_3)}{x_1^3}\right)\pi_1\pi_2 \quad (4.5)$$

$$= \left(1 + \frac{e_2(y_1, y_2, y_3)}{x_1x_2} - \frac{e_3(y_1, y_2, y_3)}{x_1^2x_2} - \frac{e_3(y_1, y_2, y_3)}{x_1x_2^2}\right)\pi_2 \quad (4.6)$$

$$= 1 - \frac{y_1y_2y_3}{x_1x_2x_3}. \quad (4.7)$$

La fonction  $e$  est la fonction symétrique élémentaire définie au paragraphe 3.2.1. A chaque étape, les termes de degré  $-1$  en  $x_i$  sont annulés par l'opérateur  $\pi_i$ . De façon générale, on obtient donc

$$G_{s_k} = 1 - \frac{y_1 \cdots y_k}{x_1 \cdots x_k}. \quad (4.8)$$

Comme dans le cas de l'anneau de cohomologie, on travaille dans un quotient de l'anneau des polynômes par les fonctions symétriques. Plus précisément, on identifie les fonctions symétriques en  $x$  à des fonctions symétriques en  $y$ . Dans [Las90, Théorème 6.4], Lascoux décrit le produit  $G_\sigma G_{s_k}$  dans ce quotient en termes des opérateurs  $\pi$  et  $\hat{\pi}$  de l'algèbre de 0-Hecke.

On rappelle que l'application  $\tilde{\rho}^k$  définie au paragraphe 2.2.2 envoie une permutation  $\sigma$  sur l'élément maximal de son coset  $\sigma(\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k})$ .

**Théorème 4.0.2.** (Lascoux) Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  et  $1 \leq k < n$ . Soit  $\zeta = \zeta(\sigma, k)$  l'image de  $\sigma$  par la projection  $\tilde{\rho}^k$ . Alors modulo l'idéal décrit ci-dessus, on a

$$G_\sigma \frac{y_{\sigma_1} \cdots y_{\sigma_k}}{x_1 \cdots x_k} = G_{\omega \hat{\pi}_{\omega \zeta} \pi_{\zeta^{-1} \sigma}}. \quad (4.9)$$

Par exemple, pour  $\sigma = 136254$  et  $k = 4$  on a  $\zeta = 632154$  et

$$G_\sigma \frac{y_1 y_3 y_6 y_2}{x_1 x_2 x_3 x_4} = G_{654321} \hat{\pi}_3 \hat{\pi}_4 \hat{\pi}_5 \hat{\pi}_2 \hat{\pi}_3 \hat{\pi}_4 \pi_3 \pi_2 \pi_1 \pi_2. \quad (4.10)$$

Par le calcul (cf. paragraphe 5.3.3), on obtient une somme de 14 éléments avec multiplicités  $\pm 1$

$$\begin{aligned} G_\sigma \frac{y_1 y_3 y_6 y_2}{x_1 x_2 x_3 x_4} &= G_{136254} - G_{136452} - G_{136524} + G_{136542} - G_{146253} \\ &\quad + G_{146352} + G_{146523} - G_{146532} - G_{156234} + G_{156243} \\ &\quad + G_{156324} - G_{156342} - G_{156423} + G_{156432}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Le théorème de Lascoux nous dit que l'étude du produit  $G_\sigma G_{s_k}$  revient à un calcul formel sur les opérateurs  $\pi$  et  $\hat{\pi}$ . Plutôt que de travailler sur les polynômes,

on peut donc se placer dans les bases formelles  $K$  et  $\hat{K}$  définies dans le paragraphe 3.4. Le calcul précédent revient donc à développer

$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} \pi_{\zeta^{-1}\sigma} \quad (4.12)$$

dans la base des  $K$ . Ce sera l'objet de ce chapitre. On verra que l'utilisation de la base  $\hat{K}$  est essentielle. Bien que les relations entre les opérateurs  $\pi$  et  $\hat{\pi}$  soient bien connues et relativement simples, il n'existe pas de résultat général permettant de développer un produit qui mélange les deux types d'opérateurs. Comme on l'a vu avec l'exemple (4.11), on obtient empiriquement des coefficients  $\pm 1$ . Ce résultat s'explique par une interprétation combinatoire donnée dans un cadre plus général par Lenart et Postnikov [LP07, Corollaire 8.2].

**Théorème 4.0.3.** (*Lenart et Postnikov*) *Soit  $s_k$  une transposition simple. On construit la liste de transpositions suivante  $(r_1, \dots, r_\ell) = ((1, n), (2, n), \dots, (k, n), (1, n-1), \dots, (k, n-1), \dots, (1, k+1), \dots, (k, k+1))$ . Alors*

$$G_\sigma G_{s_k} = G_\sigma - \frac{y_1 \cdots y_k}{y_{\sigma_1} \cdots y_{\sigma_k}} \sum_J (-1)^{|J|} G_{w(J)} \quad (4.13)$$

sommé sur les sous-ensembles  $J = (j_1 < j_2 < \cdots < j_s)$  de  $(1, \dots, \ell)$  tels que  $\sigma \prec \sigma r_{j_1} \prec \sigma r_{j_1} r_{j_2} \prec \cdots \prec \sigma r_{j_1} \cdots r_{j_s} = w(J)$  soit une chaîne saturée pour l'ordre de Bruhat de  $\sigma$  à  $w(J)$ . En d'autres termes,  $J$  est un chemin dans le diagramme de Hasse de l'ordre de Bruhat entre  $\sigma$  et  $w(J)$ .

La somme n'a pas d'annulation et les coefficients sont  $\pm 1$  (chaque permutation est obtenue par au plus une chaîne).

Ce théorème nous dit que le développement de (4.12) s'exprime en termes d'énumérations de chaînes sur l'ordre de Bruhat. Sottile et Lenart [LS07] avaient déjà obtenu un résultat similaire dans le cas des polynômes de Grothendieck simples. La démonstration de Lenart et Postnikov ne s'appuie pas sur le théorème de Lascoux 4.0.2 et leur résultat s'applique à tous les groupes de Coxeter. Dans ce chapitre, nous proposons une démonstration combinatoire de ce théorème dans le cas du type  $A$ . Surtout nous donnons un résultat plus fort qui permet d'exprimer la somme en termes non plus énumératifs mais structurels.

**Théorème 4.0.4.** *Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  et  $1 \leq k < n$ , alors il existe une permutation  $\eta(\sigma, k)$  construite explicitement à partir de  $\sigma$  et  $k$  telle que*

$$G_\sigma \frac{y_{\sigma_1} \cdots y_{\sigma_k}}{x_1 \cdots x_k} = G_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} \pi_{\zeta^{-1}\sigma} = \sum_{\sigma \leq \mu \leq \eta} (-1)^{\ell(\mu) - \ell(\sigma)} G_\mu. \quad (4.14)$$

Le développement de (4.12) correspond donc à une somme sur un intervalle de l'ordre de Bruhat. Dans l'exemple donné en (4.11), la permutation  $\eta$  est égale à 156432 et la somme se fait sur l'intervalle [136254, 156432].

Le but premier de chapitre est de prouver le théorème 4.0.4 par un développement dans la base  $K$  de l'expression (4.12). Les résultats énoncés ici ont été publiés

dans [Pon13c]. L'interprétation en termes de produit de polynômes est propre aux polynômes de Grothendieck. Cependant, le développement du produit des opérateurs  $\hat{\pi}$  et  $\pi$  comme une somme sur un intervalle peut être vu comme un calcul dans l'algèbre de 0-Hecke ou sur les polynômes clés. Une première partie de la preuve est donnée paragraphe 4.1 où l'on démontre que l'ensemble de sommation est clos par intervalle. On se sert pour cela d'un développement dans la base  $\hat{K}$  puis d'un changement de base. Dans le paragraphe 4.2, nous reformulons le résultat du théorème 4.0.3 pour étudier de façon plus précise la structure des chaînes de l'ordre de Bruhat qui apparaissent dans la somme. On donnera en particulier une preuve directe du théorème 4.0.3. Par cette nouvelle description, nous donnons de façon explicite la construction de la permutation  $\eta(\sigma, k)$ . Nous prouvons dans le paragraphe 4.3 qu'elle est bien l'unique élément maximal de l'ensemble de sommation et donc que la somme se fait sur un intervalle. Le paragraphe 4.4 est dédié à deux problèmes annexes : la variation de la permutation  $\eta(\sigma, k)$  quand  $k$  varie et la généralisation du développement de (4.12) aux autres sous-groupes paraboliques de l'algèbre 0-Hecke.

## 4.1 Clôture par intervalle

Le théorème 4.0.3 nous dit que le développement de (4.12) dans la base des  $K$  est une somme de permutations avec coefficients  $\pm 1$  en fonction de la longueur de la permutation. On peut donc directement considérer cette somme comme un ensemble. Le but de ce paragraphe est de prouver que l'ensemble est clos par intervalle.

### 4.1.1 Développement sur la base $\hat{K}$

L'expression (4.12) peut être développée dans la base  $K$  ou  $\hat{K}$ . En fait, le développement dans la base  $\hat{K}$  est beaucoup plus simple et nous apporte déjà des informations sur le résultat. La première partie du calcul de (4.12) consiste en l'application des opérateurs  $\hat{\pi}$ . Cela se fait directement par la définition et on obtient le résultat dans les deux bases  $K$  et  $\hat{K}$ .

$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} = \hat{K}_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} \quad (4.15)$$

$$= \hat{K}_\zeta \quad (4.16)$$

$$= \sum_{\mu \geq \zeta} (-1)^{\ell(\mu) - \ell(\zeta)} K_\mu. \quad (4.17)$$

Une décomposition réduite de  $\omega\zeta$  correspond à un chemin dans l'ordre faible entre  $\omega$  et  $\zeta$ . Pour le calcul (4.11), c'est par exemple le chemin  $s_3s_4s_5s_2s_3s_4$  entre 654321 et la permutation  $\zeta = 632154$ . On obtient donc bien  $\hat{K}_\zeta$  ou, par un changement de base vers  $K$ , une somme sur l'intervalle  $[\zeta, \omega]$ . Dans la deuxième partie

du calcul, on doit à présent appliquer les opérateurs  $\pi$ . On peut pour cela partir soit de (4.16) dans la base  $\hat{K}$ , soit de (4.17) dans la base  $K$ . Dans un premier temps, partons de (4.16) et appliquons les opérateurs à  $\hat{K}_\zeta$ . On obtient alors le développement de (4.12) dans la base  $\hat{K}$ .

**Proposition 4.1.1.** *Soient  $\sigma$ ,  $k$ , et  $\zeta$  définis comme dans le théorème 4.0.2, alors*

$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} \pi_{\zeta^{-1}\sigma} = \sum_{\zeta \geq \mu \geq \sigma} \hat{K}_\mu. \quad (4.18)$$

*Démonstration.* On a par définition que  $\{\zeta_1, \dots, \zeta_k\} = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ . Cela signifie que l'intervalle  $[\sigma, \zeta]$ , bien qu'il soit inclus dans  $\mathfrak{S}_n$ , est en bijection avec un intervalle de  $\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k}$ . On appelle  $\varphi$  la bijection du coset  $\sigma(\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k})$  vers  $\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k}$ . On a que  $\varphi(\sigma) = (\sigma', \sigma'')$  où  $\sigma'$  et  $\sigma''$  sont les standardisés de respectivement  $\sigma_1 \dots \sigma_k$  et  $\sigma_{k+1} \dots \sigma_n$ . Par ailleurs,  $\varphi(\zeta) = (\omega', \omega'')$  où  $\omega'$  et  $\omega''$  sont les permutations maximales de respectivement  $\mathfrak{S}_k$  et  $\mathfrak{S}_{n-k}$ . Enfin, une décomposition réduite  $v$  de  $\zeta^{-1}\sigma$  est un chemin dans l'ordre faible entre  $\zeta$  et  $\sigma$ . En particulier, elle ne contient pas la transposition  $s_k$  et se décompose donc en deux chemins  $v'$  et  $v''$  qui commutent tels que  $v'$  ne contient que des transpositions  $s_i$  avec  $i < k$  et  $v''$  des transpositions  $s_i$  avec  $k < i < n$ .

À présent, posons  $\phi$  l'application sur l'espace vectoriel engendré par  $\hat{K}$  telle que  $\phi(\hat{K}_\mu) = \hat{K}_{\mu'} \otimes \hat{K}_{\mu''}$  pour  $\varphi(\mu) = (\mu', \mu'')$ , alors

$$\hat{K}_\zeta \pi_{\zeta^{-1}\sigma} = \phi^{-1} \left( \hat{K}'_{\omega'} \pi_{\omega'\sigma'} \otimes \hat{K}_{\omega''} \pi_{\omega''\sigma''} \right) \quad (4.19)$$

$$= \phi^{-1} \left( K_{\sigma'} \otimes K_{\sigma''} \right) \quad (4.20)$$

$$= \phi^{-1} \left( \sum_{\mu' \geq \sigma'} \hat{K}_{\mu'} \otimes \sum_{\mu'' \geq \sigma''} \hat{K}_{\mu''} \right). \quad (4.21)$$

On obtient une somme sur l'image par  $\varphi^{-1}$  du produit entre les intervalles  $[\sigma', \mu']$  et  $[\sigma'', \mu'']$ . Cette image correspond par définition à  $[\sigma, \zeta]$ .  $\square$

Prenons par exemple la permutation  $\sigma = 15423$  et  $k = 3$ . Dans ce cas,  $\zeta = 54132$  et une décomposition réduite de  $\zeta^{-1}\sigma$  est donnée par  $s_2 s_1 s_4$ . On remarque qu'elle ne contient pas  $s_3$ . L'intervalle  $[\sigma, \zeta]$  est en bijection avec  $[132, 321] \times [12, 21]$ . On a

$$\hat{K}_{54132}\pi_2\pi_1\pi_4 = \phi^{-1}(\hat{K}_{321}\pi_2\pi_1 \otimes \hat{K}_{21}\pi_1) \quad (4.22)$$

$$= \phi^{-1}((\hat{K}_{132} + \hat{K}_{231} + \hat{K}_{312} + \hat{K}_{321}) \otimes (\hat{K}_{12} + \hat{K}_{21})) \quad (4.23)$$

$$= \phi^{-1}(\hat{K}_{132} \otimes \hat{K}_{12}) + \phi^{-1}(\hat{K}_{132} \otimes \hat{K}_{21}) + \phi^{-1}(\hat{K}_{231} \otimes \hat{K}_{12}) \quad (4.24)$$

$$+ \phi^{-1}(\hat{K}_{231} \otimes \hat{K}_{21}) + \phi^{-1}(\hat{K}_{312} \otimes \hat{K}_{12}) + \phi^{-1}(\hat{K}_{312} \otimes \hat{K}_{21})$$

$$+ \phi^{-1}(\hat{K}_{321} \otimes \hat{K}_{12}) + \phi^{-1}(\hat{K}_{321} \otimes \hat{K}_{21})$$

$$= \hat{K}_{15423} + \hat{K}_{15432} + \hat{K}_{45123} + \hat{K}_{45132} + \hat{K}_{51423} + \hat{K}_{51432} \quad (4.25)$$

$$+ \hat{K}_{54123} + \hat{K}_{54132}$$

### 4.1.2 Changement de base

Le développement de (4.12) dans la base des  $\hat{K}$  s'obtient donc simplement par une somme sur un intervalle. Par application directe du changement de base de  $\hat{K}$  vers  $K$  donné en (3.107), on obtient une première description du développement dans la base  $K$ . On a besoin pour cela d'introduire l'ordre de  $k$ -Bruhat, notion dérivée de l'ordre de Bruhat.

**Définition 4.1.2.** Soit  $1 \leq k < n$ , une transposition  $\tau = (a, b)$  est une  $k$ -transposition si  $a \leq k < b$ . On dit que  $\tau$  est une  $k$ -transposition de Bruhat pour une permutation  $\sigma$  si  $\tau$  est une  $k$ -transposition et si  $\sigma\tau$  est un successeur de  $\sigma$  pour l'ordre de Bruhat. La permutation  $\sigma\tau$  est alors un  $k$ -successeur de  $\sigma$ .

La notion de  $k$ -successeur est par définition plus contrainte que celle de successeur. Elle définit par transitivité un ordre qu'on appelle  $k$ -Bruhat. L'ordre de Bruhat est donc une extension de l'ordre de  $k$ -Bruhat (cf. paragraphe 1.2.3). Cet ordre a des propriétés algébriques intéressantes, il a été introduit par [LS83] et étudié de façon plus approfondie dans [BS98]. Nous l'utiliserons à plusieurs reprises.

**Proposition 4.1.3.** Soit  $\text{Succs}_\sigma^{-k}$  l'ensemble des successeurs  $\sigma'$  de  $\sigma$  qui ne sont pas des  $k$ -successeurs. C'est-à-dire qu'on a  $\sigma' = \sigma\tau$  avec  $\tau$  une transposition non  $k$ -transposition. Alors, le développement de (4.12) dans la base des  $K$  est donné par

$$\sum (-1)^{\ell(\nu) - \ell(\sigma)} K_\nu \quad (4.26)$$

sommé sur les permutations  $\nu$  telles que  $\nu \geq \sigma$  et  $\forall \sigma' \in \text{Succs}_\sigma^{-k}$ ,  $\nu \not\geq \sigma'$ .

On somme donc sur des permutations  $\nu \geq \sigma$  tel qu'il n'existe pas de chemin entre  $\sigma$  et  $\nu$  dont la première transposition ne soit pas une  $k$ -transposition. On verra par la suite que toutes les permutations  $\nu$  sont en fait supérieures à  $\sigma$  pour  $k$ -Bruhat.

*Démonstration.* Par un changement de base sur (4.18), on obtient

$$\sum_{\zeta \geq \mu \geq \sigma} \hat{K}_\mu = \sum_{\zeta \geq \mu \geq \sigma} \sum_{\nu \geq \mu} (-1)^{\ell(\nu) - \ell(\mu)} K_\nu \quad (4.27)$$

$$= \sum_{\nu \geq \sigma} c_\nu K_\nu \quad (4.28)$$

où

$$c_\nu = \sum_{\substack{\mu \leq \nu \\ \sigma \leq \mu \leq \zeta}} (-1)^{\ell(\nu) - \ell(\mu)}. \quad (4.29)$$

Par [Ver71],  $c_\nu$  est une somme sur la *fonction de Möbius* de  $\nu$  et  $\mu$ . Cette somme se fait sur l'intersection de l'intervalle  $[\sigma, \nu]$  avec le coset  $\sigma(\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k})$ . Par le lemme 2.3.12, cette intersection est un intervalle. De ce fait,  $c_\nu \neq 0$  uniquement quand l'intervalle est réduit à un élément  $\sigma$ . En d'autres termes,  $c_\nu = 0$  si et seulement si il existe  $\mu$  tel que  $\sigma < \mu \leq \zeta$  et  $\mu \leq \nu$ . Il suffit de tester les éléments  $\mu$  qui sont successeurs directs de  $\sigma$ , ce qui correspond à  $\text{Succs}_\sigma^{-k}$ .  $\square$

De la proposition 4.1.3, on déduit immédiatement le corollaire suivant.

**Corollaire 4.1.4.** *L'ensemble des permutations  $\nu$  telles que  $K_\nu$  apparaît dans le développement de (4.12) dans la base  $K$  est clos par intervalle.*

*Démonstration.* Soit  $\nu$  tel que  $K_\nu$  apparaisse dans la somme 4.26. Supposons qu'il existe  $\sigma \leq \nu' \leq \nu$  telle que  $K_{\nu'}$  n'apparaisse pas dans la somme. Alors, par la proposition 4.1.3, il existe  $\mu' \in \text{Succs}_\sigma^{-k}$  avec  $\mu' \leq \nu'$ . Par transitivité, on a  $\mu' \leq \nu$  ce qui contredit le fait que  $K_\nu$  apparaisse dans la somme.  $\square$

Ce corollaire est une première étape dans la preuve du théorème 4.0.4. Il reste à prouver que l'ensemble en question est bien un intervalle, c'est-à-dire qu'il comporte un unique élément maximal. Ce sera fait dans le paragraphe 4.3. Par ailleurs, la proposition 4.1.3 permet de retrouver une partie du résultat de Lenart et Postnikov du théorème 4.0.3 : on obtient que les multiplicités des permutations dans le développement du produit sont  $\pm 1$  en fonction de leur longueur.

## 4.2 Énumération de chaînes

Pour terminer la preuve du théorème 4.0.4, il nous faut d'abord donner une description plus précise de l'énumération de chaînes de l'ordre de Bruhat du théorème 4.0.3. Nous reformulons donc ce théorème en réduisant la liste de transpositions à considérer et en introduisant un ordre sur les transpositions. Nous montrons d'abord que cette nouvelle formulation est équivalente à celle donnée par Lenart et Postnikov. Puis nous donnons une nouvelle preuve combinatoire du théorème 4.0.3. Enfin cette nouvelle formulation permet d'énoncer certaines propriétés qui seront essentielles à la preuve du théorème principal 4.0.4.

### 4.2.1 Description

**Définition 4.2.1.** Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  et  $1 \leq k < n$ . Alors  $W_{\sigma,k}$  est la liste des  $k$ -transpositions de  $\sigma$  munies d'un ordre total défini par :

$$(a, b) \prec (a', b') \Leftrightarrow \sigma(a) > \sigma(a') \text{ ou } (a = a' \text{ et } \sigma(b) < \sigma(b')) \quad (4.30)$$

La relation  $\prec$  dépend de la permutation  $\sigma$  et nous pouvons donc comparer des transpositions uniquement au sein d'une même liste  $W_{\sigma,k}$ . Nous verrons que  $\prec$  est en fait une extension linéaire d'un ordre partiel sur les transpositions qui lui ne dépend pas de  $\sigma$ .

La proposition suivante est une nouvelle formulation du théorème 4.0.3 comme nous le montrerons dans le paragraphe 4.2.2. Nous en donnerons une preuve directe paragraphe 4.2.3.

**Proposition 4.2.2.** Si  $W_{\sigma,k} = (\tau_1 \prec \tau_2 \prec \cdots \prec \tau_m)$ , alors

$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} \pi_{\zeta^{-1}\sigma} = \mathfrak{E}_{\sigma,k} \quad (4.31)$$

où

$$\mathfrak{E}_{\sigma,k} := K_\sigma \cdot (1 - \tau_1) \cdot (1 - \tau_2) \cdots (1 - \tau_m) \quad (4.32)$$

et

$$K_\mu \cdot \tau = \begin{cases} K_{\mu\tau} & \text{si } \tau \text{ est une Bruhat transposition de } \mu, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (4.33)$$

En d'autres termes, on considère  $W_{\sigma,k}$  comme un mot sur les transpositions. Alors  $\mathfrak{E}_{\sigma,k}$  est une somme signée sur les sous-mots de  $W_\sigma$  qui sont des chemins partant de  $\sigma$  dans l'ordre de Bruhat. Nous appellerons de tels sous-mots des *sous-mots valides*. Par exemple, si  $\sigma = 136254$  et  $k = 4$  (ce que nous noterons par la suite  $\sigma = 1362|54$ ), alors  $W_\sigma = ((2, 6), (2, 5), (4, 6), (4, 5))$  et

$$\mathfrak{E}_{1362|54} = K_{1362|54} \cdot (1 - (2, 6)) \cdot (1 - (2, 5)) \cdot (1 - (4, 6)) \cdot (1 - (4, 5)). \quad (4.34)$$

Quand le produit est développé,  $\mathfrak{E}_{\sigma,k}$  se dessine comme un sous-graphe de l'ordre de Bruhat (cf. figure 4.1).

Les coefficients des éléments  $K_\mu$  dans  $\mathfrak{E}_{\sigma,k}$  sont  $\pm 1$  en fonction de la longueur de la permutation. Cela correspond bien à ce que l'on obtient dans le théorème 4.0.3 ainsi qu'à la caractérisation que nous avons vue dans la proposition 4.1.3. La somme  $\mathfrak{E}_{\sigma,k}$  peut donc être considérée directement comme un ensemble de permutations et on parlera souvent de *l'ensemble*  $\mathfrak{E}_{\sigma,k}$ .

Par ailleurs, on a introduit précédemment l'ordre de  $k$ -Bruhat. Par définition, une permutation  $\mu$  de  $\mathfrak{E}_{\sigma,k}$  est reliée à  $\sigma$  par un chemin de  $k$ -transpositions. On a donc,  $\mu$  supérieure à  $\sigma$  pour l'ordre de  $k$ -Bruhat, ce que l'on note  $\mu \geq_k \sigma$ . Une caractérisation de cet ordre est donnée par [BS98, Théorème 1.1.2].

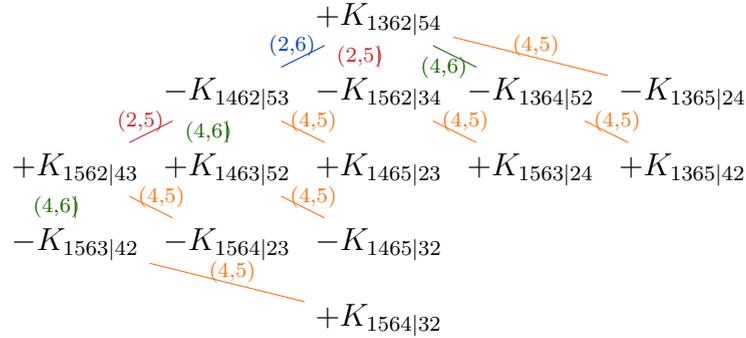


FIGURE 4.1 – L'ensemble  $\mathfrak{E}_{1362|54}$

**Théorème 4.2.3** (Bergeron, Sottile). *On a  $\sigma \leq_k \mu$  si et seulement si*

- (i)  $(a \leq k \Rightarrow \sigma(a) \leq \mu(a))$  et  $(b > k \Rightarrow \sigma(b) \geq \mu(b))$ ,
- (ii) si  $a < b$ ,  $\sigma(a) < \sigma(b)$  et  $\mu(a) > \mu(b)$  alors  $a \leq k < b$ .

Cela nous donne une propriété des permutations  $\mu \in \mathfrak{E}_{\sigma,k}$  que nous utiliserons souvent,

$$\forall a \leq k, \quad \mu(a) \geq \sigma(a), \tag{4.35}$$

$$\forall b > k, \quad \mu(b) \leq \sigma(b). \tag{4.36}$$

### 4.2.2 Ordre partiel sur les $k$ -transpositions

Dans le théorème 4.0.3 et la proposition 4.2.2, l'énumération est donnée en fonction d'une liste ordonnée de transpositions. A première vue, les ordres utilisés semblent différents. Cependant, ils sont tous les deux des extensions linéaires de l'ordre partiel suivant.

**Définition 4.2.4.** *L'ordre partiel  $\triangleleft$  sur les  $k$ -transpositions est défini par*

$$(a, c) \triangleleft (a, b) \text{ si } b < c, \tag{4.37}$$

$$(a, c) \triangleleft (b, c) \text{ si } a < b. \tag{4.38}$$

**Lemme 4.2.5.** *L'ordre  $\prec$  de la définition 4.2.1 est une extension linéaire de  $\triangleleft$ .*

*Démonstration.* C'est une conséquence directe du critère donné par la proposition 2.3.3 pour les transpositions de Bruhat. Soient  $\tau \triangleleft \tau'$  avec  $\tau$  et  $\tau'$  appartenant à un même  $W_{\sigma,k}$ . Alors,  $\tau$  et  $\tau'$  sont des transpositions de Bruhat pour  $\sigma$ . Si  $\tau = (a, c)$  et  $\tau' = (a, b)$  avec  $b < c$  cela signifie que  $\sigma(c) < \sigma(b)$ , c'est-à-dire  $\tau \prec \tau'$ . De même, si  $\tau = (a, c)$  et  $\tau' = (b, c)$  on a  $\sigma(a) > \sigma(b)$  donc  $\tau \prec \tau'$ .  $\square$

**Lemme 4.2.6.** *Soient  $\tau, \theta$  deux  $k$ -transpositions et  $\prec'$  une extension linéaire de l'ordre  $\triangleleft$ . Si  $\tau = (a, d)$  et  $\theta = (a, c)$  alors  $\tau \prec' \theta$  implique  $c < d$ . De même si  $\tau = (a, c)$  et  $\theta = (b, c)$  alors  $\tau \prec' \theta$  implique  $a < b$ .*

La preuve est immédiate. Ce lemme est vrai en particulier pour l'ordre  $\prec$  sur les transpositions de  $W_{\sigma,k}$ . On utilisera à plusieurs reprises les lemmes 4.2.5 et 4.2.6 dans le paragraphe 4.3 pour prouver le théorème 4.0.4.

En donnant une liste ordonnée de  $k$ -transpositions, le théorème 4.0.3 définit lui aussi un ordre. Cet ordre avait en fait déjà été introduit dans [LS07, Théorème 4.3] où le résultat était déjà donné pour les polynômes de Grothendieck simples. Il se décrit comme suit,

$$(a, b) \prec' (c, d) \Leftrightarrow b > d \text{ or } (b = d \text{ and } a < c). \quad (4.39)$$

C'est clairement une extension linéaire de  $\triangleleft$ .

**Proposition 4.2.7.** *Soit  $\prec'$  une extension linéaire quelconque de  $\triangleleft$ . On définit  $W'_{\sigma,k}$  et  $\mathfrak{E}'_{\sigma,k}$  de la même façon que  $W_{\sigma,k}$  et  $\mathfrak{E}_{\sigma,k}$  en remplaçant  $\prec$  par  $\prec'$ . Alors,  $\mathfrak{E}'_{\sigma,k} = \mathfrak{E}_{\sigma,k}$ .*

*Démonstration.* Notons que si  $\tau$  et  $\theta$  sont deux  $k$ -transpositions non comparables par  $\triangleleft$ , alors elles commutent. Ainsi, si  $w'$  est un sous-mot de  $W'_{\sigma,k}$ , on peut réordonner ses transpositions selon  $\prec$  au lieu de  $\prec'$ . On obtient alors un mot  $w$ , sous-mot de  $W_{\sigma,k}$ . Par ailleurs, si on interprète les mots de transpositions en termes de permutations, on a  $w = w'$ .  $\square$

Toutes les propriétés fondamentales de  $\mathfrak{E}_{\sigma,k}$  viennent de l'ordre partiel sur les  $k$ -transpositions. L'ordre total n'est imposé que pour une facilité d'écriture et de construction. En particulier, tous les résultats que nous prouverons par la suite ne dépendent que de l'ordre partiel. On démontre en particulier le lemme suivant qui nous servira de nombreuses fois.

**Lemme 4.2.8.** *Soit  $\mu \geq_k \sigma$  tel qu'un chemin entre  $\sigma$  et  $\mu$  soit donné par  $w = \tau_1 \prec' \dots \prec' \tau_r$  où  $\prec'$  est une extension linéaire de  $\triangleleft$ . Et soit  $\theta = (a, b)$  une  $k$ -transposition telle que  $\tau_r \prec' \tau$ . Alors*

$$\sigma(a) < \sigma(b) \Rightarrow \mu(a) < \mu(b) \quad (4.40)$$

*De façon plus forte, pour  $c$  tel que  $a < c < b$  alors*

$$\sigma(a) < \sigma(c) < \sigma(b) \Rightarrow \mu(a) < \mu(c) < \mu(b) \quad (4.41)$$

*Démonstration.* Prouvons d'abord la propriété plus faible (4.40). Il suffit de regarder une seule étape. Soit  $\sigma$  telle que  $\sigma(a) < \sigma(b)$  et  $\tau$  une  $k$ -transposition de Bruhat pour  $\sigma$  avec  $\tau \prec' \theta$ . On veut prouver que  $\sigma\tau(a) < \sigma\tau(b)$ . Si  $\tau = (a, c)$  alors par le lemme 4.2.6 on a  $c > b$ . Comme  $\tau$  est une transposition de Bruhat pour  $\sigma$ , cela signifie  $\sigma(b) > \sigma(c)$ . De même si  $\tau = (c, b)$ , on a  $a < c$  et donc  $\sigma(c) < \sigma(a)$ .

Pour prouver (4.41), on se place d'abord dans le cas où  $c \leq k$ . Comme  $(a, b) \triangleleft (c, b)$ , il est clair que  $\mu(c) < \mu(b)$ . Prouvons sur une étape  $\tau$  que si  $\sigma(a) < \sigma(c)$  alors  $\sigma\tau(a) < \sigma\tau(c)$ . On a que  $\sigma\tau(c) \geq \sigma(c)$  donc seule l'action de  $\tau$  sur  $a$  nous

intéresse. Si  $\tau = (a, d)$  alors comme  $a < c < d$ , et que  $\tau$  est une transposition de Bruhat, on a nécessairement  $\sigma(c) > \sigma(d)$ . La preuve pour le cas  $c > k$  est exactement symétrique.  $\square$

Il est clair qu'une chaîne de l'énumération donnée en proposition 4.2.2 peut être réordonnée pour correspondre à une chaîne du théorème 4.0.3. Il n'est pas clair que l'opération inverse puisse être effectuée. En effet, le théorème 4.0.3 part d'une liste contenant toutes les  $k$ -transpositions alors que la proposition 4.2.2 n'utilise que les  $k$ -transpositions de Bruhat d'une certaine permutation. Cependant, la liste de  $k$ -transpositions du théorème 4.0.3 peut en fait être réduite à  $W_{\sigma, k}$ .

**Lemme 4.2.9.** *Les transpositions apparaissant dans les chaînes du théorème 4.0.3 sont des transpositions de Bruhat pour la permutation  $\sigma$ .*

*Démonstration.* Soit  $\tau_1 \prec' \dots \prec' \tau_\ell$  une chaîne du théorème 4.0.3 et supposons qu'il existe  $\tau_i = (a, b)$  une transposition de la chaîne qui ne soit pas de Bruhat pour  $\sigma$ . Soit  $w = \tau_1 \prec' \dots \prec' \tau_{i-1}$  et  $\mu = \sigma w$ . Comme  $\tau$  n'est pas une transposition de Bruhat pour  $\sigma$  alors il existe  $c$  tel que  $a < c < b$  et  $\sigma(a) < \sigma(c) < \sigma(b)$ . Par le lemme 4.2.8, on a alors  $\mu(a) < \mu(c) < \mu(b)$  ce qui contredit le fait que  $\tau_i$  soit une transposition de Bruhat pour  $\mu$ .  $\square$

### 4.2.3 Preuve directe

Nous avons vu au paragraphe 4.1 que

$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega \zeta} = \sum_{\mu \geq \zeta} (-1)^{\ell(\mu) - \ell(\zeta)} K_\mu. \quad (4.42)$$

La proposition 4.2.2 se prouve par récurrence sur la longueur de la permutation  $\zeta^{-1}\sigma$  en appliquant les opérateurs  $\pi$  sur la somme (4.42). Le cas initial est donné par le lemme suivant.

**Lemme 4.2.10.**

$$\mathfrak{E}_{\zeta, k} = \sum_{\mu \geq \zeta} (-1)^{\ell(\mu) - \ell(\zeta)} K_\mu. \quad (4.43)$$

*Démonstration lemme 4.2.10.* Le lemme 4.2.10 revient à dire que l'ensemble  $\mathfrak{E}_{\sigma, k}$  est égal à l'intervalle  $[\zeta, \omega]$ . Par construction, on a  $\mathfrak{E}_{\zeta, k} \subset [\zeta, \omega]$ . Il reste à prouver  $[\zeta, \omega] \subset \mathfrak{E}_{\zeta, k}$ .

Soit  $\mu \in [\zeta, \omega]$ , on prouve d'abord que  $\mu \geq_k \zeta$ . Soit  $a \leq k$ , la comparaison des clés gauches de  $\mu$  et  $\zeta$  nous dit que le facteur gauche réordonné de  $\mu$  est plus grand valeur par valeur que le facteur gauche réordonné de  $\zeta$ . Dans le cas de  $\zeta$ , ce facteur est antidominant et on a donc  $\mu(a) \geq \zeta(a)$ . De même pour  $b > k$ , on a  $\mu(b) \leq \zeta(b)$ . La condition (i) du théorème 4.2.3 est donc vérifiée. Par ailleurs si  $a < b$  et  $\zeta(a) < \zeta(b)$ , alors  $a \leq k < b$  et donc la condition (ii) est aussi vérifiée.

Il existe donc un chemin dans l'ordre de Bruhat entre  $\zeta$  et  $\mu$  formé de  $k$ -transpositions. Il faut prouver que ce chemin est un sous mot de  $W_{\zeta, k}$ . Pour cela

on utilise l'algorithme décrit dans [BS98, Algorithme 3.1.1]. En fonction de deux permutations  $\zeta \leq_k \mu$ , un processus retourne une  $k$ -transposition  $\tau$  telle que  $\zeta \leq_k \mu\tau \leq_k \mu$ . La transposition  $\tau$  est donc le dernier élément d'un chemin entre  $\zeta$  et  $\mu$ . On applique ensuite récursivement le processus sur  $\mu\tau$ . Le choix de  $\tau$  est fait comme suit :

- choisir  $a \leq k$  avec  $\zeta(a)$  minimal pour  $\zeta(a) < \mu(a)$ ,
- choisir  $b > k$  avec  $\zeta(b)$  maximal pour  $\mu(b) < \mu(a) \leq \zeta(b)$ ,

alors  $\tau = (a, b)$ . Bergeron et Sottile prouvent que  $\mu$  est bien un successeur de  $\mu\tau$  pour Bruhat. On a par construction  $\zeta(a) < \zeta(b)$ . Or  $\zeta(i) < \zeta(a)$  pour tout  $i$  tel que  $a < i \leq k$  et  $\zeta(i) > \zeta(b)$  pour tout  $i$  tel que  $k < i \leq b$ . De là,  $\tau$  est une transposition de Bruhat pour  $\zeta$  et donc  $\tau \in W_{\zeta, k}$ . Par ailleurs, comme on choisit à chaque étape  $\zeta(a)$  minimal et  $\zeta(b)$  maximal, on aura  $\tau' \prec \tau$  pour  $\tau'$  choisie après  $\tau$ . Le chemin obtenu est donc bien un sous-mot de  $W_{\zeta, k}$ .  $\square$

Prouver la proposition 4.2.2 revient maintenant à montrer

$$\mathfrak{E}_{\sigma, k} = \mathfrak{E}_{\zeta, k} \pi_{\zeta^{-1}\sigma}. \quad (4.44)$$

Il suffit pour cela de montrer une seule étape.

**Proposition 4.2.11.** *Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  et on suppose que l'hypothèse de récurrence (4.44) est vérifiée. Soit  $s_i$  une transposition simple telle que  $i \neq k$  et  $\sigma s_i < \sigma$ , alors*

$$\mathfrak{E}_{\sigma, k} \pi_i = \mathfrak{E}_{\sigma s_i, k}. \quad (4.45)$$

Remarquons d'abord une première propriété.

**Lemme 4.2.12.**  $\mathfrak{E}_{\sigma s_i, k} \cap \mathfrak{E}_{\sigma, k} = \emptyset$ , et plus précisément  $\forall \nu \in \mathfrak{E}_{\sigma s_i, k}, \nu \not\prec \sigma$ .

*Démonstration.* Si  $i < k$ , soit  $p_\mu = \#\{\mu_j \geq \sigma_i, j \leq i\}$ , le nombre de valeurs supérieures ou égales à  $\sigma_i$  dans le facteur de taille  $i$  d'une permutation. Le nombre  $p_\mu$  est constant sur  $\mathfrak{E}_{\sigma s_i, k}$  et égal à  $p_{\sigma s_i} = p_\sigma - 1$ . En effet, toute transposition  $(a, b)$  avec  $a \leq i < k < b$  telle que  $\sigma s_i(b) > \sigma(i)$  n'est pas une transposition de Bruhat pour  $\sigma s_i$ . On en conclut que  $\nu \not\prec \sigma$  pour  $\nu \in \mathfrak{E}_{\sigma s_i, k}$ . Un raisonnement symétrique peut être fait si  $i > k$ .  $\square$

La proposition 4.2.11 est une conséquence des deux lemmes suivant.

**Lemme 4.2.13.** *On a les implications suivantes :*

1. Soit  $w = \tau_{i_1} \dots \tau_{i_r}$  un sous-mot valide de  $W_{\sigma, k}$  et tel que pour  $\mu = \sigma w$ , alors  $\mu s_i \not\prec \sigma$ . Alors,  $w' = (s_i \tau_{i_1} s_i)(s_i \tau_{i_2} s_i) \dots (s_i \tau_{i_r} s_i)$  est un sous-mot valide de  $W_{\sigma s_i, k}$ .
2. Inversement, si  $w' = t_1 \dots t_r$  est un sous-mot valide de  $W_{\sigma s_i, k}$  alors  $w = (s_i t_1 s_i) \dots (s_i t_r s_i)$  est un sous-mot valide de  $W_{\sigma, k}$ .

**Lemme 4.2.14.** Soit  $\mu \in \mathfrak{E}_{\sigma, k}$  tel que  $\mu s_i > \sigma$ , alors  $\mu s_i \in \mathfrak{E}_{\sigma, k}$ .

*Démonstration du lemme 4.2.13.* Cette démonstration utilise principalement des arguments de comparaisons de clés dans l'ordre de Bruhat, en particulier la proposition 2.3.7. Pour faciliter l'écriture, nous notons  $\sigma(1, \dots, i)$  le facteur gauche de taille  $i$  de  $\sigma$  et  $\sigma(1, \dots, i) \leq \mu(1, \dots, i)$  signifie que le facteur gauche réordonné de  $\sigma$  est plus petit terme à terme que le facteur gauche réordonné de  $\mu$ .

L'implication (2) est immédiate. Si  $t$  est une  $k$ -transposition de Bruhat pour  $\sigma s_i$ , il est clair que  $s_i t s_i$  est une  $k$ -transposition de Bruhat pour  $\sigma$ . Par ailleurs, si  $t \prec t'$  dans  $W_{\sigma s_i, k}$  alors  $s_i t s_i \prec s_i t' s_i$  dans  $W_{\sigma, k}$  car  $t$  et  $s_i t s_i$  agissent sur les mêmes valeurs. Donc tout sous-mot valide  $t_1 \dots t_r$  de  $W_{\sigma s_i, k}$  donne un sous-mot valide  $(s_i t_1 s_i) \dots (s_i t_r s_i)$  de  $W_{\sigma, k}$ .

À présent, soit  $w = \tau_{i_1} \dots \tau_{i_r}$  un sous-mot valide de  $W_{\sigma, k}$  tel que pour  $\mu = \sigma w$ , alors  $\mu s_i \not\prec \sigma$ . Sans perte de généralité, on supposera que  $i < k$ . La preuve est symétrique pour  $i > k$ .

On commence par prouver que pour toute permutation  $\tilde{\mu}$  de la chaîne donnée par  $w$  entre  $\sigma$  et  $\mu$ , alors  $\tilde{\mu} s_i \not\prec \sigma$ . On sait que  $\mu s_i \not\prec \sigma$ , ce qui signifie qu'il existe au moins un facteur gauche de  $\mu s_i$  qui n'est pas plus grand que le facteur correspondant de  $\sigma$ . Par ailleurs, comme  $\mu \geq \sigma$  tous les facteurs gauches de  $\mu$  sont plus grands que les facteurs gauches correspondants de  $\sigma$ . Le seul facteur gauche qui diffère entre  $\mu$  et  $\mu s_i$  est le facteur gauche de taille  $i$ . On a donc

$$\mu s_i(1, \dots, i) \not\prec \sigma(1, \dots, i) \quad \text{et} \quad (4.46)$$

$$\mu s_i(1, \dots, i) = \{\mu(1), \dots, \mu(i-1), \mu(i+1)\}. \quad (4.47)$$

Par ailleurs comme  $\tilde{\mu} <_k \mu$ , on a  $\tilde{\mu}(j) \leq \mu(j)$  pour tout  $j \leq k$  et donc  $\tilde{\mu} s_i(1, \dots, i) \not\prec \sigma(1, \dots, i)$ .

A partir de ce résultat, on prouve que pour toute transposition  $\tau$  de  $w$ , on a  $\sigma \tau(i) > \sigma \tau(i+1)$ . On sait que  $\sigma(i) > \sigma(i+1)$  et  $i < k$ , le seul cas à considérer est donc celui où  $\tau = (i+1, b)$ . On veut prouver que  $\sigma(b) < \sigma(i)$ . On suppose qu'une telle transposition appartient à  $w$  et qu'elle relie une permutation  $\nu$  à une permutation  $\nu'$ . La permutation  $\nu'$  est dans la chaîne donnée par  $w$  entre  $\sigma$  et  $\mu$ , par le résultat précédent, on a donc  $\nu' s_i \not\prec \sigma$  et plus précisément  $\{\nu'(1), \dots, \nu'(i-1), \nu'(i+1)\} \not\prec \{\sigma(1), \dots, \sigma(i)\}$ . Comme  $\nu' >_k \sigma$ , on a que  $\nu'(j) \geq \sigma(j)$  pour  $j \leq i-1$ . Nécessairement,  $\nu'(i+1) < \sigma(i)$  pour avoir  $\nu' s_i \not\prec \sigma$ . Cela nous donne que  $\nu(b) < \sigma(i)$  car  $\nu(b) = \nu'(i+1)$ .

Supposons à présent que  $\sigma(b) > \sigma(i)$ . Cela signifie que la valeur en  $b$  a été modifiée par  $w$  car on a vu que  $\nu(b) < \sigma(i)$ . Il existe donc une transposition  $(c, b) \prec \tau$  dans  $w$  telle que  $\sigma(c) < \sigma(i) < \sigma(b)$ . Pour que  $(c, b)$  soit une transposition de Bruhat, il faut  $c > i$ . Cependant, on a  $(c, b) \prec \tau = (i+1, b)$  et donc  $c < i+1$  (par le lemme 4.2.6). On arrive à une contradiction et donc  $\sigma(b) < \sigma(i)$ .

De cette propriété, on déduit facilement que pour chaque transposition  $\tau$  de  $w$ , la transposition  $s_i \tau s_i$  est une transposition de Bruhat pour  $\sigma s_i$ . Et donc,  $(s_i \tau_{i_1} s_i) \dots (s_i \tau_{i_r} s_i)$  est un sous-mot de  $W_{\sigma s_i, k}$ . Par ailleurs, ce sous-mot est valide car si  $\nu$  et  $\nu' = \nu \tau$  sont deux permutations de la chaîne, alors  $\nu'(i+1) < \nu(i)$  ce qui fait que  $s_i \tau s_i$  est une transposition de Bruhat pour  $\nu s_i$ .  $\square$

*Démonstration du lemme 4.2.14.* On utilise la proposition 4.1.3 qui est vraie pour  $\mathfrak{E}_{\sigma,k}$  par l'hypothèse de récurrence. On montre que si  $\mu \in \mathfrak{E}_{\sigma,k}$  avec  $\mu s_i > \sigma$ , il n'existe pas de permutation  $\sigma' \in \text{Succs}_{\sigma}^{-k}$  telle que  $\sigma' \leq \mu s_i$ . Cela signifie que  $\mu s_i \in \mathfrak{E}_{\sigma,k}$ . La propriété est triviale pour  $\mu > \mu s_i$ , on se place donc dans le cas inverse  $\mu < \mu s_i$ .

Supposons alors qu'il existe  $\sigma' = \sigma\tau$  un successeur de  $\sigma$  tel que  $\tau = (a, b)$  ne soit pas une  $k$ -transposition et tel que  $\sigma' \leq \mu s_i$ . Comme précédemment, on suppose  $i < k$ . Tout d'abord, on a nécessairement  $a \leq i < b$ . En effet, on sait que  $\mu s_i \geq \sigma'$  et que  $\mu \not\geq \sigma'$ , or le seul facteur gauche qui diffère entre  $\mu$  et  $\mu s_i$  est celui de taille  $i$ . On en déduit que  $\mu(1, \dots, i) \not\geq \sigma'(1, \dots, i)$ . Or  $\mu(1, \dots, i) \geq \sigma(1, \dots, i)$  donc  $\sigma(1, \dots, i) \neq \sigma'(1, \dots, i)$ .

À présent, montrons

$$\forall j < b, (\sigma(j) < \sigma(b) \Leftrightarrow \mu(j) < \sigma(b)). \quad (4.48)$$

Comme on a  $\mu(j) \geq \sigma(j)$  pour  $j \leq k$ , l'implication de droite à gauche est claire. Supposons à présent qu'il existe  $c < b$  avec  $\sigma(c) < \sigma(b)$  et  $\mu(c) \geq \sigma(b)$ . Cela signifie qu'on a appliqué une transposition  $(c, d)$  avec  $c < b < d$  et  $\sigma(c) < \sigma(b) < \sigma(d)$  ce qui n'est pas possible.

Par ailleurs, on prouve aussi

$$\forall j \leq a, (\mu(j) < \sigma(b) \Leftrightarrow \mu s_i(j) < \sigma(b)). \quad (4.49)$$

Pour  $a < i$ , on a  $\mu(1, \dots, j) = \mu s_i(1, \dots, j)$  et donc (4.49) est vraie. Il reste à considérer  $a = i$ , dans ce cas  $\sigma(i) = \sigma(a) < \sigma(b)$  et donc  $\mu(i) < \sigma(b)$  par (4.48). De même, comme  $\sigma(i+1) < \sigma(i) < \sigma(b)$  on a aussi  $\mu s_i(i) = \mu(i+1) < \sigma(b)$  par (4.48). En effet, comme  $a = i$  et  $(a, b) \neq s_i$  alors  $i+1 < b$ .

À présent par (4.48) et (4.49), on a

$$\#\{j \leq a ; \mu s_i(j) < \sigma(b)\} = \#\{j \leq a ; \sigma(j) < \sigma(b)\} \quad (4.50)$$

$$= \#\{j \leq a ; \sigma'(j) < \sigma(b)\} + 1, \quad (4.51)$$

ce qui contredit le fait  $\mu s_i \geq \sigma'$ .  $\square$

*Démonstration de la proposition 4.2.11.* Une conséquence du lemme 4.2.13 est que

$$\mathfrak{E}_{\sigma s_i, k} = \left( \sum_{\substack{\mu \in \mathfrak{E}_{\sigma, k} \\ \mu s_i \not\geq \sigma}} (-1)^{\ell(\mu) - \ell(\sigma)} K_{\mu} \right) \pi_i. \quad (4.52)$$

En effet, pour tous les éléments  $K_{\mu}$  de la somme ci-dessus, on a  $K_{\mu} \pi_i = K_{\mu s_i}$  car  $\mu s_i \not\geq \sigma$  implique  $\mu s_i < \mu$ . L'implication (1) du lemme 4.2.13 nous dit que les  $K_{\mu s_i}$  sont bien dans la somme  $\mathfrak{E}_{\sigma s_i, k}$  et l'implication (2) nous dit qu'elle ne contient pas d'autres éléments. À présent,

$$\mathfrak{E}_{\sigma,k}\pi_i = \mathfrak{E}_{\sigma s_i,k} + \sum_{\substack{\mu \in \mathfrak{E}_{\sigma,k} \\ \mu s_i > \sigma}} (-1)^{\ell(\mu) - \ell(\sigma)} K_\mu \pi_i. \quad (4.53)$$

Par le lemme 4.2.14, la seconde partie de la somme est égale à 0. En effet, chaque élément  $K_\mu$  est couplé à un élément  $K_{\mu s_i}$  qui apparaît lui aussi dans la somme avec un signe opposé. Pour chaque couple, on a alors  $(K_\mu - K_{\mu s_i})\pi_i = 0$  par définition de l'opérateur  $\pi_i$ .  $\square$

Pour illustrer cette preuve, on peut dessiner l'exemple suivant (figure 4.2). Chaque élément de  $\mathfrak{E}_{\sigma,k}$  (sur la gauche) est couplé par  $s_i$  soit avec un élément de  $\mathfrak{E}_{\sigma s_i,k}$  (sur la droite), soit avec un autre élément de  $\mathfrak{E}_{\sigma,k}$ .

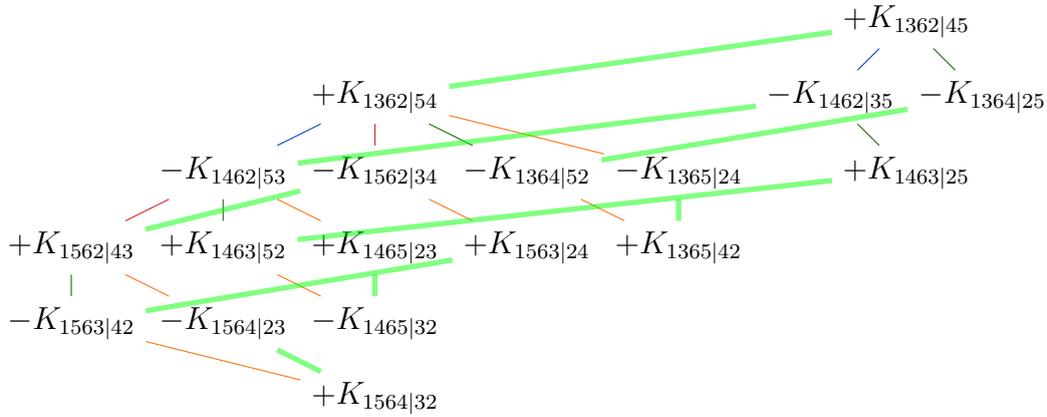


FIGURE 4.2 – Illustration du calcul  $\mathfrak{E}_{1362|54}\pi_4 = \mathfrak{E}_{1362|45}$

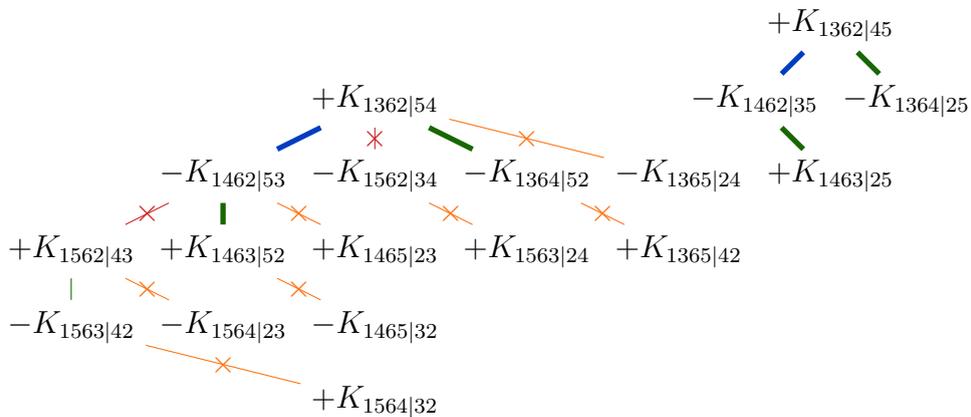


FIGURE 4.3 – Branches "coupées" dans  $\mathfrak{E}_{1362|54}\pi_4 = \mathfrak{E}_{1362|45}$

Par ailleurs  $\mathfrak{E}_{\sigma s_i,k}$  est en fait un sous-arbre de  $\mathfrak{E}_{\sigma,k}$  après conjugaison des transpositions. Les transpositions de  $W_{\sigma,k} = (\tau_1, \dots, \tau_m)$  forment les branches de l'arbre.

Le lemme 4.2.13 nous dit que  $W_{\sigma s_i, k}$  est un sous-mot conjugué de  $W_{\sigma, k}$  : seules les transpositions  $\tau$  telles que  $s_i \tau s_i$  soit toujours une transposition de Bruhat pour  $\sigma s_i$  sont conservées. Cela revient à "couper" les branches de  $\mathfrak{E}_{\sigma, k}$  qui correspondent à des transpositions non conservées (cf. figure 4.3).

## 4.3 Structure d'intervalle

Nous savons par le corollaire 4.1.4 que l'ensemble  $\mathfrak{E}_{\sigma, k}$  est clos par intervalle. Pour prouver le théorème 4.0.4, il faut prouver que  $\mathfrak{E}_{\sigma, k}$  possède un unique élément maximal. La suite de transpositions  $W_{\sigma, k}$  est toujours un chemin valide à partir de  $\sigma$  dans l'ordre de Bruhat. Et donc, l'élément maximal de  $\mathfrak{E}_{\sigma, k}$  ne peut être que la permutation  $\sigma W_{\sigma, k}$ , c'est-à-dire la permutation où l'on a appliqué toutes les transpositions. C'est la seule permutation de longueur maximale  $\ell(\sigma) + |W_{\sigma, k}|$ . La démonstration du théorème 4.0.4 sera donc achevée par la preuve du lemme suivant.

**Lemme 4.3.1.**

$$\forall \mu \in \mathfrak{E}_{\sigma, k}, \quad \mu \leq \eta(\sigma, k) \quad (4.54)$$

où  $\eta(\sigma, k) = \sigma W_{\sigma, k}$ .

Nous prouvons ce lemme paragraphe 4.3.2. Nous avons d'abord besoin d'étudier plus précisément la structure de l'ensemble  $\mathfrak{E}_{\sigma, k}$ .

### 4.3.1 Sous-mots compatibles

**Définition 4.3.2.** On dit qu'un sous-mot  $w$  de  $W_{\sigma, k}$  n'est pas compatible si :

1.  $w$  contient le sous-mot  $(a, c)(b, d)$  avec  $a < b < c < d$ ,
2.  $(a, d) \in W_{\sigma, k}$  et  $(a, d) \notin w$ .

Sinon,  $w$  est dit compatible.

Par exemple, pour  $W_{1372|654} = ((2, 7), (2, 6), (2, 5), (4, 7), (4, 6), (4, 5))$ , le mot  $w = ((2, 6), (2, 5), (4, 7))$  n'est pas compatible. En effet, il contient le sous-mot  $(2, 6)(4, 7)$  mais pas la transposition  $(2, 7) \in W_{\sigma, k}$ . Notons que si  $W_{\sigma, k}$  contient 3 transpositions  $(a, d)$ ,  $(a, c)$  et  $(b, d)$  elles seront toujours dans l'ordre  $(a, d) \prec (a, c) \prec (b, d)$ .

Nous donnons à présent la proposition clé dans la preuve du théorème 4.0.4. Elle permet d'énumérer les permutations de  $\mathfrak{E}_{\sigma, k}$  directement à partir de  $W_{\sigma, k}$  sans tester la compatibilité avec l'ordre de Bruhat.

**Proposition 4.3.3.** Si  $w$  est un sous-mot de  $W_{\sigma, k}$  alors  $w$  est un sous-mot valide (c'est-à-dire  $\sigma w \in \mathfrak{E}_{\sigma, k}$ ) si et seulement si  $w$  est compatible au sens de la définition 4.3.2.

La démonstration de cette proposition utilise des propriétés déjà démontrées de  $\mathfrak{E}_{\sigma,k}$ . Nous nous servons en particulier de la caractérisation de l'ordre de  $k$ -Bruhat donnée dans le théorème 4.2.3 ainsi que du lemme 4.2.8 sur la conservation de l'ordre des valeurs dans  $\mathfrak{E}_{\sigma,k}$ .

*Démonstration.* Prouvons d'abord que si  $w = \tau_{i_1} \dots \tau_{i_r}$  est sous-mot non valide de  $W_{\sigma,k}$  alors  $w$  est aussi non compatible. Soit  $w_1$  le facteur gauche de  $w$  de longueur maximale tel que  $w_1$  soit un sous-mot valide. Alors  $w = w_1 \tau w'_1$  avec  $\tau = (b, d) \in W_{\sigma,k}$  une transposition qui n'est pas de Bruhat pour  $\sigma w_1$ . Le lemme 4.2.8 nous donne que  $\sigma w_1(b) < \sigma w_1(d)$ . Alors, il existe  $c$  tel que  $b < c < d$  et

$$\begin{array}{ccc} \sigma w_1(b) & < & \sigma w_1(c) & < & \sigma w_1(d) \\ & \text{|\vee} & & & \text{|\wedge} \\ & \sigma(b) & & & \sigma(d) \end{array} \quad (4.55)$$

Tout d'abord, utilisons la caractérisation de l'ordre de  $k$ -Bruhat du théorème 4.2.3 pour prouver que  $c > k$ . On sait que  $\tau$  est une transposition de Bruhat pour  $\sigma$ . Cela signifie que  $\sigma(c) < \sigma(b)$  ou bien  $\sigma(c) > \sigma(d)$ . Dans le premier cas, on lit sur (4.55) que  $\sigma(c) < \sigma w_1(c)$  ce qui par  $k$ -Bruhat nous donne  $c \leq k$ . Dans ce cas, comme  $\sigma(c) < \sigma(b)$ , toute transposition  $(c, *)$  est supérieure à  $\tau = (b, d)$  et donc  $\sigma w_1(c) = \sigma(c)$  ce qui n'est pas possible. On a donc  $\sigma(c) > \sigma(d) \geq \sigma w_1(d) > \sigma w_1(c)$  ce qui implique  $c > k$ .

Soit  $(a, c)$  la dernière transposition à agir sur la position  $c$ . On sait que  $(a, c)$  existe car  $\sigma(c) \neq \sigma w_1(c)$ . On a  $w_1 = w_2(a, c)w'_2$ . Par ailleurs comme  $\sigma(c) > \sigma(d)$  et  $(a, c) \prec (b, d)$  alors  $a \neq b$  et on a

$$\begin{array}{ccccc} \sigma w_2(d) & > & \sigma w_2(a) & > & \sigma w_2(b) \\ & \text{|\wedge} & \text{|\vee} & & \parallel \\ & \sigma(d) & \sigma(a) & & \sigma(b) \end{array} \quad (4.56)$$

Les relations verticales viennent de l'ordre de  $k$ -Bruhat entre  $\sigma$  et  $\sigma w_2$ . Les relations horizontales découlent de (4.55). De là, nous affirmons que

$$\sigma(c) > \sigma(d) > \sigma(a) > \sigma(b) \quad \text{et} \quad (4.57)$$

$$a < b < c < d. \quad (4.58)$$

On a déjà prouvé  $\sigma(c) > \sigma(d)$  et on peut lire dans (4.56) que  $\sigma(d) > \sigma(a)$ . Par ailleurs,  $(a, c) \prec (b, d)$  nous donne  $\sigma(a) > \sigma(b)$  et donc (4.57) est vraie. Pour prouver (4.58) il suffit de montrer  $a < b$ . Comme  $(b, d)$  est une transposition de Bruhat pour  $\sigma$  alors à cause de (4.57) on ne peut pas avoir  $b < a < d$ .

Par (4.57) et (4.58), on a que  $(a, c)(b, d)$  est un sous-mot de  $w$  répondant à la condition 1 de la définition 4.3.2. À présent,  $(a, d)$  est aussi une transposition de Bruhat pour  $\sigma$ . En effet, s'il existe  $a < x < d$  tel que  $\sigma(a) < \sigma(x) < \sigma(d)$  alors soit  $x < c$  et  $(a, c)$  n'est pas une transposition de Bruhat, soit  $x > c > b$  et  $(b, d)$  n'est

pas une transposition de Bruhat. Donc  $(a, d) \in W_{\sigma, k}$  et comme  $\sigma w_2(d) > \sigma(a)$  alors  $(a, d) \notin w$  et la condition 2 de la définition 4.3.2 est aussi satisfaite. On a bien que  $w$  n'est pas un sous-mot compatible.

À présent, soit  $w$  un sous-mot non compatible de  $W_{\sigma, k}$ , on prouve que  $w$  n'est pas un sous-mot valide. Par définition,  $w$  contient au moins un sous-mot  $(a, c)(b, d)$  satisfaisant les conditions (1) et (2) de la définition 4.3.2. On choisit celui dont la transposition  $(a, c)$  est minimale. On a  $w = w_1(b, d)w'_1$ , prouvons que si  $w_1$  est un sous-mot valide alors  $(b, d)$  n'est pas une transposition de Bruhat pour  $\sigma w_1$ . On a  $(a, c) \in w_1$ , c'est-à-dire  $w_1 = w_2(a, c)w'_2$  et l'on montre

$$\begin{array}{ccccc} \sigma(b) & < & \sigma(a) & < & \sigma(d) \\ \parallel & & \wedge & & \vee \\ \sigma w_2(b) & < & \sigma w_2(a) & < & \sigma w_2(d). \end{array} \quad (4.59)$$

La relation  $\sigma(b) < \sigma(a) < \sigma(d)$  est immédiate car par définition  $a < b < d$  et  $(a, d) \prec (b, d)$ . Les relations  $\sigma(a) \leq \sigma w_2(a)$  et  $\sigma(d) \geq \sigma w_2(d)$  sont données par  $k$ -Bruhat. Par ailleurs, toute transposition agissant sur  $b$  est supérieure à  $(a, c)$  donc la valeur en position  $b$  n'a pas été modifiée. Il reste à prouver  $\sigma w_2(a) < \sigma w_2(d)$ . Toute transposition  $\tau \in w_2$  est telle que  $\tau \prec (a, d)$ . En effet, si  $(a, x) \in w$  avec  $(a, d) \prec (a, x) \prec (a, c)$  on a par le lemme 4.2.6 que  $c < x < d$  et donc  $(a, x)(b, d)$  satisfait les conditions (1) et (2) de la définition 4.3.2. On a choisi  $(a, c)$  minimale donc une telle transposition  $(a, x)$  n'existe pas. On peut alors appliquer le lemme 4.2.8 et on a  $\sigma w_2(a) < \sigma w_2(d)$ . Si on pose  $\sigma' = \sigma w_2(a, c)$  on a maintenant

$$b < c < d \text{ and } \sigma'(b) < \sigma'(c) < \sigma'(d). \quad (4.60)$$

Par le lemme 4.2.8, comme  $w'_2$  est un chemin valide dont les transpositions sont inférieures à  $(b, d)$ , cette relation est préservée. La transposition  $(b, d)$  n'est donc pas une transposition de Bruhat pour la permutation  $\sigma w_1$ .  $\square$

### 4.3.2 Preuve du résultat

La proposition 4.3.3 nous donne une caractérisation des listes de transpositions apparaissant dans  $\mathfrak{E}_{\sigma, k}$ , c'est l'outil essentiel pour démontrer le lemme 4.3.1.

*Démonstration du lemme 4.3.1.* Soit  $\mu \in \mathfrak{E}_{\sigma, k}$  tel que  $\mu \neq \eta(\sigma, k)$ . On prouve qu'il existe  $\tilde{\mu} \in \mathfrak{E}_{\sigma, k}$  tel que  $\tilde{\mu}$  soit un successeur direct de  $\mu$  pour l'ordre de Bruhat. C'est suffisant pour prouver le lemme 4.3.1 car si  $\tilde{\mu} \neq \eta(\sigma, \mu)$ , on peut à nouveau appliquer l'algorithme pour obtenir un successeur de  $\tilde{\mu}$ . A chaque étape, la longueur de la permutation augmente de 1 et donc le processus se termine au bout de  $\ell(\eta) - \ell(\mu)$  itérations.

Soit  $\mu = \sigma w$  avec  $w$  un sous-mot valide de  $W_{\sigma, k}$  et  $\mu \neq \eta$ . On définit alors la transposition  $\tau$  comme étant la première transposition de  $W_{\sigma, k}$  à ne pas apparaître dans  $w$ . C'est-à-dire qu'on a  $\tau \in W_{\sigma, k}$ ,  $\tau \notin w$  et  $\tau$  minimale. Cette transposition

existe toujours car  $\mu \neq \eta$  ce qui signifie que  $w \neq W_{\sigma,k}$ . Le chemin  $w$  s'écrit alors  $w = uv$  avec  $u$  un facteur gauche de  $W_{\sigma,k}$  et tel que  $\tau$  est supérieure à toutes les transpositions de  $u$  et inférieure à toutes celles de  $v$ . On pose alors  $\tilde{w} = u\tau v$ . Notons que  $u\tau$  est alors aussi un facteur gauche de  $W_{\sigma,k}$  et que  $\tilde{w}$  est un sous-mot de  $W_{\sigma,k}$ .

Prouvons à présent que  $\tilde{w}$  est un sous-mot valide de  $W_{\sigma,k}$ . On utilise pour cela la proposition 4.3.3. Supposons que  $\tilde{w}$  soit un sous-mot non compatible. On a alors que  $W_{\sigma,k}$  contient  $(a, d) \prec (a, c) \prec (b, d)$  avec  $(a, d) \notin \tilde{w}$  et  $(a, c)(b, d)$  un sous-mot de  $\tilde{w}$ . Ces conditions sont aussi vérifiées pour  $w$ . En effet, comme  $(a, d) \notin \tilde{w}$  alors nécessairement  $(a, d) \notin w$ . Par ailleurs, comme  $u\tau$  est un facteur gauche de  $W_{\sigma,k}$  et  $(a, d) \notin u\tau$ , on a  $\tau \prec (a, d) \prec (a, c) \prec (b, d)$ . Le sous-mot  $(a, c)(b, d)$  se retrouve donc aussi dans  $w$ . De là, on déduit que  $\tilde{w}$  est compatible, c'est-à-dire valide et on pose  $\tilde{\mu} = \sigma\tilde{w} \in \mathfrak{C}_{\sigma,k}$ .

Par ailleurs,  $\ell(\tilde{\mu}) = \ell(\sigma) + |\tilde{w}| = \ell(\sigma) + |w| + 1 = \ell(\mu) + 1$  et  $\tilde{\mu} = \sigma u\tau v = \sigma u v v^{-1} \tau v = \mu v^{-1} \tau v = \mu\theta$  où  $\theta$  est le conjugué d'une transposition, c'est-à-dire une transposition. De là,  $\tilde{\mu}$  est un successeur direct de  $\mu$ .  $\square$

Ci-dessous, un exemple du processus  $\mu \rightarrow \tilde{\mu}$  décrit dans la preuve appliqué à  $\mu = 1365|42 \in \mathfrak{C}_{1362|54}$  représenté en figure 4.1.

$$\mu = \mu_0 = (1362|54)(46)(45) = 1365|42 \quad (4.61)$$

$$\mu_1 := \tilde{\mu}_0 = (1362|54)(26)(46)(45) = 1465|32 \quad (4.62)$$

$$\mu_2 := \tilde{\mu}_1 = (1362|54)(26)(25)(46)(45) = 1564|32 = \eta \quad (4.63)$$

*Remarque 4.3.4.* Si  $W_{\sigma,k}$  contient le sous-mot  $(a, d)(a, c)(b, d)$  alors on peut trouver des sous-mots non compatibles. On dit alors que  $W_{\sigma,k}$  contient un *motif de conflit*. En particulier, comme on a  $\sigma(b) < \sigma(a) < \sigma(d) < \sigma(c)$ , cela implique que  $\sigma$  contient le motif de permutation  $21|43$ . Cependant, l'implication inverse n'est pas vraie. Par exemple, la permutation  $213|54$  contient le motif  $21|43$  mais comme  $(1, 5)$ ,  $(1, 4)$  et  $(2, 5)$  ne sont pas des transpositions de Bruhat,  $W_{\sigma,k}$  ne contient pas le motif de conflit.

*Remarque 4.3.5.* La proposition 4.3.3 nous donne aussi une information sur la taille de l'intervalle. Si  $W_{\sigma,k}$  est de taille  $m$  et ne contient pas de motifs de conflit, alors  $|\mathfrak{C}_{\sigma,k}| = 2^m$ . Par ailleurs, le nombre de sous-mots non compatibles liés à un trio donné  $(a, d) \prec (a, c) \prec (b, d)$  est  $2^{m-3}$ . De là, si  $W_{\sigma,k}$  ne contient qu'un seul motif de conflit, on a  $|\mathfrak{C}_{\sigma}| = 2^m - 2^{m-3}$ . Par exemple,  $|\mathfrak{C}_{1362|54}| = 2^4 - 2^1 = 14$ . De façon plus générale, on peut appliquer un algorithme d'inclusion-exclusion. Si le nombre de motifs de conflits est élevé, l'algorithme d'inclusion-exclusion peut prendre beaucoup plus de temps que le calcul direct de  $\mathfrak{C}_{\sigma,k}$ . Par exemple, la permutation  $4321|8765$  contient 36 motifs de conflits ce qui suppose de calculer des milliards d'intersections de ces motifs quand la taille de  $\mathfrak{C}_{4321|8765}$  n'est que de 6092. Mais dans les cas de permutations de grande taille avec peu de motifs de conflit, l'algorithme est efficace.

## 4.4 Quelques généralisations

### 4.4.1 Variation du paramètre $k$

Il est intéressant d'étudier la variation de la permutation  $\eta(\sigma, k)$  lorsque le paramètre  $k$  varie de 1 à  $n$ . A partir de la proposition 4.2.2, on obtient un algorithme qui retourne  $\eta(\sigma, k)$  à partir de  $\eta(\sigma, k - 1)$  et  $\sigma$ .

**Proposition 4.4.1.** *Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  et  $1 \leq k \leq n$ . Par convention, on pose  $\eta(\sigma, 0) = \eta(\sigma, n) = \sigma$ . Soient  $a_1 < a_2 < \dots < a_m < k$  les positions telles que  $(a_i, k)$  soit une transposition de Bruhat pour  $\sigma$ . Soient  $k < b_1 < b_2 < \dots < b_{m'}$  les positions telles que  $(k, b_i)$  soit une transposition de Bruhat pour  $\sigma$ . Alors  $\eta(\sigma, k) = \eta(\sigma, k - 1)\rho$  où  $\rho$  est le cycle  $(a_1, \dots, a_m, k, b_1, \dots, b_{m'})$ .*

*Démonstration.* Dans cette preuve, la liste  $W_{\sigma, k}$  est toujours donnée à commutation près. C'est-à-dire que nous n'utilisons plus systématiquement l'ordre  $\prec$  mais des extensions linéaires de l'ordre  $\triangleleft$  défini au paragraphe 4.2.2. En effet, nous avons besoin d'ordonner les transpositions  $(a, b)$  prioritairement selon  $a$  ou  $b$  selon la circonstance.

Regardons d'abord les cas extrêmes où  $k = 1$  ou  $k = n$ . Si  $k = 1$ , alors  $W_{\sigma, 1} = ((1, b_{m'}), (1, b_{m'-1}), \dots, (1, b_1))$  par définition. Le produit des transpositions est égal au cycle  $\rho = (1, b_1, \dots, b_{m'})$ . On a bien  $\eta(\sigma, 1) = \sigma W_{\sigma, 1} = \eta(\sigma, 0)\rho$ . Si  $k = n$ , alors  $W_{\sigma, n-1} = ((a_1, n), (a_2, n), \dots, (a_m, n))$  et  $W_{\sigma, n-1}^{-1}$  est égal au cycle  $\rho = (a_1, \dots, a_m, n)$ . On a bien  $\eta(\sigma, n) = \sigma = \sigma W_{\sigma, n-1} W_{\sigma, n-1}^{-1} = \eta(\sigma, n-1)\rho$ .

À présent, dans le cas où  $1 < k < n$ , alors  $W_{\sigma, k-1}$  et  $W_{\sigma, k}$  comporte un facteur commun de transpositions qu'on note  $w$ . Ce sont les transpositions qui n'agissent pas sur  $k$ . On peut alors écrire  $W_{\sigma, k-1} = w(a_1, k) \dots (a_m, k)$  et  $W_{\sigma, k} = w(k, b_{m'}) \dots (k, b_1)$ . Ce qui donne,  $W_{\sigma, k} = W_{\sigma, k-1}(a_m, k)(a_{m-1}, k) \dots (a_1, k)(k, b_{m'})(k, b_{m'-1}) \dots (k, b_1) = W_{\sigma, k-1}\rho$ .  $\square$

Nous donnons un exemple de cet algorithme appliqué à la permutation  $\sigma = 1362547$  figure 4.4. A chaque étape,  $k \rightarrow k+1$  on obtient un cycle qui envoie  $\eta(\sigma, k)$  vers  $\eta(\sigma, k+1)$ . En faisant varier  $k$  de 0 à  $n$ , on associe donc à la permutation  $\sigma$  une décomposition de l'identité en un produit de  $n$  cycles. Nous n'avons pas trouvé d'autres exemples où cette décomposition apparaît mais il nous a paru intéressant de la signaler. On trouvera en figure 4.5 la décomposition de l'unité en produit de cycles associées aux permutations de taille 3 et 4.

La décomposition associée à une permutation  $\sigma$ , notée  $c(\sigma)$ , dépend de ses transpositions de Bruhat, c'est-à-dire de ses successeurs. Chaque transposition  $(a, b)$  est utilisée deux fois : quand  $k = a$  et quand  $k = b$ . Si  $c(\sigma) = (c_1, \dots, c_n)$  où  $c_1, \dots, c_n$  sont des cycles, on a  $|c_1| + \dots + |c_n| = 2 \times |\text{Succs}(\sigma)| + k$  où  $|\text{Succs}(\sigma)|$  est le nombre de successeurs de  $\sigma$ . Par ailleurs, les cycles vérifient une certaine symétrie : si  $i$  apparaît dans le cycle  $c_j$  alors  $j$  apparaît dans le cycle  $c_i$ . Et par construction, on a toujours  $i \in c_i$ . Enfin, si  $(i, j)$  est une transposition de Bruhat pour  $\sigma$  alors  $(\sigma_i, \sigma_j)$  l'est pour  $\sigma^{-1}$ . De là si pour  $\sigma$  on a  $c_i = (a_1, \dots, a_m)$  alors pour  $\sigma^{-1}$  le cycle  $c_{\sigma_i}$  sera composé des valeurs  $\sigma(a_1), \dots, \sigma(a_m)$  réordonnées.

$k$	Permutation	cycle vers $k + 1$
0	1362547	(1, 2, 4)
1	3261547	(1, 2, 3, 5, 6)
2	2651437	(2, 3, 7)
3	2571436	(1, 4, 5, 6)
4	1574326	(2, 4, 5, 7)
5	1473625	(2, 4, 6, 7)
6	1372654	(3, 5, 6, 7)
7	1362547	

FIGURE 4.4 – Exemple de l’algorithme de variation de  $k$  pour 1362547, en appliquant le cycle sur la droite de la permutation ligne  $k$ , on obtient celle de la ligne  $k + 1$ .

123	(1, 2)(1, 2, 3)(2, 3)	3124	(1, 4)(2, 3)(2, 3, 4)(1, 3, 4)
132	(1, 2, 3)(1, 2)(1, 3)	3142	(1, 3)(2, 3, 4)(1, 2, 3)(2, 4)
213	(1, 3)(2, 3)(1, 2, 3)	3214	(1, 4)(2, 4)(3, 4)(1, 2, 3, 4)
231	(1, 2)(1, 2)(3)	3241	(1, 3)(2, 3)(1, 2, 3)(4)
312	(1)(2, 3)(2, 3)	3412	(1, 2)(1, 2)(3, 4)(3, 4)
321	(1)(2)(3)	3421	(1, 2)(1, 2)(3)(4)
1234	(1, 2)(1, 2, 3)(2, 3, 4)(3, 4)	4123	(1)(2, 3)(2, 3, 4)(3, 4)
1243	(1, 2)(1, 2, 3, 4)(2, 3)(2, 4)	4132	(1)(2, 3, 4)(2, 3)(2, 4)
1324	(1, 2, 3)(1, 2, 4)(1, 3, 4)(2, 3, 4)	4213	(1)(2, 4)(3, 4)(2, 3, 4)
1342	(1, 2, 4)(1, 2, 3)(2, 3)(1, 4)	4231	(1)(2, 3)(2, 3)(4)
1423	(1, 2, 3)(1, 2)(1, 3, 4)(3, 4)	4312	(1)(2)(3, 4)(3, 4)
1432	(1, 2, 3, 4)(1, 2)(1, 3)(1, 4)	4321	(1)(2)(3)(4)
2134	(1, 3)(2, 3)(1, 2, 3, 4)(3, 4)		
2143	(1, 3, 4)(2, 3, 4)(1, 2, 3)(1, 2, 4)		
2314	(1, 2)(1, 2, 4)(3, 4)(2, 3, 4)		
2341	(1, 2)(1, 2, 3)(2, 3)(4)		
2413	(1, 2, 4)(1, 2)(3, 4)(1, 3, 4)		
2431	(1, 2, 3)(1, 2)(1, 3)(4)		

FIGURE 4.5 – Décomposition de l’identité en produits de cycles pour les permutations de tailles 3 et 4

#### 4.4.2 Autres sous-groupes paraboliques

Un *sous-groupe parabolique* d’un groupe de Coxeter  $G$  est un sous-groupe de  $G$  engendré par un ensemble restreint des générateurs de  $G$ . Lorsque l’on calcule  $\mathfrak{E}_{\zeta, k} \pi_{\zeta^{-1}\sigma}$ , on applique des opérateurs  $\pi_i$  tels que  $i \neq k$ . Le produit  $\pi_{\zeta^{-1}\sigma}$  est un élément du sous-groupe parabolique de l’algèbre de 0-Hecke engendré par  $\{\pi_1, \dots, \pi_{k-1}, \pi_{k+1}, \dots, \pi_n\}$ . On peut généraliser ce calcul aux sous-groupes

paraboliques où il manque plus d'un seul générateur.

**Définition 4.4.2.** Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  et  $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m < n$ . Par convention, on posera  $k_0 = 0$ . On définit le bloc  $\beta_i(\sigma)$  pour  $0 < i \leq m$  comme étant le mot  $[\sigma(k_{i-1} + 1), \sigma(k_{i-1} + 2), \dots, \sigma(n)]$  et  $\mathcal{W}_i$  est la liste de transpositions

$$\begin{aligned} & ((k_{i-1} + 1, n), (k_{i-1} + 1, n - 1), \dots, (k_{i-1} + 1, k_i + 1), \\ & (k_{i-1} + 2, n), (k_{i-1} + 2, n - 1), \dots, (k_{i-1} + 2, k_i + 1), \\ & \dots, \\ & (k_i, n), (k_i, n - 1), \dots, (k_i, k_i + 1)). \end{aligned} \quad (4.64)$$

La liste  $\mathcal{W}_{(k_1, \dots, k_m)}$  est la concaténation des listes  $\mathcal{W}_i$  pour  $m \geq i \geq 1$ , c'est-à-dire  $\mathcal{W}_{(k_1, \dots, k_m)} := (\mathcal{W}_m, \dots, \mathcal{W}_1)$ .

Par exemple, si  $\sigma = 43283657$  et  $k_1 = 2, k_2 = 3, k_3 = 6$  (ce qu'on notera  $\sigma = 43|2|836|57$ ), alors  $\beta_1 = 43|283657, \beta_2 = 2|83657, \beta_3 = 836|57$  et  $\mathcal{W}_3 = ((4, 8), (4, 7), (5, 8), (5, 7), (6, 8), (6, 7)), \mathcal{W}_2 = ((3, 8), (3, 7), (3, 6), (3, 5), (3, 4)), \mathcal{W}_1 = ((1, 8), (1, 7), (1, 6), (1, 5), (1, 4), (1, 3), (2, 8), (2, 7), (2, 6), (2, 5), (2, 4), (2, 3))$ .

**Proposition 4.4.3.** Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  et  $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m < n$ . Soit  $\zeta = \zeta(\sigma, k_1, \dots, k_m)$  l'élément maximal du coset  $\sigma(\mathfrak{S}_{k_1} \times \mathfrak{S}_{k_2 - k_1} \times \mathfrak{S}_{k_3 - k_2} \times \dots \times \mathfrak{S}_{n - k_m})$ . Alors

$$K_\omega \hat{\pi}_\omega \zeta \pi_{\zeta^{-1}\sigma} = \mathfrak{E}_{\sigma, (k_1, \dots, k_m)} \quad (4.65)$$

où

$$\mathfrak{E}_{\sigma, (k_1, \dots, k_m)} = \sum_w (-1)^{|w|} K_{\sigma w} \quad (4.66)$$

sommé sur les sous-mots  $w$  de la liste  $\mathcal{W}_{(k_1, \dots, k_m)}$  qui correspondent à des chemins dans l'ordre de Bruhat à partir de  $\sigma$ .

Par ailleurs, la somme n'a pas d'annulations, les coefficients sont  $\pm 1$  et l'ensemble de sommation est clos par intervalle.

Remarquons que dans le cas général, la liste  $\mathcal{W}_{(k_1, \dots, k_m)}$  ne dépend pas de la permutation  $\sigma$ . Quand  $m = 1$ , la liste  $\mathcal{W}_k$  correspond à la liste de  $k$ -transposition donnée dans le théorème 4.0.3 de Lenart et Postnikov à commutations près (on utilise une autre extension linéaire de  $\triangleleft$ ). On a vu dans le lemme 4.2.9 que cette liste pouvait être réduite à  $W_{\sigma, k}$ . C'est grâce à cette réduction que l'on obtient les caractéristiques très particulières de  $\mathfrak{E}_{\sigma, k}$  qui nous ont permis de prouver le théorème 4.0.4. Dans le cas général, une telle réduction n'est pas possible. L'ensemble de sommation, bien que clos par intervalle, ne comporte pas un unique élément maximal. Par exemple, pour  $\sigma = 25|14|63$ , l'ensemble  $\mathfrak{E}_{25|14|63}$  comporte deux éléments de longueur maximale :  $362541 = 251463(3, 6)(4, 5)(1, 3)(2, 4)$  et  $461532 = 251463(4, 5)(1, 6)(1, 5)(2, 4)$ .

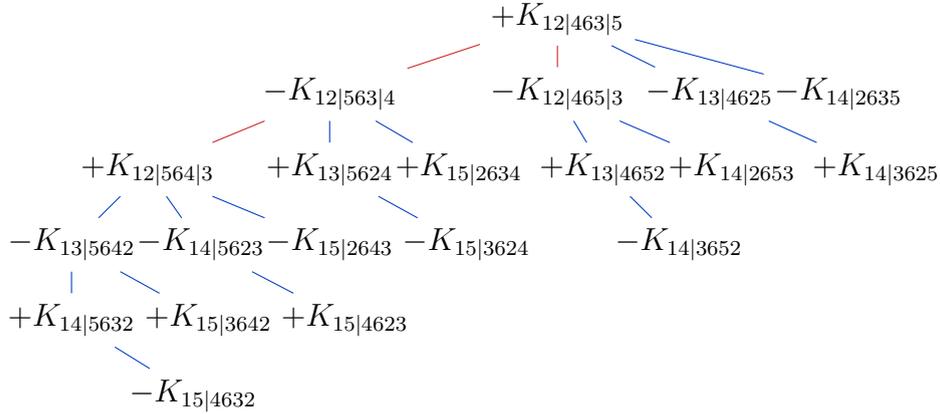


FIGURE 4.6 – L’ensemble  $\mathfrak{E}_{12|463|5}$ , le calcul en rouge correspond à l’application des sous mots de  $\mathcal{W}_2$  sur le bloc  $\beta_2 = 463|5$ . Sur chaque élément, on applique ensuite (en bleu) les sous-mots de  $\mathcal{W}_1$ .

Prouvons d’abord la deuxième partie de la proposition, c’est-à-dire que la somme est sans annulation, avec des coefficients  $\pm 1$  et sur un ensemble clos par intervalle. On énonce pour cela une généralisation de la proposition 4.1.3.

**Proposition 4.4.4.** *Soit  $\text{Succs}_\sigma^{-(k_1, \dots, k_m)}$  l’ensemble des successeurs  $\sigma' = \sigma\tau$  de  $\sigma$  tels que  $\tau$  ne soit pas une  $k_i$ -transpositions pour  $1 \leq i \leq m$ . On a alors*

$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} \pi_{\zeta^{-1}\sigma} = \sum (-1)^{\ell(\nu) - \ell(\sigma)} K_\nu \tag{4.67}$$

sommé sur les permutations  $\nu$  telle que  $\nu \geq \sigma$  et  $\forall \sigma' \in \text{Succs}_\sigma^{-(k_1, \dots, k_m)}$ ,  $\nu \not\geq \sigma'$ .

En particulier, l’ensemble de sommation est clos par intervalle.

*Démonstration.* De façon similaire au cas  $m = 1$ , on obtient que

$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} \pi_{\zeta^{-1}\sigma} = \sum_{\zeta \geq \mu \geq \sigma} \hat{K}_\mu. \tag{4.68}$$

La preuve est similaire à celle de la proposition 4.1.1. Il suffit de remarquer que  $[\sigma, \zeta]$  est inclus dans le coset  $\sigma(\mathfrak{S}_{k_1} \times \mathfrak{S}_{k_2-k_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{n-k_m})$  et que le calcul peut donc s’effectuer dans l’espace vectoriel engendré par  $(K_\mu)_{\mu \in \mathfrak{S}_{k_1}} \otimes (K_\mu)_{\mu \in \mathfrak{S}_{k_2-k_1}} \otimes \dots \otimes (K_\mu)_{\mu \in \mathfrak{S}_{n-k_m}}$ . Par un changement de base, on obtient alors le résultat voulu avec un argument similaire à celui de la proposition 4.1.3. On utilise cette fois le lemme généralisé 2.3.13 sur l’intersection d’un coset et d’un intervalle.  $\square$

*Démonstration de la proposition 4.4.3.* La preuve se fait par récurrence sur  $m$ . Le cas  $m = 1$  correspond à la proposition 4.2.2. À présent, soit  $\zeta'$  l’élément maximal de  $\sigma(\mathfrak{S}_{k_1} \times \mathfrak{S}_{k_2-k_1} \times \dots \times \mathfrak{S}_{n-k_{m-1}})$ . Les coinversions de  $\zeta'$  contiennent les coinversions de  $\zeta$  et donc  $\zeta' \geq \zeta$  pour l’ordre faible droit. Cela signifie qu’une décomposition réduite de  $\omega\zeta'$  est un préfixe d’une décomposition réduite de  $\omega\zeta$  et on a

$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} \pi_{\zeta^{-1}\sigma} = K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta'} \hat{\pi}_{\zeta'-1\zeta} \pi_{\zeta^{-1}\sigma}. \quad (4.69)$$

Tous les opérateurs  $\hat{\pi}_i$  dans  $\hat{\pi}_{\zeta'-1\zeta}$  sont tels que  $i > k_{m-1}$ . Par ailleurs, il n'y a pas d'opérateur  $\pi_{k_{m-1}}$  dans le produit  $\pi_{\zeta^{-1}\sigma}$  et donc les opérateurs  $\pi_i$  avec  $i < k_{m-1}$  commutent avec les opérateurs  $\pi_i$  avec  $i > k_{m-1}$  ainsi qu'avec les opérateurs  $\hat{\pi}_{\zeta'-1\zeta}$ . On peut donc écrire

$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} \pi_{\zeta^{-1}\sigma} = (K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta'} \pi_{\zeta^{-1}\sigma}^{(<k_{m-1})}) (\hat{\pi}_{\zeta'-1\zeta} \pi_{\zeta^{-1}\sigma}^{(>k_{m-1})}). \quad (4.70)$$

Soit  $\tilde{\sigma}$  la permutation donnée par  $[\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(k_{m-1}), \zeta'(k_{m-1}+1), \zeta'(k_{m-1}+2), \dots, \zeta'(n)]$ . On a alors  $\pi_{\zeta^{-1}\sigma}^{(<k_{m-1})} = \pi_{\zeta'-1\tilde{\sigma}}$ . Par ailleurs, le produit  $(\hat{\pi}_{\zeta'-1\zeta} \pi_{\zeta^{-1}\sigma}^{(>k_{m-1})})$  agit seulement sur le bloc  $\beta_m(\sigma)$ . On peut ignorer le facteur gauche de taille  $k_{m-1}$  de  $\sigma$  pour utiliser la proposition 4.2.2. On a alors

$$K_{\tilde{\sigma}} \hat{\pi}_{\zeta'-1\zeta} \pi_{\zeta^{-1}\sigma}^{(>k_{m-1})} = \sum_u (-1)^{|u|} K_{\sigma u} \quad (4.71)$$

sommé sur les sous-mots  $u$  de  $\mathcal{W}_m$  valides en partant de  $\sigma$ . Si l'on exprime ce résultat en termes d'opérateurs, cela donne

$$\hat{\pi}_{\zeta'-1\zeta} \pi_{\zeta^{-1}\sigma}^{(>k_{m-1})} = \sum_u (-1)^{|u|} \pi_{\tilde{\sigma}^{-1}\sigma u}. \quad (4.72)$$

C'est une somme sur les chemins entre  $\tilde{\sigma}$  (qui sur le bloc  $\beta_m$  correspond à la permutation maximale) et les permutations  $\sigma u$ . On a donc

$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} \pi_{\zeta^{-1}\sigma} = \sum_u (-1)^{|u|} K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta'} \pi_{\zeta'-1\tilde{\sigma}} \pi_{\tilde{\sigma}^{-1}\sigma u} \quad (4.73)$$

sommé sur les sous-mots valides de  $\mathcal{W}_m$ . Comme  $\pi_{\zeta'-1\tilde{\sigma}}$  et  $\pi_{\tilde{\sigma}^{-1}\sigma u}$  contiennent seulement des opérateurs  $\pi_i$  avec respectivement  $i < k_{m-1}$  et  $i > k_{m-1}$ , leur produit est toujours un produit réduit et donc

$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} \pi_{\zeta^{-1}\sigma} = \sum_u (-1)^{|u|} K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta'} \pi_{\zeta'-1\sigma u}. \quad (4.74)$$

ce qui donne (4.65) par récurrence.  $\square$

Par exemple, voyons le calcul détaillé pour  $\sigma = 12|463|5$  ( $k_1 = 2, k_2 = 5$ ). On a  $\zeta = 21|643|5$  et  $\zeta' = 21|6543$ . Le résultat est illustré figure 4.6.

$$K_\omega \hat{\pi}_{\omega\zeta} \pi_{\zeta^{-1}\sigma} = K_{654321} \hat{\pi}_4 \hat{\pi}_3 \hat{\pi}_2 \hat{\pi}_1 \hat{\pi}_5 \hat{\pi}_4 \hat{\pi}_3 \hat{\pi}_2 \hat{\pi}_4 \hat{\pi}_5 \pi_1 \pi_3 \quad (4.75)$$

$$= (K_{654321} \hat{\pi}_4 \hat{\pi}_3 \hat{\pi}_2 \hat{\pi}_1 \hat{\pi}_5 \hat{\pi}_4 \hat{\pi}_3 \hat{\pi}_2 \pi_1) (\hat{\pi}_4 \hat{\pi}_5 \pi_3) \quad (4.76)$$

$$= \hat{K}_{216543} \pi_1 (\pi_4 \pi_5 \pi_3 - \pi_4 \pi_3 - \pi_5 \pi_3 + \pi_3) \quad (4.77)$$

$$= \mathfrak{E}_{12|4635} - \mathfrak{E}_{12|4653} - \mathfrak{E}_{12|5634} + \mathfrak{E}_{12|5643} \quad (4.78)$$

---

Nous ne connaissons pas d'interprétations géométriques de ce calcul en termes de produit de polynômes. Cependant, le résultat est intéressant en tant que tel soit comme un développement dans l'algèbre 0-Hecke soit comme application de ces opérateurs sur les polynômes clés ou les polynômes de Grothendieck.

